

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ zbieżny dla } a > 1$$

$$\text{rozbieżny dla } a \leq 1$$

- Kryterium porównawcze
 $0 \leq a_n \leq b_n$

jeśli $\sum a_n$ rozbieżny to $\sum b_n$ rozbieżny
 jeśli $\sum b_n$ zbieżny to $\sum a_n$ zbieżny

$$1) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \quad \forall n \geq 3 \quad \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(3)}{n}$$

$\ln(3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (harmoniczny) więc $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ rozbieżny

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$|\sin(x)| \leq |x| \rightarrow \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ jest zbieżny więc } \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \text{ jest zbieżny}$$

- Wzrost kowczany

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ rozbieżny}$$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos\left(\frac{n}{2n+1}\right) - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\arccos\left(\frac{n}{2n+1}\right) - \frac{\pi}{4} \right] = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \neq 0$$

Węc szereg rozbieżny bo nie jest spełniony warunek kowczany

- Kryterium Cauchy'ego

$$a_n \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$$

$$\sum a_n \text{ rozbieżny dla } q > 1$$

$$\sum a_n \text{ zbieżny dla } 0 \leq q < 1$$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

Węc szereg rozbieżny

- Kryterium d'Alamberta

$$a_n \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$$

$$g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ rozbieżny}$$

$$0 \leq g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny}$$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(2n)! \cdot 3^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot 3^n}{(n+1)! \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{12} < 1$$

szereg zbieżny

• Kryterium całkowe

f nieujemna i dodatnia

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) \text{ zbieżny} \iff \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx \text{ zbieżna}$$

$$1) f: [2, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{1}{x} x^2 - \ln(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3}$$

$$f'(x) \leq 0 \iff x^3(1 - 2 \ln(x)) \leq 0$$

$$2x^3(\frac{1}{2} - \ln(x)) \leq 0$$

$$\ln(x) \geq \frac{1}{2}$$

$$x \geq \sqrt{e} < 2$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln(x) \quad g' = x^{-2} \\ t' = \frac{1}{x} \quad g = -x^{-1} \end{array} \right| = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} -\frac{\ln(T)}{T} - \frac{1}{T} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} = 0 - 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\ln(2)+1}{2}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\ln(T)}{T} \stackrel{H}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} = 0$$

szereg zbieżny

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny bezwzględnie wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ zbieżny

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny warunkowo wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ rozbieżny; $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$$

szereg zbieżny bezwzględnie

• Kryterium Leibniza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ i } a_n \text{ nieujemny} \implies \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ zbieżny}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

nie można odwołać rozbieżności
z kryterium Leibniza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \text{ i } \sin\left(\frac{1}{n}\right) \text{ maleje}$$

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x \rightarrow \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ rozbieżny} \text{ więc } \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)| \text{ rozbieżny}$$

szereg zbieżny warunkowo

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1} \sqrt{n}} x^n$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \sqrt{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 3$$

$$x = -3 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n}} \cdot (-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ rozbieżny}$$

$$x = 3 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n}} \cdot 3^n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \text{ zbieżny}$$

przedział $(-3, 3]$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{3^n + 2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n + 2^n} (x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n + 3^n} (x-3)^n \rightarrow \text{środek } x_0 = 3$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n + 3^n} \cdot \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n (3 + 2(\frac{2}{3})^n)}{3^n (1 + (\frac{2}{3})^n)} = \frac{3}{2} \rightarrow \text{przedział } (3 - \frac{3}{2}, 3 + \frac{3}{2})$$

$$\text{dla } x = \frac{3}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n + 2^n} \cdot (-1)^n \cdot \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n + 2^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \text{ nie spełnia warunków konwencji}$$

$$\text{dla } x = \frac{9}{2} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n + 2^n} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{3^n + 2^n} \quad \text{nie spełnia warunków konwencji}$$

podciąg! dążący do 1 i do -1

przedział zbieżności $(\frac{3}{2}, \frac{9}{2})$

13.5

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} - x \frac{1}{1-(-x)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot (-1)^n x^n$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot 2$$

$$f^{(28)}(0) = 2 \cdot (-1)^{28} \cdot 28! = 2 \cdot 28!$$

$$f^{(29)}(0) = 2 \cdot (-1)^{29} \cdot 29! = -2 \cdot 29!$$