Kvantová mechanika I: Domácí úkoly

Michal Grňo

7. února 2020

1 Cvičení 13. 11.

1.1 Zadání

Vodík se skládá z protonu (spin ½) a elektronu (spin ½) v orbitalu d (tedy $\ell = 2$). Operátor celkového momentu hybnosti je

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{p})} + \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{e})} + \hat{\boldsymbol{L}}$$

Kolika různých kvantových stavů může systém nabývat? Jakých hodnot může nabývat celkový moment hybnosti j a kolik stavů každé z nich přísluší?

Určete normalizované stavy $|j\ m\rangle \in \left\{|3\ 3\rangle, |3\ 2\rangle, |3\ 1\rangle\right\}$. Určete střední hodnotu $\langle 3\ 2| \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{e})} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{p})} |3\ 2\rangle$.

1.2 Řešení

Protože se jedná o rozlišitelné veličiny (spin protonu dokážeme odlišit od spinu elektronu, spin dokážeme odlišit od orbitální hybnosti), prostor kvantových stavů bude tenzorovým součinem stavů jednotlivých podsystémů. Jeho bázi tvoří kety

$$|m_\mathrm{p}\ m_\mathrm{e}\ m_\ell\rangle = |s_\mathrm{p}\ m_\mathrm{p}\rangle \otimes |s_\mathrm{e}\ m_\mathrm{e}\rangle \otimes |\ell\ m_\ell\rangle\,.$$

Protože $s_\mathrm{p} = s_\mathrm{e} = 1/2$, kvantová čísla m_p a m_e mohou nabývat pouze hodnoty $\pm 1/2$. Kvantové číslo $m_\ell \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Celkem má tedy systém $2 \times 2 \times 5 = 20$ stavů.

Nejprve sečteme dohromady spiny protonu a elektronu: $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{p})} + \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{e})}$. Celkový spin musí být $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| \le s \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, může tedy nabývat hodnoty $s = 0$ nebo $s = 1$. Pro jeho projekci do osy z platí $-s \le m_\mathrm{s} \le s$, máme tedy celkem čtyři stavy:

$$|s\ m_\mathrm{s}\rangle \in \left\{|0\ \ 0\rangle,\ |1\ \ {-1}\rangle,\ |1\ \ 0\rangle,\ |1\ \ {+1}\rangle\right\}.$$

Dále sečteme spin s orbitalovou hybností: $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{S}} + \hat{\boldsymbol{L}}$. Pro celkový moment hybnosti odpovídající spinu $s = 0$ platí $j = 2$, $m \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Pro moment hybnosti odpovídající spinu $s = 1$ platí $j \in \{1, 2, 3\}$, $m \in \{-j, ..., j\}$. Spočítáme-li, kolik stavů odpovídá jednotlivým j, dostaneme:

j	**počet stavů**
1	3
2	$5 + 5 = 10$
3	7

Tyto stavy budeme značit $|j\ m\rangle$, ačkoliv je pro $j = 2$ toto značení ambivalentní (může označovat stav $s = 0$, nebo $s = 1$). Pokračujeme určením Clebsch-Gordanových koeficientů. Víme, že nejvyšší stav může být vytvořen pouze takto:

$$\begin{aligned}
|j\ m\rangle &= |m_\mathrm{p}\ m_\mathrm{e}\ m_\ell\rangle \\
|3\ 3\ \rangle &= |1/2\ \ 1/2\ \ 2\ \ \rangle = |\uparrow\uparrow 2\rangle
\end{aligned}$$

Snadno se ověří, že $\hat{J}_- = \hat{S}_-^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_-^{(\mathrm{e})} + \hat{L}_-$. Tuto rovnici můžeme použít k vyjádření dalších stavů (ve výpočtu ignorujeme faktor ħ, který se nakonec zkrátí):

$$\begin{aligned}
\hat{J}_- |3\ 3\rangle &= \left(\hat{S}_-^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_-^{(\mathrm{e})} + \hat{L}_-\right) |\uparrow\uparrow 2\rangle \\
\sqrt{3(3+1) - 3(3-1)}\ |3\ 2\rangle &= |\downarrow\uparrow 2\rangle + |\uparrow\downarrow 2\rangle + \sqrt{6 - 2(2-1)}\ |\uparrow\uparrow 1\rangle \\
\sqrt{6}\ |3\ 2\rangle &= |\downarrow\uparrow 2\rangle + |\uparrow\downarrow 2\rangle + 2\,|\uparrow\uparrow 1\rangle \\
|3\ 2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|\downarrow\uparrow 2\rangle + |\uparrow\downarrow 2\rangle + 2\,|\uparrow\uparrow 1\rangle\right).
\end{aligned}$$

Pokračujeme vypočtením $|3\ 1\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{J}_- \left|3\ 2\right\rangle &= \left(\hat{S}_-^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_-^{(\mathrm{e})} + \hat{L}_-\right)\ \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\left|\downarrow\uparrow 2\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow 2\right\rangle + 2\left|\uparrow\uparrow 1\right\rangle\right)\\
\sqrt{6}\ \sqrt{3(3+1)-2(2-1)}\ \ \left|3\ 1\right\rangle &= \left(\hat{S}_-^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_-^{(\mathrm{e})} + \hat{L}_-\right)\ \left(\left|\downarrow\uparrow 2\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow 2\right\rangle + 2\left|\uparrow\uparrow 1\right\rangle\right)\\
2\sqrt{15}\ \left|3\ 1\right\rangle &= 0\ \left|\downarrow\uparrow 2\right\rangle + \quad \left|\downarrow\downarrow 2\right\rangle + 2\ \left|\downarrow\uparrow 1\right\rangle + \\
&+ \quad \left|\downarrow\downarrow 2\right\rangle + 0\ \left|\uparrow\downarrow 2\right\rangle + 2\ \left|\uparrow\downarrow 1\right\rangle + \\
&+ 2\ \left|\downarrow\uparrow 1\right\rangle + 2\ \left|\uparrow\downarrow 1\right\rangle + \sqrt{6-1(1-1)}\ \ \left|\uparrow\uparrow 0\right\rangle\\
\left|3\ 1\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{15}}\left(\left|\downarrow\downarrow 2\right\rangle + 2\left|\downarrow\uparrow 1\right\rangle + 2\left|\uparrow\downarrow 1\right\rangle + \sqrt{6}\left|\uparrow\uparrow 0\right\rangle\right).
\end{aligned}$$

Nakonec můžeme vypočítat střední hodnotu $\left\langle 3\ 2\right| \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{e})} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{p})} \left|3\ 2\right\rangle$. Využijeme k tomu rozklad operátorů $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ na operátory $\hat{S}_+, \hat{S}_-$.

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{e})} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{p})} &= \hat{S}_x^{(\mathrm{e})}\hat{S}_x^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_y^{(\mathrm{e})}\hat{S}_y^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_z^{(\mathrm{e})}\hat{S}_z^{(\mathrm{p})}\\
&= \frac{1}{4}\left(\hat{S}_+^{(\mathrm{e})} + \hat{S}_-^{(\mathrm{e})}\right)\left(\hat{S}_+^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_-^{(\mathrm{p})}\right) - \frac{1}{4}\left(\hat{S}_+^{(\mathrm{e})} - \hat{S}_-^{(\mathrm{e})}\right)\left(\hat{S}_+^{(\mathrm{p})} - \hat{S}_-^{(\mathrm{p})}\right) + \hat{S}_z^{(\mathrm{e})}\hat{S}_z^{(\mathrm{p})}\\
&= \frac{1}{2}\left(\hat{S}_+^{(\mathrm{e}}\hat{S}_-^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_-^{(\mathrm{e})}\hat{S}_+^{(\mathrm{p})}\right) + \hat{S}_z^{(\mathrm{e})}\hat{S}_z^{(\mathrm{p})}
\end{aligned}$$

Dosadíme vyjádření stavu $|3\ 2\rangle$ v bázi $\left|m_\mathrm{p}\ m_\mathrm{e}\ m_\ell\right\rangle$:

$$\begin{aligned}
\left\langle 3\ 2\right| \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{e})} \cdot \hat{\boldsymbol{S}}^{(\mathrm{p})} \left|3\ 2\right\rangle &= \frac{1}{6}\left(\left\langle\downarrow\uparrow 2\right| + \left\langle\uparrow\downarrow 2\right| + 2\left\langle\uparrow\uparrow 1\right|\right)\left(\frac{1}{2}\hat{S}_+^{(\mathrm{e}}\hat{S}_-^{(\mathrm{p})} + \frac{1}{2}\hat{S}_-^{(\mathrm{e})}\hat{S}_+^{(\mathrm{p})} + \hat{S}_z^{(\mathrm{e})}\hat{S}_z^{(\mathrm{p})}\right)\left(\left|\downarrow\uparrow 2\right\rangle + \left|\uparrow\downarrow 2\right\rangle + 2\left|\uparrow\uparrow 1\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(\left\langle\downarrow\uparrow 2\right| + \left\langle\uparrow\downarrow 2\right| + 2\left\langle\uparrow\uparrow 1\right|\right)\left(\frac{\hbar^2}{2}\left|\uparrow\downarrow 2\right\rangle - \frac{\hbar^2}{4}\left|\downarrow\uparrow 2\right\rangle + \frac{\hbar^2}{2}\left|\downarrow\uparrow 2\right\rangle - \frac{\hbar^2}{4}\left|\uparrow\downarrow 2\right\rangle + \frac{\hbar^2}{4}2\left|\uparrow\uparrow 1\right\rangle\right)\\
&= \frac{\hbar^2}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{4}{4}\right) = \frac{\hbar^2}{4}.
\end{aligned}$$

2 Cvičení 20. 11.

2.1 Zadání

Máme částici v potenciálu daném vztahem

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na).$$

Pro kladné energie je podle Blochova teorému vlnová funkce pro $na < x < (n+1)a$:

$$\psi_q(x) = \left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-na)} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-na)}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}qna},$$

kde q je krystalová hybnost částice. Vztah energie a hybnosti je

$$\cos qa = \cos ka + \frac{K}{2k}\sin ka, \tag{1}$$

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2ME}, \qquad \left\lfloor \frac{ka}{\pi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{qa}{\pi} \right\rfloor,$$

kde M je hmotnost částice.

Pro kladnou energii vykreslete grafy $E(q)$, $v_\mathrm{g}(q)$, $v_\mathrm{g}(E)$ pro $K = 10$ a $K = 1$. Vypočtěte normalizovanou vlnovou funkci odpovídající záporným energiím a vykreslete pro ni graf $E(q)$ pro $K = -10$ a $K = -1$.

2.2 Řešení pro $E > 0$

Implicitní vztah mezi q a E chceme nějak parametrizovat. Nejprve si zadefinujeme pomocnou funkci

$$\theta_K(t) = \cos(2\pi t) + \frac{aK}{4\pi t}\sin(2\pi t).$$

Je zřejmé, že se jedná o pravou stranu rovnice (1) po substituci $ka = 2\pi t$. Je snadné vyjádřit vztah mezi parametrem t a energií. V dalším budeme používat „redukovanou" energii, vydělenou konstantami:

$$\tilde{E}(t) = \frac{E}{\mathrm{h}^2 M^{-1}} = \frac{t^2}{2a^2}, \qquad t(\tilde{E}) = a\sqrt{2\tilde{E}}.$$

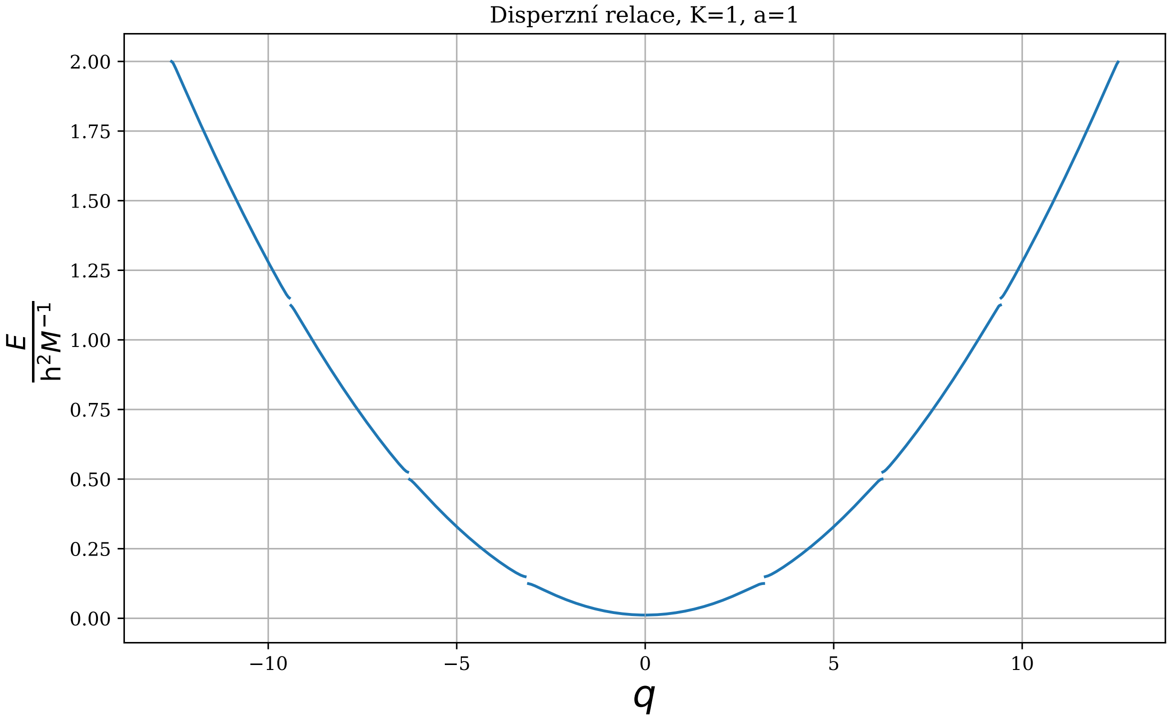
Nyní si vyjádříme q v závislosti na parametru. Je třeba věnovat pozornost správné volbě správné větve arccos, aby byla splněna podmínka $\lfloor ka/\pi \rfloor = \lfloor qa/\pi \rfloor$. Lze snadno ověřit, že následující vztah tuto podmínku splňuje:

$$q_K(t) = \begin{cases} n \le t \le n + \frac{1}{2} : & \frac{1}{a}\left(2\pi n + \arccos\theta_K(t)\right) \\ n - \frac{1}{2} \le t \le n : & \frac{1}{a}\left(2\pi n - \arccos\theta_K(t)\right) \end{cases} \qquad \text{pro nějaké } n \in \mathbb{Z}$$

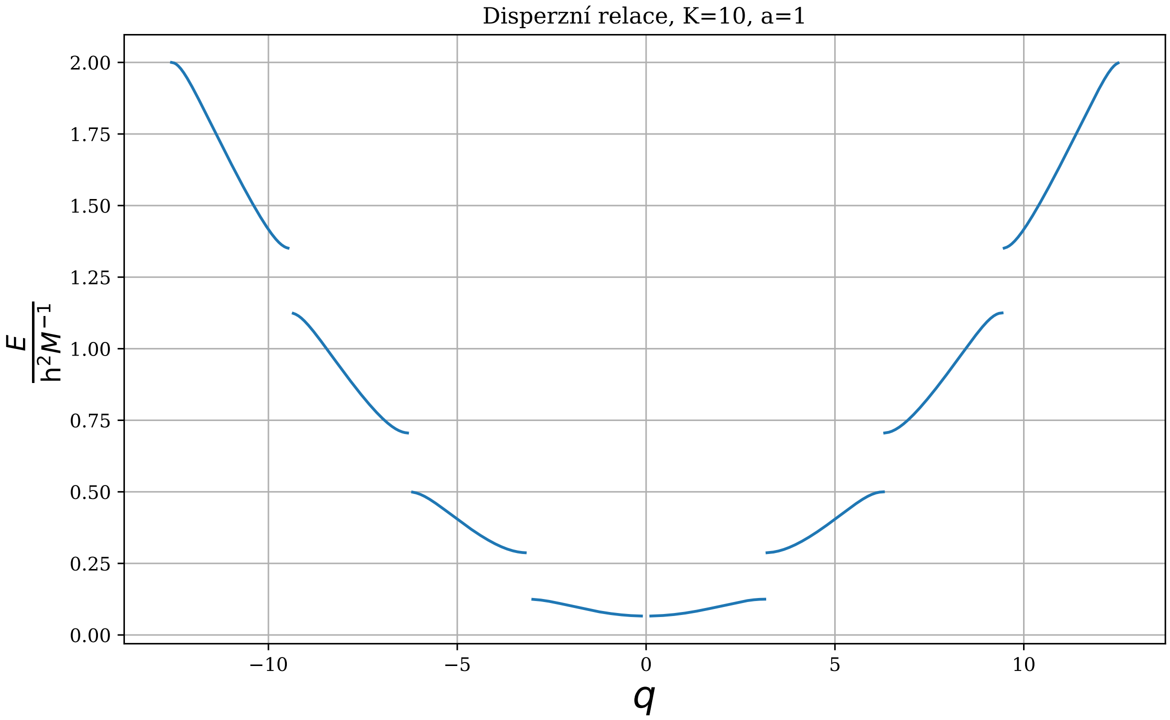
Nyní máme hotovou parametrizaci $\varphi(t)$ grafu $\tilde{E}(q)$:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} q_K(t) \\ \tilde{E}(t) \end{pmatrix},$$

a můžeme vykreslit grafy pro první čtyři energetické hladiny (tj. $t \in [-4, 4]$).



Disperzní relace, K=1, a=1
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$\frac{E}{\mathrm{h}^2 M^{-1}}$
−10
−5
0
5
10
q



Disperzní relace, K=10, a=1
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
$\frac{E}{\mathrm{h}^2 M^{-1}}$
−10
−5
0
5
10
q

Pro vypočtení derivace využijeme implicitní funkci. Vztah $\tilde{E}(q)$ vyjádřený jako implicitní funkce má tvar:

$$\Phi_K(q, \tilde{E}) = \cos qa - \theta_K(t(\tilde{E})).$$

Derivace $\tilde{E}$ je potom

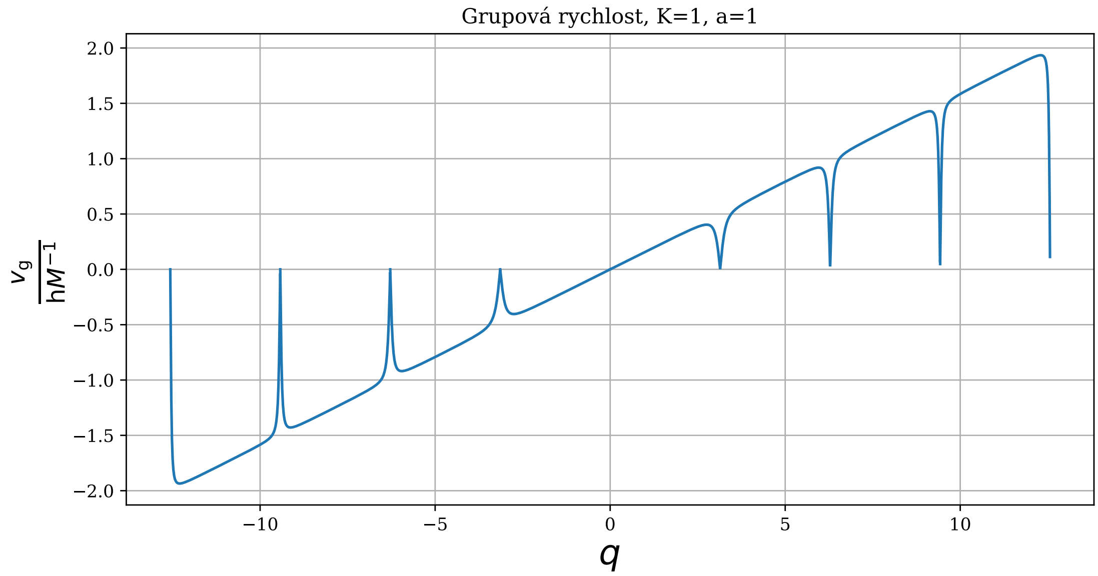
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{E}}{\mathrm{d}q}\,(q(t)) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial q}\,(q(t), \tilde{E}(t))}{\frac{\partial \Phi}{\partial q}\,(q(t), \tilde{E}(t))} = -\frac{a \sin aq(t)}{\theta'_K(t)\; t'(\tilde{E}(t))} = \frac{4\pi a^2 t^3 \sin\big(aq(t)\big)}{-2\pi K a t \cos(2\pi a t) + K \sin(2\pi a t) + 8\pi^2 a^2 t^2 \sin(2\pi a t)}.$$

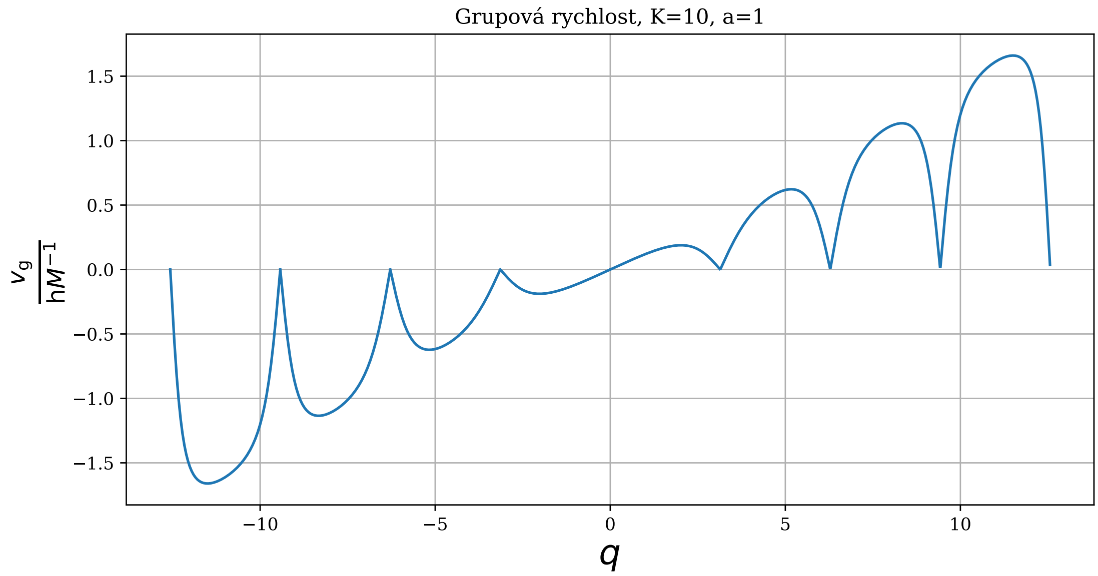
Pro grupovou rychlost v_{g} platí:

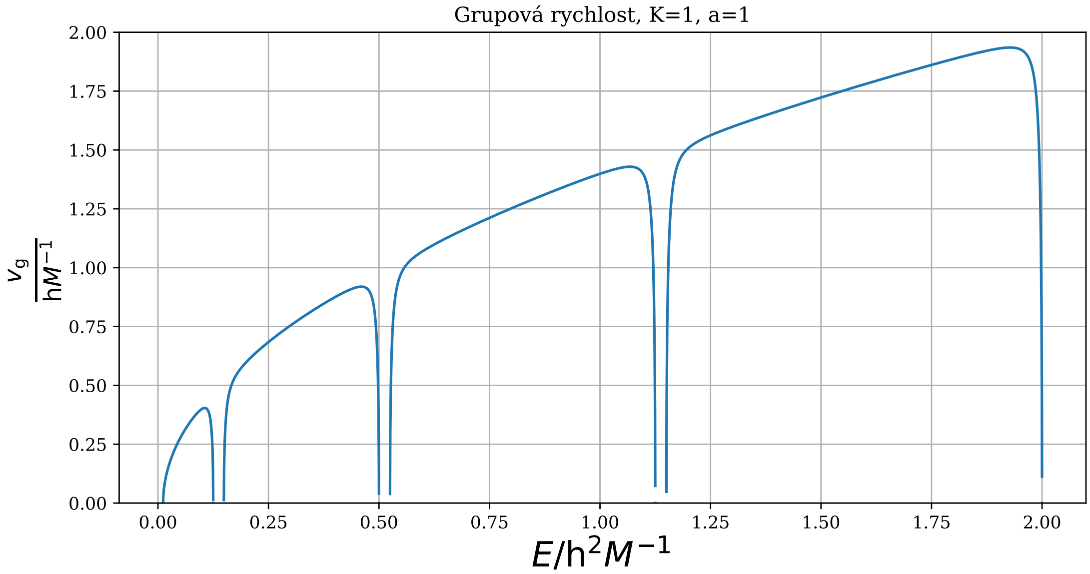
$$v_{\mathrm{g}}(q) = \frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} = 2\pi\frac{\mathrm{h}}{M}\frac{\mathrm{d}\tilde{E}}{\mathrm{d}q}$$

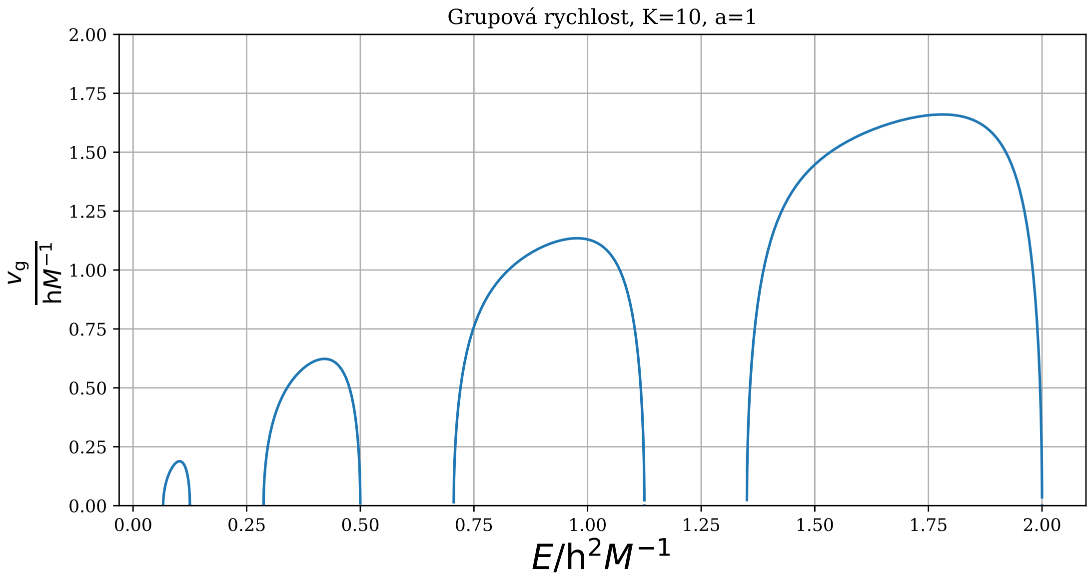
Veličinu $\tilde{v}_{\mathrm{g}}$ (opět podělenou konstantami) tedy můžeme v závislosti na q, resp. E parametrizovat:

$$\phi_q(t) = \begin{pmatrix} q_K(t) \\ 2\pi\frac{\mathrm{d}\tilde{E}}{\mathrm{d}q}(q(t)) \end{pmatrix}, \qquad \phi_E(t) = \begin{pmatrix} \tilde{E}(t) \\ 2\pi\frac{\mathrm{d}\tilde{E}}{\mathrm{d}q}(q(t)) \end{pmatrix}.$$









2.3 Řešení pro $E < 0$

Pro záporné energie máme podle Blochova teorému:

$$\psi_I = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\left(A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\mathrm{e}^{kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qx}\mathrm{e}^{-kx}\right),$$
$$\psi_{II} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qa}\left(A\mathrm{e}^{k(x+a)} + B\mathrm{e}^{-k(x+a)}\right).$$

Aplikujeme-li nyní slepovací podmínky, získáme:

$$\psi_{II}(0-) = \psi I(0+)$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qa}\left(A\mathrm{e}^{ka} + B\mathrm{e}^{-ka}\right) = A + B$$

$$\psi'_{II}(0-) - \psi'_I(0+) = -K(A+B)$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qa}\left(Ak\mathrm{e}^{ka} - B\mathrm{e}^{-ka}\right) - kA + kB = -K(A+B)$$

Získáme tedy lineární soustavu dvou rovnic, po převedení do maticové podoby:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qa+ka} - 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qa-ka} - 1 \\ k\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qa+ka} - 1\right) + K & -k\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qa-ka} - 1\right) + K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

Podmínka nulovosti determinantu vede na rovnici

$$\cos qa = \cosh ak + \frac{K}{2k} \sinh ak$$

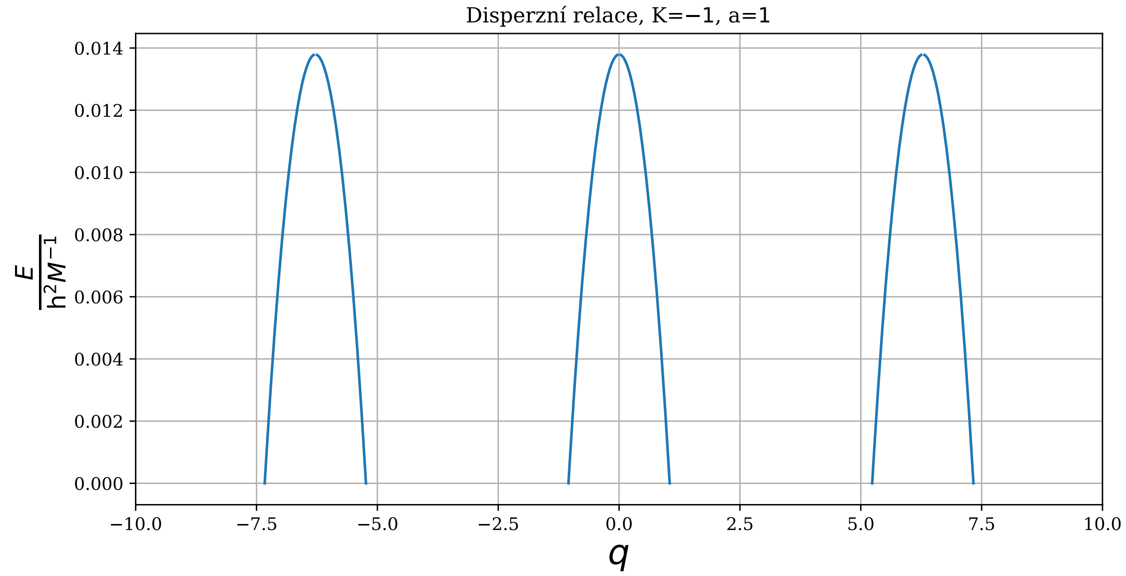
Parametrizace bude zjevně téměř stejná, jako pro případ $E > 0$, jenom pomocnou funkci $\theta_K(t)$ si předefinujeme:

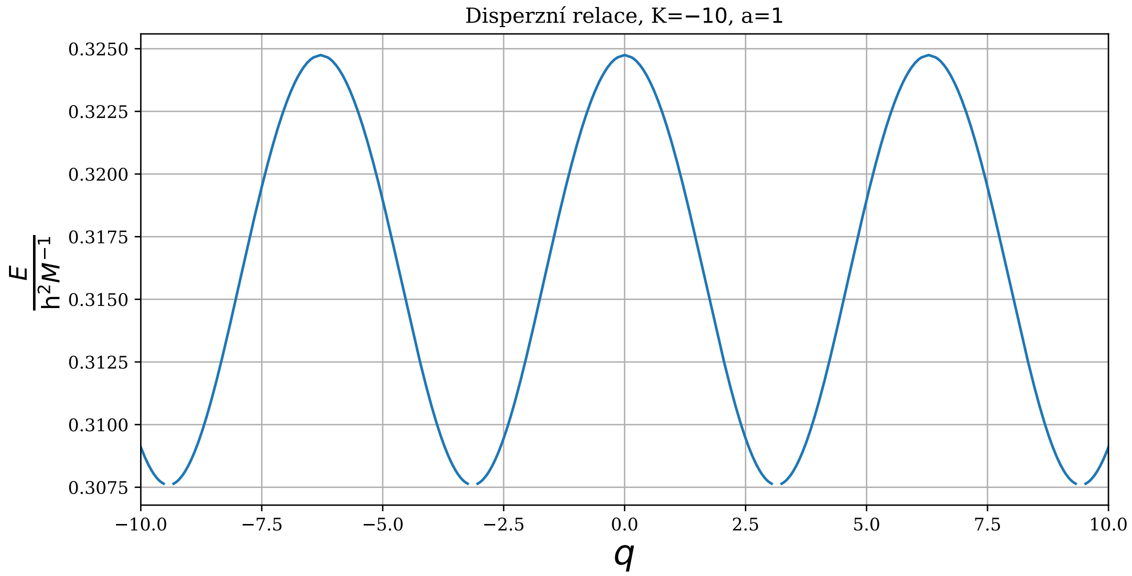
$$\theta_K(t) = \cosh(2\pi t) + \frac{K}{2k} \sinh(2\pi t).$$

Nakonec ještě normalizujeme vlnovou funkci:

$$\int_0^a |\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^a \left(A\mathrm{e}^{2kx} + 2AB + B\mathrm{e}^{-2kx} \right) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{A}{2k}\mathrm{e}^{2kx} + 2ABx - \frac{B}{2k}\mathrm{e}^{-2kx} \right]_0^a$$
$$= \frac{A}{2k} \left(\mathrm{e}^{2ka} - 1 \right) + 2aAB + \frac{B}{2k} \left(1 - \mathrm{e}^{-2ka} \right) = 1$$

Tato rovnice společně s (2) stačí k určení koeficientů A, B pro konkrétní hodnoty q, K, a.





3 Cvičení 11. 12.

3.1 Zadání

Vyjádřete normalizovanou vlnovou funkci $\psi_z(x) = \langle x|z\rangle$ koherentního stavu harmonického oscilátoru. Dosaďte do

$$z = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\langle \hat{x}_z \rangle + \frac{\mathrm{i}}{m\omega} \langle \hat{p}_z \rangle \right)$$

a ukažte, že hustota pravděpodobnosti $|\psi_z(x,t)|^2$ odpovídá gaussovskému vlnovému balíku, jehož střední hodnota kmitá kolem počátku s frekvencí ω, vypočtěte jeho disperzi a ukažte, že se v čase nemění. Vyjádřete normalizovanou vlnovou funkci $\tilde{\psi}_z(p) = \langle p|z\rangle$.

3.2 Řešení

Víme, že pro koherentní stav harmonického oscilátoru platí

$$\hat{a}\,|z\rangle = z\,|z\rangle\,,$$

vyjádříme-li si nyní operátor $\hat{a}$ jako

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left(m\omega\hat{x} + \mathrm{i}\hat{p} \right),$$

dostaneme pro ψ_z diferenciální rovnici

$$\begin{aligned}
\langle x|\,\hat{a}\,|z\rangle &= z\,\langle x|z\rangle \\
\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \left(m\omega\hat{x} + \mathrm{i}\hat{p} \right) \psi_z &= z\psi_z \\
m\omega\, x\psi_z + \hbar\psi_z' &= \sqrt{2m\omega\hbar}\, z\,\psi_z \\
\hbar\psi_z' &= \left(\sqrt{2m\omega\hbar}\, z - m\omega\, x \right) \psi_z
\end{aligned}$$

Rovnice má triviální nefyzikální řešení $\psi_z = 0$. Zkusíme ji řešit pomocí násady $\mathrm{e}^{a(x+b)^2}$:

$$\hbar \left(2a(x+b) \right) \mathrm{e}^{a\left(x+b\right)^2} = \left(\sqrt{2m\omega\hbar}\, z - m\omega\, x \right) \mathrm{e}^{a\left(x+b\right)^2}$$

$$2\hbar\, a\, x + 2\hbar\, ab = \sqrt{2m\omega\hbar}\, z - m\omega\, x$$

$$2\hbar\, a\, x = -m\omega\, x \qquad\qquad 2\hbar\, ab = \sqrt{2m\omega\hbar}\; z$$

$$a = -\frac{m\omega}{2\hbar} \qquad\qquad b = \frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2\hbar a}\, z$$

$$b = -\frac{\sqrt{2m\omega\hbar}}{2\hbar}\, \frac{2\hbar}{m\omega}\, z$$

$$b = -\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\; z$$

$$\psi_z(x) \propto \exp(\,-\frac{m\omega}{2\hbar} \left(x - z\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \right)^2\,).$$

Snadno můžeme rozmyslet, že diferenciální rovnici funkce ψ_z splňuje, i když ji škálujeme libovolným komplexním číslem. Protože fáze vlnové funkce nemá fyzikální význam, ponecháme ji beze změny. Hledáme tedy pouze reálnou kladnou normalizační konstantu.

$$\begin{aligned}
1 = \langle z|z\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_z^* \psi_z \,\mathrm{d}x \\
&= N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\,-\frac{m\omega}{2\hbar} \left(x - z\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \right)^2\,)\,\mathrm{d}x \\
&= N^2 \int_{-\infty - z\sqrt{2\hbar/m\omega}}^{+\infty - z\sqrt{2\hbar/m\omega}} \exp(\,-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\,)\,\mathrm{d}x = N^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(\,-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\,)\,\mathrm{d}x \\
&= N^2 \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}} \implies N = \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega} \right)^{1/4}
\end{aligned}$$

Normalizovaná vlnová funkce je tedy (po dosazení za z):

$$\psi_z(x) = \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/4} \exp(-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \langle\hat{x}_z\rangle + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\langle\hat{p}_z\rangle\right)^2).$$

Nyní spočítáme hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v poloze x:

$$\begin{aligned}
|\psi_z(x)|^2 &= \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \exp(-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\left(x - \langle\hat{x}_z\rangle\right)^2 - \left(\frac{1}{m\omega}\langle\hat{p}_z\rangle\right)^2\right)) \\
&= \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \exp(\underbrace{-\frac{m\omega}{2\hbar}}_{a}\, x^2 + \underbrace{\frac{m\omega}{\hbar}\langle\hat{x}_z\rangle}_{b}\, x + \underbrace{\frac{1}{2m\omega\hbar}\langle\hat{p}_z\rangle - \frac{m\omega}{2\hbar}\langle\hat{x}_z\rangle}_{c}).
\end{aligned}$$

Vidíme, že se jedná o gaussovskou funkci, střední hodnotu a disperzi vypočteme následovně:

$$\mu = \frac{-b}{2a} = \langle\hat{x}_z\rangle, \qquad \sigma = \sqrt{-\frac{1}{2a}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Pokračujeme určením časového vývoje vlnové funkce. Platí:

$$\begin{aligned}
\left|z(t)\right\rangle &= \hat{U}(t)\;|z\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}\,t/\hbar}\;|z\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)\,t}\quad \mathrm{e}^{|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \\
&= \mathrm{e}^{|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)\,t}\;|n\rangle \\
&= \mathrm{e}^{|z|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt{n!}}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(n + 1/2)\,t}\;|n\rangle \\
&= \mathrm{e}^{|z|^2/2}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\;|n\rangle \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\;\left|z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\rangle
\end{aligned}$$

Dosazením do vlnové funkce dostáváme:

$$\psi_z(x,t) = \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/4} \exp(-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \langle\hat{x}_z\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\langle\hat{p}_z\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)^2).$$

Můžeme vypočíst pravděpodobnostní hustotu:

$$\begin{aligned}
|\psi_z(x)|^2 &= \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \exp(-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \langle\hat{x}_z\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\langle\hat{p}_z\rangle\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)^2)\;\exp(-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x - \langle\hat{x}_z\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\langle\hat{p}_z\rangle\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right)^2) \\
&= \left(\frac{2\pi\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} \exp(-\frac{m\omega}{\hbar}\left(\left(x - \langle\hat{x}_z\rangle\cos\omega t + \frac{\langle\hat{p}_z\rangle}{m\omega}\sin\omega t\right)^2 - \left(\langle\hat{x}_z\rangle\sin\omega t + \frac{\langle\hat{p}_z\rangle}{m\omega}\cos\omega t\right)^2\right)).
\end{aligned}$$

Porovnáním s pravděpodobnostní hustotou nezávislou na čase, snadno nahlédneme, že

$$\sigma = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \qquad \mu = \langle\hat{x}_z\rangle\cos\omega t - \frac{\langle\hat{p}_z\rangle}{m\omega}\sin\omega t.$$

Pro vyjádření vlnové funkce v p-reprezentaci provedeme obdobný postup jako na začátku – nejprve si vyjádříme diferenciální rovnici, kterou vyřešíme pro $\tilde{\psi}_z(p)$.

$$\frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\left(-m\omega\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} + p\right)\tilde{\psi}_z = z\tilde{\psi}_z \quad\Longrightarrow\quad \tilde{\psi}_z(p,t) = (2\pi m\omega\hbar)^{-1/4}\exp(\frac{1}{2m\omega\hbar}\left(p - \sqrt{2m\omega\hbar}\;z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)^2).$$