Działanie n-argumentowe (wewnętrzne) - każda funkcja $f: A^n \to A$

- $n=0 \to$ konkretny element zbioru A
- $n=1 \to$ działanie unarne - argumenty i wartości w zbiorze A
- $n=2 \to$ działanie binarne (algebraiczne)

W n-elementowym zbiorze można zdefiniować n^{n^2} działań binarnych

Oznaczenie $x \star y := \star(x,y)$

np. dodawanie jest działaniem wewnętrznym w $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Z}$
ale nie jest wewnętrzne w zbiorze liczb nieparzystych

Jeśli F - układ działań w $A \neq \emptyset$, to parę (A, F) nazywa się algebrą
np. $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Q}, +, -, \cdot)$, $(2^{\mathbb{N}}, \cup, \cap)$

Własności działań binarnych

$\star$ jest przemienne w A jeśli $\forall x,y \in A \quad x \star y = y \star x$

$\star$ jest łączne w A jeśli $\forall x,y \in A \quad x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$

$\star$ jest rozdzielne względem $\diamond$ jeśli
$\forall a,b,c \in A \quad a \star (b \diamond c) = (a \star b) \diamond (a \star c)$
i $\forall a,b,c \in A \quad (b \diamond c) \star a = (b \star a) \diamond (c \star a)$

e jest elementem neutralnym działania $\star$ jeśli $\forall a \in A \quad a \star e = e \star a = a$

b jest elementem odwrotnym do a względem działania $\star$
jeśli $a \star b = b \star a = e$ (e - element neutralny)

Przykłady

- dodawanie i mnożenie są łączne i przemienne
- odejmowanie i dzielenie nie są ani łączne ani przemienne
- złożenie w zbiorze funkcji $f: X \to X$ jest łączne ale nie przemienne
- mnożenie jest rozdzielne względem dodawania
- koniunkcja jest rozdzielna względem alternatywy, a alternatywa względem koniunkcji
- 1 jest elementem neutralnym mnożenia w $\mathbb{R}$
- w algebrze $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $-x$ jest odwrotny do x względem dodawania

Grupa to algebra $(G, \circ)$ $\circ$ - działanie binarne taka, że

1) $\circ$ jest łączne

2) istnieje element neutralny $\circ$

3) każdy element zbioru G jest odwracalny

grupa jest przemienna jeśli $\circ$ jest przemienne

np. $(\mathbb{Z}, +)$ $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

Pierścień to algebra $(P, \oplus, \odot)$ $\oplus, \odot$ - działania binarne taka, że

1) $(P, \oplus)$ jest grupą przemienną

2) $\odot$ jest łączne

3) $\odot$ jest rozdzielne względem $\oplus$

Pierścień jest przemienny jeśli $\odot$ jest przemienne

Element neutralny $\oplus$ – zero pierścienia
Element neutralny $\odot$ – jedynka pierścienia

Ciało to pierścień $(P, \oplus, \odot)$ taki, że $(P \setminus \{0\}, \odot)$ jest grupą przemienną

np $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$