

1.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2y + z = -4 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2y + z = 4 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$[A|B, B_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_3 - v_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_1 - v_2 \\ v_3 + \frac{1}{2}v_2 \\ v_2 \cdot \frac{1}{2} \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_1 + \frac{1}{2}v_2 \\ v_3 + \frac{1}{2}v_2 \\ v_3 \cdot (-\frac{2}{3}) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

2.

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_3 - 2v_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_1 + 2v_2 \\ v_2 + v_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2 = 1 \\ y - 2 = 2 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 2 \\ y = 2 + 2 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z \in \mathbb{R}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -8 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_2 + v_1 \\ v_3 - 2v_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_1 - v_3 \\ -\frac{1}{4}v_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_1 - 5v_2 \\ v_3 + v_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

↑  $t_1$  ↑ ↑  $t_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \\ v_4 - v_1 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_2 \cdot \frac{1}{2} \\ v_3 - \frac{1}{2}v_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} v_1 + v_2 \\ v_3 - v_2 \\ v_4 - 3v_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_4 - v_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = y = z = 1$$

3.

$$a) \begin{bmatrix} a & a+2 & 2(a-1) & 0 \\ 1 & a & 3-a & a+1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{miesymetryczny} \\ \text{minor} \end{array} \begin{vmatrix} a & a+2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = a^2 - 2a + a - 2 = (a+1)(a-2)$$

$$\text{dla } a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) = 2$$

jest nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru

$$\text{dla } a = -1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-1 \cdot v_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

nieskończenie wiele rozwiązań, 2 parametry

$$\text{dla } a = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} v_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

wielad sprecyzny

$$b) \begin{bmatrix} 1 & a-1 & a & 2a \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & a+2 & 4+a \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \quad a-1 \quad a \\ 2 \quad 1 \quad 0 \\ a \quad -1 \quad a+2 \end{array} \begin{array}{l} = a+2-2a-a^2-2(a-1)(a+2) \\ = a+2-2a-a^2-2a^2-4a+2a+4 \\ = -3a^2-3a+6 \\ = -3(a^2+a-2) = -3(a^2+2a-a-2) \\ = -3(a-1)(a+2) \end{array}$$

$$\text{dla } a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) = 3 = n$$

jest dokładnie 1 rozwiązanie

$$\text{dla } a = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_2 - 2v_1 \\ v_3 - v_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{cases} x+z=2 \\ y-2z=-3 \end{cases} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad z \in \mathbb{R}$$

$$v_3 = -v_2$$

nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru

$$\text{dla } a = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_2 + v_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

wielad sprecyzny, 0 rozwiązań

$$c) \begin{bmatrix} a-1 & a+3 & 4 \\ 1 & a & 2a \\ 2 & 3a+1 & 4a \end{bmatrix} \xrightarrow{v_3 - 2v_1} \begin{bmatrix} a-1 & a+3 & 4 \\ 1 & a & 2a \\ 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_1 - v_3} \begin{bmatrix} a-1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 2a \\ 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_2 - v_3} \begin{bmatrix} a-1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2a \\ 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 4a+4 - 2a(a+1)(a-1) - 4a+4 - 2a(a^2-1)$$

$$= 4a+4 - 2a^3 + 2a = -2a^3 + 6a+4 = -2(a^3 - 3a - 2)$$

$$= -2(a+1)(a^2 - a - 2) = -2(a+1)^2(a-2)$$

$$\begin{array}{r} a^2 - a - 2 \\ a^3 - 3a - 2 \quad (a+1) \\ \hline a^3 + a^2 \\ -a^2 - 3a \\ \hline -2a - 2 \\ -2a - 2 \end{array}$$

dla  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$   
 $\text{rank}(A|B) = 3 \neq \text{rank}(A) = 2$   
 układ sprzeczny

dla  $a = -1$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{2}v_1 \\ \frac{1}{2}v_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

niekończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru

dla  $a = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_2 - v_1 \\ v_3 - 2v_1}} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_1 + \frac{5}{3}v_2 \\ v_3 - (-\frac{1}{3})v_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1 rozwiązanie

d)  $\begin{bmatrix} 0 & a & 6 & -a & a+2 \\ 3-a & a-2 & a-1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & a-3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1}} \begin{bmatrix} 0 & a & 6 & -a & a+2 \\ 3-a & a-1 & -1 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 & 2 & a-3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} &= 24 - 4a(a-1) - 12(3-a) \\ &= 24 - 4a^2 + 4a - 36 + 12a \\ &= -4a^2 + 16a - 12 = -4(a^2 - 4a + 3) \\ &= -4(a^2 - 3a - a + 3) = -4(a-3)(a-1) \end{aligned}$$

dla  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$   
 $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) = 3$   
 jest niekończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru

dla  $a = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{6}v_1 \\ \frac{1}{2}v_2}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$v_3 = -2v_2 \quad \text{rank}(A) = \text{rank}(A|B) = 2$$

niekończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów

dla  $a = 3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_1 - 3v_2 \\ v_3 - 2v_2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

układ sprzeczny, 0 rozwiązań

