1.

$a + b + c + d + e + f = 18$
$a, \dots f \in \mathbb{N}$

a) Wszystkie rozwiązania

1 | 1 1 | 1 | 1 ... | 1 1 | 1 1 → 18 jedynek do przypisania 6 zmiennym

Wybieram miejsce dla 5 przegródek → rozdzielają jedynki na 6 grup

Jest 17 możliwych pozycji (odpadają skrajne bo nie może być 0)

$n_a = \binom{17}{5} = 6188$

b) Wszystkie parzyste

$2a_0 + 2b_0 + 2c_0 + 2d_0 + 2e_0 + 2f_0 = 18$
$a_0, \dots f_0 \in \mathbb{N}$

$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + e_0 + f_0 = 9$

1 | 1 1 | 1 | 1 1 1 | 1 | 1

analogicznie jak wcześniej → 5 przegródek na 8 pozycjach

$n_b = \binom{8}{5} = 56$

c) Wszystkie nieparzyste

$2a_0 - 1 + 2b_0 - 1 + 2c_0 - 1 + 2d_0 - 1 + 2e_0 - 1 + 2f_0 - 1 = 18$

$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + e_0 + f_0 = 12$

$a_0, \dots f_0 \in \mathbb{N}$

$n_c = \binom{11}{5} = 462$

d) Dokładnie 2 parzyste

$2a_0 + 2b_0 + 2c_0 - 1 + 2d_0 - 1 + 2e_0 - 1 + 2f_0 - 1 = 18$

$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 + e_0 + f_0 = 11$

$a_0, \dots f_0 \in \mathbb{N}$

$n_d = \binom{10}{5} \cdot \binom{6}{2} = 3780$

↓ 11 jedynek, 5 przegródek

↘ wybór parzystych – rozwiązanie to uporządkowany ciąg

4 parzyste

$a_0 + \dots + f_0 = 10$

?

$\binom{9}{6} \cdot \binom{6}{4} = 1260$

W sumie $5558 \neq 6188$

to nie wszystkie przypadki?

p	n
0	6
~~1~~	~~5~~
2	4
~~3~~	~~3~~
4	2
~~5~~	~~1~~
6	0

2.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 18$$

$$2 \leq a_i < 6 \quad a_i \in \mathbb{N}$$

$$b_1 + 2 + b_2 + 2 + b_3 + 2 + b_4 + 2 + b_5 + 2 + b_6 + 2 = 18$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6$$

1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	
2	2	1	1		
2	2	2			
3	1	1	1		
3	2	1			
3	3				

niepoprawne

$$6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \to \binom{6}{1,5} = 6$$

$$5\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \to \binom{6}{1,1,4} = 30$$

$$4\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \to \binom{6}{1,2,3} = 60$$

$$4\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0 \to \binom{6}{1,1,4} = 30$$

$$+ \overline{}$$

$$= 126$$

6 jedynek i 5 separatorów bo mogą być równe 0 (to samo byłoby dla równania $c_1 + 1 + c_2 + 1 + \dots = 18, \quad c_i > 0$)

Wszystkie możliwości $\binom{6+5}{5} = 462$

poprawne $\to$ 336

3.

k osób

n krzeseł w rzędzie

conajmniej 1 wolne między 2 osobami

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{wolne przed 1}}}{a_1} + \overset{\substack{\text{osoba 1} \\ \downarrow}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wolne między} \\ 1 \text{ a } 2}}{a_2} + \overset{\substack{\text{osoba 2} \\ \downarrow}}{1} + \dots + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wolne między} \\ k-1 \text{ a } k}}{a_k} + \overset{\substack{\text{osoba } k \\ \downarrow}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wolne po } k}}{a_{k+1}} = n$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1} = n - k \qquad a_1, a_{k+1} \geqslant 0 \qquad a_2, \dots a_k \geqslant 1$$

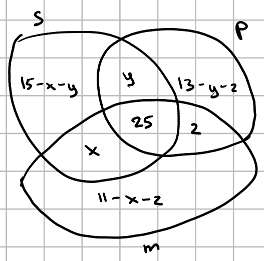
$$b_1 + b_2 + 1 + b_3 + 1 + \dots + b_k + 1 + b_{k+1} = n - k \qquad b_1, \dots b_{k+1} \geqslant 0$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k + b_{k+1} = n - k - (k-1)$$

$$\binom{\overbrace{n-k-(k-1)}^{\text{jedynki}} + \overbrace{k}^{\text{separatory}}}{\underbrace{(k+1)-1}_{\text{liczba miejsc}}} \cdot \underbrace{k!}_{\text{osoby są rozróżnialne}} = \binom{n-(k-1)}{k} \cdot k!$$

4.

s'	10	s	40
p'	12	p	38
m'	14	m	36



$50 = 15 - x - y + 13 - \cancel{y} - z + 11 - \cancel{x} - \cancel{z} + \cancel{x+y+z} + 25$

$x + y + z = 14$

$15 - x - y + 13 - y - z + 11 - x - z = 39 - 2(x+y+z) = 11$

5.

$\#\Omega = 4! = 24$ → 4 ubrania dla 4 osób

$\#A_4 = 1$ 4 osoby dostają swoje

$\#A_3 = 0$ niemożliwe

$\#A_2 = \binom{4}{2,2} = 6$

A	B	D	C
A	B	C	D

2 poprawne wyznaczają 2 zamienione

$\#A_1 = \binom{4}{1} \cdot 2 = 8$

A	B	C
B	C	A
C	A	B

$\#A_0 = \#\Omega - \#A_1 - \#A_2 - \#A_3 - \#A_4 = 9$

$P(A_4) = \frac{1}{24}$

$P(A_3) = 0$

$P(A_2) = \frac{6}{24}$

$P(A_1) = \frac{8}{24}$

$P(A_0) = \frac{9}{24}$

$$E\nu = \sum_{i=0}^{4} i \cdot P(A_i) = 0 \cdot \frac{9}{24} + 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{0}{24} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

6.

1, 2, 3, 4, 5 7 cyfrowe liczby

A_i – zbiór liczb 7 cyfrowych bez cyfry i $|A_i| = 4^7$

Liczba 7-cyfrowych liczb, w których występują wszystkie cyfry

$5^7 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| - \dots \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \dots \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{5} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 5} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1 \le i < j < k < l \le 5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$$

$$= \binom{5}{1} \cdot 4^7 - \binom{5}{2} \cdot 3^7 + \binom{5}{3} \cdot 2^7 - \binom{5}{4} \cdot 1^7 + \binom{5}{5} \cdot 0^7 = 61\,325$$

$$5^7 - \left|\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right| = 16\,800$$

Zasada włączeń - wyłączeń

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \left(\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \right)$$

6*

Liczba funkcji o dziedzinie $\{1,2,3,\ldots n\}$ i zbiorze wartości $\{1,2,3,\ldots k\}$

$$S(n,k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

$$S(7,5) = \underbrace{\binom{5}{0} \cdot 5^7}_{} - \binom{5}{1} \cdot 4^7$$

A_i - zbiór funkcji, które nie przyjmują wartości $i \in \{1,2,\ldots k\}$

$$S(n,k) = k^n - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k|$$

$\downarrow$

wszystkie funkcje

$\{1,2\ldots n\} \to \{1,2,\ldots k\}$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \cdot \left(\sum |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \ldots A_{j_i}|\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \cdot \binom{k}{i} \cdot \underbrace{(k-i)^n}_{\text{liczba przyjmowanych wartości}}$$

$\downarrow$

wybór zbiorów do przecięcia

$$S(n,k) = k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

$$= (-1)^0 \binom{k}{0} (k-0)^n + \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+2} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$