# Kvantová mechanika I: Zápočtová písemka

Michal Grňo

10. ledna 2020

## 1 Mionium v křemíku

## 2 Kvadratický Hamiltonián

### 2.1 Zadání

Pohyb částice je popsán Hamiltoniánem

$$\hat{H} = \hat{p}^4 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{x}^4, \qquad [\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}.$$

Určete možné energie $E_n$ této částice a jim odpovídající vlastní stavy $|n\rangle$. Vypočtěte střední hodnotu operátoru souřadnice v čase $t$, pokud je systém na počátku v čase $t = 0$ ve stavu

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|n\rangle + |n+1\rangle\big)\,.$$

### 2.2 Řešení

Ze cvičení víme, že Hamiltonián harmonického oscilátoru je pro $M = \frac{1}{2}$, $\Omega = 1$, $\hbar = 1$ ve tvaru

$$\hat{H}_{harm.} = \hat{p}^2 + \hat{x}^2$$

si můžeme vyjádřit jako

$$\hat{H}_{harm.} = \hat{n} + \frac{1}{2},$$

$$\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad \hat{n}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\hat{x} = \hat{a}^\dagger + \hat{a}, \qquad \hat{p} = \mathrm{i}\left(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\right),$$

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\;|n-1\rangle\,,$$

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\;|n+1\rangle\,.$$

Pro náš kvadratický Hamiltonián zjevně platí

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hat{p}^4 + \hat{p}^2\hat{x}^2 + \hat{x}^2\hat{p}^2 + \hat{x}^4,\\
&= \left(\hat{p}^2 + \hat{x}^2\right)^2\\
&= \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)^2\\
&= \hat{n}^2 + \hat{n} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Jeho vlastní stavy budou tedy $|n\rangle$, stejné jako vlastní stavy harmonického oscilátoru, a jim příslušící vlastní energie budou

$$E_n\,|n\rangle = \hat{H}\,|n\rangle = \left(\hat{n}^2 + \hat{n} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle\,.$$

$$E_n = n^2 + n + \frac{1}{2}.$$

Nakonec nás zajímá časový vývoj stavu $\left|\psi(t)\right\rangle$ s počáteční podmínkou

$$\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|n\rangle + |n+1\rangle\right).$$

Víme, že pro časový vývoj obecného stavu platí (při $\hbar = 1$)

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}\left|\psi(0)\right\rangle.$$

S použitím Sylvestrovy formule pro rozklad operátorové funkce pomocí vlastních stavů dostaneme

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_m t}\hat{\mathrm{P}}_{E_m}\left|\psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_n t}|n\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}E_{n+1}t}|n+1\rangle\right),$$

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\left(n^2+n+\frac{1}{2}\right)}\left(|n\rangle + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t(n+1)}|n+1\rangle\right).$$

Střední hodnota operátoru souřadnice $\hat{x}$ potom bude

$$\begin{aligned}
\left\langle\psi(t)\right|\ \hat{x}\ \left|\psi(t)\right\rangle &= \left(\langle n| + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t(n+1)}\langle n+1|\right)\ \hat{x}\ \left(|n\rangle + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t(n+1)}|n+1\rangle\right)\\
&= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t(n+1)}\langle n+1|\hat{x}\,|n\rangle + \langle n|\hat{x}\,|n\rangle + \langle n+1|\hat{x}\,|n+1\rangle + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t(n+1)}\langle n|\hat{x}\,|n+1\rangle\\
&= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t(n+1)}\langle n+1|\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)|n\rangle + \langle n|\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)|n\rangle + \langle n+1|\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)|n+1\rangle + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t(n+1)}\langle n|\left(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\right)|n+1\rangle\\
&= \sqrt{n+1}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}nt} + \sqrt{n+1}\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}nt}\\
&= 2\sqrt{n+1}\,\cos\left(2t\,(n+1)\right).
\end{aligned}$$

Použil jsem vyjádření $\hat{x}$ pomocí posunovacích operátorů a následné zjednodušení pomocí knihovny SymPy.

# 3 Třírozměrná $\delta$ jáma

# 4 Zadání

Částice se pohybuje v třírozměrném přitažlivém potenciálu

$$V(x,y,z) = -a\delta(x) - b\delta(y) - c\delta(z), \qquad a,b,c\ >\ 0.$$

Nalezněte energie všech vázaných stavů a jim odpovídající normované vlnové funkce. Pro nejnižší vázaný stav ověřte, že splňuje relace neurčitosti.

# 5 Řešení

Odpovídající Hamiltonián je pro $M = \frac{1}{2},\ \Omega = 1,\ \hbar = 1$

$$\hat{H} = \hat{p}^2 + \hat{V} = -\triangle - a\delta(x) - b\delta(y) - c\delta(z)$$