

1.

$$a + b + c + d + e + f = 18$$

$$a, \dots, f \in \mathbb{N}$$

a) Wszystkie rozwiązania

1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ... | 1 | 1 | 1 | 1 \rightarrow 18 jedynek do przypisania 6 zmiennym

Wybieram miejsce dla 5 przegródek \rightarrow rozdzielają jedynki na 6 grup

Jest 17 możliwych pozycji (odpadają skrajne bo nie może być 0)

$$n_a = \binom{17}{5} = 6188$$

b) Wszystkie parzyste

$$2a_o + 2b_o + 2c_o + 2d_o + 2e_o + 2f_o = 18$$

$$a_o, \dots, f_o \in \mathbb{N}$$

$$a_o + b_o + c_o + d_o + e_o + f_o = 9$$

1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1

analogicznie jak wcześniej \rightarrow 5 przegródek na 8 pozycjach

$$n_b = \binom{8}{5} = 56$$

c) Wszystkie nieparzyste

$$2a_o - 1 + 2b_o - 1 + 2c_o - 1 + 2d_o - 1 + 2e_o - 1 + 2f_o - 1 = 18$$

$$a_o + b_o + c_o + d_o + e_o + f_o = 12$$

$$a_o, \dots, f_o \in \mathbb{N}$$

$$n_c = \binom{11}{5} = 462$$

d) Dokładnie 2 parzyste

$$2a_o + 2b_o + 2c_o - 1 + 2d_o - 1 + 2e_o - 1 + 2f_o - 1 = 18$$

$$a_o + b_o + c_o + d_o + e_o + f_o = 11$$

$$a_o, \dots, f_o \in \mathbb{N}$$

$$n_d = \binom{10}{5} \cdot \binom{6}{2} = 3780$$

\downarrow

11 jedynek
5 przegródek

\downarrow

wybor parzystych - rozwiązanie do uproszczonego układu

\hookrightarrow parzyste

$$a_o + \dots + f_o = 10$$

?

$$\binom{9}{6} \cdot \binom{6}{2} = 1260$$

$$\text{W sumie } 5558 \neq 6188$$

to nie wszystkie przypadki?

p	n
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0

2.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 18$$

$$2 \leq a_i < 6 \quad a_i \in \mathbb{N}$$

$$b_1 + 2 + b_2 + 2 + b_3 + 2 + b_4 + 2 + b_5 + 2 + b_6 + 2 = 18$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6$$

niepoprawne

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$2 \quad 2 \quad 1 \quad 1$$

$$2 \quad 2 \quad 2$$

$$3 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$3 \quad 2 \quad 1$$

$$3 \quad 3$$

$$6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \binom{6}{1,5} = 6$$

$$5 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \binom{6}{1,1,4} = 30$$

$$4 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \binom{6}{1,2,3} = 60$$

$$4 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \binom{6}{1,1,4} = 30$$

$$+ \quad \quad \quad = 126$$

6 jedynki i 5 separatorów to mamy 11 nerek (to samo będzie dla rozmianu)
 $c_1 + c_2 + \dots = 18, \quad c_i \geq 0$

Wszystkie możliwości $\binom{6+5}{5} = 462$

poprawne $\rightarrow 336$

3.

k osób

n kresel w rzędzie

conajmniej 1 wolne między 2 osobami

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{osoba 1} & & \text{osoba 2} & & & \text{osoba k} \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ a_1 + 1 + a_2 + 1 + \dots + a_k + 1 + a_{k+1} & = & n \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{wolne przed 1} & & \text{wolne między} & & \text{wolne między} & & \text{wolne po k} \\ & & 1 \text{ a } 2 & & k-1 \text{ a } k & & \end{array}$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1} = n - k \quad a_1, a_{k+1} \geq 0 \quad a_2, \dots, a_k \geq 1$$

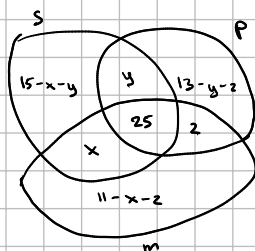
$$b_1 + b_2 + 1 + b_3 + 1 + \dots + b_k + 1 + b_{k+1} = n - k \quad b_1, \dots, b_{k+1} \geq 0$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k + b_{k+1} = n - k - (k-1)$$

$$\binom{\overbrace{n-k-(k-1)+k}^{\text{jedynki}}}{\underbrace{(k+1)-1}_{\text{liczba miejsc}}} \cdot \underbrace{k!}_{\text{osoby są rozróżnialne}} = \binom{n-(k-1)}{k} \cdot k!$$

4.

S'	10	S	40
P'	12	P	38
m'	14	m	36



$$50 = 15 - x - y + 13 - y - z + 11 - x - z + x + y + z + 25$$

$$x + y + z = 6$$

$$15 - x - y + 13 - y - z + 11 - x - z = 39 - 2(x + y + z) = 11$$

5.

$$\# \Omega = 4! = 24 \rightarrow 4 \text{ ubranía dla 4 osób}$$

$$\# A_4 = 1 \quad 4 \text{ osoby dostają swoje}$$

$$\# A_3 = 0 \quad \text{nie ma}$$

$$\# A_2 = \binom{4}{2} = 6$$

$\begin{matrix} A & B & D & C \\ A & B & C & D \end{matrix}$
 2 poprawne wyznaczają 2 zamknięcia

$$\# A_1 = \binom{4}{1} \cdot 2 = 8$$

$$\# A_0 = \# \Omega - \# A_1 - \# A_2 - \# A_3 - \# A_4 = 9$$

A	B	C
B	C	A
C	A	B

$$P(A_4) = \frac{1}{24}$$

$$P(A_3) = 0$$

$$P(A_2) = \frac{6}{24}$$

$$P(A_1) = \frac{8}{24}$$

$$P(A_0) = \frac{9}{24}$$

$$E_V = \sum_{i=0}^4 i \cdot P(A_i) = 0 \cdot \frac{9}{24} + 1 \cdot \frac{8}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{0}{24} + 4 \cdot \frac{1}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

6.

1, 2, 3, 4, 5 7 cyfrowe liczby

A_i - zbiór liczb 7 cyfrowych bez cyfry i $|A_i| = 4^7$

Liczba 7-cyfrowych liczb, w których występują wszystkie cyfry

$$5^7 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$$

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - \dots \\
 &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \dots \\
 &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^5 |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq 5} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 5} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$$

$$= \binom{5}{1} \cdot 4^7 - \binom{5}{2} \cdot 3^7 + \binom{5}{3} \cdot 2^7 - \binom{5}{4} \cdot 1^7 + \binom{5}{5} \cdot 0^7 = 61\,325$$

$$5^7 - |\bigcup_{i=1}^5 A_i| = 16\,800$$

Zasada włączeń - wyłączeń

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right)$$

6*

Liczba funkcji o dziedzinie $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ i zbiorze wartości $\{1, 2, 3, \dots, k\}$

$$S(n, k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

$$S(7, 5) = \underbrace{\binom{5}{0} \cdot 5^7 - \binom{5}{1} \cdot 4^7 + \dots}_{\text{...}}$$

A_i - zbiór funkcji, które nie przyjmują wartości $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$S(n, k) = k^n - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k|$$

↓

użytkując funkcje

$\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq k} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_i}| \right) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \cdot \underbrace{\binom{k}{i}}_{\substack{\text{Wybór zbioru} \\ \text{do pominięcia}}} \cdot \underbrace{(k-i)^n}_{\substack{\text{Liczba przyjmowanych} \\ \text{wartości}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(n, k) &= k^n - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (k-i)^n \\ &= (-1)^0 \binom{k}{0} (k-0)^n + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+2} \binom{k}{i} (k-i)^n \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n \end{aligned}$$