Zbiory uporządkowane

Relacje częściowego porządku

Relacja, która pozwala porównać ze sobą elementy zbioru czyli stwierdzenie, że
jeden element jest mniejszy / wcześniejszy / słabszy / mniej jakiś
a drugi element jest większy / późniejszy / mocniejszy / bardziej jakiś

- zwrotna
- antysymetryczna
- przechodnia

Zbiór częściowo uporządkowany (X, r) – para zbiór i relacja porządkująca

Oznaczenia $\leqslant, \preceq, \preccurlyeq$

Diagram Hassego

Dla skończonego zbioru X z relacją $\leqslant$, graf skierowany, gdzie
- wierzchołki to elementy zbioru X
- krawędzie idą w górę od a do b jeśli $a \leqslant b$, $a \neq b$, $\sim \exists c \ a \leqslant c \leqslant b$

Porządek liniowy

$(X, \leqslant)$ jest liniowo uporządkowany i $\leqslant$ jest relacją liniowego porządku
jeśli $\leqslant$ jest spójna i jest relacją częściowego porządku

Relacja ograniczona (obcięta)

dla $Y \subseteq X$ $\ r|Y$ jest relacją ograniczoną do Y
$r|Y = r \cap Y^2$

Jeśli r jest częściowym porządkiem w X
to $r|Y$ jest częściowym porządkiem w Y

Łańcuch

L jest łańcuchem w zbiorze X kiedy
- $(X, \leqslant)$ jest częściowo uporządkowany
- $L \subseteq X$ jest liniowo uporządkowany przez $\leqslant|L$

Antyłańcuch

Podzbiór Z zbioru uporządkowanego $(X, \leqslant)$ taki, że
żadne dwa elementy Z nie są porównywalne

$$\forall x,y \in Z \ \sim (x < y \lor y < x)$$

Izomorfizm porządkowy

$(X, \leqslant_X)$ i $(Y, \leqslant_Y)$ są porządkowo izomorficzne jeśli
istnieje bijekcja $f: X \to Y$ taka że $\ x_1 \leqslant_X x_2 \iff f(x_1) \leqslant_Y f(x_2)$

Elementy wyróżnione

dla częściowo uporządkowanego $(X, \leq)$

- minimalny $\sim \exists_{x \in X} \; x < x_0$
- maksymalny $\sim \exists_{x \in X} \; x_0 < x$
- najmniejszy $\forall_{x \in X} \; x_0 \leq x$
- największy $\forall_{x \in X} \; x \leq x_0$

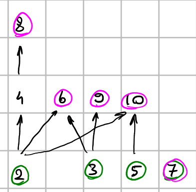
Istnieje conajwyżej 1 element największy / najmniejszy

Element największy / najmniejszy jest jedynym elementem maksymalnym / minimalnym

Nie każdy element maksymalny / minimalny jest największy / najmniejszy

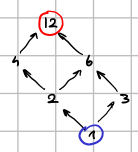
Jeśli $(X, \leq)$ jest skończony to istnieje element maksymalny i minimalny

$(\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, |)$ relacja podzielności



elementy maksymalne
elementy minimalne
nie ma elementu najmniejszego ani największego

$(\#12, |)$



element największy
element najmniejszy

dla częściowo uporządkowanego $(X, \leq)$, $A \subseteq X$, $a \in X$ to:

- ograniczenie górne A $\quad \forall_{x \in A} \; x \leq a$
- ograniczenie dolne A $\quad \forall_{x \in A} \; a \leq x$
- kres górny - supremum $\quad$ najmniejsze ograniczenie górne
- kres dolny - infimum $\quad$ największe ograniczenie dolne

Przykład

$(\mathbb{R}, \leq)$ $\quad A = [0,1)$

zbiór ograniczeń górnych $[1, +\infty)$

zbiór ograniczeń dolnych $(-\infty, 0]$

$\sup A = 1 \quad \inf A = 0$

$(\mathbb{N}, |)$ $\quad A = \{9, 15, 30\}$

ograniczenia górne - wspólne wielokrotności

$\sup A = NWW(9, 15, 30) = 90$

ograniczenia dolne - wspólne dzielniki $\{1, 3\}$

$\inf A = NWD(9, 15, 30) = 3$

Częściowy porządek w produkcie zbiorów uporządkowanych

$(X, \leq_x)$ i $(Y, \leq_y)$ w zbiorze $X \times Y$

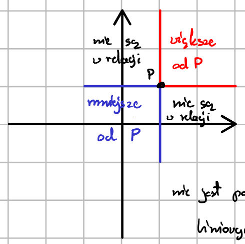
- porządek leksykograficzny $(X \times Y, \leq_L)$

$(x_1, y_1) \leq_L (x_2, y_2) \iff [(x_1 \leq_x x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq_y y_2)]$

- porządek produktowy $(X \times Y, \leq_P)$

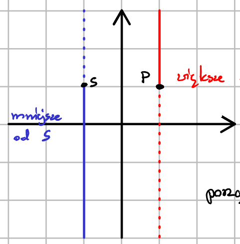
$(x_1, y_1) \leq_P (x_2, y_2) \iff [(x_1 \leq_x x_2) \wedge (y_1 \leq_y y_2)]$

Porządek produktowy na płaszczyźnie



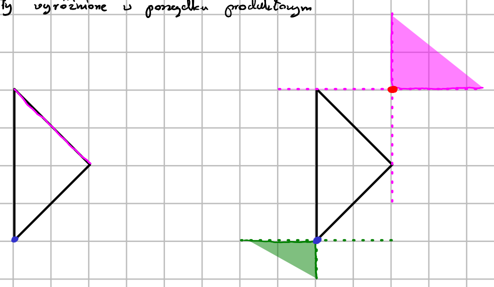
nie jest porządkiem liniowym

Porządek leksykograficzny na płaszczyźnie



porządek liniowy

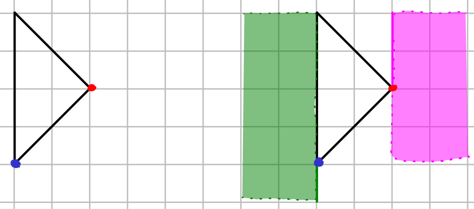
Elementy wyróżnione w porządku produktowym



nie ma elementu największego
elementy maksymalne
jest element najmniejszy
(jedyny element minimalny)

istnieje kres górny $\sup A \notin A$
ograniczenia górne
istnieje kres dolny $\inf A \in A$
ograniczenia dolne

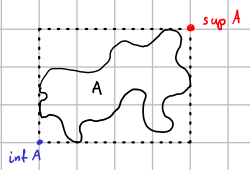
Elementy wyróżnione w porządku leksykograficznym



istnieje element największy
(jedyny element maksymalny)
istnieje element najmniejszy
(jedyny element minimalny)

istnieje kres górny $\sup A \in A$
ograniczenia górne
istnieje kres dolny $\inf A \in A$
ograniczenia dolne

Ogólnie w $\mathbb{R}^2$



Krata

Zbiór częściowo uporządkowany $(X, \leq)$
dla każdych dwóch elementów $x, y \in X$
istnieje kres dolny $\inf\{x,y\}$ oznaczany $x \wedge y$
i istnieje kres górny $\sup\{x,y\}$ oznaczany $x \vee y$

Przykłady

dla $(\mathbb{R}, \leq)$
$x \vee y = \max\{x,y\}$
$x \wedge y = \min\{x,y\}$

dla $(\mathbb{N}, |)$
$x \vee y = NWW(x,y)$
$x \wedge y = NWD(x,y)$

dla $(2^X, \subseteq)$ $A, B \subseteq X$
$A \vee B = A \cup B$
$A \wedge B = A \cap B$

Własności

1. $x \wedge x = x$ $\quad x \vee x = x$
2. $x \wedge y = y \wedge x$ $\quad x \vee y = y \vee x$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ $\quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
4. $x \wedge (x \vee y) = x$ $\quad x \vee (x \wedge y) = x$

Krata rozdzielna (dystrybutywna)

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Podzbiór kraty nie musi być kratą np dla $(\mathbb{N}, |)$ zbiór liczb pierwszych

Algebra Bool'a jest kratą

Własności porządku
dla zbioru liniowo uporządkowanego $(X, \leq)$

Gęsty
$\forall_{x,y \in X} \quad x<y \Rightarrow \exists_{z \in X} \; x<z<y$

Ciągły
- gęsty
- każdy podzbiór $A \subseteq X$ ograniczony z góry ma supremum w X
- każdy podzbiór $B \subseteq X$ ograniczony z dołu ma infimum w X

Dobry
W każdym podzbiorze $A \subseteq X$ istnieje element najmniejszy
Relacja dobrze porządkuje zbiór

Każdy element poza największym ma swój następnik
(najmniejszy element większy od x)

Twierdzenie o dobrym uporządkowaniu
Dla każdego zbioru X istnieje relacja $\leq$, która go dobrze porządkuje