

Przestrzenie liniowe

Przestrzeń liniowa to trójka $(V, +, (\mathbb{K}, \oplus, \odot), \cdot)$ o własnościach:

- $(V, +)$ jest grupą przemenną,
- $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ jest ciałem
- operacja $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ spełnia warunki dla $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $u, v \in V$
 - $(\alpha \oplus \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
 - $\alpha \cdot (v \oplus w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
 - $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \odot \beta) \cdot v$
 - $1 \cdot v = v$ (1 to jedynka ciała \mathbb{K})

Wektory - elementy zbioru V

Skalary - elementy zbioru \mathbb{K}

Operacja \cdot - mnożenie wektora przez skalar

Przykłady przestrzeni liniowych

\mathbb{R}^2 nad \mathbb{R}

$$v_1 = (x_1, y_1) \quad v_2 = (x_2, y_2) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\alpha \cdot v_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

\mathbb{R}^n nad \mathbb{R} $n \in \mathbb{N}$

$$v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad v_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$v_1 + v_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \cdot v_1 = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

\mathbb{C} nad \mathbb{R}

wektory - liczby zespolone

skalary - liczby rzeczywiste

$$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

$$\alpha \cdot v = \alpha a + \alpha b j$$

$\mathbb{R}[x]$ nad \mathbb{R} przestrzeń wielomianów rzeczywistych

$$(v_1 + v_2)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$\alpha \cdot v(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_n x^n$$

Wektor zerowy 0

element neutralny dodawania w grupie $(V, +)$

$$\alpha v = 0 \iff \alpha = 0 \vee v = 0$$

w przestrzeni \mathbb{R}^n nad \mathbb{R} $0 = (0, 0, \dots, 0)$

w przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ nad \mathbb{R} 0 - wielomian zerowy

Wektor przeciwny $-v$

$$(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha v)$$

Odejmowanie wektorów

$$v - u = v + (-u)$$

Odciecie funkcji $\varphi = f|_A$

$$\text{dla } f: X \rightarrow Y \quad \varphi: A \subseteq X \rightarrow Y \quad \forall x \in A \quad \varphi(x) = f(x)$$

$\varphi = f|_A$ jest odcieciem funkcji f do zbioru A

Podprzestrzeń

Zbiór $W \subseteq V$ z działaniami jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $((V, +), \mathbb{K}, \cdot)$ jeśli $((W, +|_W), \mathbb{K}, \cdot|_W)$ jest przestrzenią liniową.

- Addytywność $\forall v, u \in W \quad v + u \in W$
- Jędrnorodność $\forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall u \in W \quad \alpha u \in W$
- Do każdej podprzestrzeni należy wektor zerowy 0
- Podprzestrzeń trywialna / zerowa $\{0\}$ jest podprzestrzenią każdej przestrzeni
- Każda przestrzeń liniowa jest swoją własną podprzestrzenią - podprzestrzenią nieustasową
- Jeśli U i W są podprzestrzeniami V to $U \cap W$ jest podprzestrzenią V
- Jeśli U i W są podprzestrzeniami V to $U + W$ jest podprzestrzenią V

Suma algebraiczna $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$

Podprzestrzenie \mathbb{R}^2 to proste przechodzące przez punkt $(0,0)$, $\{0\}$ i \mathbb{R}^2

Podprzestrzenie \mathbb{R}^3 to proste i płaszczyzny przechodzące przez punkt $(0,0,0)$, $\{0\}$ i \mathbb{R}^3

Sprawdzenie czy zbiór jest podprzestrzenią \mathbb{R}^2

$$W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$v_1 = (x_1, 0) \quad v_2 = (x_2, 0) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, 0) \in W$$

$$\alpha v_1 = (\alpha x_1, 0) \in W$$

Oba warunki są spełnione więc W jest podprzestrzenią \mathbb{R}^2

$$W = \{u \in \mathbb{R}[x] : u(2) = 0\}$$

$$(v_1 + v_2)(2) = v_1(2) + v_2(2) = 0 + 0 = 0$$

$$(\alpha v_1)(2) = \alpha v_1(2) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Oba warunki są spełnione więc W jest podprzestrzenią \mathbb{R}^2

Kombinacja liniowa

Kombinacja liniowa wektorów v_1, v_2, \dots, v_n o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ to wektor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów v_1, v_2, \dots, v_n w ciele \mathbb{K} oznacza się $\text{Lin}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ albo $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Dla danych $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jest podprzestrzenią V i nazywa się przestrzenią rozpiętą, albo generowaną przez v_1, v_2, \dots, v_n

W przestrzeni \mathbb{R}^3

• przestrzeń generowana przez 2 niezależne wektory może być płaszczyzną lub prostą

$$\text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} = \text{przestrzeń } z = 0$$

$$\text{span}\{(1, 0, 0), (2, 0, 0)\} = oś x$$

• przestrzeń generowana przez 3 niezależne wektory może być całą \mathbb{R}^3 , płaszczyzną lub prostą

$$\text{span}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} = \mathbb{R}^3$$

Układ wektorów

Układ to uporządkowany ciąg (v_1, v_2, \dots, v_n)

Podukład $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k})$ układu (v_1, v_2, \dots, v_n)

zachowuje kolejność $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

Układ pusty \emptyset

Liniova niezależność

Układ jest liniowo niezależny wtedy

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

W przeciwnym wypadku układ jest liniowo zależny

Układ pusty jest liniowo niezależny

Układ jest liniowo zależny \Leftrightarrow jeden z wektorów jest kombinacją liniową pozostałych

Układ liniowo niezależny rozpiną przestrzeń takiego wymiaru ile ma wektorów

Zależności można dowodzić:

- Jeśli zawiera wektor zerowy 0 to jest liniowo zależny
- Układ 2 niezerowych wektorów jest liniowo zależny
 \Leftrightarrow jeden jest wielokrotnością drugiego
- Układ 1 wektora jest liniowo zależny \Leftrightarrow wektor jest 0
- Podukład układu liniowo niezależnego jest liniowo niezależny

Sprawdzenie czy układ jest liniowo niezależny

$$(v_1, v_2, v_3) = ((0, 1, -2), (1, 2, -1), (1, 0, 3))$$

rozwiązując równanie $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$

jeśli ma więcej rozwiązań niż rozwiązanie zerowe to jest zależny

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\beta \\ \alpha = -2\beta \\ 4\beta - \beta - 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta \in \mathbb{R} \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

jest nieskończenie wiele rozwiązań

$$-2v_1 + v_2 - v_3 = 0 \quad v_3 = v_2 - 2v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

układ jest liniowo zależny

Baza przestrzeni liniowej

Liniowo niezależny układ wektorów rozpinający daną przestrzeń

Każdy wektor v przestrzeni można wyrazić jako kombinację

liniową wektorów bazy v jednoznaczny sposób

$$\forall v \in V \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

(v_1, v_2, \dots, v_n) - baza przestrzeni V

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - współrzędne wektora v w bazie (v_1, v_2, \dots, v_n)

Baza przestrzeni zerowej $\{0\}$ jest układ pusty \emptyset

Bazę przestrzeni liniowej można wybrać na wiele sposobów,

każda składa się z tej samej liczby wektorów

Wymiar przestrzeni $\dim V$

Liczba elementów bazy V jeśli jest skończona

przestrzeń jest skończone wymiarowa

Jeśli nie istnieje skończona baza przestrzeni V

to V jest nieskończenie wymiarowa

Sprawdzenie czy $A = (v_1, v_2, v_3) = ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, -3))$ jest bazą \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0 \\ \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \end{cases} \begin{array}{l} \text{układ jest} \\ \text{liniowo niezależny} \end{array}$$

$$(x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \quad ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, -3))$$

$$\begin{cases} x = b \\ y = a + c \\ z = b - 3c \end{cases} = \begin{cases} a = y - \frac{x-z}{3} \\ b = x \\ c = \frac{x-z}{3} \end{cases} \begin{array}{l} \text{dowolny wektor} \\ \text{można wyrazić jako} \\ \text{kombinację liniową układu} \end{array}$$

Oba warunki są spełnione więc A jest bazą \mathbb{R}^3

Warunki równoważne

- Układ (v_1, v_2, \dots, v_n) jest bazą przestrzeni V
- Układ (v_1, v_2, \dots, v_n) jest liniowo niezależny i $\dim V = n$
- $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$ i $\dim V = n$
- Układ (v_1, v_2, \dots, v_n) jest maksymalnym liniowo niezależnym układem w V

Każdy wektor można przedstawić jednoznacznie jako kombinację liniową wektorów bazy

Bazę przestrzeni można wybrać na wiele sposobów
każda składa się z tej samej liczby wektorów

Baza kanoniczna (standardowa) E_n

$$E_n = (e_1, \dots, e_n) = ((1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1))$$

E_n jest bazą przestrzeni K^n

1 i 0 to jedynka i zero ciała K

e_1, \dots, e_n - wektory jednostkowe

Wektory jako wiersze i kolumny macierzy

dla $A \in M_{m \times n}(K)$

kolumny A można interpretować jako wektory z K^n

wiersze A można interpretować jako wektory z K^m

dla A_j - j -ta kolumna A , A^i - i -ty wiersz A

$$\text{rank}(A) = \dim \text{span}\{A_1, \dots, A_n\} = \dim \text{span}\{A^1, \dots, A^m\}$$

Macierz układu wektorów

$B = (v_1, \dots, v_n)$ jest bazą przestrzeni V

Dowolny wektor $v \in V$ można przedstawić jako

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$M_B(v) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ macierz współrzędnych } v \text{ w bazie } B$$

$M_B(A)$ - macierz współrzędnych wektorów układu A w bazie B

kolumny to współrzędne kolejnych wektorów

Przykład $v = (x, y, z)$ $M_{E_3}(v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Twierdzenie

Jeśli $B = (v_1, \dots, v_n)$ jest bazą V

dla dowolnego układu $A = (v_1, \dots, v_m) \subset V$

$$\dim \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} = \text{rank}(M_B(A))$$

Przykład - określone wymiary $V = \text{span}\{(2, 0, 0, -2), (-3, 0, 0, 3), (0, 1, 0, 2), (0, 2, 0, 4)\}$

przyjmując bazę E_4

$$M_{E_4}(V) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \dim V = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

Warunki równoważne

Jeśli $B = (v_1, \dots, v_n)$ jest bazą V

- $A = (v_1, \dots, v_m)$ jest bazą V
- $\text{rank}(M_B(A)) = n$
- $\det M_B(A) \neq 0$

Kryterium z wyznacznikiem pozwala łatwo sprawdzić czy układ jest bazą

Macierz zmiany bazy $M_A(B)$

Macierz przejścia od bazy A do bazy B

jeśli A i B są bazami przestrzeni V

$$M_A(B) = (M_B(A))^{-1}$$

$$M_B(w) = M_B(A) \cdot M_A(w)$$

Przykład

mając bazy $E_2 = (e_1, e_2) = ((1, 0), (0, 1))$

$$B = (v_1, v_2) = ((1, 1), (-1, 1))$$

$$M_{E_2}(B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_B(E_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

kolumny $M_B(E_2)$ - wektory e_1 i e_2 wyrażone w bazie B

$$e_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_B \quad e_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_B$$

wyrażenie wektora $(5, 1)$ w bazie B

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})(5) + (\frac{1}{2})(1) \\ (-\frac{1}{2})(5) + (\frac{1}{2})(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$v = (5, 1) = (3, -2)_B = 3v_1 - 2v_2$$