Szeregi

Ciąg sum częściowych

dla $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiuje się $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$S_1 = a_1$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Szereg liczbowy o wyrazie ogólnym a_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Suma szeregu zbieżnego

szereg jest zbieżny kiedy istnieje granica właściwa

(w przeciwnym wypadku jest rozbieżny)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

Ciąg geometryczny

$a_n = q^{n-1}$

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ nq & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

zbieżny dla $|q|<1$

Warunki konieczne zbieżności

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$

  gdzie $R_n = a_n + a_{n+1} + \dots$

Szereg harmoniczny

jest rozbieżny (2. warunek konieczny)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Działania na szeregach zbieżnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k \cdot A$$

Kryteria zbieżności (warunki wystarczające)

dla szeregów o wyrazach nieujemnych

Kryterium porównawcze

kiedy $\forall n > n_0 \quad 0 \le a_n \le b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ jest zbieżny} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ jest rozbieżny}$$

Przykład $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

$\frac{2}{\pi} x \le \sin(x) \le x$

$\frac{2}{\pi}\frac{1}{n} \le \sin(\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n}$

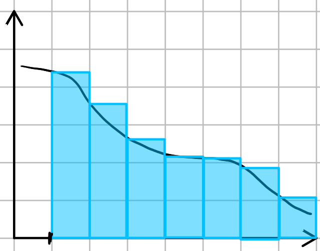
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny

więc $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$ też jest rozbieżny

Kryterium całkowe

$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ i $\int_m^{\infty} f(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne

dla nierosnącej i nieujemnej $f(x)$



Szereg Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

zbieżny dla $\alpha > 1$ bo $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ zbieżna dla $\alpha > 1$

rozbieżny dla $\alpha \le 1$ bo $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ rozbieżna dla $\alpha \le 1$

Kryterium d'Alamberta (ilorazowe)

kiedy $a_n > 0$ i istnieje $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny dla $0 \le g < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny dla $g > 1$

nie rozstrzyga zbieżności dla $g = 1$

Kryterium Cauchy'ego (pierwiastkowe)

kiedy istnieje $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny dla $0 \le g < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny dla $g > 1$

nie rozstrzyga zbieżności dla $g = 1$

zawsze $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$

Przykład

$a_n = \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}}{\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^3 \cdot 7^{3n}}{(2n-3)(2n-4)(2n-5)!} \cdot \frac{(2n-5)!}{7^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^3}{(2n-3)(2n-4)} = 0$$

więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$ jest zbieżny

$a_n = [\arctan(\cos(\frac{1}{n}))]^{2n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{[\arctan(\cos(\frac{1}{n}))]^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \arctan^2(\cos(\frac{1}{n})) = (\frac{\pi}{4})^2 < 1$ więc $\sum_{n=1}^{\infty} [\arctan(\cos(\frac{1}{n}))]^{2n}$ jest zbieżny

Kryterium Leibniza

jeśli a_n jest nierosnący i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

to $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny

Szereg naprzemienny $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

Przybliżanie sumy szeregu

sumę szeregu zbieżnego można przybliżyć przez sumę częściową z dowolną dokładnością $|S - S_n| \le a_{n+1}$

Zbieżność bezwzględna i warunkowa

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny kiedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny
w przeciwnym wypadku jest warunkowo zbieżny

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

Przykład

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest zbieżny z kryterium Leibniza

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny

więc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ jest warunkowo zbieżny

Szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

szereg potęgowy o wyrazie ogólnym $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$
jest zawsze zbieżny w $x = x_0$ (w środku)

Przedział zbieżności $X = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}\}$

Promień zbieżności $R = \max\{|x| : x \in X\}$

- $R = 0$ → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny tylko dla $x = 0$
- $R = +\infty$ → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny $\forall x \in \mathbb{R}$
- $0 < R < +\infty$ → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny w $(-R, R)$ i rozbieżny w $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$
  zbieżność w $x = R$ i $x = -R$ trzeba rozważyć oddzielnie
  $S(x)$ jest funkcją ciągłą w $(-R, R)$

Obliczanie promienia zbieżności

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{dla } 0 < \lambda < +\infty \\ 0 & \text{dla } \lambda = +\infty \\ +\infty & \text{dla } \lambda = 0 \end{cases}$$

Całkowanie i różniczkowanie szeregów

dla $R > 0$ i $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \,dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{d}{dx} S(t) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

nie zmienia się R

Szereg Taylora $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

Szereg Maclaurina $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

przybliżenie funkcji f w otoczeniu punktu x_0
rozwinięcie funkcji w szereg Taylora jest jednoznaczne dla określonego x_0

Szereg geometryczny $\longrightarrow$ szereg Maclaurina dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{dla} \quad |x|<1$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

na podstawie $\frac{1}{1-x}$ można rozwinąć dowolną funkcję wymierną
(zmieni się promień zbieżności)

Szereg Fouriera (trygonometryczny)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \qquad f(n) = \begin{cases} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) & \text{dla } n \in \mathbb{N} \\ \frac{a_0}{2} & \text{dla } n=0 \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

jeśli jest zbieżny na dowolnym przedziale długości $2l$ to jest zbieżny w $\mathbb{R}$
i jest funkcją okresową o okresie $2l$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + \varphi_n\right) \qquad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

wyrazy ogólne określają zależność położenia od czasu w drganiu harmonicznym
o amplitudzie c_n, okresie $\frac{2l}{n}$ i fazie początkowej φ_n

Suma częściowa (wielomian trygonometryczny)

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$ jest okresowa, okres $2l$

Warunki Dirichleta

funkcja f ograniczona na $[a,b]$

1. jest przedziałami monotoniczna na (a,b)
2. jest ciągła (albo nieciągła w skończonej liczbie punktów x_i i w każdym $f(x_i) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_i^+} f(x) + \lim_{x\to x_i^-} f(x)\right]$)
3. $f(a) = f(b) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to b^-} f(x)\right]$

Jeśli funkcja okresowa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie $p = 2l$ spełnia kryteria Dirichleta na przedziale $[a, a+2l]$
to jest sumą swojego szeregu Fouriera na przedziale $[a, a+2l]$

Wzory Eulera – Fouriera

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\,dx \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

Funkcja parzysta, spełniająca kryteria rozwija się w

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

Funkcja nieparzysta spełniająca warunki rozwija się w

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

Rozwinięcie funkcji nieokresowej na przedziale

funkcję nieokresową trzeba najpierw rozszerzyć do okresowej i rozwinąć tą rozszerzoną funkcję
(z $g: (0,p) \to \mathbb{R}$ na $g^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

rozszerzać można na różne sposoby więc rozwinięcia do szeregu mogą być różne