Klasická elektrodynamika

Michal Grňo

19. dubna 2020

Úloha 1

Zadání

Koule o poloměru a s celkovým nábojem Q začíná ve sféricky symetrické nábojové konfiguraci:

$$\rho(r) = Ar^6, \quad A = \text{konst.}$$

V průběhu nějakého časového úseku se ovšem všechen náboj přesune na povrch koule. Kolik energie se při tomto procesu uvolnilo?

Řešení

Nalezení konstanty

Známe celkový náboj Q a poloměr koule a, můžeme tedy určit hodnotu konstanty A:

$$Q = \iiint_{\mathrm{B}(a)} \rho(r)\, \mathrm{d}V = \int_0^a \rho(r)\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r = \int_0^a 4\pi A r^8\, \mathrm{d}r = 4\pi A \frac{a^9}{9}$$

$$A = \frac{9Q}{4\pi a^9}, \quad \rho(r) = \frac{9Q}{4\pi a^9}\, r^6$$

Potenciál v $t = 0$

Budeme chtít určit potenciál pole. V čase $t = 0$ bude uvnitř koule ($r \leq a$) platit:

$$\Delta\phi_0 = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -\frac{9Q}{4\pi\varepsilon a^9}\, r^6$$

Uhodneme, že řešení bude ve tvaru $Br^8 + C$:

$$\begin{aligned}\Delta(Br^8 + C) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\,(Br^8 + C)\right) \\ &= 8\;B\;\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\,r^9 = 8 \cdot 9\;B\;\frac{1}{r^2}\,r^8 = 72\;B\;r^6\end{aligned}$$

$$\Delta\left(-\frac{Q}{32\pi\varepsilon a^9}\, r^8 + C\right) = -\frac{9Q}{4\pi\varepsilon a^9}\, r^6,$$

$$\phi_0(r \leq a) = -\frac{Q}{32\pi\varepsilon a^9}\, r^8 + C$$

Vně koule ($r \geq a$) je $\rho = 0$ a v nekonečnu se potenciál chová jako potenciál bodového náboje, tedy:

$$\phi_0(r \geq a) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Ze spojitosti potenciálu v $r = a$ vypočteme konstantu C:

$$-\frac{Q}{32\pi\varepsilon a^9}\, a^8 + C = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

$$C = \frac{Q}{32\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 a} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{1}{8\varepsilon_r} - 1\right) = \frac{Q(1 - 8\varepsilon_r)}{32\pi\varepsilon a}$$

Je-li materiál, z nějž je koule vyrobena, velmi špatným vodičem, můžeme počítat s $\varepsilon_r \approx 1$, obecně bude ale $\varepsilon_r > 1$. Potenciál v čase $t = 0$ tedy bude:

$$\phi_0(r) = \begin{cases} r \geq a: & -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ r \leq a: & -\frac{Q}{32\pi\varepsilon a}\left(\frac{r^8}{a^8} - 1 + 8\varepsilon_r\right) \end{cases}$$

Potenciál v $t = \infty$

Nyní vyřešíme ještě případ $t \to \infty$, kdy je náboj rozmístěn na povrchu koule. Vně bude situace stejná, tedy:

$$\phi_\infty(r \geq a) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

Uvnitř je z Gaussovy věty a sférické symetrie $\vec{E} = 0$, a tedy $\phi = \text{konst.}$:

$$\phi_\infty(r \leq a) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$$

Energie

Pro potenciální energii elektrického pole platí:

$$U_E = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\varepsilon(\vec{r})}{2} \left\| \vec{E}(\vec{r}) \right\|^2 \,\mathrm{d}^3\vec{r}$$

Nás zajímá rozdíl energií pro $t = 0$ a $t \to \infty$. Z Gaussova zákona víme, že vně koule bude $\vec{E}$ v obou případech stejné, a rozdíl energií tedy nulový. Pro $t \to \infty$ je uvnitř $\vec{E} = 0$, proto bude rozdíl energií:

$$\begin{aligned}\Delta U = U_\infty - U_0 = -U_{0,\text{uvnitř}} &= -\iiint_{\mathrm{B}(a)} \frac{\varepsilon}{2} \left\|\nabla\phi\right\|^2 \,\mathrm{d}^3\vec{r} = -\iiint_{\mathrm{B}(a)} \frac{\varepsilon}{2} \left|\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|^2 \,\mathrm{d}^3\vec{r} \\ &= -\iiint_{\mathrm{B}(a)} \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{Q}{32\pi\varepsilon a}\frac{8r^7}{a^8}\right)^2 \,\mathrm{d}^3\vec{r} = -\iiint_{\mathrm{B}(a)} \frac{Q^2 r^{14}}{32\pi^2\varepsilon a^{18}} \,\mathrm{d}^3\vec{r} \\ &= -\int_0^a \frac{Q^2 r^{14}}{32\pi^2\varepsilon a^{18}} \, 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r = -\frac{Q^2 a^{17}}{17 \cdot 8\pi\varepsilon a^{18}} = -\frac{Q^2}{136\pi\varepsilon a}\end{aligned}$$

Celková energie přeměněná na teplo je tedy $Q^2/136\pi\varepsilon a$, kde ε je permitivita materiálu, ze kterého je vyrobena koule.

Úkol 2

Zadání

Pro kterou hodnotu parametru a je pole $\vec{U}$ axiálně symetrické podél osy z?

$$\vec{U} = \left(2ax^3 - x^2y - 3xy^2 - y^3\right)\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x} + \left(x^3 + 3x^2y + 4ax^2y + xy^2 + 2ay^3\right)\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y}$$

Řešení

Protože má pole být axiálně symetrické, tj. invariantní při jakékoliv rotaci podél osy z, můžeme si zvolit konkrétní rotaci a zkontrolovat, za jakých podmínek invariance platí. Například můžeme pole $\vec{U}$ rotovat o 90° proti směru hodinových ručiček. To znamená změny souřadnic a jednotkových vektorů:

$$\begin{aligned} x &\mapsto y \\ y &\mapsto -x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x} &\mapsto \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y} \\ \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y} &\mapsto -\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x} \end{aligned}$$

Otočené pole $\vec{U}'$ je potom:

$$\vec{U}' = \left(2ay^3 + y^2x - 3yx^2 + x^3\right)\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{y} - \left(y^3 - 3y^2x - 4ay^2x + yx^2 - 2ax^3\right)\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$$

Musí platit rovnost $\vec{U} = \vec{U}'$. Porovnáním členů (konkrétně $xy^2\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{x}$) získáme nutnou podmínku:

$$a = -3/2.$$