Kvantová mechanika bez mávání rukama

Michal Grňo

21. srpna 2020

1 Hrátky s operátory

Lemma 1.1 (Polarizační identita)**.** Nechť $\mathcal{H}$ je Hilbertův prostor nad $\mathbb{C}$, potom pro všechny $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ platí

$$\left(\psi, \phi\right)_{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}\left(\|\psi+\phi\|^2 - \|\psi-\phi\|^2 + \mathrm{i}\,\|\psi+\mathrm{i}\phi\|^2 - \mathrm{i}\,\|\psi-\mathrm{i}\phi\|^2\right)$$

Důkaz. Rozepsáním pomocí vztahu $\|\phi\|^2 = \left(\phi, \phi\right)$ lze snadno ukázat, že

$$\|\psi+\phi\|^2 - \|\psi-\phi\|^2 = 4\Re\left(\psi, \phi\right), \quad \|\psi+\mathrm{i}\phi\|^2 - \|\psi-\mathrm{i}\phi\|^2 = 4\Im\left(\psi, \phi\right).$$

□

Lemma 1.2 (O unitaritě operátoru zachovávajícího normu)**.** Mějme Hilbertův prostor $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{C}$ a na něm lineární operátor $\hat{T}$ definovaný na $\mathrm{D}(\hat{T}) \subset \mathcal{H}$, potom platí

$$\left\|\hat{T}\phi\right\| = \|\phi\| \ \forall\phi \in \mathrm{D}(\hat{T}) \iff \hat{T} \text{ je unitární.}$$

Důkaz. Implikaci „$\Leftarrow$“ ukážeme snadno:

$$\left\|\hat{T}\phi\right\|^2 = \left(\hat{T}\phi, \hat{T}\phi\right) = \left(\hat{T}^+\hat{T}\phi, \phi\right) = \left(\phi, \phi\right) = \|\phi\|^2$$

Implikace opačným směrem potom plyne z 1.1. Buďte $\psi, \phi \in \mathcal{H}$, ukážeme, že T zachovává skalární součin:

$$\begin{aligned}
4\left(\hat{T}\psi, \hat{T}\phi\right) &= \left\|\hat{T}\psi + \hat{T}\phi\right\|^2 - \left\|\hat{T}\psi - \hat{T}\phi\right\|^2 + \mathrm{i}\left\|\hat{T}\psi - \mathrm{i}\hat{T}\phi\right\|^2 - \mathrm{i}\left\|\hat{T}\psi + \mathrm{i}\hat{T}\phi\right\|^2 \\
&= \left\|\hat{T}(\psi+\phi)\right\|^2 - \left\|\hat{T}(\psi-\phi)\right\|^2 + \mathrm{i}\left\|\hat{T}(\psi-\mathrm{i}\phi)\right\|^2 - \mathrm{i}\left\|\hat{T}(\psi+\mathrm{i}\phi)\right\|^2 \\
&= \|\psi+\phi\|^2 - \|\psi-\phi\|^2 + \mathrm{i}\,\|\psi-\mathrm{i}\phi\|^2 - \mathrm{i}\,\|\psi+\mathrm{i}\phi\|^2 = 4\left(\psi, \phi\right)
\end{aligned}$$

□

2 Vektorový formalismus

Fyzikální motivace

TODO.

Matematický framework

Je zvykem popisovat kvantové systémy pomocí abstraktních vektorů z nějakého Hilbertova prostoru, jehož dimenze závisí na modelovaném problému. V praxi pracujeme s všemožnými prostory od $\mathbb{C}^2$ pro popis nejjednoduších dvouhladinových systémů přes $W^{1,2}(\mathbb{R})$ pro popis volné částice až po neseparabilní prostory. Kvantové stavy jsou představovány jednotkovými vektory z těchto prostorů.

Definice 2.1 (Evoluční operátor)**.** Mějme stav $\left|\psi(t)\right\rangle$, který se vyvíjí v čase t a označme $|\psi\rangle \equiv \left|\psi(0)\right\rangle$. Potom existuje operátor $\hat{U}(t)$, pro který platí

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{U}(t)\left|\psi\right\rangle .$$

Operátor $\hat{U}(t)$ je lineární (PROČ?) a nazýváme ho evolučním operátorem. Triviálně platí $\hat{U}(0) = \hat{I}$.

Definice 2.2 (Dynamika nezávislá na čase)**.** Nechť pro každé dva stavy $|\psi\rangle\,, |\phi\rangle$ platí

$$\big|\langle\psi|\phi\rangle\big|^2 = \Big|\big\langle\psi(t)\big|\phi(t)\big\rangle\Big|^2 \qquad \forall t,$$

potom říkáme, že dynamika systému je nezávislá na čase.

Lemma 2.3. Tyto tři výroky jsou ekvivalentní:

1. Dynamika systému je nezávislá na čase
2. Evoluční operátor $\hat{U}$ je v každém čase unitární
3. Existuje samoadjugovaný operátor $\hat{A}(t)$ takový, že $\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\hat{A}(t)\,t}$.

Důkaz. Rozepíšeme si definici prvního výroku:

$$\big|\langle\psi|\phi\rangle\big|^2 = \Big|\big\langle\psi(t)\big|\phi(t)\big\rangle\Big|^2 = \Big|\langle\psi|\ \hat{U}^+(t)\ \hat{U}(t)\ |\phi\rangle\Big|^2.$$

Implikace $1 \Leftarrow 2$ je hned zřejmá, nyní dokážeme implikaci $1 \Rightarrow 2$.

V rovnici máme druhé mocniny kladných čísel, můžeme tedy BÚNO odmocnit.

$$\big|\langle\psi|\phi\rangle\big| = \Big|\langle\psi|\ \hat{U}^+(t)\ \hat{U}(t)\ |\phi\rangle\Big|$$

Z rovnosti absolutních hodnot vyplývá, že se vnitřky rovnají až na nějaké jednotkové komplexní číslo, tedy existuje takové $s(t) \in \mathbb{R}$, že

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\ \hat{U}^+(t)\ \hat{U}(t)\ |\phi\rangle\ \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,s(t)}.$$

Vidíme ale, že obecně $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,s(t)}$ nejde rozdělit mezi $\hat{U}$ a $\hat{U}^+$: každé komplexní číslo, kterým vynásobíme $\hat{U}$ se nám v $\hat{U}^+$ vrátí jako komplexně sdružené. Musí tedy platit $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,s(t)} = \pm 1$. Protože navíc požadujeme, aby rovnost platila v čase $t = 0$ a vývoj systému byl v čase spojitý, zbývá nám pouze $+1$. Pro evoluční operátor z toho plyne

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\psi|\ \hat{U}^+(t)\ \hat{U}(t)\ |\phi\rangle\,,$$
$$\hat{U}^+(t)\ \hat{U}(t) = \hat{I},$$

tedy pro každé t je evoluční operátor unitární.

Nakonec dokážeme ekvivalenci $2 \Leftrightarrow 3$. Z lineární algebry víme, že pro každý unitární operátor $\hat{U}$ existuje samoadjugovaný operátor $\hat{B}$ takový, že $\hat{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{B}}$, a naopak, že pro každý samoadjugovaný operátor $\hat{B}$ je výraz $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{B}}$ unitární. Pro evoluční operátor tedy máme

$$\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\hat{B}(t)}.$$

Protože navíc po evolučním operátoru požadujeme, aby $\hat{U}(0) = \hat{I}$, musí platit $\hat{B}(0) = 0$. BÚNO můžeme zavést operátor $\hat{A}(t) = -\hat{B}(t)/t$ pro $t \neq 0$ a libovolný pro $t = 0$. Dosazením tohoto operátoru do předchozí rovnice dostáváme požadované

$$\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\hat{A}(t)\,t}$$

□

Poznámka. Proč nás tolik zajímá zrovna tvar $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\hat{A}(t)\,t}$ zjistíme v zápětí. Obzvlášť v případě $\hat{A}(t) = \text{konst.}$ má totiž operátor $\hat{A}$ důležitý fyzikální význam.

Věta 2.4 (TDSE)**.** *Nechť je dynamika systému nezávislá na čase, potom existuje samoadjugovaný operátor $\hat{H}(t)$, pro který platí tzv. časová Schrödingerova rovnice:*

$$\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\big|\psi(t)\big\rangle = \hat{H}(t)\,\big|\psi(t)\big\rangle$$

Důkaz. Z nezávislosti dynamiky systému na čase víme, že platí

$$\big|\psi(t)\big\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\hat{A}(t)\,t}\,|\psi\rangle\,.$$

Když rovnici zderivujeme podle času, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\big|\psi(t)\big\rangle = -\mathrm{i}\,\left(\hat{A}(t) + t\,\dot{\hat{A}}(t)\right)\,\underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\hat{A}(t)\,t}\,|\psi\rangle}_{|\psi(t)\rangle}$$

Zavedeme operátor $\hat{H}(t)$ předpisem

$$\hat{H}(t) = \hat{A}(t) + t\,\dot{\hat{A}}(t)$$

a ukážeme, že je samoadjugovaný.

$$\hat{H}^+(t) = \left(\hat{A}(t) + t\,\dot{\hat{A}}(t)\right)^+ = \hat{A}^+(t) + t\left(\dot{\hat{A}}(t)\right)^+ = \hat{A}^+(t) + t\left(\hat{A}^+(t)\right)^{\bullet} = \hat{A}(t) + t\,\dot{\hat{A}}(t) = \hat{H}(t)$$

□

Definice 2.5 (Hamiltonián)**.** Operátor $\hat{H}(t)$ z předchozí věty nazýváme hamiltonián.

Důsledek 2.6 (Evoluce skleronomního systému)**.** Nechť je dynamika systému nezávislá na čase a hamiltonián $\hat{H}(t)$ je konstantní, potom

$$\big|\psi(t)\big\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\hat{H}\,t}\,|\psi\rangle\,.$$

Důkaz. Z definice hamiltoniánu máme

$$\hat{H} = \hat{A}(t) + t\,\dot{\hat{A}}(t) = \text{konst.}$$

Rozmyslete si, že zvolíme-li nějakou bázi a pomocí ní rovnici vyjádříme maticově, každý element bude nějaká funkce času, pro kterou platí

$$f(t) + t\,f'(t) = \text{konst.} \iff t\,f''(t) + 2f'(t) = 0 \iff f(t) = \frac{C_1}{t} + C_0.$$

I samotný operátor $\hat{A}(t)$ tedy musí být ve tvaru

$$\hat{A}(t) = \frac{1}{t}\hat{A}_1 + \hat{A}_0$$

Protože ale požadujeme, aby byl časový vývoj systému spojitý a $\hat{A}(t)\,t$ bylo v čase $t = 0$ nulové, musí nutně platit $\hat{A}_1 = 0$. Platí tedy $\hat{A}(t) = \hat{A}_0 =$ konst. a konečně $\hat{H} = \hat{A}$. □

Definice 2.7 (Stacionární stav)**.** Mějme stav $\big|\psi(t)\big\rangle$, pro který v každém čase t platí

$$\Big|\big\langle\psi\big|\psi(t)\big\rangle\Big|^2 = 1.$$

Takový stav nazýváme stacionárním stavem systému.

Lemma 2.8. Mějme stacionární stav $\big|\psi(t)\big\rangle$, potom existuje taková funkce $E(t) \in \mathbb{R}$, že

$$\big|\psi(t)\big\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,E(t)\,t}\,|\psi\rangle\,.$$

Důkaz. Z definice stacionárního stavu máme

$$\big|\langle\psi|\psi\rangle\big|^2 = 1 = \Big|\big\langle\psi\big|\psi(t)\big\rangle\Big|^2 = \Big|\langle\psi|\,\hat{U}(t)\,|\psi\rangle\Big|^2.$$

Opět z rovnosti absolutních hodnot vyplývá, že existuje funkce $s(t) \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\,\hat{U}(t)\,|\psi\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t)},$$
$$\langle\psi|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t)}\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,\hat{U}(t)\,|\psi\rangle\,.$$

Porovnáním stran dostaneme

$$\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t)}\,\hat{I}.$$

Protože navíc musí platit, že $\hat{U}(0) = \hat{I}$, můžeme si již tradičně zavést funkci $E(t) = s(t)/t$. Po dosazení získáme

$$\hat{U}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,E(t)\,t}\,\hat{I}.$$

□

Věta 2.9 (TISE)**.** *Nechť jsou dynamika systému a hamiltonián $\hat{H}$ nezávislé na čase. Potom jsou následující výroky ekvivalentní:*

1. *Stav $\big|\psi(t)\big\rangle$ je stacionární*
2. *Platí tzv. bezčasová Schrödingerova rovnice*

$$\hat{H}\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle\,.$$

Důkaz. Nejprve ukážeme 1 ⇒ 2. Ze stacionarity stavu $\big|\psi(t)\big\rangle$ vyplývá

$$\big|\psi(t)\big\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,E(t)\,t}\,|\psi\rangle\,.$$

Naopak z $\hat{H}(t) =$ konst. plyne (viz 2.6)

$$\big|\psi(t)\big\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\hat{H}\,t}\,|\psi\rangle\,.$$

Porovnáním zjistíme, že $E(t)$ musí být konstantní. Dosazením do časové Schrödingerovy rovnice potom dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\,|\psi\rangle &= \hat{H}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\,|\psi\rangle \\ \mathrm{i}\,(-\mathrm{i})\,E\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\,|\psi\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\,\hat{H}\,|\psi\rangle \\ E\,|\psi\rangle &= \hat{H}\,|\psi\rangle \end{aligned}$$

Nyní dokážeme implikaci opačným směrem. Opět použijeme výsledek z 2.6, tedy pokud dynamika systému a hamiltonián nezávisí na čase, potom platí:

$$\big|\psi(t)\big\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}t}\,|\psi\rangle$$

Rozepíšeme exponenciálu operátoru z definice a použijeme platnost bezčasové Schrödingerovy rovnice

$$\big|\psi(t)\big\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t}\,|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\mathrm{i}\hat{H}t)^n\,|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\mathrm{i}t)^n\hat{H}^n\,|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\mathrm{i}t)^n E^n\,|\psi\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\,|\psi\rangle$$

Vidíme, že skutečně

$$\Big|\big\langle\psi\big|\psi(t)\big\rangle\Big|^2 = \Big|\langle\psi|\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}\,|\psi\rangle\Big|^2 = \big|\langle\psi|\psi\rangle\big|^2 = 1.$$

□

Příklady použití

TODO.

3 Feynmanův integrál

TODO.

- Fyzikální motivace
- Wienerův proces
- Wienerova míra a integrál
- Feynmanův integrál