Relacje

Relacje definiuje się jako podzbiór iloczynu kartezjańskiego zbiorów

Relacja n-argumentowa $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$

Pole relacji R $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$

Relacja 1-członowa $R \subseteq X$

Relacje binarne $R \subseteq X \times Y$

Sposób łączenia elementów zbioru w uporządkowane pary

Oznaczenia

- x jest w relacji R z y
- $(x,y) \in R$
- $x R y$

Wykres relacji

Zbiór wszystkich par (x,y) należących do R
(przy określeniu relacji podaje się cały X i Y)

Zaprzeczenie relacji

$x \not R y \Leftrightarrow \sim(xRy)$

Dziedzina relacji

$\mathrm{dom}\, R = d_R = \{x \in X : \exists_{y \in Y}\ xRy\}$

Przeciwdziedzina relacji

$d_R^{-1} = \{y \in Y : \exists_{x \in X}\ xRy\}$

Relacja odwrotna

$R^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}$

$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy \quad d_{R^{-1}} = d_R^{-1} \quad d_{R^{-1}}^{-1} = d_R$

Złożenie relacji

dla $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$

$S \circ R \subseteq X \times Z$

$x\, S \circ R\, z \Leftrightarrow \exists_{y \in Y} (xRy \wedge ySz)$

jest łączne $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

nie jest przemienne $R \circ S \neq S \circ R$

Przykłady relacji binarnych

$xR_1y \Leftrightarrow x = y$

$xR_2y \Leftrightarrow x < y$

$xR_3y \Leftrightarrow x + y = 100$

$xR_4y \Leftrightarrow 10 \mid (x-y)$

Relacje szczególne

Relacja pełna - każdy x jest w relacji z każdym y

$R = X \times Y$

Relacja pusta - żadne elementy nie są w relacji

$R = \varnothing$

Relacja identyczności

$I_X = id_X \quad I_X \subseteq X \times X$

$x I_X y \Leftrightarrow x = y$

$R \circ I_X = R$

Własności relacji

Zwrotna $\forall_{x \in X} \quad xRx$

np. $=$, $\leq$, $\subseteq$, przystawanie figur

Symetryczna $\forall_{x,y} \quad (xRy \Rightarrow yRx)$

np. $=$, $\perp$, $\parallel$, przystawanie i podobieństwo

Antysymetryczna $\forall_{x,y} \quad (xRy \wedge yRx) \Longrightarrow (x = y)$

np. $=$, $<$, $\leq$, $\subseteq$

Spójna $\forall_{x,y} \quad (xRy \vee yRx \vee x = y)$

np. $<$, $\leq$

Przechodnia $\forall_{x,y,z} \quad (xRy \wedge yRz) \Longrightarrow xRz$

np. $=$, $<$, $\leq$, $\subseteq$, $\parallel$, podobieństwo i przystawanie figur

Operacje na relacjach

dla $R_1, R_2 \subseteq X^2$

Suma relacji $x(R_1 \cup R_2)y \iff xR_1y \vee xR_2y$

Przecięcie relacji $x(R_1 \cap R_2)y \iff xR_1y \wedge xR_2y$

Dopełnienie relacji $x(X^2 \setminus R)y \iff \sim(xRy)$

Relacje równoważności

Pozwalają grupować obiekty mające wspólną wybraną cechę

Relacja ϱ w zbiorze X jest relacją równoważności jeśli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia

Typowe oznaczenia

$x \sim y \quad x \approx y \quad x \equiv y$

x i y są obiektami równoważnymi

Przykłady relacji równoważności

- równość obiektów w zbiorze X
- równoległość prostych, przystawanie i podobieństwo figur
- w zbiorze podzbiorów n-elementowego zbioru
  $A \varrho B \iff A$ i B mają tyle samo elementów
- przystawanie modulo n (taka sama reszta z dzielenia przez n)
- w zbiorze $X \neq \emptyset$ relacja określona za pomocą funkcji $f: X \to Y$
  $x_1 \varrho x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$

Klasy abstrakcji

Klasa abstrakcji elementu $x \in X$ względem relacji ϱ

$$[x]_\varrho = \{y \in X : x \varrho y\}$$

$$y \in [x]_\varrho \iff x \varrho y$$

$y \in [x]_\varrho$ – reprezentant klasy abstrakcji

Relacja równoważności w X pozwala podzielić X na takie rozłączne zbiory, że każdy z nich składa się z obiektów w relacji równoważności.

Klasyfikacja – przypisywanie obiektów do klas – pozwala na badanie wspólnych własności elementów klasy

Zbiór ilorazowy relacji
zbiór wszystkich klas abstrakcji X względem ϱ

$$X/_\varrho = \{[x]_\varrho : x \in X\}$$

Przykład
dla relacji przystawania modulo 4

$$\mathbb{Z}_{\sim_4} = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

$$[3] = [7] = [-1]$$

Własności relacji równoważności

1. $\forall_{x \in X} \quad x \in [x]_\varrho$
2. $\forall_{x,y \in X} \quad ([x]_\varrho = [y]_\varrho \iff x \varrho y)$
3. $\forall_{x,y \in X} \quad ([x]_\varrho \neq [y]_\varrho \implies [x]_\varrho \cap [y]_\varrho = \emptyset)$
4. $\bigcup_{x \in X} [x]_\varrho = X$
5. $\forall_{x,y \in X} \quad y \in [x]_\varrho \Rightarrow x \in [y]_\varrho$

Podział zbioru X
rodzina $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\} \subseteq 2^X$ taka, że
1. $\forall_{A_i \in \mathcal{A}} \quad A_i \neq \emptyset$
2. $\forall_{A_i, A_j \in \mathcal{A}} \quad A_i \neq A_j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$
3. $\bigcup_{i \in I} A_i = X$

Wybór takich niepustych, parami rozłącznych podzbiorów X, których suma jest całym X

Twierdzenie o podziale zbioru

Jeśli ϱ jest relacją równoważności w X to $X/_\varrho$ jest podziałem tego zbioru.

Jeśli $\mathcal{A}$ jest podziałem X to relacja $x \varrho y \iff \exists_{A_i \in \mathcal{A}} (x \in A_i \wedge y \in A_i)$ jest relacją równoważności.

Każda relacja równoważności definiuje podział, elementami podziału są klasy abstrakcji