Funkcja $f: X \to Y$

Relacja binarna w zbiorze $X \times Y$

1. $\forall x \in X \ \exists y \in Y \ (x,y) \in f$
2. $\forall x \in X \ \forall y_1, y_2 \in Y \ [(x,y_1) \in f \wedge (x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$

Przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X
dokładnie jednego elementu zbioru Y

funkcja ~ odwzorowanie ~ przekształcenie

Dziedzina funkcji f $\quad D_f = X$

Argumenty funkcji f $\quad$ elementy D_f

Wartość funkcji dla argumentu x

$y = f(x) \quad x \mapsto y \quad x \mapsto f(x)$

Zbiór wartości

$f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \ \ y = f(x)\} = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y$

Wykres funkcji $f: X \to Y$

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

Zbiór wszystkich funkcji $f: X \to Y$ $\quad Y^X$

Przykłady funkcji

Identyczność $\quad id_X : X \to X \quad id_X(x) = x$

Funkcja charakterystyczna zbioru A

$\chi_A : X \to \{0,1\} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A \end{cases}$

Całość z liczby (podłoga)

$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \lfloor 5 \rfloor = 5 \quad \lfloor 5.1 \rfloor = 5 \quad \lfloor -5.1 \rfloor = -6$

Nieskończone ciągi

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad a_n = f(n)$

Własności funkcji

Różnowartościowość (injekcja)

$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

funkcja "1-1"

Surjekcja (funkcja jest "na")

$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \quad y = f(x)$

$f(X) = Y$

Bijekcja (funkcja wzajemnie jednoznaczna)

różnowartościowa i "na"

Przykład $\quad f(x) = \sin(x)$

a) niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

nie jest 1-1 bo $f(0) = f(\pi)$

nie jest "na" bo $\sim \exists_{x \in X} \; f(x) = 7$

b) niech $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

nie jest 1-1 bo $f(0) = f(\pi)$

jest "na" bo $\forall_{y \in [-1,1]} \exists_{x \in \mathbb{R}} \; y = f(x)$ np $x = \arcsin(y)$

c) niech $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

jest różnowartościowa bo jest rosnąca

nie jest "na" bo $\sim \exists_{x \in X} \; f(x) = 7$

d) niech $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

jest różnowartościowa

jest "na"

więc jest bijekcją

e) niech $f: [-\pi, \pi] \to \underline{[0, 1]}$

to nie jest funkcja

Złożenie funkcji (superpozycja)

dla $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$

$g \circ f: X \to Z \qquad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

nie jest przemienna $\qquad g \circ f \neq f \circ g$ (na ogół)

jest łączna $\qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$f(x) = e^x \quad g(x) = \sin(x)$

$(f \circ g)(x) = e^{\sin(x)} \qquad (g \circ f)(x) = \sin(e^x)$

Funkcja odwrotna f^{-1}

$g: Y \to X$ jest odwrotna do $f: X \to Y$

jeśli $\forall x \in X \ (g \circ f)(x) = x$ i $\forall y \in Y \ (f \circ g)(y) = y$

funkcja posiada funkcję odwrotną $\iff$ jest bijekcją

funkcja odwrotna do złożenia $g \circ f$

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Wykresy f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y = x$

Przykład

$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$

$f^{-1}: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $g(x) = e^x$

$g^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \ln(x)$

Wyznaczenie funkcji odwrotnej do $f(x) = e^{3x-1}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

1) czy jest "1-1"

$e^{3x_1 - 1} = e^{3x_2 - 1} \implies 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1 \implies x_1 = x_2$ ✓

2) Czy jest "na"

$e^{3x-1} = y \quad 3x - 1 = \ln(y) \quad x = \frac{\ln(y)+1}{3}$

$\forall y \in \mathbb{R}_+ \ \exists x \in \mathbb{R} \ x = \frac{\ln(y)+1}{3}$ ✓

funkcja odwrotna $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(\ln(x) + 1)$

Permutacje

Bijekcje skończonego zbioru X

(poprzestawiane elementy zbioru X)

$f: X \to X$ niech $X = \{1, 2, 3, \dots n\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \cdots & f(n) \end{pmatrix}$ definicja permutacji

Złożenie permutacji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & f(2) & \cdots & f(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ g(1) & g(2) & \cdots & g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \cdots & f(g(n)) \end{pmatrix}$$

Przykład

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

złożenie permutacji nie jest przemienne

Skoro permutacja jest bijekcją to istnieje permutacja odwrotna

$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Obrazy i przeciwobrazy zbioru

niech $f: X \to Y$ $A \subseteq X$ $B \subseteq Y$

Obraz zbioru A wyznaczony przez f

$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

R_f jest obrazem zbioru D_f wyznaczonym przez f

dla zbioru jednoelementowego $f(\{a_0\}) = \{f(a_0)\}$

dla zbioru skończonego $f(\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}) = \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots f(a_n)\}$

dla $f: X \to Y$ $f(X) = R_f$ zbiór wartości

Przeciwobraz zbioru B wyznaczony przez f

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$

można określić przeciwobraz również dla funkcji nieodwracalnych

dla zbioru jednoelementowego

$f^{-1}(\{b_0\}) = \{x \in X : f(x) = b_0\}$ $\to$ zbiór rozwiązań równania $f(x) = b_0$

dla zbiorów skończonych

$f^{-1}(\{b_1, b_2, \ldots b_n\}) = \{x \in X : f(x) = b_1 \vee f(x) = b_2 \vee \ldots \vee f(x) = b_n\}$

dla przedziałów

$f^{-1}([a,b]) = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$ $\to$ zbiór rozwiązań nierówności

Funkcja 2 zmiennych

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x^2 + y^2$

wykres takiej funkcji jest w przestrzeni trójwymiarowej

(argumenty na płaszczyźnie i wartość jako wysokość)

Poziomice funkcji

przeciwobrazy zbiorów jednoelementowych

Łączą na płaszczyźnie pary argumentów, które dają taką samą wartość

$f^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}$

$\underset{a>0}{f^{-1}(\{a\})} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = a\}$ okrąg o promieniu $\sqrt{a}$

$f^{-1}(\{-2, 1, 3\})$ $\to$ dwa okręgi o promieniach 1 i $\sqrt{3}$

$f^{-1}((1,4])$ $\to$ pierścień ograniczony okręgami o promieniach 1 i 2

Własności obrazów i przeciwobrazów

dla $f: X \to Y$ $A, B \subseteq X$ $C, D \subseteq Y$

1. $f(\emptyset) = \emptyset$ $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
3. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
4. $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$
5. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$

Dla różnowartościowej $f: X \to Y$

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$

$A = f^{-1}(f(A))$

Dla funkcji "na" $f: X \to Y$

$f(f^{-1}(C)) = C$