

Rozwinięcie binarne ułamka właściwego

Algorytm zamiany liczby całkowitej dodatniej na jej zapis w systemie binarnym poznaliście już wcześniej. Jak postąpić, gdy będziemy chcieli wyznaczyć rozwinięcie binarne ułamka? Załóżmy, że jest to dodatni ułamek właściwy, a więc licznik jest dodatni i mniejszy od mianownika. Postąpimy odwrotnie, tzn. zamiast dzielić przez 2 będziemy mnożyć przez 2. Po pomnożeniu ułamka przez 2 część całkowita ułamka (może to być tylko 1 lub 0) wyznaczy kolejną cyfrę rozwinięcia binarnego ułamka, a podstawę dalszych obliczeń stanowi część ułamkowa. Na przykład dla liczby $5/8$ wyznaczanie kolejnych cyfr rozwinięcia binarnego przedstawia tabela 5.1.

Część całkowita	Część ułamkowa	Etapy zapisu binarnego
0	5/8	0
1	2/8	0,1
0	4/8	0,10
1	0/8	0,101

Tabela 5.1 Rozwinięcie binarne ułamka $5/8$

Ćwiczenie 1

Znajdź rozwinięcie binarne ułamka $13/16$.

Jak można wywnioskować z tabeli 5.1, algorytm kończy swoje działanie, gdy otrzymamy licznik ułamka równy 0. Czy tak będzie dla każdego ułamka? Tabela 5.2 przedstawia znajdowanie rozwinięcia binarnego ułamka $1/10$.

Część całkowita	Część ułamkowa	Etapy zapisu binarnego
0	1/10	0
0	2/10	0,0
0	4/10	0,00
0	8/10	0,000
1	6/10	0,0001
1	2/10	0,00011
0	4/10	0,000110
0	8/10	0,0001100
1	6/10	0,00011001
1	2/10	0,000110011
0	4/10	0,0001100110
...	...	0,0(0011)

Tabela 5.2 Rozwinięcie binarne ułamka $1/10$

Jak widać, moglibyśmy mnożyć przez 2 w nieskończoność, wartości licznika równej 0 nigdy nie otrzymamy. Otrzymywane wartości (części całkowitej i ułamkowej) od pewnego miejsca (drugiej cyfry) powtarzają się (po 4 kolejne wiersze – zaznaczone w tabeli 5.2 kolejnymi odcieniami zieleni). Otrzymujemy ułamek okresowy – a więc ułamek mający skończone rozwinięcie dziesiętne jest ułamkiem okresowym w systemie binarnym!

Ćwiczenie 2

Znajdź rozwinięcie binarne ułamka $2/5$.

Zastanówmy się, dla jakich ułamków otrzymamy rozwinięcie binarne skończone, a dla jakich nieskończone. Spróbujmy znaleźć wartość dziesiętną (w postaci ułamka właściwego) ułamka binarnego, np. $0,1011_2$. Analogicznie, jak w przypadku liczb całkowitych, wystarczy wymnożyć cyfry binarne przez odpowiednie potęgi podstawy systemu, czyli przez 2. Tylko wykładniki tych potęg będą ujemne.

$$0,1011_2 = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = \frac{1}{2} + 0/4 + 1/8 + 1/16 = 11/16$$

Łatwo zauważyć, że wszystkie ułamki nieskracalne, których rozwinięcie binarne jest skończone, w mianowniku w systemie dziesiętnym mają potęgę 2. A więc wiele ułamków, które mają skończone rozwinięcie dziesiętne, będzie miała nieskończone rozwinięcie binarne.

Ćwiczenie 3

Oblicz wartość dziesiętną ułamka $0,00011_2$.

Napiszemy programy wyznaczające rozwinięcia binarne ułamków właściwych zapisanych w systemie dziesiętnym. Najpierw zajmiemy się przypadkiem, gdy mianownik jest potęgą liczby 2, a więc rozwinięcie binarne będzie skończone. Oto specyfikacja problemu:

Specyfikacja

Dane: *licz*, *mian* – liczby całkowite dodatnie reprezentujące licznik i mianownik ułamka, $licz < mian$, $mian = 2^n$, gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią, $NWD(licz, mian) = 1$.

Wynik: *s* – napis reprezentujący rozwinięcie binarne ułamka.

Zapis algorytmu w pseudokodzie jest następujący:

```
s ← "0,"  
dopóki licz>0 wykonuj  
    licz ← licz * 2  
    jeśli licz div mian = 1 to s ← s + "1"  
    w przeciwnym przypadku s ← s + "0"  
    licz ← licz mod mian
```

Ćwiczenie 4

Napisz program znajdujący rozwinięcie binarne nieskracalnego ułamka, w którym w mianowniku występuje potęga liczby 2, zgodnie z powyższą specyfikacją.