

1. CONSTRUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para o problema da difusão de calor resolvido numericamente pelo método dos volumes finitos e utilizando a discretização de segunda ordem CDS-2, temos o sistema de equações definido por (1).

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b_P \quad (1)$$

Para as condições de contorno, de material e geométricas $T_A = 0^\circ C$, $T_B = 100^\circ C$, $k = 400 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, $\dot{q} = 5 \cdot 10^5 \text{ W m}^{-3}$, $A = 0.10 \text{ m}^2$, $L = 1.0 \text{ m}$ e $N = 10$, temos os coeficientes dados pela Tabela 1.

Tabela 1. Coeficientes do sistema de equações

P	x_P	a_P	a_W	a_E	b_P
1	5.00000000000000e-02	1.20000000000000e+04	0.00000000000000e+00	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
2	1.50000000000000e-01	8.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
3	2.50000000000000e-01	8.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
4	3.50000000000000e-01	8.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
5	4.50000000000000e-01	8.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
6	5.50000000000000e-01	8.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
7	6.50000000000000e-01	8.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
8	7.50000000000000e-01	8.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
9	8.50000000000000e-01	8.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	-4.00000000000000e+03	5.00000000000000e+04
10	9.50000000000000e-01	1.20000000000000e+04	-4.00000000000000e+03	0.00000000000000e+00	8.50000000000000e+05

2. RESULTADO DA SIMULAÇÃO

A Tabela 2 apresenta o resultado da simulação utilizando o método TDMA e sua comparação com a solução analítica dada por (2), onde os pontos 0 e 11 representam as condições de contorno A e B, respectivamente. O cálculo do erro é dado por (3).

$$T(x) = T_A + \frac{T_B - T_A}{L} x + \frac{\dot{q}}{2k} (L - x) x \quad (2)$$

$$Error_P = T_{P,analytic} - T_{P,numeric} \quad (3)$$

Tabela 2. Resultado da simulação

P	$x_p(m)$	$T_{P,analytic}(^{\circ}C)$	$T_{P,numeric}(^{\circ}C)$	$Error_p(^{\circ}C)$
0	0.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00	0.00000000000000e+00
1	5.00000000000000e-02	3.46875000000000e+01	3.62500000000000e+01	-1.56249999999999e+00
2	1.50000000000000e-01	9.46875000000000e+01	9.62500000000000e+01	-1.56250000000001e+00
3	2.50000000000000e-01	1.42187500000000e+02	1.43750000000000e+02	-1.56250000000000e+00
4	3.50000000000000e-01	1.77187500000000e+02	1.78750000000000e+02	-1.56250000000003e+00
5	4.50000000000000e-01	1.99687500000000e+02	2.01250000000000e+02	-1.56250000000000e+00
6	5.50000000000000e-01	2.09687500000000e+02	2.11250000000000e+02	-1.56250000000003e+00
7	6.50000000000000e-01	2.07187500000000e+02	2.08750000000000e+02	-1.56250000000000e+00
8	7.50000000000000e-01	1.92187500000000e+02	1.93750000000000e+02	-1.56250000000000e+00
9	8.50000000000000e-01	1.64687500000000e+02	1.66250000000000e+02	-1.56249999999994e+00
10	9.50000000000000e-01	1.24687500000000e+02	1.26250000000000e+02	-1.56249999999993e+00
11	1.00000000000000e+00	1.00000000000000e+02	1.00000000000000e+02	0.00000000000000e+00

3. VISUALIZAÇÃO DOS RESULTADOS

A Figura 1 apresenta o resultado da simulação e sua comparação com a solução analítica dada por (2), onde os pontos 0 e 11 representam as condições de contorno A e B, respectivamente.

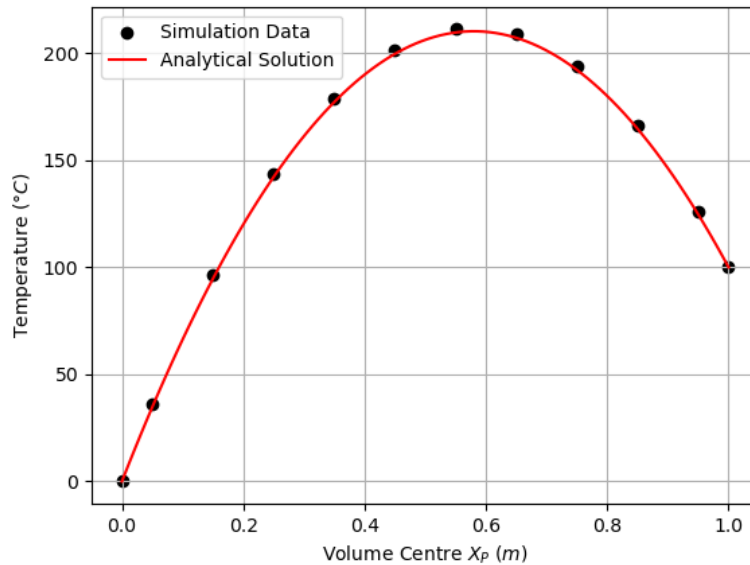


Figura 1. Resultado gráfico da simulação

4. OBTENÇÃO DA TEMPERATURA MÉDIA

A temperatura média obtida de forma analítica pela equação (4) e pela integração do resultado da simulação numérica através da regra do retângulo são apresentadas em (5) e (6), respectivamente.

$$\bar{T} = \frac{T_A + T_B}{2} + \frac{\dot{q} L^2}{12k} \quad (4)$$

$$\overline{T}_{analytic} = 1.54166666666667e+02 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (5)$$

$$\overline{T}_{numeric} = 1.52625000000000e+02 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6)$$

5. OBTENÇÃO DA TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM $x=0$

A taxa de transferência de calor em $x=0 \text{ m}$ obtida de forma analítica pela equação (7) e pela simulação numérica são apresentadas em (8) e (9) respectivamente.

$$q(x) = \left[k \frac{T_A - T_B}{L} + \dot{q} x - \frac{\dot{q} L}{2} \right] A \quad (7)$$

$$q_{analytic}(0) = -2.90000000000000e+04 \text{ W} \quad (8)$$

$$q_{numeric}(0) = -2.90000000000000e+04 \text{ W} \quad (9)$$

6. OBTENÇÃO DA TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM $x=L$

A taxa de transferência de calor em $x=L=1.0 \text{ m}$ obtida de forma analítica pela equação (7) e pela simulação numérica são apresentadas em (10) e (11), respectivamente.

$$q_{analytic}(L) = 2.10000000000000e+04 \text{ W} \quad (10)$$

$$q_{numeric}(L) = 2.10000000000000e+04 \text{ W} \quad (11)$$

7. IMPLEMENTAÇÃO

A implementação do código computacional foi realizada na linguagem C++20 compilado com *clang* versão 18.1.8. O código fonte se encontra em: <https://github.com/mBelisarius/cfd-basics>.