Domácí práce na LAF II.

Michal Grňo

15. 6. 2019

1 Cvičení 5 – hodnocená úloha

1.1 Zadání

Najděte singulární rozklad a pseudoinverzi matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.2 Řešení

Nejprve vypočteme matici A^+A a nalezneme její diagonální tvar:

$$A^+A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$|A^+A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -5 \\ -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 10),$$

$$\mathrm{Ker}\ (A^+A) = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{Ker}\ (A^+A - 10E) = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Z toho máme matice Σ a V:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále vypočteme první sloupec matice U a zbytek doplníme na ON bázi:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Singulární rozklad matice $A = U\Sigma V^+$ je tedy:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pseudoinverze A je potom

$$\begin{aligned} A^\dagger &= V\Sigma^\dagger U^+ \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10} A^+. \end{aligned}$$

2 Cvičení 5 – procvičovací úloha 1

2.1 Zadání

Najděte polární rozklad reálné matice $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

2.2 Řešení

Nejprve nalezneme singulární rozklad:

$$A^+A = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Následně vyjádříme polární rozklad

$$A = U\Sigma V^+ = \underbrace{UV^+}_{W} \underbrace{V\Sigma V^+}_{P} = \underbrace{U}_{W} \underbrace{\Sigma}_{P}$$

$$W = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

3 Cvičení 5 – procvičovací úloha 2

3.1 Zadání

Ukažte, že matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ není diagonalizovatelná a proveďte její singulární a polární rozklad.

3.2 Řešení

Snadno demonstrujeme, že A má jedno číslo s algebraickou násobností 2 a geometrickou násobností 1:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2,$$

$$\text{Ker } (A - \lambda E) = \text{Ker } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Vypočteme tedy singulární rozklad:

$$A^+ A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$$|A^+ A - \lambda E| = (\lambda - 16)(\lambda - 1)$$

$$\text{Ker } (A^+ A - E) = \text{Ker } \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \text{Ker } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\text{Ker } (A^+ A - 16E) = \text{Ker } \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \text{Ker } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = U \Sigma V^+.$$

Nakonec vypočteme polární rozklad:

$$W = UV^+ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P = V \Sigma V^+ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}$$

3.3 Výsledek

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}_{W} \underbrace{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{V^+}.$$

4 Cvičení 5 – procvičovací úloha 3

4.1 Zadání

Mějme matici $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Jak vypadá pseudoinverze blokové matice $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, resp. $\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, jejíž rozměry jsou $(m+p)\times(n+q)$?

4.2 Řešení

Pro rozlišení rozměrů blokových matic budeme používat spodní indexy: například značení $0_{a\times b}$ znamená nulovou matici o a řádcích a b sloupcích. Začneme singulárním rozkladem blokově symetrické varianty $A = \widetilde{U}\widetilde{\Sigma}\widetilde{V}^+$:

$$A = \begin{pmatrix} X_{m\times n} & 0_{m\times q} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times q} \end{pmatrix},$$

$$A^+A = \begin{pmatrix} X^+_{n\times m} & 0_{n\times p} \\ 0_{q\times m} & 0_{q\times p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{m\times n} & 0_{m\times q} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (X^+X)_{n\times n} & 0_{n\times q} \\ 0_{q\times n} & 0_{q\times q} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} |A^+A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} (X^+X - \lambda E)_{n\times n} & 0_{n\times q} \\ 0_{q\times n} & -\lambda E_{q\times q} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^q \ \lambda^q \ |X^+X - \lambda E|. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že všechna vlastní čísla X^+X budou i vlastními čísly A^+A, tato matice bude mít navíc q-násobné vlastní číslo 0. Prvních n vlastních vektorů A^+A bude ve tvaru $\widetilde{v}_i = \begin{pmatrix} (v_i)_{n\times 1} \\ 0_{q\times 1} \end{pmatrix}$, kde v_i jsou vlastní vektory X^+X, zbylé budou ve tvaru $\widetilde{v}_i = \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ (b_i)_{q\times 1} \end{pmatrix}$, kde b_i je ON báze $\mathbb{C}^q$. Nechť je nyní $X = U\Sigma V^+$ singulární rozklad matice X a $B = \begin{pmatrix} b_1 \mid \dots \mid b_q \end{pmatrix}$, potom:

$$\widetilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{m\times n} & 0_{m\times q} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times q} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} V_{n\times n} & 0_{n\times q} \\ 0_{q\times n} & B_{q\times q} \end{pmatrix}.$$

Dále jde snadno ověřit, že lze zvolit v $\mathbb{C}^{(m+p)}$ takovou ON bázi, aby prvních m sloupců matice $\widetilde{U}$ mělo tvar $\widetilde{u}_i = \begin{pmatrix} (u_i)_{m\times 1} \\ 0_{p\times 1} \end{pmatrix}$, potom dostáváme

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} U_{m\times m} & 0_{m\times p} \\ 0_{p\times m} & C_{p\times p} \end{pmatrix},$$

kde C je unitární matice.

Pseudoinverzní maticí k A tedy bude:

$$\begin{aligned} A^\dagger &= \widetilde{V}^+\widetilde{\Sigma}^\dagger\widetilde{U} \\ &= \begin{pmatrix} V^+_{n\times n} & 0_{n\times q} \\ 0_{q\times n} & B^+_{q\times q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma^\dagger_{n\times m} & 0_{n\times p} \\ 0_{q\times m} & 0_{q\times p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{m\times m} & 0_{m\times p} \\ 0_{p\times m} & C_{p\times p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (V^+\Sigma^\dagger U)_{n\times m} & 0_{n\times p} \\ 0_{q\times m} & 0_{q\times p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (X^\dagger)_{n\times m} & 0_{n\times p} \\ 0_{q\times m} & 0_{q\times p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

V případě, že by X byla čtvercová regulární $n \times n$ matice, platilo by $X^\dagger = X^{-1}$, tedy:

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} X_{n\times n} & 0_{n\times q} \\ 0_{p\times n} & 0_{p\times q} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} (X^{-1})_{n\times n} & 0_{n\times p} \\ 0_{q\times n} & 0_{q\times p} \end{pmatrix}.$$

Nyní vyšetříme blokově nesymetrickou variantu. Nejprve budeme předpokládat, že $p \geq q$, diskusi pro $p < q$ provedeme na konci.

$$A = \begin{pmatrix} 0_{m\times q} & X_{m\times n} \\ 0_{p\times q} & 0_{p\times n} \end{pmatrix},$$

$$A^+A = \begin{pmatrix} 0_{q\times m} & 0_{q\times p} \\ X^+_{n\times m} & 0_{n\times p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{m\times q} & X_{m\times n} \\ 0_{p\times q} & 0_{p\times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ 0_{n\times q} & (X^+X)_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Nyní si opět vyjádříme singulární rozklad $X = U\Sigma V^+$. Matice $\widetilde{\Sigma}$ a $\widetilde{V}$ najdeme způsobem analogickým k předchozí části, pouze použijeme nestandardní řazení singulárních hodnot v $\widetilde{\Sigma}$: [1]

$$\widetilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ 0_{m\times q} & \Sigma_{m\times n} \\ 0_{(p-q)\times q} & 0_{(p-q)\times n} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{V} = \begin{pmatrix} B_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ 0_{n\times q} & V_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Pro $i \in \{1, ...s\}$, kde s je počet singulárních hodnot matice X, platí:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} X v_i,$$

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_{q+i} &= \frac{1}{\sigma_i} A \widetilde{v}_{q+i} \\ &= \frac{1}{\sigma_i} \begin{pmatrix} 0_{m\times q} & X_{m\times n} \\ 0_{p\times q} & 0_{p\times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{q\times 1} \\ (v_i)_{n\times 1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\frac{1}{\sigma_i} X v_i)_{m\times 1} \\ 0_{p\times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_i)_{m\times 1} \\ 0_{p\times 1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Protože $(u_1, ..., u_m)$ je ON báze $\mathbb{C}^m$, můžeme použít vzorec $\widetilde{u}_{q+i} = \begin{pmatrix} (u_i)_{m\times 1} \\ 0_{p\times 1} \end{pmatrix}$ pro hodnoty $i \in \{1, ..., m\}$, čímž získáme ON bázi m-rozměrného podprostoru. Zbývá nám ještě „pokrýt“ p-rozměrný podprostor. Zvolíme si tedy libovolnou ON bázi $B = (b_1, ..., b_p)$ v $\mathbb{C}^p$ a její vektory použijeme jako sloupce matic $C = \begin{pmatrix} b_1 \mid ... \mid b_q \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} b_{q+1} \mid ... \mid b_p \end{pmatrix}$. Matici $\widetilde{U}$ potom lze zapsat ve tvaru:

$$\widetilde{U} = \begin{pmatrix} 0_{m\times q} & U_{m\times m} & 0_{m\times(p-q)} \\ C_{p\times q} & 0_{p\times m} & D_{p\times(p-q)} \end{pmatrix}.$$

Nyní známe singulární rozklad matice A a můžeme nalézt její pseudoinverzi:

$$\begin{aligned} A^\dagger &= \widetilde{V}\widetilde{\Sigma}^\dagger\widetilde{U}^+ \\ &= \begin{pmatrix} B_{q\times q} & 0_{q\times n} \\ 0_{n\times q} & V_{n\times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{q\times q} & 0_{q\times m} & 0_{q\times(p-q)} \\ 0_{n\times q} & \Sigma^\dagger_{n\times m} & 0_{n\times(p-q)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{q\times m} & C^+_{q\times p} \\ U^+_{m\times m} & 0_{m\times p} \\ 0_{(p-q)\times m} & D^+_{(p-q)\times p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_{q\times m} & 0_{q\times p} \\ (V\Sigma U^+)_{n\times m} & 0_{n\times p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{q\times m} & 0_{q\times p} \\ X^\dagger_{n\times m} & 0_{n\times p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[1] Místo standardního tvaru $\widetilde{\Sigma} = \mathrm{diag}_{(m+p)\times(n+q)}(\sigma_1, \sigma_2, ..., 0, ...)$ volíme tvar $\mathrm{diag}(\underbrace{0, ..., 0}_{q}, \sigma_1, \sigma_2, ...)$. Díky tomu bude monžné blokově násobit matice A a V. Ve vyjádření blokového tvaru $\widetilde{\Sigma}$ bylo využito předpokladu, že $p \geq q$, jinak by byla diagonála "moc dlouhá".

V případě, že by bylo $p < q$ by se postupovalo ekvivalentně, pouze $\widetilde{\Sigma}$ a $\widetilde{U}$ by místo tří „blokových řádků“ měly „tři blokové sloupce“. Tento postup vede na stejný výsledek.

5 Cvičení 5 – domácí úloha

5.1 Zadání

Určete singulární rozklad, polární rozklad a pseudoinverzi matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Najděte aproximativní řešení soustavy $Ax = b$ s nejmenší normou pro $b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$.

5.2 Řešení

Začneme hledáním singulárního rozkladu:

$$A^+A = A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$|A^+A - \lambda E| = -\lambda(\lambda - 3)^2,$$

$$\text{Ker } (A^+A) = \text{Ker } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\text{Ker } (A^+A - 3E) = \text{Ker } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle,$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = u_2 \times u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{V^+}.$$

Pokračujeme vyjádřením polárního rozkladu:

$$W = UV^+ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$P = V\Sigma V^+ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}}_{W} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}$$

Dále vypočteme pseudoinverzi:

$$\begin{aligned} A^\dagger &= V\Sigma^\dagger U^+ \\ &= \frac{1}{6\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nakonec vypočteme aproximativní řešení rovnice:

$$x = A^\dagger b = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6 Cvičení 5 – rozšiřující úloha 2

6.1 Zadání

Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, ukažte, že:

1. matice $AA^\dagger$ je matice projekce na Im A,
2. matice $A^\dagger A$ je matice projekce na Im A^T,
3. matice $E - A^\dagger A$ je matice projekce na Ker A.

6.2 Řešení

Nechť matice A má s singulárních čísel a její singulární rozklad je $A = U\Sigma V^+$, potom $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^+$. Zároveň si zavedeme ON báze $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n$ takové, aby $[\mathrm{Id}]^{\mathrm{K}}_V = V$ a $[\mathrm{Id}]^{\mathrm{K}}_U = U$. Kdy budeme mluvit o matici a kdy o bázi, bude zřejmé z kontextu. Nakonec si zavedeme zobrazení $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takové, aby $[\mathbb{A}]^{\mathrm{K}}_{\mathrm{K}} = A$, projekci do podprostoru X si označíme $\mathbb{P}_X$ a její matici v kanonické bázi označíme P_X.

Protože platí

$$[\mathbb{A}]^{\mathrm{K}}_{\mathrm{K}} = A = U\Sigma V^+ = [\mathrm{Id}]^{\mathrm{K}}_U \Sigma [\mathrm{Id}]^V_{\mathrm{K}},$$

musí být Σ vyjádřením $\mathbb{A}$ v bázích V, U:

$$[\mathbb{A}]_V^U = \Sigma.$$

Nyní si vyjádříme obraz $\mathbb{A}$:

$$[\mathrm{Im}\ \mathbb{A}]^U = \mathrm{Im}\ \Sigma = \Bigg\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\end{pmatrix}, \dots}_{s} \Bigg\rangle.$$

Matice projekce na Im $\mathbb{A}$ bude tedy mít v bázi U jednoduchý tvar:

$$[\mathbb{P}_{\mathrm{Im}\ \mathbb{A}}]_U^U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \underbrace{\vdots \quad \vdots \qquad}_{s} & & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Vyjádříme-li si teď $AA^\dagger$ pomocí zavedených symbolů, bude vše zřejmé:

$$AA^\dagger = (U\Sigma V^+)(V\Sigma^\dagger U^+) = U\Sigma\Sigma^\dagger U^+$$

$$= U \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \underbrace{\vdots \quad \vdots \qquad}_{s} & & & \vdots & \end{pmatrix} U^+$$

$$= [\mathrm{Id}]_U^K [\mathbb{P}_{\mathrm{Im}\ \mathbb{A}}]_U^U [\mathrm{Id}]_K^U = [\mathbb{P}_{\mathrm{Im}\ \mathbb{A}}]_K^K = P_{\mathrm{Im}\ A}.$$

Stejným způsobem, jakým jsme si zavedli zobrazení $\mathbb{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, můžeme zavést i zobrazení $\mathbb{A}^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

$$[\mathbb{A}^T]_K^K = A^T = (U\Sigma V^+)^T = V\Sigma^T U^+,$$

$$[\mathrm{Im}\ \mathbb{A}^T]^V = \mathrm{Im}\ \Sigma^T = \Bigg\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\end{pmatrix}, \dots}_{s} \Bigg\rangle,$$

$$[\mathbb{P}_{\mathrm{Im}\ \mathbb{A}^T}]_V^V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots \\ \underbrace{\vdots \quad \vdots \qquad}_{s} & & & \vdots & \end{pmatrix}.$$

$$A^\dagger A = (V\Sigma^\dagger U^+)(U\Sigma V^+) = V\Sigma^\dagger\Sigma V^+ = V\Sigma^T(\Sigma^\dagger)^T V^+$$

$$= [\mathrm{Id}]_V^K [\mathbb{P}_{\mathrm{Im}\ \mathbb{A}^T}]_V^V [\mathrm{Id}]_K^V = [\mathbb{P}_{\mathrm{Im}\ \mathbb{A}^T}]_K^K = P_{\mathrm{Im}\ A^T}.$$

Poslední tvrzení triviálně vyplývá z

$$\mathrm{Ker}\ A = (\mathrm{Im}\ A^T)^\perp,$$

$$P_{X^\perp} = E - P_X.$$

$$P_{\mathrm{Ker}\ A} = P_{(\mathrm{Im}\ A^T)^\perp} = E - P_{\mathrm{Im}\ A^T} = E - A^\dagger A.$$