Domácí práce na LAF II.

Michal Grňo

6. 5. 2019

1 Cvičení 8 – domácí úloha

1.1 Zadání

Určete A^n pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2 Řešení

Nejprve nalezneme vlastní čísla:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\big(\, -(2-\lambda)^2(3+\lambda) \; - \; 8 \; - \; 6 \; + \; 6(2-\lambda) \; + \; 4(2-\lambda) \; + \; 2(3+\lambda) \, \big)$$

$$= (1-\lambda)(-\lambda^3 + \lambda^2) \; = \; \lambda^2(1-\lambda)^2$$

$$\implies \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = 1$$

Následně vyšetříme vlastní podprostor pro $\lambda = 0$:

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jádro je jednorozměrné, řetízek tedy musí mít délku 2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nyní vyšetříme vlastní podprostor odpovídající $\lambda = 1$:

$$A - 1E \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jádro je opět jednorozměrné.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 2 \\ & 0 & & & 0 \\ & & 1 & & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reprezentace matice v Jordanově bázi $[A]_B^B = J$ a matice přechodu $[\mathrm{Id}]_B^K = V$ jsou tedy:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zbývá nalézt inverzní matici k V:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$[\mathrm{Id}]_K^B = V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nakonec dopočítáme A^n:

$$A^n = (VJV^{-1})^n = VJ^nV^{-1} = V \begin{pmatrix} 0 & 0^{n-1} & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & n \\ & & & 1 \end{pmatrix} V^{-1}, \text{ kde } 0^0 = 1$$

Vydělíme nyní triviální případ $A^1 = A$. Pro $n > 1$ platí:

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ n & 1 & n & -n \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3 Výsledek

$$A^1 = A,$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ n & 1 & n & -n \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \{2, 3, 4, ...\}.$$

2 Cvičení 9 – hodnocená úloha

2.1 Zadání

Nalezněte řešení diferenciální rovnice $\dot{x}(t) = Ax(t)$, kde $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^3$ a

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.2 Řešení

Obecným řešením rovnice je $x(t) = \exp(tA)x(0)$, a protože $A = VJV^{-1} \iff \exp(A) = V\exp(J)V^{-1}$, začneme hledáním Jordanova tvaru:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\lambda_{1,2} = 1, \qquad \lambda_3 = -1.$$

Nejprve vyšetříme vlastní prostor pro $\lambda = 1$:

$$A - 1E \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jádro je dimenze 1, to znamená jeden řetízek délky 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nyní vyšetříme vlastní prostor odpovídající $\lambda = -1$:

$$A - (-1)E \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teď nalezneme matici inverzní k přechodové:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$A = VJV^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyní vypočteme vektorovou funkci $x(t)$:

$$x(t) = \exp(tA)v(0) = V\exp(tJ)V^{-1}v(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & \\ & \mathrm{e}^t & \\ & & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t & \\ & \mathrm{e}^t & \\ & & \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-t} \\ 2t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \\ 2t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

2.3 Výsledek

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-t} \\ 2t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t \\ 2t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

3 Cvičení 9 – domácí úloha

3.1 Zadání

Určete $\exp(A)$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

3.2 Řešení

Opět začneme nalezením Jordanova tvaru matice:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ 6 & 4-\lambda & -9 \\ 5 & 3 & -7-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 1)$$

$$\lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = 1$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -5 & 1 \\ 6 & 4 & -9 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & -7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A - 1E \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -9 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$A = VJV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Nyní vypočteme exponenciolu matice v Jordanově bázi:

$$\exp(A) = V\exp(J)V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & \mathrm{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}-1 & \mathrm{e} & -3\mathrm{e}+1 \\ 3\mathrm{e} & \mathrm{e}+3 & -3\mathrm{e}-3 \\ 3\mathrm{e}-1 & \mathrm{e}+1 & -3\mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

3.3 Výsledek

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}-1 & \mathrm{e} & -3\mathrm{e}+1 \\ 3\mathrm{e} & \mathrm{e}+3 & -3\mathrm{e}-3 \\ 3\mathrm{e}-1 & \mathrm{e}+1 & -3\mathrm{e} \end{pmatrix}.$$

4 Cvičení 10 – hodnocená úloha

4.1 Zadání

Nechť

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$B = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}),$$

$$S = u \otimes v \otimes w,$$

vyjádřete S v kanonické bázi K a v bázi B vypočtete její prvek s indexy $2, 1, 2$.

4.2 Řešení

Nejprve si vyjádříme matici kontravariantní transformace:

$$v = Rv' = [\mathrm{Id}]^K_B v' = \left(b_1 \,\middle|\, b_2 \right) v'$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(R^{-1})^i_j = 3\delta^i_1\delta^1_j - 2\delta^i_2\delta^1_j - \delta^i_1\delta^2_j + \delta^i_2\delta^2_j$$

Následně dosadíme do definice S:

$$S^{ijk} = u^i v^j w^k = 1(\delta_1^j - 2\delta_2^j)(-\delta_1^k + 3\delta_2^k) = -\delta_1^j\delta_1^k + 2\delta_2^j\delta_1^k + 3\delta_1^j\delta_2^k - 6\delta_2^j\delta_2^k = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}^{jk},$$

A provedeme transformaci

$$\begin{aligned}(S')^{212} &= (R^{-1})^2_i\,(R^{-1})^1_j\,(R^{-1})^2_k\,S^{ijk}\\ &= (R^{-1})^2_i\,(R^{-1})^1_j\,(5\delta_1^j - 10\delta_2^j)\\ &= (R^{-1})^2_i\,(\delta_1^i + \delta_2^i)\,25\\ &= (-2+1)25 = -25.\end{aligned}$$

4.3 Výsledek

$$S^{ijk} = -\delta_1^j\delta_1^k + 2\delta_2^j\delta_1^k + 3\delta_1^j\delta_2^k - 6\delta_2^j\delta_2^k,$$

$$(S')^{212} = -25.$$

5 Cvičení 10 – domácí úloha

5.1 Zadání

Nalezte duální bázi B k bázi

$$\begin{aligned}B^* &= (b^1, b^2, b^3)\\ [b^1]_K &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix}\\ [b^2]_K &= \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ [b^3]_K &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5.2 Řešení

Duální báze k $B = (b_1, b_2, b_3)$ musí splňovat podmínku:

$$b^i(b_j) = \delta^i_j.$$

V kanonické bázi tuto podmínku lze také zapsat maticově:

$$\begin{pmatrix} [b^1]_K \\ \hline [b^2]_K \\ \hline [b^3]_K \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c} [b_1]_K & [b_2]_K & [b_3]_K \end{array}\right) = E.$$

Úloha je tedy ekvivalentní hledání inverzní matice:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

5.3 Výsledek

$$B = (\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T).$$