

Klasická elektrodynamika

Michal Grňo

19. dubna 2020

Úloha 1

Zadání

Koule o poloměru a s celkovým nábojem Q začíná ve sféricky symetrické nábojové konfiguraci:

$$\rho(r) = Ar^6, \quad A = \text{konst.}$$

V průběhu nějakého časového úseku se ovšem všechen náboj přesune na povrch koule. Kolik energie se při tomto procesu uvolnilo?

Řešení

Nalezení konstanty

Známe celkový náboj Q a poloměr koule a , můžeme tedy určit hodnotu konstanty A :

$$Q = \iiint_{B(a)} \rho(r) \, dV = \int_0^a \rho(r) 4\pi r^2 \, dr = \int_0^a 4\pi A r^8 \, dr = 4\pi A \frac{a^9}{9}$$
$$A = \frac{9Q}{4\pi a^9}, \quad \rho(r) = \frac{9Q}{4\pi a^9} r^6$$

Potenciál v $t = 0$

Budeme chtít určit potenciál pole. V čase $t = 0$ bude uvnitř koule ($r \leq a$) platit:

$$\Delta \phi_0 = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{9Q}{4\pi \varepsilon a^9} r^6$$

Uhodneme, že řešení bude ve tvaru $Br^8 + C$:

$$\begin{aligned} \Delta(Br^8 + C) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} (Br^8 + C) \right) \\ &= 8B \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^9 = 8 \cdot 9B \frac{1}{r^2} r^8 = 72B r^6 \end{aligned}$$

$$\Delta \left(-\frac{Q}{32\pi \varepsilon a^9} r^8 + C \right) = -\frac{9Q}{4\pi \varepsilon a^9} r^6,$$

$$\phi_0(r \leq a) = -\frac{Q}{32\pi \varepsilon a^9} r^8 + C$$

Vně koule ($r \geq a$) je $\rho = 0$ a v nekonečnu se potenciál chová jako potenciál bodového náboje, tedy:

$$\phi_0(r \geq a) = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Ze spojitosti potenciálu v $r = a$ vypočteme konstantu C :

$$\begin{aligned} -\frac{Q}{32\pi \varepsilon a^9} a^8 + C &= -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{a} \\ C &= \frac{Q}{32\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 a} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 a} \left(\frac{1}{8\varepsilon_r} - 1 \right) = \frac{Q(1 - 8\varepsilon_r)}{32\pi \varepsilon a} \end{aligned}$$

Je-li materiál, z něž je koule vyrobena, velmi špatným vodičem, můžeme počítat s $\varepsilon_r \approx 1$, obecně bude ale $\varepsilon_r > 1$. Potenciál v čase $t = 0$ tedy bude:

$$\phi_0(r) = \begin{cases} r \geq a : & -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ r \leq a : & -\frac{Q}{32\pi\varepsilon a} \left(\frac{r^8}{a^8} - 1 + 8\varepsilon_r \right) \end{cases}$$

Potenciál v $t = \infty$

Nyní vyřešíme ještě případ $t \rightarrow \infty$, kdy je náboj rozmístěn na povrchu koule. Vně bude situace stejná, tedy:

$$\phi_\infty(r \geq a) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Uvnitř je z Gaussovy věty a sférické symetrie $\vec{E} = 0$, a tedy $\phi = \text{konst.}$:

$$\phi_\infty(r \leq a) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a}$$

Energie

Pro potenciální energii elektrického pole platí:

$$U_E = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\varepsilon(\vec{r})}{2} \|\vec{E}(\vec{r})\|^2 d^3\vec{r}$$

Nás zajímá rozdíl energií pro $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$. Z Gaussova zákona víme, že vně koule bude \vec{E} v obou případech stejný, a rozdíl energií tedy nulový. Pro $t \rightarrow \infty$ je uvnitř $\vec{E} = 0$, proto bude rozdíl energií:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_\infty - U_0 = -U_{0,\text{uvnitř}} = -\iiint_{B(a)} \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla\phi\|^2 d^3\vec{r} = -\iiint_{B(a)} \frac{\varepsilon}{2} \left| \frac{\partial\phi}{\partial r} \right|^2 d^3\vec{r} \\ &= -\iiint_{B(a)} \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{Q}{32\pi\varepsilon a} \frac{8r^7}{a^8} \right)^2 d^3\vec{r} = -\iiint_{B(a)} \frac{Q^2 r^{14}}{32\pi^2 \varepsilon a^{18}} d^3\vec{r} \\ &= -\int_0^a \frac{Q^2 r^{14}}{32\pi^2 \varepsilon a^{18}} 4\pi r^2 dr = -\frac{Q^2 a^{17}}{17 \cdot 8\pi \varepsilon a^{18}} = -\frac{Q^2}{136\pi \varepsilon a} \end{aligned}$$

Celková energie přeměněná na teplo je tedy $Q^2/136\pi\varepsilon a$, kde ε je permitivita materiálu, ze kterého je vyrobena koule.

Úkol 2

Zadání

Pro kterou hodnotu parametru a je pole \vec{U} axiálně symetrické podél osy z ?

$$\vec{U} = (2ax^3 - x^2y - 3xy^2 - y^3) \vec{e}_x + (x^3 + 3x^2y + 4ax^2y + xy^2 + 2ay^3) \vec{e}_y$$

Řešení

Protože má pole být axiálně symetrické, tj. invariantní při jakékoliv rotaci podél osy z , můžeme si zvolit konkrétní rotaci a zkontrolovat, za jakých podmínek invariance platí. Například můžeme pole \vec{U} rotovat o 90° proti směru hodinových ručiček. To znamená změny souřadnic a jednotkových vektorů:

$$\begin{array}{ll} x \mapsto y & \vec{e}_x \mapsto \vec{e}_y \\ y \mapsto -x & \vec{e}_y \mapsto -\vec{e}_x \end{array}$$

Otočené pole \vec{U}' je potom:

$$\vec{U}' = (2ay^3 + y^2x - 3yx^2 + x^3) \vec{e}_y - (y^3 - 3y^2x - 4ay^2x + yx^2 - 2ax^3) \vec{e}_x$$

Musí platit rovnost $\vec{U} = \vec{U}'$. Porovnáním členů (konkrétně $xy^2\vec{e}_x$) získáme nutnou podmínku:

$$-3xy^2\vec{e}_x = (3+4a)xy^2\vec{e}_x \implies a = -3/2.$$

Úkol 3

Zadání

Do homogenního pole se vzdáleností siločar a byl umístěn uzeměný válec o výšce $h = 2a$ a poloměru $R = 2a$ ve vzdálenosti $H = 4a$ od země. Kolikrát nižší by byl náboj indukovaný na elektrodě umístěné na spodní podstavě oproti elektrodě umístěné na horní podstavě? A v jakém vztahu je s intenzitou původního homogenního pole?

Řešení

Při řešení této úlohy nám bude užitečná veličina Φ – tok elektrické intenzity \vec{E} plochou S – definovaná jako:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

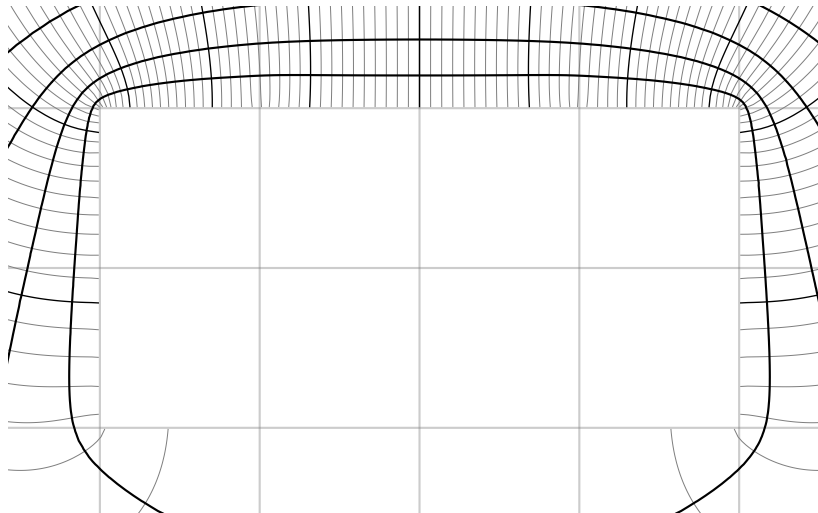
Víme, že náboj indukovaný na tělese je přímo úměrný toku elektrické intenzity jeho povrchem:

$$Q = \frac{\Phi}{\varepsilon_0}$$

Elektrody umístíme tak, že zakrývají celou podstavu, tok elektrické intenzity skrz povrch elektrody tak bude rovný toku skrz samotnou podstavu. Víme, že siločáry jsou tradičně značeny tak, aby počet siločar N protínajících nějakou plochu S byl přímo úměrný toku elektrické intenzity přes tuto plochu:

$$N = \lfloor k\Phi \rfloor, \quad k = \text{konst.}$$

Tato vlastnost platí, pokud jsou siločáry vyobrazeny v trojrozměrném prostoru. Vyobrazíme-li pouze řez úlohou, místo siločar protínajících S ve skutečnosti zobrazujeme siločáry protínající lineární element dS . V takovém případě by počet siločar odpovídal $d\Phi$ a bylo by třeba ještě zintegrovat přes plochu. U grafů axiálně symetrických řezů je ovšem zvykem přenásobit zobrazovanou veličinu faktorem πR , což efektivně odpovídá zintegrování přes půlkružnici kolem osy. V takovém případě opět platí zmíněný přepočet $N = \lfloor k\Phi \rfloor$. Budeme předpokládat, že to je i náš případ. Poměr náboje Q_h indukovaného na horní elektrodě a náboje Q_s indukovaného na spodní elektrodě vypočítáme jednoduše jako poměr počtu siločar protínajících horní a spodní podstavu.



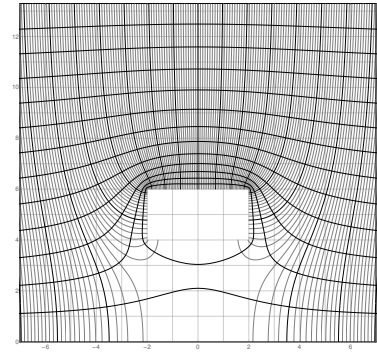
Platí:

$$\frac{Q_h}{Q_s} = \frac{\Phi_h}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_0}{\Phi_s} \approx \frac{N_h}{N_s} = \frac{74}{4} = 18.5$$

Citlivost na spodní elektrodě je tedy cca 18.5-krát nižší.

Nyní stačí vypočítat konstantu úměrnosti k mezi počtem siločar N a tokem intenzity Φ . Víme, že před umístěním válce do homogenního pole \vec{E} byly od sebe tučné siločáry (tj. každá desátá) vzdáleny a , to znamená že na plochu $S = a^2$ připadla právě jedna siločára, tedy:

$$10 = N = k\Phi = k \int_{S=a^2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = k a^2 \|\vec{E}\| \implies k = \frac{10}{a^2 \|\vec{E}\|}$$



Obrázek 1: Graf siločar ve svislém řezu procházejícím osou symetrie.

Na spodní podstavě válce končí 4 siločáry, celkový indukovaný náboj je tam tedy:

$$|Q_s| = \frac{\Phi}{\varepsilon_0} \approx \frac{N_s}{k\varepsilon_0} = \frac{4a^2}{10\varepsilon_0} \|E\|$$