Matematika pro Fyziky 2: DÚ 2

Michal Grňo

5. června 2020

1 Příklad 6

1.1 Zadání

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

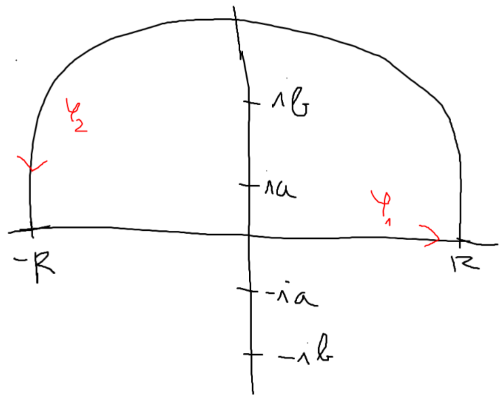
1.2 Řešení

Integrovanou funkci si rozšíříme na $\mathbb{C}$. Vidíme, že je holomorfní až na konečný počet singularit. Rozkladem jmenovatele nalezneme, kde leží její singularity:

$$(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2 = (x+\mathrm{i}a)(x-\mathrm{i}a)(x+\mathrm{i}b)^2(x-\mathrm{i}b)^2$$

Máme tedy jednonásobné kořeny $\pm ia$ a dvojnásobné kořeny $\pm ib$.

Hodnotu integrálu I vypočteme pomocí křivkového integrálu v komplexní rovině. Budeme integrovat po křivce $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2$:



$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}, \qquad \int_\varphi f \, \mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f \, \mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} f \, \mathrm{d}z$$

$$\varphi_1 = t \mapsto Rt, t \in [-1,1], \qquad \varphi_2 = t \mapsto Re^{it}, t \in [0, \pi]$$

Pro dostatečně velkou počáteční volbu R budou obě singularity uvnitř integrované oblasti. Nyní vypočteme $\int_\varphi f \, \mathrm{d}z$ pomocí reziduové věty, nejprve za předpokladu, že $a \neq b$:

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f \, \mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i} \left(\mathrm{Res}_{\mathrm{i}a} f + \mathrm{Res}_{\mathrm{i}b} f\right) \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left(\frac{1}{2a\mathrm{i}} \frac{1}{(b^2-a^2)} + \lim_{z\to\mathrm{i}b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{(z-\mathrm{i}b)^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} \right) \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left(-\frac{\mathrm{i}}{2a(b^2-a^2)} + \frac{\mathrm{i}(3b^2-a^2)}{4b^3(a^2-b^2)} \right) \\
&= \frac{\pi}{(b^2-a^2)} \left(\frac{1}{a} + \frac{3b^2-a^2}{2b^3} \right) \quad = \quad \pi \frac{2b^3+3ab^2-a^3}{2ab^3(b^2-a^2)}.
\end{aligned}$$

Nyní vyšetříme případ $a = b$:

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}a} f = 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to\mathrm{i}a} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{(z-\mathrm{i}a)^3}{(z^2+a^2)^3}$$

$$= \pi\mathrm{i} \lim_{z\to\mathrm{i}a} -3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{(z+\mathrm{i}a)^4} = 3\pi\mathrm{i} \lim_{z\to\mathrm{i}a} \frac{4}{(z+\mathrm{i}a)^5} = \frac{3\pi}{8a^5}.$$

Nyní učiníme limitní přechod $R \to \infty$:

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}z = \text{konst.}$$

$$\int_{\varphi_1} f \,\mathrm{d}z \to \int_{-\infty}^{+\infty} f \,\mathrm{d}z$$

$$\int_{\varphi_2} f \,\mathrm{d}z \to 0$$

Že jde integrál přes φ_2 skutečně do nuly nám říká Jordanovo lemma, protože $RM_R \sim R^{-5}$. Dostáváme tedy:

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} f \,\mathrm{d}z$$

$$\int_\varphi f \,\mathrm{d}z = I + 0$$

$$I = \begin{cases} a = b: \ \dfrac{3\pi}{8a^5} \\[2ex] a \neq b: \ \pi \dfrac{2b^3 + 3ab^2 - a^3}{2ab^3(b^2 - a^2)} \end{cases}$$

2 Příklad 16

2.1 Zadání

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^3}\,\mathrm{d}x, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.2 Řešení

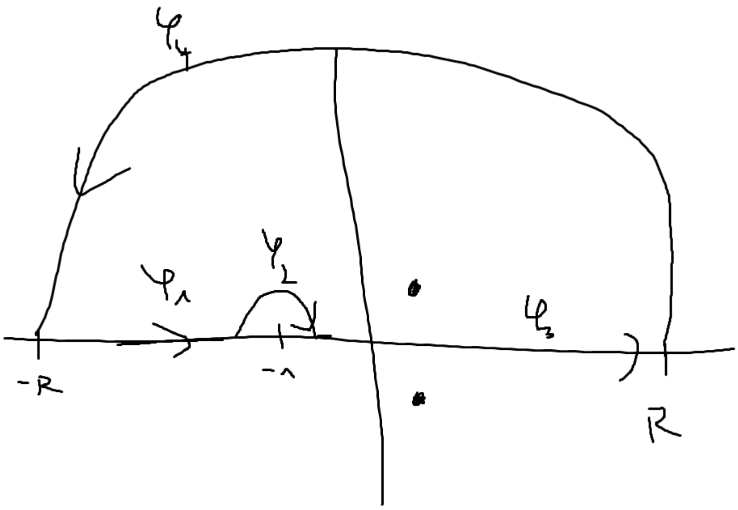
Nejprve přejdeme ke komplexní proměnné:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{1+z^3}\,\mathrm{d}z \equiv \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f\,\mathrm{d}z.$$

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{1+z^3}$$

Původní funkce je zřejmě sudá v parametru t, proto se u f omezíme pouze na $t \geq 0$. Funkce má singularitu v bodě -1, který leží na intervalu, přes který integrujeme, budeme tedy řešit integrál ve smyslu hlavní hodnoty. Kromě této singularity má f ještě dvě další: $e^{\pi\mathrm{i}/3}, e^{-\pi\mathrm{i}/3}$.

K výpočtu integrálu opět použijeme křivkový integrál v komplexní rovině:



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= t \mapsto t, t \in [-R, -1 - {}^1\!/\!_R] \\
\varphi_2 &= t \mapsto -1 + R^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in [\pi, 0] \\
\varphi_3 &= t \mapsto t, t \in [-1 + {}^1\!/\!_R, R] \\
\varphi_4 &= t \mapsto R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in [0, \pi]
\end{aligned}$$

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} f\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_4} f\,\mathrm{d}z$$

Nyní použijeme limitní přechod $R \to \infty$ a dostaneme:

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{e^{\pi\mathrm{i}/3}} f = \text{konst.} \tag{1}$$

$$\int_{\varphi_1} f\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f\,\mathrm{d}z \to \text{p. v.} \int_{-\infty}^{+\infty} f\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

$$\int_{\varphi_2} f\,\mathrm{d}z \to -\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{-1} f \tag{3}$$

$$\int_{\varphi_4} f\,\mathrm{d}z \to 0 \tag{4}$$

Zatímco (??) vyplývá z reziduové věty, (??) vyplývá z tvrzení o obíhání části kružnice a (??) plyne z Jordanovy věty, protože $RM_R \sim R^{-3}$ pro $t > 0$ a $\sim R^{-2}$ pro $t = 0$.

Stačí nám tedy vypočíst hodnoty reziduí v bodech -1 a $\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}$:

$$\operatorname{Res}_{-1} f = \operatorname{Res}_{-1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{1+z^3} = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,(1+z^3)}\right|_{z=-1} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{3}$$

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}} f = \operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{1+z^3} = \left.\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tz}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,(1+z^3)}\right|_{z=\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}} . = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\exp \pi \mathrm{i}/3}}{3\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}} = \frac{1}{3}\exp\left(\mathrm{i}(\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

Dostáváme tedy (pro $t \geq 0$):

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Re}\int_{\varphi} f\,\mathrm{d}z - \operatorname{Re}\int_{\varphi_2} f\,\mathrm{d}z = \operatorname{Re} 2\pi \mathrm{i}\exp\left(\mathrm{i}(\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \operatorname{Re}\pi \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{3} \\ &= \frac{\pi}{3}\left(\sin t - 2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\sin(\frac{t}{2} - \frac{2}{3}\pi)\right) \end{aligned}$$

Nakonec se zbavíme omezení $t \geq 0$ a fukncí sudě rozšíříme:

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left(\sin|t| - 2\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}|t|}\sin(\frac{|t|}{2} - \frac{2}{3}\pi)\right).$$