Zestaw 10

1. W przypadku, gdzie granica w punkcie będzie istniała stosuje się oszacowania i twierdzenie o 3 funkcjach, żeby wykazać, że jakaś wartość jest granicą. Trzeba wykazać, że zbliżając się do punktu po dowolnej krzywej (nie tylko po prostych) funkcja zbliża się do wartości granicznej

W przypadku, gdzie granica nie będzie istniała, wskazuje się 2 ciągi takie, że oba zbiegają do punktu granicznego ale funkcja w granicy przyjmuje dla nich różne wartości. Korzysta się z definicji Heinego.

Granica prawdopodobnie nie będzie istniała, kiedy mianownik jest wyższego rzędu od licznika

Przydatna nierówność do szacowania

$$(|x|-|y|)^2 \geqslant 0 \qquad \text{dla } x\neq 0 \wedge y \neq 0$$

$$x^2 - 2|xy| + y^2 \geqslant 0 \qquad \frac{1}{x^2+y^2} \leqslant \frac{1}{2|xy|}$$

$$x^2+y^2 \geqslant 2|xy|$$

a) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+2y^2}$ $\qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

$D_f = \mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$

1° dla $x\neq 0 \vee y \neq 0$

$$0 \leq \frac{|x^3y|}{x^2+(\sqrt{2}y)^2} \leqslant \frac{|x^3y|}{2|x\cdot\sqrt{2}y|} = \frac{|x^3y|}{2\sqrt{2}|xy|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}x^2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{2\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3y|}{x^2+2y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+2y^2} = 0$$

2° dla $x=0 \wedge y\neq 0$

$$f(0,y) = \frac{0\cdot y}{0^2+2y^2} = \frac{0}{2y^2} = 0$$

3° dla $x\neq 0 \wedge y = 0$

$$f(x,y) = \frac{x^3\cdot 0}{x^2+2\cdot 0^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

te 3 przypadki pokrywają dążenie do $(0,0)$ z dowolnego kierunku

więc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

b) $f(x,y) = \dfrac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$ $\qquad (x_0,y_0) = (1,1)$

1° $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}+1, \frac{1}{n}+1\right) \to (1,1)$

$$f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n}+1-2}{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1-2} = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n^2}+\frac{4}{n}} = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n}+2\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n}+2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{-1}{n}+1, \frac{1}{n}+1\right) \to (1,1)$

$$f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = \frac{\frac{-1}{n}+1+\frac{1}{n}+1-2}{\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}+1-2} = \frac{0}{\frac{2}{n^2}} = 0 \longrightarrow 0$$

Wartości dla ciągów są różne więc z definicji Heinego granica w $(1,1)$ nie istnieje

c) $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

1° $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{-1}{n}\right) \to (0,0)$

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{-1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2}$$

Granica nie istnieje

d) $f(x,y) = \frac{x - xy}{2x^2 + (y-1)^2} \qquad (x_0, y_0) = (0,1)$

1° $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 1\right) \to (0,1)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{2 \cdot \frac{1}{n^2} + 0^2} = \frac{0}{\frac{2}{n^2}} = 0 \to 0$$

2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + 1\right) \to (0,1)$

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 1\right)}{2 \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + 1 - 1\right)^2} = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} \to -\frac{1}{3}$$

Granica nie istnieje

*) (spoza zestawu)

$f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

1° $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{n^2} + 1\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n^2} + 1} \to 0$$

2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to (0,0)$

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Granica nie istnieje

2. Dla funkcji określonej fragmentarycznie (z klamrą), wartości pochodnej w niektórych punktach trzeba liczyć z definicji

a)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(3x^2+y^2)}{x^3} & \text{dla } x\neq 0\\ 0 & \text{dla } x=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1-\cos(3(0+\Delta x)^2+0^2)}{\Delta x^3}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos(3\Delta x^2)}{\Delta x^4}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6\Delta x\sin(3\Delta x^2)}{4\Delta x^3}=\frac{3}{2}\lim_{\Delta x\to 0}3\cdot\frac{\sin(3\Delta x^2)}{3\Delta x^2}=\frac{3}{2}\cdot 3\cdot 1=\frac{9}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

b) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y^3}=(x^3-y^3)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{3}\cdot(x^3-y^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-y^3)^2}}\quad \text{dla } (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x^3}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{-\Delta y^3}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$$

c)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x^3}{\Delta x^2}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^3}{\Delta x^3}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{\Delta y^2}-0}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y^2}=+\infty$$

3. Istnienie pochodnych cząstkowych i ciągłość są od siebie niezależne

a)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad (x_0,y_0)=(0,0)$$

1° $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ 2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) \to (0,0)$

$$f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \qquad f(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje więc f nie jest ciągła w $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta x\cdot 0}{\Delta x^2+0}-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y}{0+\Delta y^2}-0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y} = 0$$

b) $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}$ $(x_0,y_0)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^4+y^2} = 0 = f(0,0)$$

funkcja jest ciągła w $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x^2|}{\Delta x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{\Delta y^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y} \text{ nie istnieje}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{|\Delta y|}{\Delta y} = 1 \qquad \lim_{\Delta y\to 0^-}\frac{|\Delta y|}{\Delta y} = -1$$

4.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\forall_{(x,y)\neq(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^3y(x^2+y^2)^2 - x^3y^2\cdot 2(x^2+y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = 2x^3y\,\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^3} = 2x^3y\,\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{0\cdot\Delta y^2}{\Delta y^4}-0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases}2x^3y\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1° $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ 2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = (\frac{\sqrt{2}}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n) = 2\cdot\frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2})^3} = \frac{2}{n^4}\cdot 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n) = 2\cdot\frac{2\sqrt{2}}{n^3}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{(\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^2})^3} = \frac{4\sqrt{2}}{n^4}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{27}{n^6}} = \frac{4\sqrt{2}}{27}\cdot\frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{4\sqrt{2}}{27}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ nie istnieje więc $\frac{\partial f}{\partial y}$ jest nieciągła w $(0,0)$

5.

a) $f(x,y) = \ln(2xy) - 2x^2 - y^2 \qquad D_f: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0\}$

$f_x = \frac{1}{2xy}\cdot 2y - 4x = \frac{1}{x} - 4x = \frac{1-4x^2}{x} = \frac{4(\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{2}+x)}{x} \qquad f_x = 0 \iff x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{1}{2}$

$f_y = \frac{1}{2xy}\cdot 2x - 2y = \frac{1}{y} - 2y = \frac{1-2y^2}{y} = \frac{2(\frac{\sqrt{2}}{2}-y)(\frac{\sqrt{2}}{2}+y)}{y} \qquad f_y = 0 \iff y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

punkty krytyczne (do sprawdzenia) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

$f_{xx} = -x^{-2} - 4 = \frac{-1}{x^2} - 4$
$f_{yy} = -y^{-2} - 2 = \frac{-1}{y^2} - 2$
$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$W(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = W(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = \begin{vmatrix} \overset{<0}{-8} & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 32 > 0$

maksimum lokalne w $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ i $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy} \qquad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$f_x = \frac{1}{y}\cdot(-x^{-2}) + 1 = \frac{-1}{x^2y} + 1 \qquad f_y = \frac{-1}{xy^2} + 8$

$f_x = 0 \to 1 = \frac{1}{x^2y} \qquad x^2y = 0 \qquad y = \frac{1}{x^2}$

$f_y = 0 \to \frac{1}{x\cdot(\frac{1}{x^2})^2} = 8 \qquad \frac{1}{\frac{1}{x^3}} = 8 \qquad x^3 = 8 \qquad x = 2 \to y = \frac{1}{4}$

punkt krytyczny $(2, \frac{1}{4})$

$f_{xx} = -\frac{1}{y}\cdot(-2x^{-3}) = \frac{2}{x^3y}$
$f_{yy} = -\frac{1}{x}(-2y^{-3}) = \frac{2}{xy^3}$
$f_{xy} = -\frac{1}{x^2}\cdot(-1y^{-2}) = \frac{1}{x^2y^2}$

$W(2, \frac{1}{4}) = \begin{vmatrix} \overset{>0}{1} & 4 \\ 4 & 64 \end{vmatrix} = 48 > 0$

minimum lokalne w $(2, \frac{1}{4})$

c) $f(x,y) = (2x + y^2)e^x$

$2ye^x = 0 \to y = 0$

$f_x = (2x+y^2)e^x + 2e^x = e^x(2x+y^2+2) \qquad e^x(2x+0+2) = 0 \to x = -1$

$f_y = 2ye^x$

punk krytyczny $(-1,0)$

$f_{xx} = 2e^x + (2x+y^2+2)e^x = e^x(2x+y^2+4)$
$f_{yy} = 2e^x$
$f_{xy} = f_{yx} = 2ye^x$

$W(-1,0) = \begin{vmatrix} \overset{>0}{\frac{1}{e}+2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{vmatrix} = \frac{2}{e}\cdot(\frac{1}{e}+2) > 0$

minimum w $(-1,0)$

d) $f(x,y) = 2x^2 - x^3y^2 - \ln(x) \qquad D_f: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\}$

$f_x = 4x - 3y^2x^2 - \frac{1}{x} \qquad -2x^3y = 0 \to x = 0 \vee y = 0$

$f_y = -2x^3y \qquad 4x - \frac{1}{x} = 0 \qquad 4x = \frac{1}{x} \qquad x^2 = \frac{1}{4} \to x = \frac{1}{2}$

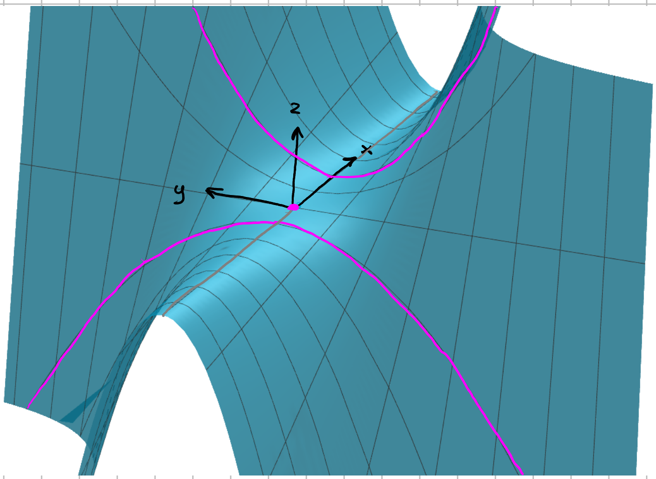
punkt krytyczny $(\frac{1}{2}, 0)$

$f_{xx} = 4 - 6y^2x + \frac{1}{x^2}$
$f_{yy} = -2x^3$
$f_{xy} = f_{yx} = -6x^2y$

$W(\frac{1}{2},0) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -2 < 0$

nie ma ekstremów lokalnych

6. $f(x,y) = xy^2$



$f_x = y^2$ $\qquad y^2 = 0 \to y = 0,\ x \in \mathbb{R}$

$f_y = 2xy$ $\qquad 2xy = 0 \to x = 0 \vee y = 0$

punkty krytyczne $(x,0),\ x \in \mathbb{R}$

$f_{xx} = 0$ $\qquad W(x,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$

$f_{yy} = 2x$

$f_{xy} = f_{yx} = 2y$ $\qquad$ nie wiadomo

trzeba określić inną metodą

maksima lokalne $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$

minima lokalne $\{(x,0) \in \mathbb{R} : x > 0\}$

przekroje płaszczyznami prostopadłymi do osi x są parabolami

punk $(0,0)$ nie jest ekstremum (saddle point)