Лабораторная работа №9

Приближенное вычисление площади фигуры методом Монте-Карло

Цель работы: изучение метода Монте-Карло (метода статистических испытаний) на примере вычисления площади фигуры.

Применим метод статических испытаний или метод Монте-Карло к задаче вычисления площади геометрической фигуры на плоскости.

Метод заключается в следующем. Поместим данную фигуру в квадрат и будем наугад бросать точки в этот квадрат. Будем исходить из того, что чем больше площадь фигуры, тем чаще в нее будут попадать точки. Таким образом, при большом числе N точек, наугад выбранных внутри квадрата, доля точек, содержащихся в данной фигуре k, приближенно равна отношению площади этой фигуры и площади квадрата:

Если площадь квадрата равна S_0 и в результате N испытаний, из которых при k исходах случайные точки оказались внутри фигуры, то площадь фигуры будет определяться выражением

$$S = \frac{k}{N} S_0$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи на конкретном примере.

Рассмотрим фигуру, представленную на рис. 1а., площадь которой нам заранее известна и равна $S_t = 8{,}38404$. Вообще говоря, фигура может быть любой, но обязательно должны быть известны границы фигуры, в виде аналитического выражения или совокупности таких выражений и логических условий.

В нашем примере множество точек фигуры определяется следующей системой неравенств:

$$
\begin{cases}
-2x^2 + y^3 < -1 \\
x^3 + 2y < 3 \\
-2 < x < 2 \\
-2 < y < 2
\end{cases}
$$

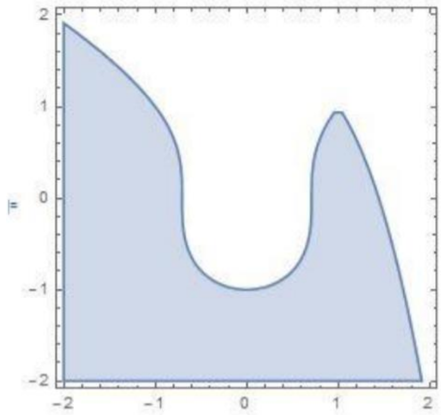


Рис. 1а

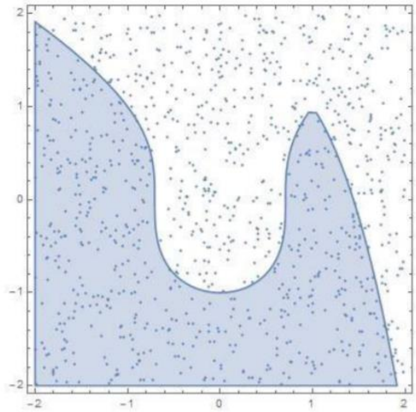


Рис. 1б

Площадь этой фигуры составляет часть прямоугольника площадью $S_0 = 4 \times 4 = 16$.

1. Генерируем случайные числа x, y и равномерно распределенные на отрезке $[-2; 2]$. Это будут координаты случайной точки в квадрате, в которую заключена фигура, площадь которой требуется найти. Полученная точка может как попасть в исследуемую фигуру, так и не не попасть (рис. 1б).

2. Проверяем принадлежность точки к исследуемой фигуре. Если попадания нет, т.е. не выполняется хотя бы одно из неравенств системы, то переходим к пункту 1 и генерируем координаты новой точки. Если попадание есть, то фиксируем это попадание. Значение счетчика числа попаданий увеличиваем на единицу и снова переходим к пункту 1.

Заметим, что попадание случайной точки точно на границу фигуры можно отнести как к первому, так и ко второму исходу.

Пункты 1 и 2 следует повторить в цикле достаточно большое число N раз. От этого, в конечном итоге, зависит точность вычислений. После проведения N повторов площадь фигуры найдем по формуле:

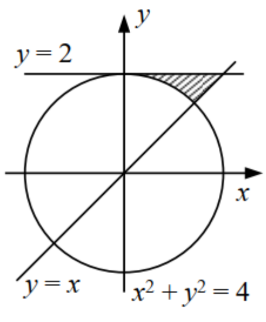
$$S = \frac{k}{N} S_0$$

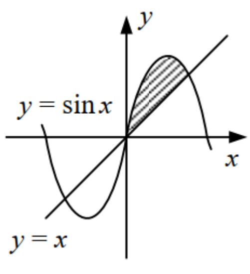
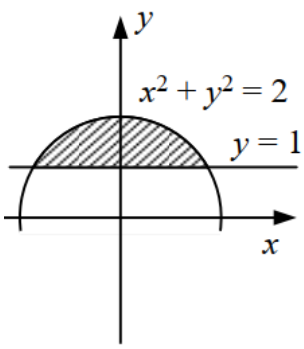
Задания на лабораторную работу 9

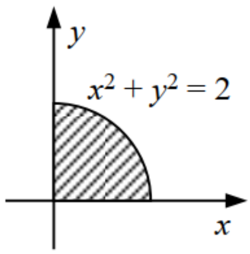
Задание – Методом Монте-Карло вычислить площади закрашенных фигур.

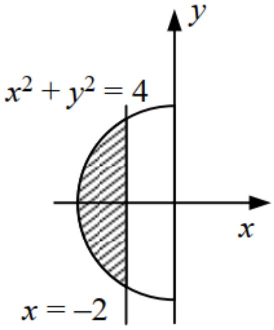
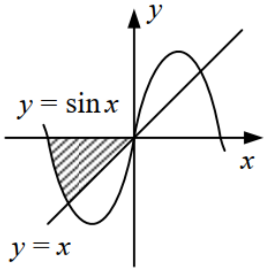
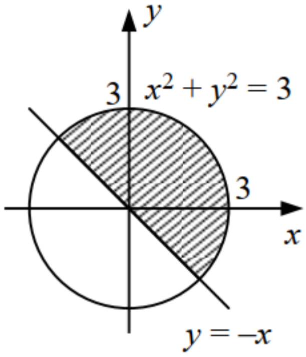
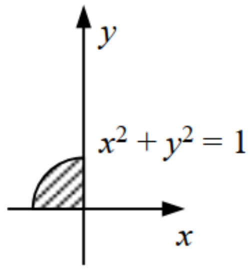
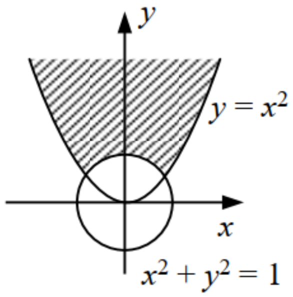
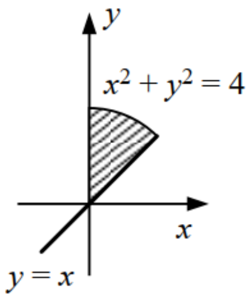
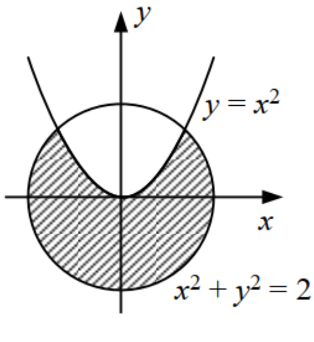
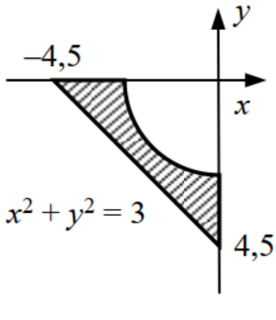
Выполнить аналитический расчет площади и выполнить серию экспериментов с разным количеством испытаний (числа случайных точек). Результаты свести в таблицу:

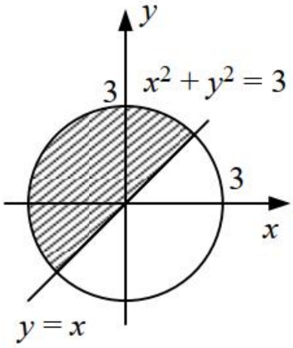
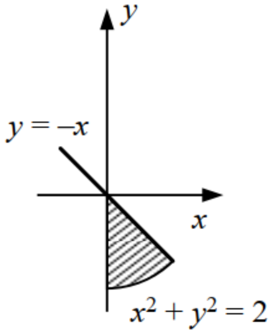
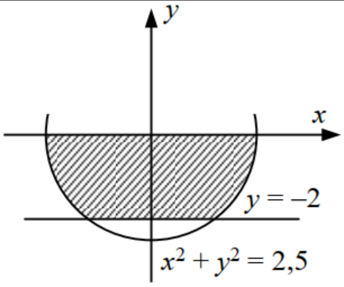
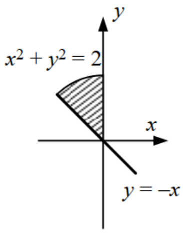
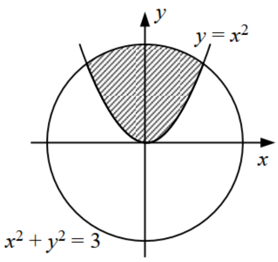
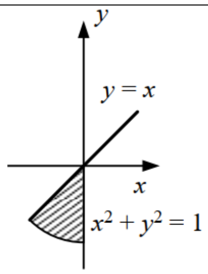
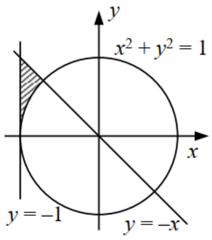
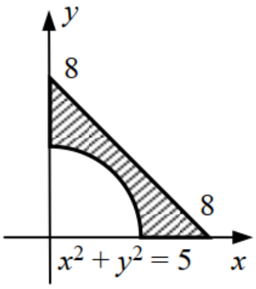
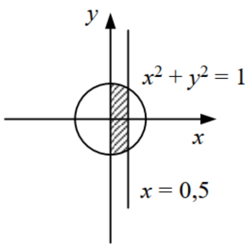
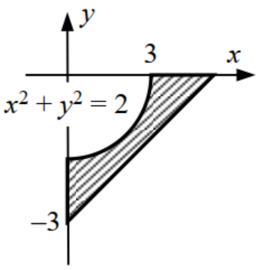
№	**Число точек**	**Число точек, принадлежащих фигуре**	**Площадь фигуры по методу Монте-Карло**	**Отклонение от истинной точности**
1	100			
2	1000			
3	10000			
4	100000			
5	1000000			
6	10000000			

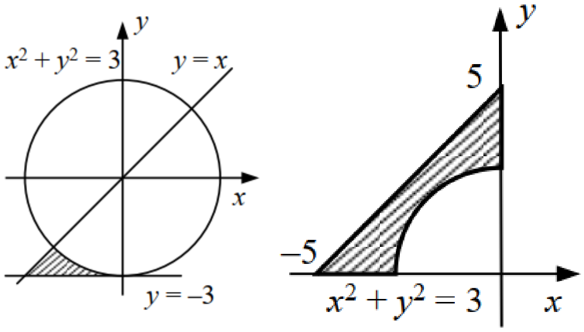
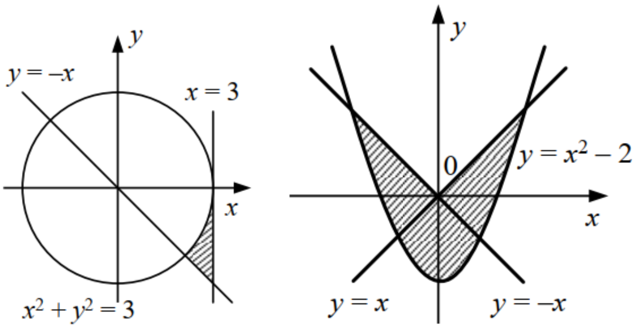
<table>
<tr><td>Номер варианта</td><td>Задания</td></tr>
<tr><td>1</td><td>


</td></tr>
<tr><td>2</td><td>


</td></tr>
</table>

3	y $x^2 + y^2 = 4$ x $x = -2$ y $y = \sin x$ x $y = x$
4	y 3 $x^2 + y^2 = 3$ 3 x $y = -x$ y $x^2 + y^2 = 1$ x
5	y $y = x^2$ x $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ x $y = x$
6	y $y = x^2$ x $x^2 + y^2 = 2$ y –4,5 x $x^2 + y^2 = 3$ 4,5

7	y 3 x2 + y2 = 3 3 x y = x y y = –x x x2 + y2 = 2
8	y x y = –2 x2 + y2 = 2,5 y x2 + y2 = 2 x y = –x
9	y y = x2 x x2 + y2 = 3 y y = x x x2 + y2 = 1
10	y x2 + y2 = 1 x y = –1 y = –x y 8 8 x2 + y2 = 5 x
11	y x2 + y2 = 1 x x = 0,5 y 3 x x2 + y2 = 2 –3

12	 $x^2 + y^2 = 3$ $y = x$ y x $y = -3$ 5 –5 $x^2 + y^2 = 3$
13	 $y = -x$ $x = 3$ y x $x^2 + y^2 = 3$ 0 $y = x^2 - 2$ $y = x$ $y = -x$