

1. CONSTRUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para o problema da difusão de calor resolvido numericamente pelo método dos volumes finitos e utilizando a discretização de segunda ordem CDS-2, temos o sistema de equações definido por (1).

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b_P \quad (1)$$

Para as condições de contorno, de material, geométricas e de simulação: $T_A=0$, $T_B=0$, $\alpha=1.17 \cdot 10^{-4} m^2 s^{-1}$, $A=1.0 m^2$, $L=0.1 m$, $t_F=20 s$, $M=5$ e $N=10$, temos os coeficientes dados pela Tabela 1.

Tabela 1. Coeficientes do sistema de equações

P	x_P	a_P	a_W	a_E	b_P
1	5.00000000000000e-02	8.01999999999999e-02	0.00000000000000e+00	2.34000000000000e-02	1.867076099398601e-04
2	1.50000000000000e-01	5.68000000000000e-02	2.34000000000000e-02	2.34000000000000e-02	5.418465880902484e-04
3	2.50000000000000e-01	5.67999999999998e-02	2.34000000000000e-02	2.33999999999998e-02	8.439458469311958e-04
4	3.50000000000000e-01	5.68000000000000e-02	2.33999999999998e-02	2.34000000000000e-02	1.063433806158050e-03
5	4.50000000000000e-01	5.68000000000000e-02	2.34000000000000e-02	2.33999999999998e-02	1.178825455059130e-03
6	5.50000000000000e-01	5.67999999999998e-02	2.33999999999998e-02	2.33999999999999e-02	1.178825455059138e-03
7	6.50000000000000e-01	5.67999999999996e-02	2.33999999999999e-02	2.33999999999998e-02	1.063433806158052e-03
8	7.50000000000000e-01	5.68000000000000e-02	2.33999999999998e-02	2.34000000000000e-02	8.439458469311827e-04
9	8.50000000000000e-01	5.68000000000000e-02	2.34000000000000e-02	2.33999999999998e-02	5.418465880902605e-04
10	9.50000000000000e-01	8.01999999999998e-02	2.33999999999998e-02	0.00000000000000e+00	1.867076099398557e-04

2. RESULTADO DA SIMULAÇÃO

A Tabela 2 apresenta o resultado da simulação utilizando o método Gauss-Seidel com tolerância numérica na ordem da precisão de máquina $\varepsilon=1.11 \cdot 10^{-16}$ e sua comparação com a solução analítica dada por (2), onde os pontos 0 e 11 representam as condições de contorno A e B, respectivamente. O cálculo do erro é dado por (3).

$$T(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot e^{\frac{-\alpha \pi^2 t}{L^2}} \quad (2)$$

$$Error_P = T_{P, analytic} - T_{P, numeric} \quad (3)$$

Tabela 2. Resultado da simulação

P	$x_p (m)$	$T_{P,analytic} (^{\circ}C)$	$T_{P,numeric} (^{\circ}C)$	$Error_p (^{\circ}C)$
0	0.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00
1	5.00000000000000e-02	1.55358419552192e-02	1.519114550741685e-02	3.44696447801999e-04
2	1.50000000000000e-01	4.50867694105048e-02	4.408642135705005e-02	1.00034805345500e-03
3	2.50000000000000e-01	7.02242897378960e-02	6.866621111609576e-02	1.55807862180000e-03
4	3.50000000000000e-01	8.84877673043450e-02	8.652447370547318e-02	1.96329359887200e-03
5	4.50000000000000e-01	9.80894456765170e-02	9.591311795710193e-02	2.17632771941501e-03
6	5.50000000000000e-01	9.80894456765170e-02	9.591311795710201e-02	2.17632771941501e-03
7	6.50000000000000e-01	8.84877673043450e-02	8.652447370547318e-02	1.96329359887200e-03
8	7.50000000000000e-01	7.02242897378960e-02	6.866621111609558e-02	1.55807862180000e-03
9	8.50000000000000e-01	4.50867694105048e-02	4.408642135705026e-02	1.00034805345500e-03
10	9.50000000000000e-01	1.55358419552192e-02	1.519114550741688e-02	3.44696447801999e-04
11	1.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00

A Figura 1 apresenta o resultado da simulação e sua comparação com a solução analítica dada por (2), onde os pontos 0 e 11 representam as condições de contorno A e B, respectivamente.

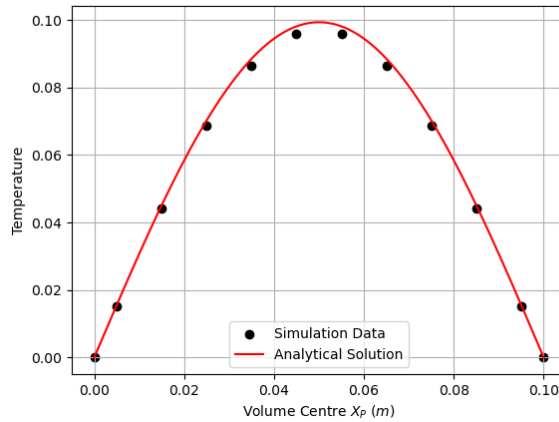


Figura 1. Resultado gráfico da simulação

3. OBTENÇÃO DA TEMPERATURA MÉDIA

A temperatura média obtida de forma analítica pela equação (4) e pela integração do resultado da simulação numérica através da regra do trapézio são apresentadas na Tabela 3.

$$\bar{T} = \frac{2}{\pi} \cdot e^{-\frac{\alpha \pi^2 t}{L^2}} \quad (4)$$

Tabela 3. Variação temporal da temperatura média

M	$t_i (s)$	$\bar{T}_{analytic}$	$\bar{T}_{numeric}$	$Error$
0	0.00000000000000e+00	6.36619772367581e-01	6.31423598897955e-01	5.19617346962609e-03
1	4.00000000000000e+00	4.01125797554293e-01	3.96070435305087e-01	5.05536224920600e-03
2	8.00000000000000e+00	2.52744122076472e-01	2.48441442474679e-01	4.30267960179301e-03
3	1.20000000000000e+01	1.59250767798250e-01	1.55838822686563e-01	3.41194511168702e-03
4	1.60000000000000e+01	1.00341827283559e-01	9.77523653639599e-02	2.58946191959901e-03
5	2.00000000000000e+01	6.32240738415718e-02	6.13167166532567e-02	1.90735718831500e-03

4. VARIAÇÃO TEMPORAL DA TEMPERATURA MÉDIA

A Figura 2 apresenta o resultado da temperatura média e sua comparação com a solução analítica dada por (4) ao longo do tempo.

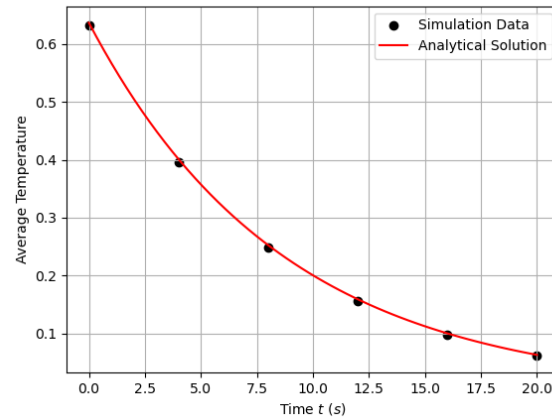


Figura 2. Resultado gráfico da temperatura média

5. IMPLEMENTAÇÃO

A implementação do código computacional foi realizada na linguagem C++20 compilado com *clang* versão 18.1.8. O código fonte se encontra em: <https://github.com/mBelisarius/cfd-basics>.