Matematika pro fyziky 1: Riget
Mikkel Grnø
5. jan. 1992

Překvapivý objev / 1. jan.

Ano, přiznávám bez mučení, včera v noci jsem se vloupal do nemocnice. Ale než mě za takový lehkovážný čin odsoudíte, vyslechněte si nejdřív celý příběh. Popravdě je poněkud komické psát tímto tónem, když si tento dokument přečtu nanejvýš já a můj profesor z university, než jej spálím v krbu. Po tom, co jsem včera zažil, je ale netradiční volba vyprávěcího stylu asi ta nejméně bizarní věc.

Můj motiv byl prostý a pragmatický - před svátky mi v nemocnici Riget zemřela babička z matčiny strany a já, vědom si pochybné pověsti nemocnice, rozhodl jsem se vyšťárat na personál nějakou špínu. Nezdárně zakončené doktorské studium mě zanechalo bez peněz i bez práce a vidina nějakého finančního odškodnění za zesnulou příbuznou mě lákala. Využil jsem tedy novoroční vřavy, nepozorovaně rozbil okno v přízemí a vklouzl dovnitř.

Netrvalo mi dlouho proklouznout kolem noční směny v levém křídle - to nealkoholické šampaňské je asi zmohlo, proto všichni tři spokojeně podřimovali. Ani ne za deset minut jsem byl u dveří márnice. Zatímco doteď bylo všechno snadné popsat, správná slova pro to, co následovalo, se mi doteď nedaří najít. Při vzpomínce na včerejšek se mi stále ježí vlasy na zátylku, proto odpusťte, drahý prof. Ørstede, že se události ani nepokusím popsat, ale raději Vás na tuto prokletou půdu dovedu, abyste vše viděl na vlastní oči. Vězte ale, že má teorie - ta nemoderní, nefalsifikovatelná a paravědecká, kterou celý sbor, až na Vás, odsoudil - má teorie je správná!

Měření / 3. jan.

Ubytoval jsem se v hotelu zhruba dva kilometry od nemocnice. Po dni shánění součástek, pájení a montování, podařilo se mi sestrojit eterický interferometr - první svého druhu. Dnes jsem se opět vloupal do nemocnice a provedl pečlivá několikahodinová měření. Má podezření se potvrdila: podařilo se mi naměřit uniformní vír v éteru. Prošel jsem s přístrojem všechna patra, o silné válcové symetrii není pochyb. Rychlostní pole víru lze popsat vzorcem:

$$v(r,\varphi,z) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\hat{\varphi}.$$

Osa $\hat{z}$ se nachází asi 150 m severně od recepce nemocnice.

Protože při sobě bohužel nemám tabulky, budu si pro práci s válcovými souřadnicemi několik vztahů muset odvodit ručně. Válcové souřadnice jsou definovány:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$z = z$$

Nyní si vyjádřím derivace polohového vektoru podle nových souřadnic:

$$\mathbf{R} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\mathbf{R} = r\cos\varphi\hat{x} + r\sin\varphi\hat{y} + z\hat{z}$$

$$e_r = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial r} = \cos\varphi\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}$$

$$e_\varphi = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi\hat{x} + r\cos\varphi\hat{y}$$

$$e_z = \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial z} = \hat{z}$$

Velikosti těchto vektorů jsou Lamého koeficienty $h_j = |e_j|$:

$$h_r = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

$$h_\varphi = \sqrt{-r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi} = r$$

$$h_z = 1$$

Bázové vektory jsou jednotkové vektory ve směru derivace **R** podle dané souřadnice, tedy $\hat{j} = e_j / h_j$:

$$\hat{r} = \cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y}$$

$$\hat{\varphi} = -\sin\varphi\,\hat{x} + \cos\varphi\,\hat{y}$$

$$\hat{z} = \hat{z}$$

První dvě rovnice jsem vyřešil pro $\hat{x}, \hat{y}$:

$$\hat{x} = \cos\varphi\,\hat{r} - \sin\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\hat{y} = \sin\varphi\,\hat{r} + \cos\varphi\,\hat{\varphi}$$

Z řetízkového pravidla plynou vztahy mezi operátory parciálních derivací:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y}$$

Vyřešením soustavy dvou rovnic a dosazením derivací jsem získal vztahy pro $\partial/\partial x$ a $\partial/\partial y$:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

V kartézských souřadnicích vypadá operátor prostorové derivace takto:

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

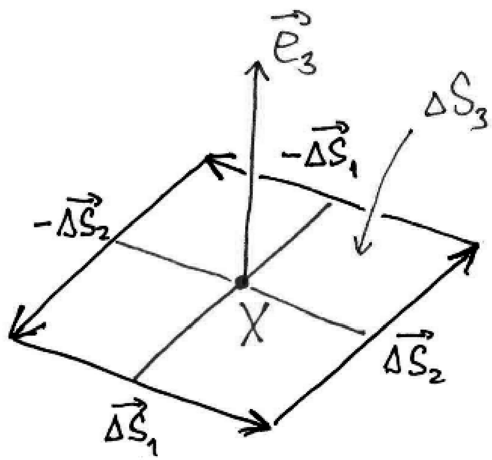
Za $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\partial/\partial x$ a $\partial/\partial y$ můžeme dosadit. Po úpravě výrazu dostaneme:

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Musím se přiznat, že si nepamatuji, že by odvození vzorce pro ∇ v obecných orthogonálních souřadnicích bylo tak náročné - obzvlášť na psacím stroji mi trvalo zapsat postup několik hodin. Bohužel, peníze na nový počítač teď rozhodně nemám, budu to tedy muset nějak vydržet. Protože ale technicky vzato už je čtvrtého, pro dnešek toho bylo, myslím, víc než dost.

Pokračuji v měření / 4. jan.

$$\int\limits_S \nabla \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \oint\limits_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{s}$$



$$X_{j\pm} = X \pm \Delta \mathbf{s}_j$$

$$\nabla \times \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot \Delta \mathbf{s}$$

$$\nabla \times \mathbf{a} \cdot (\Delta x^1 \times \Delta x^2) = \mathbf{a} \cdot \Delta s_1 (X_{2-}) + \mathbf{a} \cdot \Delta s_2 (X_{1-}) - \mathbf{a} \cdot \Delta s_1 (X_{2+}) - \mathbf{a} \cdot \Delta s_2 (X_{1+})$$

$$\nabla \times \mathbf{a} \cdot h_1 h_2 (\Delta \xi^1 \times \Delta \xi^2) = -\Delta \mathbf{s}_2 \cdot \nabla(\mathbf{a}^1 \Delta s_1) + \Delta \mathbf{s}_1 \cdot \nabla(\mathbf{a}^2 \Delta s_2)$$

$$h_1 h_2 \nabla \times \mathbf{a} \cdot \Delta S' = \Delta \xi^1 \Delta \xi^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \xi^2}(a^1 h_1) + \frac{\partial}{\partial \xi^1}(a^2 h_2)\right)$$

Složky rotace v obecných orthogonálních souřadnicích jsou tedy:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial \mathbf{a}^3 h_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial a^2 h_2}{\partial \xi_3}\right)\xi_1 + \frac{1}{h_3 h_1}\left(\frac{\partial \mathbf{a}^1 h_1}{\partial \xi_3} - \frac{\partial a^3 h_3}{\partial \xi_1}\right)\xi_2 + \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial \mathbf{a}^2 h_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial \mathbf{a}^1 h_1}{\partial \xi_2}\right)\xi_3$$

Teď už jen dosadím Lamého koeficienty a máme vzorec pro rotaci ve válcových souřadnicích:

$$\nabla \times a = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r a_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi}\right)\hat{z}$$

Jediná nenulová derivace $v(r,\varphi,z)$ je $\partial v_\varphi/\partial r$, proto v rotaci pole zbude jenom jeden člen:

$$\begin{aligned} \nabla \times v &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r v_\varphi - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} v_\varphi\right)\hat{z} \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\Gamma}{2\pi r} - \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} 0\right)\hat{z} \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{\Gamma}{2\pi}\right)\hat{z} \\ &= \frac{1}{r} 0\hat{z} = 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že rotace je nulová. Mezitím pro cirkulaci kolem osy víru platí:

$$\oint_{=c} v \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} v(R,\varphi,0) \cdot \hat{\varphi} R d\varphi$$

$$2\pi \int \frac{\Gamma}{2\pi R} R d\varphi = 0$$