Domácí práce na LAF II.

Michal Grňo

15. 6. 2019

1 Cvičení 11 – hodnocená úloha

1.1 Zadání

Mějme tenzor $T(A, B, \Gamma) = \Gamma(AB - BA)$, kde A, B jsou reálné antisymetrické 3×3 matice a Γ je forma z prostoru duálního. Bázi K zvolíme tak, aby

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathrm{K}}$$

a skalární součin g je v této bázi $[g]_{\mathrm{K}} = \mathrm{E}$.

Vyjádřete tenzor v bázi K: $[T]_{\mathrm{K}} = T_{ij}{}^{k}$. Určete obě kontrakce T^i_{ij}, T^j_{ij}. Ověřte, zda je tenzor T_{ijk} úplně (anti)symetrický.

1.2 Řešení

Označíme si číselné vyjádření vektorů A, B a kovektoru Γ.

$$[A]_{\mathrm{K}} = x^i = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad [B]_{\mathrm{K}} = y^i = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \quad [\Gamma]_{\mathrm{K}^*} = \gamma_i$$

$$[AB - BA]_{\mathrm{K}} = \left[\begin{pmatrix} 0 & ae - bd & cd - af \\ bd - ae & 0 & bf - ce \\ af - cd & ce - bf & 0 \end{pmatrix} \right]_{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$$

$$T^k_{ij}\; x^i\; y^i\; \gamma_k = \gamma_1\; (x^2y^3 - x^3y^2) + \gamma_2\; (x^3y^1 - x^1y^3) + \gamma_3\; (x^1y^2 - x^2y^1) = \gamma(x \times y).$$

Odtud vidíme, že spuštěním indexu k získáme smíšený součin:

$$T_{ijk}\; x^i\; y^j\; z^k = z \cdot (x \times y) = \varepsilon_{ijk}\; x^i\; y^j\; z^k$$

$$T_{ijk} = \varepsilon_{ijk},$$

T_{ijk} je tedy zřejmě úplně antisymetrické.

Vypočteme nyní kontrakce:

$$T^i_{ij} = g^{ik}\; T_{ijk} = g^{ik}\; \varepsilon_{ijk} = \sum_i \varepsilon_{iji} = 0$$

$$T^j_{ij} = \sum_i \varepsilon_{iij} = 0$$

1.3 Výsledek

Tenzor T má v bázi K tvar $T_{ij}{}^{k} = \varepsilon_{ij}{}^{k} = g^{kl}\ \varepsilon_{ijl}$. Z toho důvodu jsou obě kontrakce T^i_{ij} a T^j_{ij} nulové a tenzor T_{ijk} úplně antisymetrický.

2 Cvičení 11 – domácí úloha

2.1 Zadání

Mějme bázi B prostoru $\mathbb{R}^2$:

$$B = (e_1, e_2) = (\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}).$$

Nechť T je bilineární forma $T = e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1 + 2e^2 \otimes e^2$ a g skalární součin $[g]_{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

Nalezněte duální bázi B^*, matici $[T]_{\mathrm{K}}$, vyjádření tenzoru $\widetilde{T} = T(\sharp_g \cdot, \cdot)$ pomocí $\widetilde{T}^i_j\ e_i \otimes e^j$ a jeho kontrakci.

2.1.1 Řešení

Pro duální bázi platí podmínka $e^i(e_j) = \delta^i_j$, zapsáno maticově:

$$\left(\begin{array}{c}[e^1]_K\\ \hline [e^2]_K\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}[e_1]_K & [e_2]_K\end{array}\right) = E.$$

Duální bázi tedy tvoří řádky inverzní matice: $B^* = \Big((3 \quad -1),\ (-2 \quad 1)\Big)$. Dále vypočteme matici

$$\begin{aligned}[T]_{\mathrm{K}} &= \left[e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1 + 2e^2 \otimes e^2\right]_{\mathrm{K}}\\ &= \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}8 & -3\\-5 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nyní si vyjádříme tenzor $\widetilde{T}$:

$$\widetilde{T}^i_j = g^{ik}T_{kj} = \Big(\left[g^{-1}\right]_{\mathrm{K}} [T]_{\mathrm{K}}\Big)^i_j$$

$$\left[\widetilde{T}\right]_{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}8 & -3\\-5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & -3\\-5 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{T}^i_j = 3e_1 \otimes e^1 - e_1 \otimes e^2 - 2e_2 \otimes e^1 + e_2 \otimes e^2$$

A jeho kontrakce je

$$C^1_1\widetilde{T} = \widetilde{T}^i_i = \mathrm{Tr}\left[\widetilde{T}\right]_{\mathrm{K}} = 4$$

3 Cvičení 11 – procvičovací úloha 1

3.1 Zadání

Nechť T je tenzor typu $(2,2)$ na $\mathbb{R}^n$ definovaný předpisem

$$T(u, v, \phi, \psi) = \phi(u)\psi(v).$$

Jeho čtyři možné kontrakce zapište ve tvaru $S^i_j \varepsilon_i \otimes \varepsilon^j$, kde $(\varepsilon_i)_1^n$ je kanonická báze $\mathbb{R}^n$.

3.2 Řešení

Přepsáním definice do indexové notace získáme

$$T(u, v, \phi, \psi) = \phi(u)\psi(v)$$

$$T^{ij}_{kl}\ \phi_i\,\psi_j\,u^k\,v^l = \phi_i u^i\ \psi_j v^j$$

$$T^{ij}_{kl} = \delta^i_k \delta^j_l$$

Pro kontrakce tedy platí

$$T^{ia}_{ib} = \delta^i_i \delta^a_b = n\delta^a_b$$

$$T^{ai}_{bi} = \delta^a_b \delta^i_i = n\delta^a_b$$

$$T^{ia}_{bi} = \delta^i_b \delta^a_i = \delta^a_b$$

$$T^{ai}_{ib} = \delta^a_i \delta^i_b = \delta^a_b$$

Přepsáním do formy $S^i_j \varepsilon_i \otimes \varepsilon^j$ získáme

$$C^1_1 T = C^2_2 T = n\delta^a_b\ \varepsilon_a \otimes \varepsilon^b$$

$$C^1_2 T = C^2_1 T = \delta^a_b\ \varepsilon_a \otimes \varepsilon^b$$

4 Cvičení 11 – procvičovací úloha 2

4.1 Zadání

Mějme Minkowského prostor s metrickým tenzorem $\eta = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Faradayův tenzor F^μ_ν má tvar:

$$F^\mu_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte $F^{\mu\nu}$ a $F_{\mu\nu}$ a ověřte, že jsou antisymetrické. Vypočtěte $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$.

4.2 Řešení

Zjevně $\eta^{-1} = \eta$. Zdvižení a spuštění indexu vypočteme jako

$$F^{\mu\nu} = F^\mu{}_\kappa \eta^{\kappa\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\kappa} F^\kappa{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Obě matice jsou zjevně antisymetrické, platí tedy $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ a $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Nakonec vypočteme

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}F_{\nu\mu} = -\mathrm{Tr}(&\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}) \\
&= ({E_x}^2 + {E_y}^2 + {E_z}^2) + ({E_x}^2 - {B_z}^2 - {B_y}^2) + ({E_y}^2 - {B_z}^2 - {B_x}^2) + ({E_z}^2 - {B_y}^2 - {B_x}^2) \\
&= 2\left(\|E\|^2 - \|B\|^2\right)
\end{aligned}
$$