Kvantová mechanika I: Domácí úkoly

Michal Grňo

8. března 2020

1 Cvičení 6. 11.

1.1 Zadání

V $\mathbb{R}^N$ jsou zadány hypersférické souřadnice $q^i = (r,\, \theta_1,\, ...\, \theta_{N-1})$, pro které platí:

$$\begin{aligned}
x^1 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{N-2}\cos\theta_{N-1} \\
x^2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 \ldots \sin\theta_{N-2}\sin\theta_{N-1} \\
x^3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 \ldots \cos\theta_{N-2} \\
&\vdots \\
x^{N-1} &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x^N &= r\cos\theta_1
\end{aligned}$$

Hypersférické souřadnice jsou omezeny na následující intervaly:

$$\begin{aligned}
r &\in [0,\infty) \\
\theta_{N-1} &\in [0,2\pi) \\
\theta_{k<N-1} &\in [0,\pi)
\end{aligned}$$

Vyjádřete elementy a determinant metrického tenzoru g. Vyjádřete Laplaceův operátor Δ a rozložte ho na radiální a centrifugální části. Vyjádřete Schrödingerovu rovnici pro radiální část vlnové funkce $u_{\ell_N}(r)$ pro sféricky symetrický potenciál. Ukažte, že po substituci $u_{\ell_N}(r) = r^{\frac{1-N}{2}} f_{\ell_N}(r)$ je Schrödingerova rovnice co do tvaru stejná, nezávisle na N, liší se pouze silou centrifugálního členu.

1.2 Řešení

Aby se nám se souřadnicemi lépe pracovalo, přepíšeme je do tvaru *součinu posloupnosti*:

$$x^1 = r\left(\prod_{k=1}^{N-2}\sin\theta_k\right)\cos\theta_{N-1}$$

$$x^2 = r\left(\prod_{k=1}^{N-1}\sin\theta_k\right)$$

$$x^n = r\left(\prod_{k=1}^{N-n}\sin\theta_k\right)\cos\theta_{N-n+1} \quad \text{pro } n>2$$

Protože pracujeme na prostoru s pozitivně definitní metrikou, platí:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial q^i}\,\frac{\partial x^b}{\partial q^j}\,\delta_{ab} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\,\frac{\partial x^k}{\partial q^j}$$

Spočteme si nejprve derivace (v následujícím $n<N,\ 1<k<N$):

$$\frac{\partial x^n}{\partial q^1} = \frac{\partial x^n}{\partial r} = \frac{x^n}{r}, \qquad \frac{\partial x^1}{\partial q^N} = \frac{\partial x^1}{\partial \theta_{N-1}} = -x^2, \qquad \frac{\partial x^2}{\partial q^N} = \frac{\partial x^2}{\partial \theta_{N-1}} = x^1,$$

$$n>2:\ \frac{\partial x^n}{\partial q^k} = \begin{cases} k>N-n+2:\ 0 \\ k=N-n+2:\ -x^n\operatorname{tg}\theta_{k-1} \\ k<N-n+2:\ x^n\operatorname{cotg}\theta_{k-1} \end{cases}, \qquad \frac{\partial x^1}{\partial q^k} = \begin{cases} k=N:\ -x^1\operatorname{tg}\theta_{k-1} \\ k<N:\ x^1\operatorname{cotg}\theta_{k-1} \end{cases}, \qquad \frac{\partial x^2}{\partial q^k} = x^2\operatorname{cotg}\theta_{k-1}.$$

Pokračujeme výpočtem samotných složek metriky:

$$g_{11} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial r} \frac{\partial x^k}{\partial r} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{x^k}{r} \right)^2 = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

$$g_{NN} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial \theta_{N-1}} \frac{\partial x^k}{\partial \theta_{N-1}} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \theta_{N-1}} \right)^2 = \left(x^1 \right)^2 + \left(x^2 \right)^2 = r^2 \prod_{k=1}^{N-2} \sin^2 \theta_k.$$

$$g_{1N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial r} \frac{\partial x^k}{\partial \theta_{N-1}} = \frac{x^1}{r} \left(-x^2 \right) + \frac{x^2}{r} x^1 = 0.$$

$$\begin{aligned} g_{nn} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial q^n} \frac{\partial x^k}{\partial q^n} = \sum_{k=1}^{N-n+1} \left(\frac{\partial x^k}{\partial \theta_{n-1}} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^{N-n+2}}{\partial \theta_{n-1}} \right)^2 = \sum_{k=1}^{N-n+1} \left(x^k \operatorname{cotg} \theta_{n-1} \right)^2 + \left(x^{N-n+2} \operatorname{tg} \theta_{n-1} \right)^2 \\ &= \left(x^1 \right)^2 + \left(x^2 \right)^2 + \sum_{k=2}^{N-n+1} \left(r \operatorname{cotg} \theta_{n-1} \cos \theta_{N-k+1} \prod_{j=1}^{N-k} \sin \theta_j \right)^2 + \left(x^{N-n+2} \operatorname{tg} \theta_{n-1} \right)^2 \\ &= r^2 \prod_{k=1}^{N-2} \sin^2 \theta_k + r^2 \operatorname{cotg}^2 \theta_{n-1} \sum_{k=2}^{n-2} \cos^2 \theta_{N-k+1} \prod_{j=1}^{N-k} \sin^2 \theta_j + r^2 \operatorname{tg}^2 \theta_{n-1} \cos^2 \theta_{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} \sin^2 \theta_j \end{aligned}$$

$$g_{ab} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial q^a} \frac{\partial x^k}{\partial q^b} = \frac{\partial x^1}{\partial q^a} \frac{\partial x^1}{\partial q^b} + \frac{\partial x^2}{\partial q^a} \frac{\partial x^2}{\partial q^b} + \sum_{k=3}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial q^a} \frac{\partial x^k}{\partial q^b} ,$$

$$\det g = r^{2(N-1)} \prod_{k=2}^{N-1} \sin^{2(N-k)} \theta_{k-1}$$