Wektory i wartości własne

$A \in M(n\times n, \mathbb{R}) \quad \lambda \in \mathbb{R}$ wektor własny jest z definicji różny od 0

$Av = \lambda v$ wektor własny związany z wartością własną

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underset{\text{wartość własna}}{0} \cdot \underset{\text{wektor własny}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

wektory własne to niezerowe wektory z podprzestrzeni własnej
$v \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$

wielomian charakterystyczny $\chi_A(\lambda) = \det(A - I\lambda)$
pierwiastki wielomianu – wartości własne

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda(\lambda - 3)$$

kiedy krotność pierwiastka jest równa n to wymiar podprzestrzeni $\in [1, n]$

rozkład Jordana

$(A - \lambda I)v = 0$ dla $\lambda = 3$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V_\lambda = \{ x \in M(n\times 1, \mathbb{R}) : (A - \lambda I)x = 0 \}$
$V_0 = \{ \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \} = \operatorname{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix})$

1 i 2.

a) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} - t & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} - t \end{vmatrix} = -(\frac{3}{5} + t)(\frac{3}{5} - t) - \frac{16}{25} = -\frac{9}{25} + t^2 - \frac{16}{25} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

$A' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} A$

$\chi_{A'}(t) = (-3-t)(3-t) - 16$
$= t^2 - 9 - 16$
$= (t-5)(t+5)$
$\hookrightarrow \lambda_1' = 5 \quad \lambda_2' = -5$
$\cdot\frac{1}{5} \hookrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 1$

$$A - 1 \cdot I \quad \left[\begin{array}{cc|c} -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -8 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\cdot \frac{1}{4}]{+ w_2} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$x - \frac{1}{2}a = 0$
$y = a$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ a \end{bmatrix} = a' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$V_1 = \operatorname{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})$

$$A - (-1)I \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_{-1} = \operatorname{span}(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix})$

podprzestrzenie będą takie same dla macierzy pomnożonej przez skalar – mogą być łatwiejsze obliczenia

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \chi_A(t) = t^2 + 1 = (t - i)(t + i)$

$$(A - iI)v = 0 \quad \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdot(-1)]{\cdot i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ \cancel{1} & \cancel{i} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_i = \operatorname{span}([-i, 1])$

$$(A + iI)v = 0 \quad \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdot(-1)]{\cdot(-i)} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ \cancel{1} & \cancel{-i} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_{-i} = \operatorname{span}([i, 1])$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 4-t & 0 & 6 \\ 2 & 1-t & 4 \\ -1 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (4-t)(1-t)(-1-t) + 0 + 0 + 6(1-t) - 0 - 0$$
$$= (4-4t-t+t^2)(-1-t) + 6 - 6t$$
$$= -4 + 5t - t^2 - 4t + 5t^2 - t^3 + 6 - 6t$$
$$= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2$$
$$= (t-1)(-t^2+3t-2)$$
$$= -(t-1)(t^2-3t+2)$$
$$= -(t-1)^2(t-2)$$

	-1	4	-5	2
1		-1	3	-2
	-1	3	-2	0

$t^2 - 2t - t + 2$

$t(t-2) - (t-2)$

$\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$V_1 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot\frac{1}{2} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +2v_1 \\ -v_1 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_2 = \text{span}([-3, -2, 1])$

d) $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5-t & -3 & 6 \\ 4 & -t & 4 \\ -1 & 2 & -2-t \end{vmatrix} = (5-t)(-t)(-2-t) + 12 + 48$$
$$- 6t - 8(5-t) + 12(-2-t)$$
$$= -t(-10-5t+2t+t^2) + 60 - 6t - 40 + 8t - 24 - 12t$$
$$= 10t + 3t^2 - t^3 - 4 - 10t$$
$$= -t^3 + 3t^2 - 4$$
$$= (t+1)(-t^2+4t-4)$$
$$= -(t+1)(t-2)^2$$

	-1	3	0	-4
-1		1	-4	4
	-1	4	-4	0

$\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} +6v_3 \\ +4v_3 \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_{-1} = \text{span}([-1, 0, 1])$

$\lambda = 2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} +3v_3 \\ +4v_3 \\ \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & -12 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_2 = \text{span}([0, 2, 1])$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 3 & -5-t & 3 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)(-5-t)(4-t) - 54 - 54 - 18(-5-t) + 18(1-t) + 9(4-t)$$
$$= (-5-t+5t+t^2)(4-t) \cancel{-108} \cancel{+90} \cancel{+18t} \cancel{+18} \cancel{-18t} + 36 - 9t$$
$$= -20 + 16t + \cancel{4t^2} + 5t - \cancel{4t^2} - t^3 + 36 - 9t$$
$$= -t^3 + 12t + 16$$
$$= -(t-4)(t+2)^2$$

$\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -w_1 \\ -w_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_4 = \text{span}([1, 1, 2])$

$\lambda = -2$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$V_{-2} = \text{span}([1,1,0], [-1,0,1])$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$$

3.

$A \in M$

$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$\chi_{3A}(\lambda) = \det(3A - \lambda I) = \det(3A - \lambda I)$

$\chi_A(t) = 0 \Rightarrow \det(A - tI) = 0$

1) $\chi_{3A}(3t) = \det(3IA - 3tI) = \det(3(A - tI)) = \det(3I \cdot (A - tI))$
$= \det(3I) \cdot \det(A - tI) = \det(3I) \cdot 0 = 0$

$\chi_{3A}(3t) = 0 \Rightarrow 3t$ jest wartością własną $3A$

2) $\chi_{A-I}(\lambda) = \det(A - I - \lambda I) = \det(A - (\lambda+1)I)$

$\chi_{A-I}(t-1) = \det(A - (t-1+1)I) = \det(A - tI) = 0$

$\chi_{A-I}(t-1) = 0 \Rightarrow t-1$ jest wartością własną $A - I$

3) $\chi_{A^2}(\lambda) = \det(A^2 - \lambda I)$

$\chi_{A^2}(t^2) = \det(A^2 - t^2 I)$

$Av = \lambda v \quad | A \cdot$
$A \cdot Av = A(\lambda v)$
$A^2 v = \lambda(Av)$
$A^2 v = \lambda \cdot (\lambda v)$
$A^2 v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2$ jest wartością własną A^2

4.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(3-\lambda) - 16 = -9 + \lambda^2 - 16 = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda) - 16 = 16 - 2\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10)$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda) - 16 = \lambda(\lambda - 10)$$

A) $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_5^A = span([1,2])$$

$\lambda = -5$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_{-5}^A = span([-2,1])$$

B)

$\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \dots \quad V_0^B = V_{-5}^A$$

$\lambda = 10$

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \dots \quad V_{10}^B = A_5^A$$

C) $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_0^C = span([-1, 2])$$

$\lambda = 10$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_{10}^C = span([2,1])$$

zamienione współrzędne względem V_λ^B

transponowana

5.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

1°

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} -a + 2b &= -6 \\ -c + 2d &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 2a + b &= -8 \\ 2c + d &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a + 2b &= -6 \\ 2a + b &= -8 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} -1 & 2 & -6 & 12 \\ 2 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[+2v_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & 5 & -20 & 20 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -12 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{+2v_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -c + 2d &= 12 \\ 2c + d &= -4 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

2°

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} -1 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[+2v_1]{\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 20 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \det(A_1) \cdot A_1^{-1} \; ?$$

alternatywny sposób

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Macierz przekształcenia można wyrazić jako iloczyn 3 macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \underset{v_1 \;\; v_2}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\lambda_1 \;\; \lambda_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{v_1 \;\; v_2}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}$$

macierz diagonalizowalna

macierz diagonalna wartości własnej $\rightarrow$ macierz przekształcenia w bazie własnej

Własności

$Av = \lambda v \qquad Bv = \lambda' v$

- $A^n v = \lambda^n v$
- $(\alpha A) v = (\alpha \lambda) v$
- $(A + B) v = (\lambda + \lambda') v$

$$rot(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha) & \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix}$$

macierz rotacji

nie ma wektorów własnych bo żaden nie zostaje przeskalowany (dla $\alpha \neq k\pi$)

tak samo dla złożenia obrotu z jednokładnością