Úvod do kvantové mechaniky: Domácí úkoly z přednášek

Michal Grňo

31. srpna 2020

1 Projekce spinu do obecného směru

1.1 Zadání

Nechť projekce spinu do osy z je $1/2$. S jakou pravděpodobností naměříme projekci spinu $\pm 1/2$ do obecného směru?

1.2 Řešení

Zavedeme si jednotkový vektor $\vec{n}$ parametrizovaný sférickými souřadnicemi:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Zavedeme si operátor $\hat{S}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \hat{\vec{S}}$, kde $\hat{\vec{S}}$ reprezentujeme Pauliho maticemi:

$$\hat{\vec{S}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Operátor $\hat{S}_{\vec{n}}$ nám potom vyjde:

$$\hat{S}_{\vec{n}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Víme, že vlastní čísla $\hat{S}_{\vec{n}}$ jsou $\pm 1/2$, přejdeme tedy rovnou k nalezení vlastních vektorů:

$$\ker(\hat{S}_{\vec{n}} - 1/2\,\hat{I}) = \ker \begin{pmatrix} \cos\vartheta - 1 & \sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\vartheta - 1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}(\cot\vartheta + \csc\vartheta) \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

$$\ker(\hat{S}_{\vec{n}} + 1/2\,\hat{I}) = \ker \begin{pmatrix} \cos\vartheta + 1 & \sin\vartheta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \\ \sin\vartheta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} & -\cos\vartheta + 1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}(\cot\vartheta - \csc\vartheta) \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

Normalizované vlastní stavy jsou tedy:

$$|\pm\vec{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \cos\vartheta}} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \pm 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost naměření $|\pm\vec{n}\rangle$, je-li stav $|+z\rangle$, je:

$$P = |\langle +z | \pm\vec{n} \rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1 \pm \cos\vartheta}} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \pm 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\vartheta \end{pmatrix} \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos\vartheta \pm 1}{\sqrt{1 \pm \cos\vartheta}} \right|^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\cos\theta.$$

2 Rabiho metoda

2.1 Zadání

Mějme částici se spinem $1/2$ v poli s intenzitou

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_1 \cos \omega t \\ B_1 \sin \omega t \\ B_0 \end{pmatrix},$$

kde $B_1 \ll B_0$, $\omega \approx -KB_0$.

Stav spinu $\left|\psi(t)\right\rangle$ začíná v čase $t = 0$ jako $|\pm z\rangle$. S jakou pravděpodobností bude v obecném čase t ve stavu $|-z\rangle$?

2.2 Řešení

Hamiltonián systému je

$$\hat{H} = -K\,\hat{\vec{S}} \cdot \vec{B},$$

kde $\hat{\vec{S}}$ reprezentujeme Pauliho maticemi. Využijeme rozklad $\hat{\vec{S}}$ na žebříkové operátory $\hat{S}_\pm$:

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_\mathrm{x} \pm \mathrm{i}\hat{S}_\mathrm{y} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \pm 1 \\ 1 \mp 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\} = \left|\pm\right\rangle \left\langle\mp\right|.$$

Navíc víme, že

$$\hat{S}_\mathrm{z} = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| \; - \; |-\rangle\langle-|).$$

Podobně rozložíme $\vec{B}$:

$$B_\pm = B_\mathrm{x} \pm \mathrm{i}B_\mathrm{y} = B_1(\cos \omega t \pm \mathrm{i} \sin \omega t) = B_1\,\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\omega t}.$$

Nyní můžeme vyjádřit hamiltonián ve tvaru

$$\hat{H} = -K\,\hat{\vec{S}}\cdot\vec{B} = -K\,\left(\frac{1}{2}(\hat{S}_+ B_- + \hat{S}_- B_+) + \hat{S}_\mathrm{z} B_\mathrm{z}\right) = -\frac{K}{2}\left(B_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,|+\rangle\langle-| \; + \; B_1\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\,|-\rangle\langle+| \; + \; |+\rangle\langle+| \; - \; |-\rangle\langle-|\right),$$

tedy v maticové formě

$$\langle\pm|\,\hat{H}\,|\pm\rangle = -\frac{K}{2}\begin{pmatrix} B_0 & B_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ B_1\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} & -B_0 \end{pmatrix}.$$

Nyní se můžeme pustit do řešení samotné Schrödingerovy rovnice.

$$-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|\psi\rangle = \hat{H}(t)\,|\psi\rangle$$

$$-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} = -\frac{K}{2}\begin{pmatrix} B_0 & B_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \\ B_1\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} & -B_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix}$$

$$-\mathrm{i}\dot{c}_+ = -\frac{KB_0}{2}\;c_+ - \frac{KB_1}{2}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,c_- \tag{1}$$

$$-\mathrm{i}\dot{c}_- = +\frac{KB_0}{2}\;c_- - \frac{KB_1}{2}\;\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\,c_+ \tag{2}$$

Z rovnice (1): $\quad c_- = \dfrac{2}{KB_1}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{i}\dot{c}_+ - \dfrac{KB_0}{2}\,c_+\right) = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{i}\,\dfrac{2}{KB_1}\,\dot{c}_+ - \dfrac{B_0}{B_1}\,c_+\right)$

$$\text{Z rovnice (2):}$$
$$-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{i}\ \frac{2}{KB_1}\ \dot{c}_+ - \frac{B_0}{B_1}\ c_+\right) = \frac{KB_0}{2}\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{i}\ \frac{2}{KB_1}\ \dot{c}_+ - \frac{B_0}{B_1}\ c_+\right) - \frac{KB_1}{2}\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\ c_+$$

$$\Downarrow$$

$$0 = \ddot{c}_+ + \mathrm{i}\omega\dot{c}_+ + \underbrace{\left(\frac{{B_0}^2K^2}{4} - \frac{B_0K\omega}{2} - \frac{{B_1}^2K^2}{4}\right)}_{\kappa} c_+$$

Máme tedy rovnici typu

$$\begin{aligned} f'' + \mathrm{i}\omega f' + \kappa f &= 0 \\ \lambda^2 + \mathrm{i}\omega\lambda\ + \kappa\ \ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{-\mathrm{i}\omega \pm \sqrt{(\mathrm{i}\omega)^2 - 4\kappa}}{2} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega \pm \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\omega^2 + 4\kappa}$$

$$f = C_1\ \exp\mathrm{i}(-\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+4\kappa}\ )t + C_2\ \exp\mathrm{i}(-\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+4\kappa}\ )t$$

Odmocninu můžeme ještě dále zjednodušit zanedbáním členu s ${B_1}^2$, který je výrazně menší než ostatní členy (viz zadání).

$$\sqrt{\omega^2+4\kappa} = \sqrt{\omega^2 + {B_0}^2K^2 - 2B_0K\omega - {B_1}^2K^2} \approx \sqrt{\omega^2 - 2B_0K\omega + {B_0}^2K^2} = B_0K - \omega$$

Pro c_+ tedy dostáváme:

$$c_+(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\left(C_1\mathrm{e}^{+\mathrm{i}t\ \frac{B_0K-\omega}{2}} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\ \frac{B_0K-\omega}{2}}\right)$$

$$c_+(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\left(D_1\cos\frac{B_0K-\omega}{2}t + D_2\sin\frac{B_0K-\omega}{2}t\right)$$

Dosazením do (2) získáme:

$$c_-(t) = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\omega t/2}\left(\mathrm{i}\ \frac{2}{KB_1}\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ \left(D_1\cos\tfrac{B_0K-\omega}{2}t + D_2\sin\tfrac{B_0K-\omega}{2}t\right) - \frac{B_0}{B_1}\ \left(D_1\cos\tfrac{B_0K-\omega}{2}t + D_2\sin\tfrac{B_0K-\omega}{2}t\right)\right)$$

Konstanty D_n určíme z počáteční podmínky $\big|\psi(t=0)\big\rangle = |\pm z\rangle$ a z požadavku, aby byl stav $\big|\psi(t)\big\rangle$ normalizovaný. Pro přehlednost si zavedeme označení $\psi_\pm(0) \equiv |\pm z\rangle$.

$$1 = \big\langle \pm z\big|\psi_\pm(0)\big\rangle = \begin{Bmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}D_1\\D_3\end{pmatrix}$$

Tedy pro ψ_+ máme $D_1 = 1,\ D_2 = 0$, pro ψ_- zase $D_3 = 1,\ D_4 = 0$. Zbylé konstanty dopočítáme dosazením. Celkově platí:

$$\big|\psi_+(t)\big\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\ \ \cos\dfrac{B_0K-\omega}{2}t \\ \\ \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2}\ \ \sin\dfrac{B_0K-\omega}{2}t \end{pmatrix}, \quad \big|\psi_-(t)\big\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\ \ \sin\dfrac{B_0K-\omega}{2}t \\ \\ \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t/2}\ \ \cos\dfrac{B_0K-\omega}{2}t \end{pmatrix}.$$

Pokud by nastal případ $\omega = -B_0K$, máme:

$$\big|\psi_+(t)\big\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}KB_0t/2}\ \ \cos B_0Kt \\ \\ \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KB_0t/2}\ \ \sin B_0Kt \end{pmatrix}, \quad \big|\psi_-(t)\big\rangle = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}KB_0t/2}\ \ \sin B_0Kt \\ \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}KB_0t/2}\ \ \cos B_0Kt \end{pmatrix}.$$

3 $\mathcal{PT}$-symetrický hamiltonián

3.1 Zadání

Máme zadány operátory

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} K & -\mathrm{i}a \\ -\mathrm{i}a & -K \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kde $K, a \in \mathbb{R}_+$. Ukažte, že

1. $\hat{\mathcal{P}}^2 = \mathbb{1}, \quad \hat{\Gamma}^+ = \hat{\mathcal{P}}\,\hat{\Gamma}\,\hat{\mathcal{P}}$
2. $\hat{\Gamma}\,|\pm\rangle = \pm\Gamma\,|\pm\rangle\,, \quad \Gamma = \sqrt{K^2 - a^2}\,,$ tedy pro $a < K$ je neporušena $\mathcal{PT}$-symetrie.
3. pro $a > K$ platí $\langle\pm|\,\hat{\mathcal{P}}\,|\pm\rangle = 0$
4. pro $a < K$ platí $\langle m|\,\hat{\mathcal{P}}\,|n\rangle = (-1)^m\,\delta_{mn}$

Pro $\mathcal{PT}$-symetrické operátory platí upravená relace úplnosti

$$\mathbb{1} = \sum_n (-1)^n\,|n\rangle\,\langle n|\,\hat{\mathcal{P}}.$$

Ověřte její platnost pro $\hat{\Gamma}$ při $a < K$.

Definujeme operátor

$$\hat{\mathcal{C}} \coloneqq \sum_n |n\rangle\,\langle n|\,\hat{\mathcal{P}},$$

ten komutuje s $\hat{\Gamma}$ i $\hat{\mathcal{P}}$ a tvoří základ skalárního součinu, pod kterým je $|n\rangle$ ortonormální systém:

$$(\psi, \phi)_{\mathcal{CPT}} \coloneqq \langle\psi|\,\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}\,|\phi\rangle\,.$$

Vypočtěte $\hat{\mathcal{C}}$ a pro $a < K$ ověřte, že

1. $\hat{\mathcal{C}}^2 = \mathbb{1}$
2. $\hat{\mathcal{C}}\,|\pm\rangle = \pm\,|\pm\rangle$
3. $\hat{\mathcal{C}}\,|+\rangle\,\langle+|\,\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{C}}\,|-\rangle\,\langle-|\,\hat{\mathcal{P}} = \mathbb{1}$
4. $\langle m|\,\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}\,|n\rangle = \delta_{mn}$

3.2 Řešení

$$\hat{\mathcal{P}}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{P}}\,\hat{\Gamma}\,\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} K & -\mathrm{i}a \\ -\mathrm{i}a & -K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & \mathrm{i}a \\ \mathrm{i}a & -K \end{pmatrix} = \hat{\Gamma}^+$$

$$0 = \left|\hat{\Gamma} - \lambda\mathbb{1}\right| = \begin{vmatrix} K - \lambda & -\mathrm{i}a \\ -\mathrm{i}a & -K - \lambda \end{vmatrix} = -(K - \lambda)(K + \lambda) + a^2 = \lambda^2 - (K^2 - a^2)$$
$$\lambda = \pm\sqrt{K^2 - a^2} \equiv \pm\Gamma$$

Nyní nalezneme vlastní vektory pro $a > K$, využijeme parametrizaci $a = K\cosh t,\ t \in \mathbb{R}$.

$$\hat{\Gamma} = K\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\cosh t \\ -\mathrm{i}\cosh t & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \sqrt{K^2 - K^2\cosh^2 t} = \mathrm{i}K\sinh t\,, \quad |\pm\rangle = \begin{pmatrix} A_\pm \\ B_\pm \end{pmatrix}$$
$$\hat{\Gamma}\,|\pm\rangle = \pm\Gamma\,|\pm\rangle$$

$$A_\pm - \mathrm{i}B_\pm\cosh t = \pm\mathrm{i}A_\pm\sinh t$$
$$-B_\pm - \mathrm{i}A_\pm\cosh t = \pm\mathrm{i}B_\pm\sinh t$$

$$B_\pm = A_\pm\frac{-\mathrm{i} \pm \sinh t}{\cosh t}$$

$$\langle\pm|\,\hat{\mathcal{P}}\,|\pm\rangle = \begin{pmatrix} A_\pm \\ B_\pm \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\pm \\ B_\pm \end{pmatrix} = {A_\pm}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\mathrm{i}\pm\sinh t}{\cosh t} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\mathrm{i}\pm\sinh t}{\cosh t} \end{pmatrix} = {A_\pm}^2 \left(1 + \frac{\mathrm{i}\pm\sinh t}{\cosh t}\,\frac{\mathrm{i}\mp\sinh t}{\cosh t}\right)$$

$$= {A_\pm}^2 \left(1 + \frac{\mathrm{i}^2 - \sinh^2 t}{\cosh^2 t}\right) = {A_\pm}^2 \left(1 - \frac{1+\sinh^2 t}{\cosh^2 t}\right) = 0$$

Tím jsme dokázali první tři body zadání. Nyní budeme pracovat s $a < K$, zvolíme parametrizaci $a = K\sin t,\ t \in (0,\pi)$.

$$\hat{\mathit{\Gamma}} = K \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\sin t \\ -\mathrm{i}\sin t & -1 \end{pmatrix}\ , \quad \mathit{\Gamma} = K\sqrt{1-\sin^2 t} = K\cos t\,, \quad |\pm\rangle = \begin{pmatrix} A_\pm \\ B_\pm \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathit{\Gamma}}\,|\pm\rangle = \pm\mathit{\Gamma}\,|\pm\rangle$$

$$\begin{aligned} A_\pm - \mathrm{i}B_\pm\sin t &= \pm A_\pm\cos t \\ -B_\pm - \mathrm{i}A_\pm\sin t &= \pm B_\pm\cos t \end{aligned}$$

$$B_\pm = \mathrm{i}A_\pm\,\frac{-1\pm\cos t}{\sin t}$$

$$|\pm\rangle = A_\pm \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\ \frac{-1\pm\cos t}{\sin t} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\cos t}} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \sqrt{1\mp\cos t} \end{pmatrix}$$

Dokážeme čtvrtý bod zadání:

$$\langle\pm|\,\hat{\mathcal{P}}\,|\pm\rangle = \frac{1}{2\cos t} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \sqrt{1\mp\cos t} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \sqrt{1\mp\cos t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cos t}\left(\frac{\sin^2 t}{1\mp\cos t} - (1\mp\cos t)\right) = \frac{\pm2\cos t}{2\cos t} = \pm1$$

$$\langle\pm|\,\hat{\mathcal{P}}\,|\mp\rangle = \frac{1}{2\cos t} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \sqrt{1\mp\cos t} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\pm\cos t}} \\ \sqrt{1\pm\cos t} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cos t}\left(\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} - \sqrt{1-\cos^2 t}\right) = 0$$

Nyní přistoupíme k odvození relace úplnosti a skalárního součinu.

$$\sum_n (-1)^n\,|n\rangle\,\langle n|\,\hat{\mathcal{P}} \ = \ \big(|+\rangle\langle+| \ - \ |-\rangle\langle-|\big)\,\hat{\mathcal{P}}$$

$$(2\cos t)\,|\pm\rangle\langle\pm|\,\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \sqrt{1\mp\cos t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \sqrt{1\mp\cos t} \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 t}{1\mp\cos t} & \mathrm{i}\sin t \\ -\mathrm{i}\sin t & 1\mp\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 t}{1\mp\cos t} & -\mathrm{i}\sin t \\ -\mathrm{i}\sin t & -1\pm\cos t \end{pmatrix}$$

$$\sum_n (-1)^n\,|n\rangle\,\langle n|\,\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{2\cos t} \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t} & -\mathrm{i}\sin t \\ -\mathrm{i}\sin t & -1+\cos t \end{pmatrix} - \frac{1}{2\cos t} \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 t}{1+\cos t} & -\mathrm{i}\sin t \\ -\mathrm{i}\sin t & -1-\cos t \end{pmatrix} = \frac{1}{2\cos t} \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 t(2\cos t)}{1-\cos^2 t} & 0 \\ 0 & 2\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{C}} = \sum_n |n\rangle\,\langle n|\,\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{2\cos t} \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t} & -\mathrm{i}\sin t \\ -\mathrm{i}\sin t & -1+\cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2\cos t} \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 t}{1+\cos t} & -\mathrm{i}\sin t \\ -\mathrm{i}\sin t & -1-\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sec t & -\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t \\ -\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t & -\sec t \end{pmatrix}$$

Přistoupíme k poslední části, kterou je ověření vlastností operátoru $\hat{\mathcal{C}}$.

$$\hat{\mathcal{C}}^2 = \begin{pmatrix} \sec t & -\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t \\ -\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t & -\sec t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \sec^2 t - \mathrm{tg}^2\,t & -\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t\sec t + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t\sec t \\ \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t\sec t + \mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t\sec t & -\mathrm{tg}^2\,t + \sec^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sin^2 t}{\cos^2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{2\cos t}\,\hat{\mathcal{C}}\,|\pm\rangle = \begin{pmatrix} \sec t & -\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t \\ -\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,t & -\sec t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \sqrt{1\mp\cos t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\ \frac{\sin t}{\cos t}\ \frac{1-1\mp\cos t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \frac{\sin^2 t - 1\mp\cos t}{\cos t\sqrt{1\mp\cos t}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\pm\mathrm{i}\sin t}{\sqrt{1\mp\cos t}} \\ \pm\sqrt{1\mp\cos t} \end{pmatrix} = \pm\sqrt{2\cos t}\ |\pm\rangle\ ,$$

tedy $\hat{\mathcal{C}}\,|\pm\rangle = \pm\,|\pm\rangle$. Poslední dva body plynou triviálně z tohoto výsledku a již dokázaných tvrzení.

$$\hat{\mathcal{C}}\,|+\rangle\langle+|\,\hat{\mathcal{P}} + \hat{\mathcal{C}}\,|-\rangle\langle-|\,\hat{\mathcal{P}} = |+\rangle\langle+|\,\hat{\mathcal{P}} - |-\rangle\langle-|\,\hat{\mathcal{P}} = \mathbb{1}$$

$$\langle m|\,\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{C}}\,|n\rangle = \langle m|\,\hat{\mathcal{P}}(-1)^n\,|n\rangle = (-1)^n\,(-1)^m\,\delta_{mn} = \delta_{mn}$$