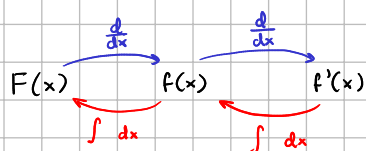


Rachunek całkowy



W oparciu o definicję z rachunku różniczkowego definiuje się operacje odwrotne

Funkcja pierwotna

F jest funkcją pierwotną $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ na przedziale X jeśli

$$\forall x \in X \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Pochodna jest określona jednoznacznie

Funkcji pierwotnych jest nieskończenie wiele

np. dla 2^x : $\frac{1}{\ln(2)} 2^x$, $\frac{1}{\ln(2)} 2^x + 1$, $\frac{1}{\ln(2)} 2^x + 2$, ...

Warunek wystarczający

Jeśli f jest ciągła na X to f ma funkcję pierwotną na X

Implikacja odwrotna nie zachodzi

Może istnieć funkcja pierwotna dla funkcji nieciągłej
o przeliczalnej liczbie punktów

Twierdzenie podstawowe o funkcjach pierwotnych

Jeśli F jest funkcją pierwotną f to każdą funkcję pierwotną można zapisać w postaci

$$F + C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R}$$

$$\{F + C : C \in \mathbb{R}\} \rightarrow \text{rodzina wszystkich funkcji pierwotnych}$$

Całka nieoznaczona (antiderivative)

$$\int f(x) dx \rightarrow \text{zbiór wszystkich funkcji pierwotnych } f$$

Jeśli F jest funkcją pierwotną f to

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int F'(x) dx = F(x) + C$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) + C$$

$$\int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x) + C$$

Podstawowe wzory

Nie dla każdej funkcji da się znaleźć całkę nieoznaczoną

Nie ma jawnych wzorów

$$\int 0 dx = C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad x > 0, a \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln(a)} e^x + C \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$$

$$\int \log_a(x) dx = \frac{x \log_a(x) - x}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \cot(x) dx = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = \cot(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2(x)} = \tanh(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2(x)} = -\coth(x) + C$$

Własności

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Całkowanie przez części

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Użyteczne kiedy $\int f'(x) g(x) dx$ jest łatwiejsze do policzenia

Trzeba dobrać odpowiednie podstawienie dla f i g

Mozna stosować wielokrotnie, zwłaszcza dla funkcji typu

$$\int x^n e^x dx, \int x^n \sin(x) dx, \dots$$

Jeśli dojdzie się do sprzeczności to nic nie znaczy

Wyprowadzenie

$$\frac{d}{dx} f(x) g(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} f(x) g(x) dx = \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx$$

$$f(x) g(x) = \int f'(x) g(x) dx + \int f(x) g'(x) dx$$

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

Przykład

$$\bullet \int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x \ln(x) - x + C$$

$$f = \ln(x) \quad g' = 1$$

$$f' = \frac{1}{x} \quad g = x$$

$$\bullet \int x \sin(x) dx = -x \cos(x) - \int -\cos(x) dx = \sin(x) - x \cos(x) + C$$

$$f = x \quad g' = \sin(x)$$

$$f' = 1 \quad g = -\cos(x)$$

$$\bullet \int \underline{e^{-x} \cos(x)} dx = \underline{e^{-x} \sin(x)} + \int e^{-x} \sin(x) dx = \underline{e^{-x} \sin(x)} - \underline{e^{-x} \cos(x)} - \int \underline{e^{-x} \cos(x)} dx$$

$$f = e^{-x}$$

$$g' = \cos(x)$$

$$f = e^{-x}$$

$$g' = \sin(x)$$

$$f' = -e^{-x}$$

$$g = \sin(x)$$

$$f' = -e^{-x}$$

$$g = -\cos(x)$$

$$2 \int e^{-x} \cos(x) dx = e^{-x} \sin(x) - e^{-x} \cos(x) + C$$

$$\int e^{-x} \cos(x) dx = \frac{e^{-x}}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + C$$

$$\bullet \int \frac{\ln(x)}{x^3} dx = -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-3} dx = -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x^{-2}\right) + C = -\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$$

$$f = \ln(x)$$

$$g' = x^{-3}$$

$$f' = \frac{1}{x}$$

$$g = -\frac{1}{2} x^{-2}$$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x) dx = \int g(h(x)) \cdot h'(x) dx \quad \text{podstawienie}$$

$$t = h(x)$$

$$\int g(t) dt = G(t) + C = G(h(x)) + C \quad dt = h'(x) dx$$

Użyteczne kiedy $\int g(t) dt$ jest prostsze do policzenia

Trzeba znaleźć dobre podstawienie

Upraszczanie

$$\frac{d}{dx} [g(h(x))] = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} g(h(x)) dx = \int g'(h(x)) \cdot h'(x) dx$$

$$u = h(x) \quad du = h'(x) dx$$

$$g(h(x)) + C = \int g'(u) du$$

Przykład

$$\cdot \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(t) + C = \frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C$$

$$x dx \rightarrow t = x^2$$

$$dt = 2x dx$$

$$x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} t^{-\frac{1}{2}+1} = 2 t^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot \int \frac{\sin(x) dx}{\sqrt{1+2\cos(x)}} = \int \frac{-\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{2\cos(x)+1} + C$$

$$\sin(x) dx \rightarrow t = \cos(x)$$

$$t = 2\cos(x) + 1$$

$$dt = -2\sin(x) dx$$

$$\sin(x) dx = -\frac{1}{2} dt$$

$$\cdot \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-1} \cdot t^{-1} + C = -\frac{1}{2x^2+2} + C$$

$$x dx \rightarrow t = x^2$$

$$t = x^2 + 1$$

$$dt = 2x dx$$

$$x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\cdot \int \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x} dx = \int \sqrt{t} dt = \frac{3}{2} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{3}{2} (\ln(x)+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\frac{1}{x} dx \rightarrow t = \ln(x)$$

$$t = \ln(x) + 1$$

$$dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2t}{t(t^2-1)} dt = 2 \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2 \left[\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t+1} \right]$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} \right| + C$$

$$t = \sqrt{e^x+1}$$

$$2t dt = e^x dx$$

$$t^2 = e^x + 1$$

$$dx = \frac{2t dt}{e^x} = \frac{2t dt}{t^2-1}$$

Całkowanie przez podstawienie (2. postać)

dla równoważności funkcji $\varphi(t)$

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C$$

$$x = \varphi(t)$$

$$dx = \varphi'(t) dt$$

Przykład

$$\cdot \int \arccos(x) dx = \int -t \sin(t) dt = t \cos(t) - \sin(t) + C = x \arccos(x) - \sin(\arccos(x)) + C$$

$$x = \cos(t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$t = \arccos(x)$$

$$dx = -\sin(t) dt$$

$$\cdot \int \sqrt{9-x^2} dx = \int \sqrt{9-9\sin^2(t)} \cdot 3\cos(t) dt = \int 3\sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot 3\cos(t) dt = 9 \int \cos^2(t) dt$$

$$= 9 \int \frac{\cos(2t)+1}{2} dt = \frac{9}{2} \int 1 dt + \frac{9}{2} \int \cos(2t) dt = \frac{9}{2} t + \frac{9}{4} \sin(2t) + C$$

$$= \frac{9}{2} \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(2 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C$$

$$x = 3 \sin(t) \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$dx = 3\cos(t) dt$$

Standardowe podstawienia

$$\cdot \int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left| x = r \sin(t) \right|$$

$$\cdot \int \frac{dx}{x^2 + k} = \ln|x + \sqrt{x^2 + k}| + C \quad \text{podstawienie Eulera}$$

$$\cdot \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{dx}{a^2 \left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \left| t = \frac{x}{a} \right| = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\cdot \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \left| t = \frac{x}{a} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\cdot \int R(e^x) dx = \left| t = e^x \right|$$

Nie każda całka wyraża się przez funkcje elementarne

Całki funkcji wymiernych

Każdą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę ułamków i funkcji wymiernej ułaskiwiej

$$R(x) = W(x) + \frac{L(x)}{M(x)}, \quad \deg(L) < \deg(M)$$

Każdą funkcję wymierną ułaskiwą można przedstawić jako sumę ułamków prostych

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^{k_j} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^i} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\sum_{i=1}^{l_j} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_jx+q_j)^i} \right)$$

Ułamek prosty I rodzaju

$$\frac{A}{(x-a)^n}$$

Ułamek prosty II rodzaju

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} \quad \Delta < 0$$

Całkowanie ułamków prostych

I rodzaju

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \begin{cases} A \ln|x-a| + C & \text{dla } k=1 \\ \frac{A}{1-k} (x-a)^{1-k} + C & \text{dla } k>1 \end{cases}$$

II rodzaju

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^k} = \begin{cases} \ln|t| + C & \text{dla } k=1 \\ \frac{1}{1-k} t^{1-k} + C & \text{dla } k>1 \end{cases} \\ \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^k} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} \left(x+\frac{p}{2}\right) \\ dx = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} dt \end{array} \right| = \left(\frac{4q-p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k} \int \frac{dt}{(t^2+1)^k} \\ \left\{ \begin{aligned} \text{dla } k=1 \quad \int \frac{dt}{t^2+1} &= \arctan(t) + C \\ \text{dla } k \geq 2 \text{ stosować wzór rekurencyjny dopóki nie da się tak po prostu policzyć} \end{aligned} \right. \\ \int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \end{aligned} \right.$$

W ten sposób można obliczyć całkę każdej funkcji wymiernej

Całki funkcji trygonometrycznych

Korzysta się z tożsamości i podstawień standardowych

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}[\cos((\alpha-\beta)x) - \cos((\alpha+\beta)x)]$$

$$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}[\cos((\alpha-\beta)x) + \cos((\alpha+\beta)x)]$$

$$\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}[\sin((\alpha-\beta)x) + \sin((\alpha+\beta)x)]$$

Podstawienia

$$\int R(\cos(x), \sin(x)) dx$$

$$\circ R(-\cos(x), \sin(x)) = -R(\cos(x), \sin(x)) \rightarrow |t = \sin(x)|$$

$$\circ R(\cos(x), -\sin(x)) = -R(\cos(x), \sin(x)) \rightarrow |t = \cos(x)|$$

$$\circ R(-\cos(x), -\sin(x)) = R(\cos(x), \sin(x)) \rightarrow |t = \tan(x)|$$

$$\int R(\cos(x), \sin(x)) dx = \begin{cases} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \begin{array}{l} \text{Podstawienie uniwersalne} \\ \text{Zawsze działa i prowadzi} \\ \text{do całki funkcji wymiernej} \end{array}$$

Wzór Ostrogradskiego

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{W_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + W_{n-1}'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad / \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$W_n(x) = \frac{1}{2} W_{n-1}(x)(2ax+b) + W_{n-1}'(x)(ax^2+bx+c) + \lambda$$

$W_{n-1}(x)$ jest o 1 stopień niższy od $W_n(x)$

Najpierw trzeba obliczyć współczynniki wielomianu $W_{n-1}(x)$ i λ — układ równań

Potem trzeba obliczyć całkę $\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$\int \sqrt{x^2+k} dx = \int \frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}} dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+k} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$$

Podstawienia Eulera

$$\text{Do całki w postaci } \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a} \quad \text{dla } a > 0$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c} \quad \text{dla } c > 0$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1) \quad \text{dla } ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Pozostałe podstawienia

$$\cdot \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx = \left| x = a \sin(t) \right|$$

$$\cdot \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx = \left| x = a \tan(t) \right|$$

$$\cdot \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx = \left| x = \frac{a}{\cos(t)} \right|$$

$$\cdot \int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} x = t^k \\ k = \text{NWW}(q_1, \dots, q_n) \end{array} \right|$$

$$\cdot \int R\left(x, (ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, (ax+b)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} ax+b = t^k \\ k = \text{NWW}(q_1, \dots, q_n) \end{array} \right|$$

$$\cdot \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \frac{ax+b}{cx+d} = t^k \\ k = \text{NWW}(q_1, \dots, q_n) \end{array} \right|$$

$$\cdot \int \frac{Ax+B}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \left| x-a = \frac{1}{t} \right|$$