1.

1, 2, 5, 5, 8

a) '1' na końcu

$\_\ \_\ \_\ \_\ \frac{1}{1}$

$N_a = 1 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 12$

↓ powtórzone piątki

b) '5' na końcu

$\frac{4}{}\ \frac{3}{}\ \frac{2}{}\ \frac{1}{}\ \frac{1}{5}$

$N_b = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$

$$N_a = \binom{4}{2,\ 1,\ 1} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = 12$$

$$N_b = \binom{4}{1,\ 1,\ 1,\ 1} = 4! = 24$$

$N = N_a + N_b = 36$

10000	1000	100	10	1
2	5	5	8	1
5	5	2	8	1
5	5	8	2	1
8	5	5	2	1
5	2	5	8	1
5	8	5	2	1
5	2	8	5	1
5	8	2	5	1
2	5	8	5	1
8	5	2	5	1
2	8	5	5	1
8	2	5	5	1

$$3 \cdot 2 (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) + 3 \cdot 8 (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) + 6 \cdot 5 (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) + 12 \cdot 1$$
$$= 11110 (6 + 24 + 30) + 12$$
$$= 11110 \cdot 60 + 12$$
$$= 666\ 612$$

$\sum = 1\ 733\ 292$

	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
$3 \cdot 2$ ↕	5	...			5
$3 \cdot 2$ ↕	2	...			5
$3 \cdot 2$ ↕	8	...			5
$3 \cdot 2$ ↕	1	...			5

$$\sum B = 6 \cdot 5 (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) + 6 \cdot 2 (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) + 6 \cdot 8 (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) + 6 \cdot 1 (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) + 24 \cdot 5 \cdot 10^0$$
$$= 11110 (30 + 12 + 48 + 6) + 120$$
$$= 1066\ 680$$

$$\sum A = 12 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) \left(\frac{2+5+5+8}{4} \right) + 12 \cdot 1$$
$$\sum B = 24 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1) \left(\frac{1+2+5+8}{4} \right) + 24 \cdot 5$$

2.

1 1 2 2 2 2 3 4 4

N - liczba różnych liczb 9-cyfrowych

$$N = \underbrace{\binom{9}{2}}_{'1'} \cdot \underbrace{\binom{7}{4}}_{'2'} \cdot \underbrace{\binom{3}{1}}_{'3'} \cdot \underbrace{\binom{2}{2}}_{'4'} = \frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 3 \cdot 1 = 3\ 780$$

$$N = \binom{9}{2,\ 4,\ 1,\ 2} = \frac{9!}{2!\ 4!\ 1!\ 2!} = 3780$$

2x'1' 4x'2' 1x'3' 2x'4'

N_2 - parzyste

$$N_2 = \underbrace{1}_{\text{'2' na końcu}} \cdot \underbrace{\binom{8}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\binom{6}{3}}_{2} \cdot \underbrace{\binom{3}{1}}_{3} \cdot \underbrace{\binom{2}{2}}_{4} + \underbrace{1}_{\text{'4' na końcu}} \cdot \underbrace{\binom{8}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\binom{6}{4}}_{2} \cdot \underbrace{\binom{2}{1}}_{3} \cdot \underbrace{\binom{1}{1}}_{4} = 2520$$

$$N_2 = \underbrace{\binom{8}{2,\ 3,\ 1,\ 2}}_{\text{'2' na końcu}} + \underbrace{\binom{8}{2,\ 4,\ 1,\ 1}}_{\text{'4' na końcu}} = 2520$$

$N_3 = N$ wszystkie są podzielne przez 3, bo suma cyfr wynosi 21

$N_2 = N \cdot \frac{6}{9}$ (wśród 9 jest 6 cyfr parzystych)

N_4 → ostatnie 2 cyfry to '12' '24' '32' '44'

$$N_4 = \underbrace{1 \cdot 1}_{'12'} \cdot \underbrace{\binom{7}{1}}_{1} \cdot \underbrace{\binom{6}{3}}_{2} \cdot \underbrace{\binom{3}{1}}_{3} \underbrace{\binom{2}{2}}_{4} + \underbrace{1 \cdot 1}_{'24'} \cdot \underbrace{\binom{7}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{2} \underbrace{\binom{2}{1}}_{3} \underbrace{\binom{1}{1}}_{4} + \underbrace{1 \cdot 1}_{'32'} \underbrace{\binom{7}{2}}_{1} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{2} \underbrace{\binom{2}{2}}_{4} + \underbrace{1 \cdot 1}_{'44'} \underbrace{\binom{7}{2}}_{1} \underbrace{\binom{5}{4}}_{2} \underbrace{\binom{1}{1}}_{3} = 1155$$

$$N_4 = \underbrace{\binom{7}{1,\ 3,\ 1,\ 2}}_{\text{bez '12'}} + \underbrace{\binom{7}{2,\ 3,\ 1,\ 1}}_{\text{bez '24'}} + \underbrace{\binom{7}{2,\ 3,\ 2}}_{\text{bez '32'}} + \underbrace{\binom{7}{2,\ 4,\ 1}}_{\text{bez '44'}}$$

$N_7 = ?$

3.

E G Z A M I N

3 samogłoski

litery są unikalne

$N = 7! = 5040$

V		V		V		
V		V			V	
V		V				V
V			V		V	
V			V			V
V				V		V
	V		V		V	
	V		V			V
	V			V		V
		V		V		V

10 dobrych ułożeń samogłosek

$$N_d = 10 \cdot \binom{3}{3} \cdot 3! \cdot \binom{4}{4} \cdot 4! = 10 \cdot 3! \cdot 4! = 1440$$

$$N_z = N - N_d = 3600$$

Ogólny sposób

_ C _ C _ C _ C _

W 5 miejsc ustawia się 3 samogłoski i 2× nic

$$N_d = \binom{5}{\underset{\emptyset}{2},\ \underset{V_1}{1},\ \underset{V_2}{1},\ \underset{V_3}{1}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{ułożenie spółgłosek}}$$

4.

K O L O K W I U M

$$N = \underset{K}{\binom{9}{2}}\underset{O}{\binom{7}{2}}\underset{L}{\binom{5}{1}}\underset{W}{\binom{4}{1}}\underset{I}{\binom{3}{1}}\underset{U}{\binom{2}{1}}\underset{M}{\binom{1}{1}} = 90\,720$$

C	V	C	V	C	V	C	V	C
C	C	V	C	V	C	V	C	V
C	V	C	C	V	C	V	C	V
C	V	C	V	C	C	V	C	V
C	V	C	V	C	V	C	C	V

5

$$N = 5 \cdot \underbrace{\binom{5}{2,1,1,1}}_{\text{spółgłoski}} \cdot \underbrace{\binom{4}{2,1,1}}_{\text{samogłoski}} \cdot \frac{1}{2} =$$

mogą się powtórzyć pary 'KO'

muszą być 4 pary C V
zostaje 5 miejsc gdzie można ustawić ostatnią spółgłoskę (2 na brzegach i 3 pomiędzy)

5.

12 elementów

1° pary nieuporządkowane, istotna kolejność

$$N = \binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = \frac{12!}{2^6} = 7\,484\,400$$

$$N = \binom{12}{2,2,2,2,2,2}$$

2° pary nieuporządkowane, nieistotna kolejność

$$N = \underbrace{\binom{12}{2,2,2,2,2,2}}_{\text{wybór kolejnych par}} \cdot \underbrace{\frac{1}{6!}}_{\text{liczba permutacji par}}$$

6.

8 klubów podzielone na 4 pary

- 3× H
- 2× W
- 2× N
- 1× F

A – nie ma pary $\{H_i, H_j\}$

A' – jest para $\{H_i, H_j\} \iff$ jest dokładnie jedna para $\{H_i, H_j\}$

Ω - wszystkie pary nieuporządkowane

$$|\Omega| = \frac{8!}{(2!)^4} \cdot \frac{1}{4!} = 105$$

$\frac{8!}{(2!)^4}$ ↓ w każdej z 4 par zamiana kolejności

$\frac{1}{4!}$ ↘ zmiana kolejności par

$$|A'| = \binom{3}{2} \cdot \frac{6!}{(2!)^3} \cdot \frac{1}{3!} = 45$$

$$P(A) = 1 - P(A') = \frac{105-45}{105} = \frac{4}{7}$$

B – przynajmniej 1 para drużyn z tego samego kraju

B' – nie ma pary drużyn z tego samego kraju

1) H H H W N

2) H | H | H | F

$$|B'| = \underbrace{4!}_{\text{rozmieszczenie } 3\times H \text{ i } F} \cdot \underbrace{4!}_{\text{rozmieszczenie reszty}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4!}}_{\text{zmiana kolejności par}} + \underbrace{3!}_{3\times H} \cdot \underbrace{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}_{WN} \cdot \underbrace{4!}_{\text{reszta}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4!}}_{\text{kolejność par}} = 4! + 4! = 48$$

$$P(B) = \frac{105-48}{105} = \frac{19}{35}$$

7.

talia 52 kart

5 kart

≥ 2 asy

≥ 1 dama

≥ 1 król

~~$N = \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{48}{1} = 4608$~~

liczy podwójnie przypadki z więcej niż 1 D/K, $\geq 2 \times A$

A	D	K	I		
2	1	1	40	$\to \binom{4}{2}\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{40}{1}$	3840
3	1	1	0	$\to \binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}$	64
2	2	1	0	$\to \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{1}$	144
2	1	2	0	$\to \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{4}{2}$	144

$$N = 3840 + 64 + 144 + 144 = 4192$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

liczba sposobów wybrania k elementów ze zbioru n-elementowego

(k-elementowe kombinacje n-elementowego zbioru)

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots k_j} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_j!}$$

podział n-elementowego zbioru na j zbiorów o rozmiarach $k_1, k_2, \ldots k_j$