Kolokwium 2

Arkusz 2.

1.

N U U D N O T U

N	2
U	3
D	1
O	1
T	1

A	4
B	4

a) $N_a = \binom{8}{2,3,1,1,1} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$

b) ↓ B ↓ B ↓ A ↓ B ↓ B ↓ → baza dla łatwego do wymówienia słowa
jest 5 slotów gdzie można dołożyć pozostałe samogłoski

B	B	B		?	?	?	?	·	4
	B	B	B		?	?	?	·	3
?		B	B	B		?	?	·	3
?	?		B	B	B		?	·	3
?	?	?		B	B	B		·	3
?	?	?	?		B	B	B	·	4

B	B	B	B				
	B	B	B	B			
		B	B	B	B		
			B	B	B	B	
				B	B	B	B

$Z\pi_c$:

$N_2 = 25 \cdot \binom{4}{2,1,1} \cdot \binom{4}{3,1}$

$= 25 \cdot \frac{4!}{2!} \cdot \frac{4!}{3!} = 1200$

$N_b = N_1 - N_2 = 2160$

2. $a + b + c + d = 120$

$a \leq 30$
$b \geq 30$
$10 \leq c \leq 40$
a, b, c, d nieparzyste, całkowite, dodatnie

$a + b_0 + 30 + c_0 + 10 + d = 120$

$a + b_0 + c_0 + d = 80$ $\quad a \leq 30 \quad 2a_1 + 1 \leq 30 \quad a_1 \leq 14$
$c \leq 40 \quad 2c_1 + 1 \leq 40 \quad c_1 \leq 19$

$2a_1 + 1 + 2b_1 + 1 + 2c_1 + 1 + 2d_1 + 1 = 80$ $\quad a_1, \dots d_1 \geq 0$

$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 38$

1) Wszystkie $\quad N_1 = \binom{38}{3}$ $\quad$ 1 1 1 1 .... 1 1 1
1 2 37 38

2) $a_1 \geq 15 \quad N_2$

3) $c_1 \geq 20 \quad N_3$

4) $a_1 \geq 15 \wedge c_1 \geq 20 \quad N_4$

$N = N_1 - (N_2 + N_3 - N_4)$

Arkusz 3

3.

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 2^n - 2 \end{cases}$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^n - 2$$

RORJ: $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

$$r^2 - 3r + 2 = r^2 - 2r - r + 2 = (r-2)(r-1) = 0$$

$$a_n = 2^n \vee a_n = 1^n$$

$$a_n = C_1 2^n + C_2$$

RSRN: $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 2^n - 2$

$$a_n = A \cdot n \cdot 2^n - B \cdot n$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = A(n+2)2^{n+2} - B(n+2) \quad -3A(n+1)2^{n+1} + 3B(n+1) + 2An2^n - 2Bn$$

$$\cancel{4An2^n} + 8A2^n \cancel{-Bn} - 2B \quad \cancel{-6An2^n} - 6A2^n + \cancel{3Bn} + 3B + \cancel{2An2^n} \cancel{-2Bn}$$

$$2^n - 2 = 2A \cdot 2^n + B$$

$$2A = 1 \quad A = \tfrac{1}{2}$$
$$B = -2$$

$$a_n = \tfrac{1}{2} n \cdot 2^n + 2n$$

RORN: $a_n = C_1 2^n + C_2 + \frac{1}{2} n \cdot 2^n + 2n$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 1 = 2C_1 + C_2 + 1 + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ -2 = 2C_1 + C_2 \end{cases}$$

$$-4 = C_1 \qquad C_2 = 6$$

$$a_n = -4 \cdot 2^n + 6 + \tfrac{1}{2} n \cdot 2^n + 2n$$

2.

$a + b + c + d = 120$

$a \leq 30$
$b \geq 30$
$12 \leq c \leq 40$
$a \dots d \geq 1$, nieparzyste

$2a_0 + 1 + 2b_0 + 31 + 2c_0 + 13 + 2d_0 + 1 = 120$ $\quad a_0 \dots d_0 \geq 0$

$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 37$

$2a_0 + 1 \leq 30$ $\quad 2c_0 + 13 \leq 40$
$a_0 \leq 14.5$ $\quad c_0 \leq 13.5$

a) Wszystkie $N_a = \binom{37+4-1}{4-1} = \binom{40}{3}$

b) $a_0 \geq 15$

$a_1 + b_0 + c_0 + d_0 = 22$

$N_b = \binom{22+4-1}{4-1} = \binom{25}{3}$

c) $c_0 \geq 14$

$a_0 + b_0 + c_1 + d_0 = 23$

$N_c = \binom{23+4-1}{4-1} = \binom{26}{3}$

d) $a_0 \geq 15 \wedge c_0 \geq 14$

$a_1 + b_0 + c_1 + d_0 = 8$

$N_d = \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3}$

$N = N_a - (N_b + N_c - N_d) = \binom{40}{3} - \binom{25}{3} - \binom{26}{3} + \binom{11}{3}$

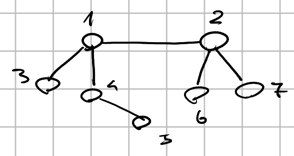
Z3. Wszystkich drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, 7\}$ jest, jak mówi znane twierdzenie, 7^5.
a) W ilu spośród tych 7^5 drzew stopnie wierzchołków 1 i 2 spełniają $\deg(1) = \deg(2) = 3$?
b) W ilu spośród tych 7^5 drzew stopnie wierzchołków 1 i 2 spełniają $\deg(1) = \deg(2) = 4$?

a) Kod Prufera dla drzewa

$(7-2) = 5$ elementów

v_1 występuje $(3-1) = 2$ razy

v_2 występuje $(3-1) = 2$ razy



1 4 1 2 2

Piąty wierzchołek w kodzie można wybrać na 5 sposobów

Możliwych kodów jest $5 \cdot \binom{5}{2,2,1} = 150$

b) Kod składa się z 5 wyrazów

v_1 występuje $(4-1) = 3$ razy

v_2 występuje $(4-1) = 3$ razy

$3+3 > 5$ sprzeczność

nie ma takich drzew

Z2. a) Ile liczb sześciocyfrowych ma taką własność, że każda następna cyfra jest co najmniej równa poprzedniej, np. 233789?
b) Ile liczb sześciocyfrowych ma taką własność, że każda następna cyfra jest co najwyżej równa poprzedniej, np. 873320?

a) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6 \leq 9$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_9 = 6$ — rozwiązanie jednoznacznie wyznacza taką liczbę (posortować cyfry)

$\binom{6+9-1}{9-1} = \binom{14}{8}$ n_i – ile razy występuje cyfra i

liczba rozwiązań $n_i \in \{0, \ldots 6\}$

b) $9 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_6 \geq 0$

$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_9 = 6$

$\binom{6+10-1}{10-1} = \binom{15}{9}$

Poprawnych liczb jest $\binom{15}{9} - 1$ (bez 000000)

Z1. Macierz A spełnia warunki:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ oraz } A \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Obliczyć wielomian charakterystyczny macierzy A oraz wyznaczyć wszystkie wartości i wektory własne tej macierzy.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1a+2b \\ 1c+2d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+1b \\ 2c+1d \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} a \\ b \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} c \\ d \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda-3)(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -1$

$Av = \lambda v \qquad (A - I\lambda)v = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad x = y \qquad V_3 = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x = -y \qquad V_{-1} = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

T2. (podać wzór i wynik liczbowy)

a) Na ile sposobów można podarować sześciorgu rozróżnialnym dzieciom 20 jednakowych i niepodzielnych lizaków tak, by Ania dostała ich co najmniej 3, a Bartek co najwyżej 7, jeśli przy tym nie dopuszczamy, by którekolwiek dziecko zostało bez lizaka?

b) Na ile sposobów można zrobić to samo, jeśli dodatkowo zażądamy, by każde dziecko dostało nieparzystą liczbę lizaków?

$a + b + c + d + e + f = 20$ $\qquad a, \dots f \geq 1$

$a \geq 3$

$b \leq 7$

$a_0 + 2 + b + c + \dots + f = 20$

$a_0 + b + c + \dots f = 18$ $\qquad a_0, \dots f \geq 1$

$b \leq 7$

1) $n_1 = \binom{18-1}{6-1} = \binom{17}{5}$ $\longrightarrow$ wszystkie

2) $b \geq 7$

$a_0 + b_0 + 6 + c + \dots + f = 18$

$a_0 + b_0 + c + \dots + f = 12$ $\qquad a_0, \dots f \geq 1$

$\binom{12-1}{6-1} = \binom{11}{5}$

Jest $\binom{17}{5} - \binom{11}{5}$ sposobów

T3. (podać wzór i wynik liczbowy)
Ile wśród trzycyfrowych (czyli z zakresu od 100 do 999) liczb naturalnych nie dzieli się bez reszty przez 5, 6 ani 8?

A_i — podzielne przez i

$|A_5 \cup A_6 \cup A_8| = |A_5| + |A_6| + |A_8| - |A_5 \cap A_6| - |A_5 \cap A_8| - |A_6 \cap A_8| + |A_5 \cap A_6 \cap A_8|$

$|A_5|$: $100 \to 20 \cdot 5$ $\quad 199 - 20 + 1 = 180$
$995 \to 199 \cdot 5$

$|A_6|$: $102 \to 17 \cdot 6$ $\quad 166 - 17 + 1 = 150$
$996 \to 166 \cdot 6$

$|A_8|$: $104 \to 13 \cdot 8$ $\quad 124 - 13 + 1 = 112$
$992 \to 124 \cdot 8$

$|A_5 \cap A_6|$: $lcm(5,6) = 30$ $\quad 33 - 4 + 1 = 30$

$120 \to 4 \cdot 30$
$990 \to 33 \cdot 30$

$|A_5 \cap A_8|$: $lcm(5,8) = 40$ $\quad 24 - 3 + 1 = 22$

$120 \to 3 \cdot 40$
$960 \to 24 \cdot 40$

$|A_6 \cap A_8|$: $lcm(6,8) = 24$ $\quad 41 - 5 + 1 = 37$ $\quad \left\lfloor \frac{999}{lcm(n_1, \ldots n_k)} \right\rfloor - \left\lceil \frac{100}{lcm(n_1, \ldots n_k)} \right\rceil + 1$
$120 \to 5 \cdot 24$
$984 \to 41 \cdot 24$

$|A_5 \cap A_6 \cap A_8|$: $lcm(5,6,8) = 120$ $\quad 8 - 1 + 1 = 8$
$120 \to 1 \cdot 120$
$960 \to 8 \cdot 120$

$|A_5 \cup A_6 \cup A_8| = 361$ $\to$ podzielnych przez 5 lub 6 lub 8

$|(A_5 \cup A_6 \cup A_8)'| = 900 - 361 = 539$

5. Rozważmy drzewa o wierzchołkach $1, \dots, 10$. Na mocy tw. Cayleya jest ich 10^8.
a) W ilu spośród tych stu milionów drzew stopniem wierzchołka 4 jest dokładnie 5?
b) A ile drzew (spośród owych stu milionów) ma taką własność: stopnie wierzchołków 1 i 2 są oba większe od 4, ale wierzchołki 1 i 2 nie są połączone krawędzią?

Rozważmy kod Prufera dla tych drzew

$\rightarrow$ $10 - 2 = 8$ elementów

a) $\deg(v_4) = 5 \rightarrow$ pojawia się 4 razy w kodzie

$$N_a = \binom{8}{4} \cdot (10-1)^{8-4} = \binom{8}{4} \cdot 9^4 = 459\ 270$$

$\binom{8}{4}$: wybór miejsc na '4'

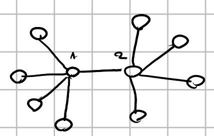
$(10-1)$: możliwości na pozostałe wyrazy kodu

$8-4$: liczba pozostałych wyrazów do zapełnienia

b) $\deg(v_1), \deg(v_2) > 4$

'1' i '2' występują w kodzie po conajmniej 4 razy $\rightarrow$ dokładnie 4 razy bo jest 8 elementów

Wszystkie drzewa gdzie $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 5$ $\quad \binom{8}{4,4} = 70$



Drzewa gdzie 1 i 2 mają krawędź

$\binom{8}{4,4}$ – podział reszty wierzchołków na połączone do 1 i do 2

Nie istnieją takie drzewa gdzie nie ma krawędzi $\{1,2\}$

W drzewie jest $n-1 = 9$ krawędzi

$$9 = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} \deg(v) = \frac{1}{2}(5+5+x)$$

$x = 8 \rightarrow$ suma stopni pozostałych 8 wierzchołków

Każdy musi być stopnia 1 $\Longleftrightarrow$ być liściem $\Rightarrow$ musi być krawędź $\{1,2\}$

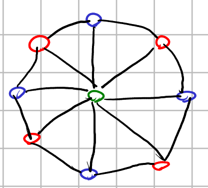
6. Określmy następujące grafy:

- **koło** W_n ma $n+1$ wierzchołków, w tym n tworzących cykl i jeden (zwykle przedstawiany jako środek koła) połączony z wszystkimi pozostałymi;
- **bardzo szeroka ścieżka** P_n^3 ma n wierzchołków ponumerowanych kolejnymi liczbami, a krawędzie łączą w niej wierzchołki o numerach różniących się o 1,2 lub 3.

a) Ile krawędzi ma W_{2020}? Ile wynosi liczba chromatyczna tego grafu?
b) Ile krawędzi ma P_{2021}^3? Ile wynosi liczba chromatyczna tego grafu?

Przypomnijmy/wyjaśnijmy, że **liczba chromatyczna** $\chi(G)$ to najmniejsza możliwa liczba kolorów potrzebnych do pokolorowania wierzchołków grafu G w taki sposób, by wierzchołki tego samego koloru nigdy nie były połączone krawędzią.

a)



W_8

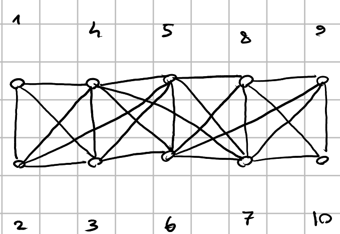
W_n : cykl $C_n \to n$ krawędzi
"szprychy" $\to n$ krawędzi od środka do każdego wierzchołka cyklu

$|E(W_n)| = 2n = 4040$ dla $n = 2020$

Kolory
- wybieram kolor dla środka → każdy wierzchołek cyklu musi mieć inny kolor
- koloruję wierzchołki cyklu naprzemian 2 kolorami
  - → nie ma jednokolorowych sąsiadów
  - → nie da się 1 kolorem ⇒ jest minimum

$\forall_n \; \chi(W_n) = 3$

b)



P_n^3

stopnie

$3, 4, 5, 6, 6, \dots, 5, 4, 3$

środkowe wierzchołki mają po 6 $\{n-3, n-2, n-1, n+1, n+2, n+3\}$
brzegowe odpowiednio mniej

$$\forall_{n>6} \quad |E(P_n^3)| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(P_n^3)} \deg(v) = \frac{1}{2}(3+4+5+6\cdot(n-6)+5+4+3) = \frac{1}{2}(24+6(n-6)) = 3n-6$$

$|E(P_{2021}^3)| = 6057$

4. Rozwiązać (czyli podać ogólny wzór na a_n)

$$\begin{cases} a_0 & = & 2 \\ a_1 & = & 1 \\ a_{n+2} & = & 5a_{n+1} - 6a_n + 2^n - 4 \text{ dla } n \geqslant 0 \end{cases}$$

i obliczyć a_{2022}.

1) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

$r^2 - 5r + 6 = r^2 - 2r - 3r + 6 = (r-2)(r-3)$

RORJ: $a_n = C_1 2^n + C_2 3^n$

2) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2^n - 4$

metodą przewidywań $a_n = A 2^n \cdot n + B$

$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = A \cdot 2^{n+2} \cdot (n+2) + B - 5(A \cdot 2^{n+1}(n+1) + B) + 6(A \cdot 2^n n + B)$

$= \cancel{4A2^n n} + 8A2^n + B - \cancel{10A2^n n} - 10A2^n - 5B + \cancel{6A2^n n} + 6B$

$2^n - 4 = -2A \cdot 2^n + 2B$

$A = -\frac{1}{2}$ $\quad B = -2$

RSRN: $a_n = -\frac{1}{2} n 2^n - 2$

3) RORN: $C_1 2^n + C_2 3^n - \frac{1}{2} n 2^n - 2$

4) $a_0 = 2 = C_1 + C_2 - 2$

$a_1 = 1 = 2C_1 + 3C_2 - 1 - 2$

$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} C_2 = -4 \\ C_1 = 8 \end{matrix}$

$a_n = 8 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n - \frac{1}{2} n 2^n - 2$

5) $a_{2020} = 8 \cdot 2^{2020} - 4 \cdot 3^{2020} - \frac{1}{2} \cdot 2020 \cdot 2^{2020} - 2$

$= -1002 \cdot 2^{2020} - 4 \cdot 3^{2020} - 2$

3. Obliczyć, na ile sposobów można podarować sześciorgu rozróżnialnym dzieciom 50 jednakowych niepodzielnych lizaków tak, by Ania dostała ich co najmniej 5, Bartek co najwyżej 7, Felek co najwyżej 11 i żeby każde dziecko miało nieparzystą liczbę lizaków.

$a + b + c + d + e + f = 50$

$a \ldots f$ nieparzyste

$a \geq 5$

$b \leq 7$

$f \leq 11$

$2a_0 + 5 + 2b_0 + 1 + 2c_0 + 1 + 2d_0 + 1 + 2e_0 + 1 + 2f_0 + 1 = 50$

$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + e_0 + f_0 = 20 \qquad a_0 \ldots f_0 \geq 0$

$2b_0 + 1 \leq 7 \qquad 2f_0 + 1 \leq 11$

$b_0 \leq 3 \qquad f_0 \leq 5$

1° wszystkie rozdania $\binom{20+6-1}{6-1} = \binom{25}{5}$

2° $b_0 \geq 4$

$a_0 + b_1 + 4 + c_0 + \ldots + f_0 = 20$

$a_0 + b_1 + c_0 + \ldots + f_0 = 16$

$\binom{16+6-1}{6-1} = \binom{21}{5}$

3° $f_0 \geq 6$

$a_0 + b_0 + \ldots + f_1 + 6 = 20$

$a_0 + b_0 + \ldots + f_1 = 14$

$\binom{14+6-1}{6-1} = \binom{19}{5}$

4° $b_0 \geq 4 \wedge f_0 \geq 6$

$a_0 + b_1 + 4 + c_0 + d_0 + e_0 + f_1 + 6 = 20$

$a_0 + b_1 + \ldots + f_1 = 10$

$\binom{10+6-1}{6-1} = \binom{15}{5}$

z prawa włączeń / wyłączeń $N = n_1 - (n_2 + n_3 - n_4) = \binom{25}{5} - \binom{21}{5} - \binom{19}{5} + \binom{15}{5} = 24\,156$