Matematika pro Fyziky 2: DÚ 3

Michal Grňo

5. června 2020

1 Příklad 5

1.1 Zadání

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\,\mathrm{d}x, \qquad |a| < \pi,\ a \in \mathbb{R}$$

1.2 Řešení

Jde o sudou funkci, proto můžeme integrál rozšířit na interval $(-\infty, \infty)$:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x}\,\mathrm{d}x.$$

Výraz si přepíšeme pomocí vzorce $\cosh x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$ a přejdeme do $\mathbb{C}$:

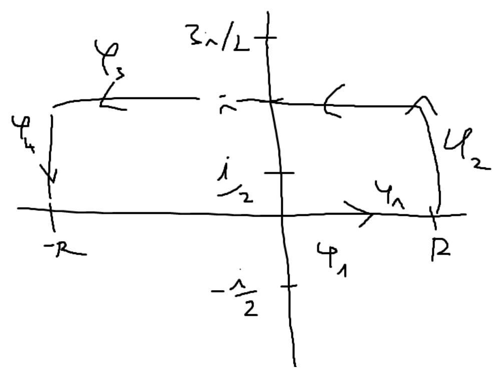
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{az} + \mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}\,\mathrm{d}z}_{I_2}\Bigg).$$

$$f_1(z) = \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}, \qquad f_2(z) = \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}}.$$

Funkce mají singularity v bodech:

$$\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z} = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \mathrm{i}(n + \frac{1}{2}).$$

Integrál I vypočteme pomocí křivkového integrálu v komplexní rovině:



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= t \mapsto Rt,\ t \in [-1, 1],\\
\varphi_2 &= t \mapsto R + \mathrm{i}t,\ t \in [0, 1],\\
\varphi_3 &= t \mapsto -Rt,\ t \in [-1, 1]\\
\varphi_4 &= t \mapsto -R + \mathrm{i}(1 - t),\ t \in [0, 1]
\end{aligned}$$

$$\int_\varphi f_1\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1, \qquad \int_\varphi f_2\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2,$$

$$\int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \int_{\varphi_3} f_1 \,\mathrm{d}z, \qquad \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a} \int_{\varphi_3} f_2 \,\mathrm{d}z.$$

Budeme zkoumat vývoj při $R \to \infty$. Vidíme, že integrály přes φ_2 a φ_4 vymizí:

$$z \to +\infty : \frac{\mathrm{e}^{az} + \mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} \sim \mathrm{e}^{(|a|-\pi)z} \to 0$$
$$z \to -\infty : \frac{\mathrm{e}^{az} + \mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} \sim \mathrm{e}^{-(|a|-\pi)z} \to 0$$

Naopak integrály přes φ_1 a φ_3 zkonvergují k násobku I. Vypočteme nyní rezidua.

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1 = \operatorname{Res}_{\mathrm{i}/2} \frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2}}{\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + \pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2}$$

$$\operatorname{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2 = \operatorname{Res}_{\mathrm{i}/2} \frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{\pi z} + \mathrm{e}^{-\pi z}} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}}{\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} + \pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}$$

Nyní už víme všechno potřebné pro výpočet výsledku:

$$\int_{\varphi} f_1 \,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f_1 \,\mathrm{d}z \qquad \int_{\varphi} f_2 \,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f_2 \,\mathrm{d}z$$

$$2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_{\mathrm{i}/2} f_1 = (1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}) \int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z \qquad 2\pi \mathrm{i} \operatorname{Res}_{\mathrm{i}/2} f_2 = (1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}) \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z$$

$$\int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}} \qquad \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}$$

$$2I = 2I_1 + 2I_2 = \int_{\varphi_1} f_1 \,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_1} f_2 \,\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}}{1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}} = \frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}a/2} + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a/2}}{2 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}} = \frac{1}{\cos \frac{a}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2 \cos \frac{a}{2}}.$$

2 Příklad 13

2.1 Zadání

$$I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1}\,\mathrm{d}x, \qquad p \in (-1, 2)$$

2.2 Řešení

Nejprve provedeme v integrálu substituci:

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = \dfrac{x}{1-x},\ x = \dfrac{z}{1+z} \\ \mathrm{d}x = (1-x)^2\,\mathrm{d}z \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{z\left(\frac{z}{z+1}\right)^{-p}\left(1-\frac{z}{z+1}\right)^p}{(z+1)(2z^2+2z+1)}\,\mathrm{d}z \overset{*}{=} \int_0^{+\infty} \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)}\,\mathrm{d}z$$

V poslední rovnosti ($*$) předpokládáme, že $p \neq 0$ a $p \neq 1$. V případě, že by p těchto hodnot nabývalo, má integrál triviální řešení:

$$I|_{p=0} = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2,$$

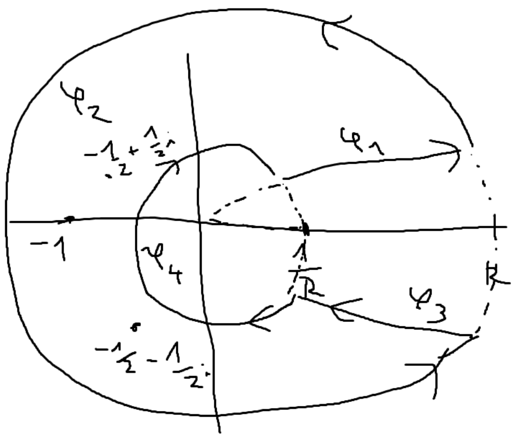
$$I|_{p=1} = \int_0^1 \frac{1-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{atg} x]_0^1 - I|_{p=0} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Pro zbylé hodnoty p máme:

$$I = \int_0^{+\infty} f\,\mathrm{d}z, \qquad f(z) = \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)}.$$

Funkci f rozšíříme na $\mathbb{C}$, vidíme, že je holomorfní až na izolované singularity v bodech -1 a $-1/2 \pm 1/2\mathrm{i}$.

Integrál I spočteme pomocí křivkového integrálu přes „Pac-Mana“ v komplexní rovině.



$$\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus \varphi_3 \oplus \varphi_4$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= t \mapsto t\mathrm{e}^{\mathrm{i}R^{-1}},\ t \in [R^{-1}, R] \\ \varphi_2 &= t \mapsto R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [R^{-1}, 2\pi - R^{-1}] \\ \varphi_3 &= t \mapsto (R-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}R^{-1}},\ t \in [0, R - R^{-1}] \\ \varphi_4 &= t \mapsto R^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t},\ t \in [R^{-1}, 2\pi - R^{-1}] \end{aligned}$$

$$\int_\varphi f\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}_{-1} f + \operatorname{Res}_{-1/2+1/2\mathrm{i}} f + \operatorname{Res}_{-1/2-1/2\mathrm{i}} f\right)$$

Nyní opět učiníme limitní přechod $R \to \infty$:

$$\int_{\varphi} f \, \mathrm{d}z = \text{konst.}$$
$$\int_{\varphi_1} f \, \mathrm{d}z \to I$$
$$\int_{\varphi_2} f \, \mathrm{d}z \sim R^{-1-p} \to 0 \text{ pro } p > -1$$
$$\int_{\varphi_3} f \, \mathrm{d}z \to -\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p} I$$
$$\int_{\varphi_4} f \, \mathrm{d}z \leq \int_0^{2\pi} \frac{(R^{-1})^{2-p}}{(1-R^{-1})^3} \, \mathrm{d}\phi \leq \frac{(R^{-1})^{2-p}}{\text{konst.}} \to 0 \text{ pro } p < 2$$

Máme tedy:

$$\int_{\varphi} f \, \mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f \, \mathrm{d}z + \int_{\varphi_3} f \, \mathrm{d}z$$
$$2\pi \mathrm{i} \left(\mathrm{Res}_{-1} f + \mathrm{Res}_{-1/2+1/2\mathrm{i}} f + \mathrm{Res}_{-1/2-1/2\mathrm{i}} f \right) = (1 - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p}) I$$
$$\frac{2\pi \mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p}} \left(\mathrm{Res}_{-1} f + \mathrm{Res}_{-1/2+1/2\mathrm{i}} f + \mathrm{Res}_{-1/2-1/2\mathrm{i}} f \right) = I$$

Zbývá spočítat rezidua:

$$f = \frac{z^{1-p}}{(z+1)(2z^2+2z+1)} = \frac{z^{1-p}}{2(z+1)(z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i})(z+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i})}$$

$$\mathrm{Res}_{-1} f = -\frac{2}{5}(-1)^{-p} = -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi p}$$
$$\mathrm{Res}_{-1/2+1/2\mathrm{i}} f = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \right)^{-p}$$
$$\mathrm{Res}_{-1/2-1/2\mathrm{i}} f = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2} \right)^{-p}$$

Pro $p \in (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$ tedy máme:

$$\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1 - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} p}} \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \right)^{-p} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2} \right)^{-p} - \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi p} \right).$$