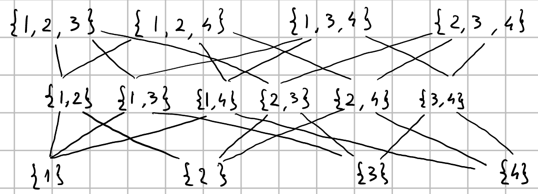
1.

a) $(2^{\{1,2,3,4\}} \setminus \{\emptyset, \{1,2,3,4\}\}, \subseteq)$



najdłuższy łańcuch $\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ (jeden z wielu)

największy antyłańcuch $\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$

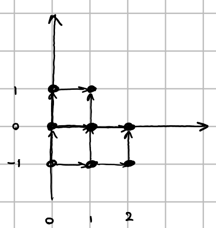
elementy minimalne $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$

elementy maksymalne $\{\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}\}$

nie ma elementu największego ani najmniejszego

nie jest kratą bo $\inf(\{1\},\{2\}) = \emptyset$ nie istnieje w tym zbiorze

b) $(\{0,1,2\} \times \{-1,0,1\} \setminus \{(2,1)\}, \leq_p)$ porządek produktowy



najdłuższy łańcuch $\{(0,-1), (1,-1), (2,-1), (2,0)\}$

najdłuższy antyłańcuch $\{(0,1), (1,0), (2,-1)\}$

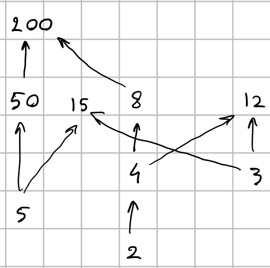
najmniejszy i minimalny element $(0,-1)$

elementy maksymalne $\{(1,1), (2,0)\}$

nie ma elementu największego

nie jest kratą $\sup((1,1),(2,0))$ nie istnieje w zbiorze

c) $(\{2,3,4,5,8,10,12,15,50,200\}, |)$



najdłuższy łańcuch $\{2,4,8,200\}$

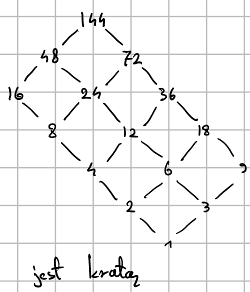
największy antyłańcuch $\{8,12,15,50\}$

elementy maksymalne $\{200, 15, 12\}$

elementy minimalne $\{2,3,5\}$

nie jest kratą $\sup(12, 200)$ nie istnieje w zbiorze

d) $(\#144, |)$ zbiór wszystkich dzielników



jest kratą

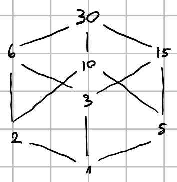
najdłuższy łańcuch $\{1,2,4,8,16,48,144\}$

największy antyłańcuch $\{4,6,9\}$

największy i maksymalny element 144

najmniejszy i minimalny element 1

e) $(\#30, |)$



jest kratą

najdłuższy łańcuch $\{1, 2, 6, 30\}$

największy antyłańcuch $\{2, 3, 5\}$

największy i maksymalny 30

najmniejszy i minimalny 1

2.

$1\,000\,000 = 10^6 = 2^6 \cdot 5^6$

dzielniki $\{2^a \cdot 5^b : a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

jest $7 \cdot 7 = 49$ dzielników

$3\,000\,000 = 3 \cdot 2^6 \cdot 5^6$

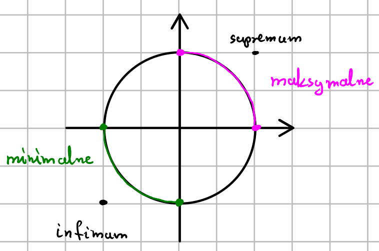
dzielniki $|\{3^a \cdot 2^b \cdot 5^c : a \in \{0, 1\} \quad b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}| = 2 \cdot 7 \cdot 7 = 98$

$4\,000\,000 = 2^2 \cdot 2^6 \cdot 5^6 = 2^8 \cdot 5^6$

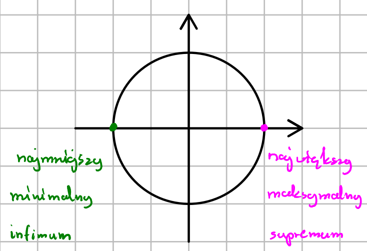
dzielniki $|\{2^a \cdot 5^b : a \in \{0, 1 \dots 8\},\ b \in \{0, 1, \dots 6\}\}| = 9 \cdot 7 = 63$

3.

a) porządek produktowy

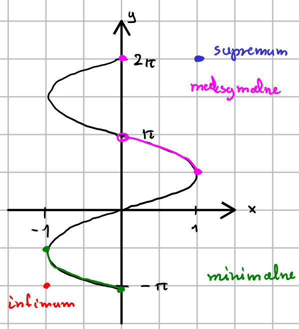


porządek leksykograficzny

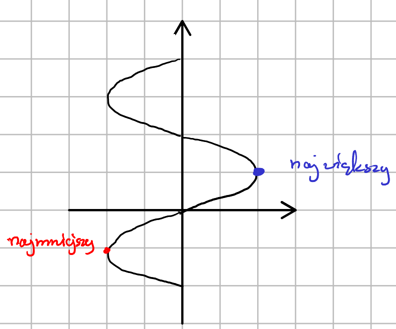


b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = \sin(y),\ y \in [-\pi, 2\pi]\}$

porządek produktowy

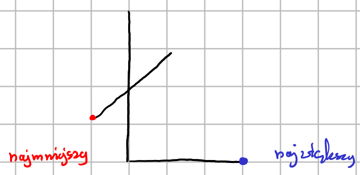


porządek leksykograficzny

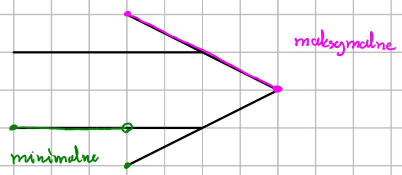


c) porządek produktowy

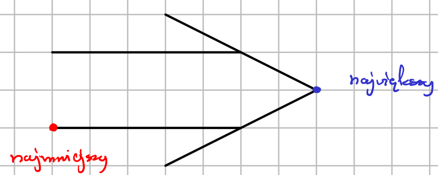
porządek leksykograficzny



d) porządek produktowy



porządek leksykograficzny



4.

$$x \preceq y \iff (2|x \wedge 2|y \wedge y \leq x) \vee (\neg 2|x \wedge 2|y) \vee (\neg 2|x \wedge \neg 2|y \wedge x \leq y)$$

1 3 5 7 ... ... 8 6 4 2

1 ↑ najmniejszy, infimum

2 ↑ największy, supremum

nie istnieje $\sup\{1, 3, 5, \dots\}$

nie istnieje $\inf\{2, 4, 6, \dots\}$

jest kratą, bo każde 2 elementy da się porównać

5.

T – zbiór ciągów $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\preccurlyeq$ – relacja w T

$f \preccurlyeq g \iff \forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) \leq g(n)$

✓ zwrotna $\forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) \leq f(n)$

✓ antysymetryczna $\forall_{f,g \in T} (f \preccurlyeq g \wedge g \preccurlyeq f) \Rightarrow f = g$

$\iff \forall_{f,g \in T} \left[\forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) \leq g(n) \wedge g(n) \leq f(n)\right] \Rightarrow f = g$

$\iff \forall_{f,g \in T} \left[\forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) = g(n)\right] \Rightarrow f = g$

$1 \Rightarrow 1$ prawda

✓ przechodnia $f \preccurlyeq g \wedge g \preccurlyeq h$

$\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) \leq g(n) \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} g(n) \leq h(n)$

$\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) \leq g(n) \leq h(n)$

$\Rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} f(n) \leq h(n)$

$\Rightarrow f \preccurlyeq h$

relacja $\preccurlyeq$ jest częściowym porządkiem w T

element najmniejszy $\to f(n) = 1$

nie istnieje element największy, bo nie istnieje największa liczba naturalna

nieskończony łańcuch $\{(1,1,\dots), (2,2,\dots), (3,3,\dots), \dots\}$

nieskończony antyłańcuch $\{(1,2,1,1,\dots), (1,1,2,1,\dots), (1,1,1,2,1,\dots), \dots\}$

6.

$t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A_t = \{ z \in \mathbb{C} : k_t + 1 \leq \operatorname{Im} z \leq t+2 \}$ $\quad k_t = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \{0,2,4\} \\ 1 & \text{dla } t = 1 \\ -1 & \text{dla } t \in \{3,5\} \end{cases}$

$\{A_t, \subseteq\}$

$A_1 = \{ z \in \mathbb{C} : 2 \leq \operatorname{Im} z \leq 3 \} = \{ a+bj : a \in \mathbb{R} \wedge b \in [2,3] \}$

$A_2 = \{ a+bj : a \in \mathbb{R} \wedge b \in [1,4] \}$

$A_3 = \{ a+bj : a \in \mathbb{R} \wedge b \in [0,5] \}$

$A_4 = \{ a+bj : a \in \mathbb{R} \wedge b \in [1,6] \}$

$A_5 = \{ a+bj : a \in \mathbb{R} \wedge b \in [0,7] \}$