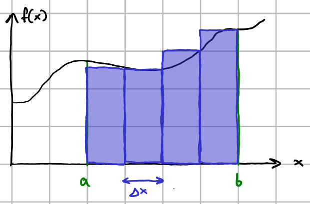
Całka oznaczona Riemanna

Dokonuje się podziału przedziału [a, b]



Nie ma znaczenia czy wybierze się prawy / lewy / środkowy punkt

Podział nie musi być na równe przedziały

Suma Riemanna $\sum_{x=a}^{b} f(x)\,\Delta x$ = suma pól prostokątów ≈ pole pod krzywą

$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x)\,\Delta x$ = pole pod wykresem $\in \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)\,dx$ istnieje $\Leftrightarrow$ f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $f \in R[a,b]$

a - dolna granica całkowania

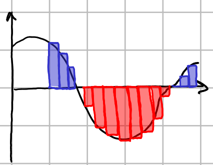
b - górna granica całkowania

Warunek wystarczający

Jeśli funkcja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona w $[a,b]$
i jest ciągła w $[a,b]$ z wyjątkiem skończonej liczby punktów

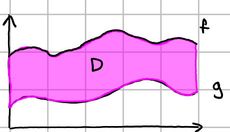
Interpretacja geometryczna

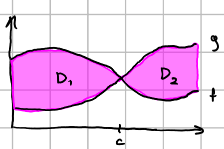
Pole nad osią x liczone jako dodatnie, a pod osią jako ujemne



Pole między krzywą a osią x $\int_a^b |f(x)|\,dx$

Pole między krzywymi





$|D| = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$

$= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$

Ma znaczenie która funkcja jest wyżej

Własności całek oznaczonych

1. $f, g \in R[a,b]$ f i g różnią się tylko w skończonej liczbie punktów

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

2. $f, g \in R[a,b]$ $f \leq g$ w $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

3. $f \in R[a,b]$ $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. $a > b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

5. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

6. $f, g \in R[a,b]$ $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f \pm g \in R[a,b]$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

7. $f \in R[a,b]$ $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $k \cdot f \in R[a,b]$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

8. $f, g \in R[a,b]$ $\Rightarrow$ $f \cdot g \in R[a,b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$$

9. Jeśli istnieje $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, $\alpha = \min(a,b,c)$, $\beta = \max(a,b,c)$
to niezależnie od wzajemnego położenia a, b, c

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

10. $f \in R[a,b]$ $\Rightarrow$ $|f| \in R[a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \sup_{x \in [a,b]} (|f(x)|) \cdot |b-a|$$

nierówność trójkąta

Funkcja górnej granicy całkowania

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

jeśli $f:[a,b] \to \mathbb{R} \in R[a,b]$ i $\alpha \in [a,b]$ to F jest ciągła na $[a,b]$

jeśli f jest ciągła w $x_0 \in [a,b]$ to $F'(x_0) = f(x_0)$

np. $F(x) = \int_{-1}^x e^{t^2}\,dt \Rightarrow F'(x) = e^{x^2}$

Twierdzenie Newtona - Leibniza

jeśli $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a,b]$ i $\alpha \in [a,b]$

1. $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$ jest funkcją pierwotną do f na $[a,b]$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

Przykłady

pole między prostymi $y = \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$

$|D| = \int_1^4 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2\Big|_1^4 = \frac{15}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln|\cos(x)|\,\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Całkowanie przez części

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx = \left|\begin{matrix} f = x & g' = \sin(x) \\ f' = 1 & g = -\cos(x) \end{matrix}\right| = -x\cos(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx = \pi + \sin(x)\Big|_0^\pi = \pi$$

Zamiana zmiennej

$a = \varphi(\alpha) \quad b = \varphi(\beta)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left|\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ x = a \Rightarrow t = \alpha \\ x = b \Rightarrow t = \beta \end{matrix}\right| = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Przykłady

$$\int_2^6 \sqrt{4x+1}\,dx = \left|\begin{matrix} u = 4x+1 \\ du = 4dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\int_9^{25} \sqrt{u}\,du$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = 2\sin(t) \\ dx = 2\cos(t)\,dt \end{matrix}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2(t)} \cdot 2\cos(t)\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt$$

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{1+3x} \\ x = \frac{t^2-1}{3} \\ dx = \frac{2}{3}t\,dt \end{matrix}\right| = \int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}}{t} \cdot \frac{2}{3}t\,dt = \frac{2}{9}\int_1^4 [t^2-1]\,dt = \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)\Big|_1^4 = 4$$

Zastosowania geometryczne całki Riemanna

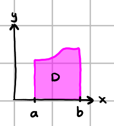
Pole figury między krzywymi $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$

$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

W układzie kartezjańskim pole dowolnej figury można utworzyć z trapezów krzywoliniowych przylegających do osi x lub y

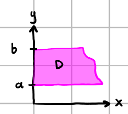
Pole trapezu przylegającego do osi x na $[a,b]$

$$|D| = \int_a^b y\,dx$$



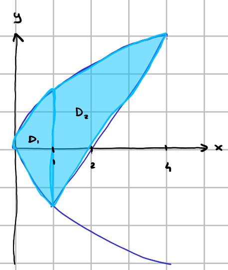
Pole trapezu przylegającego do osi y na $[a,b]$

$$|D| = \int_a^b x\,dy$$



Pole każdej figury w układzie biegunowym można utworzyć z pól wycinków krzywoliniowych

$$|D| = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi$$



Pole między prostą i parabolą

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

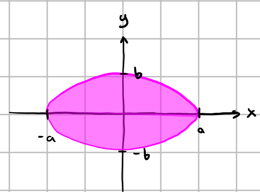
$$|D_1| = 2\cdot\int_0^1 \sqrt{4x}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{x}\,dx = 4\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$|D_2| = \int_1^4 [\sqrt{4x} - (2x-4)]\,dx = 2\int_1^4 \sqrt{x}\,dx - 2\int_1^4 [x-2]\,dx$$

$$= 2\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4 - 2\cdot\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_1^4 = 2\cdot\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) - 2\left(0 + \frac{3}{2}\right) = \frac{28}{3} - 3 = \frac{19}{3}$$

$$|D| = |D_1| + |D_2| = \frac{8}{3} + \frac{19}{3} = 9$$

Pole elipsy
$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



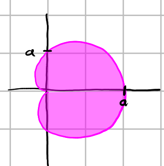
$$|D| = 4\int_0^a y\,dx = \left|\begin{array}{l} x = a\cos(t) \\ dx = -a\sin(t)dt \\ x = 0 \to t = \frac{\pi}{2} \\ x = a \to t = 0 \end{array}\right|$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin(t)\cdot(-a\sin(t))\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos(2t)]\,dt = 2ab\cdot\left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2ab\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi ab$$

Pole kardioidy
$$\begin{cases} r = a(1 + \cos(\varphi)) \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



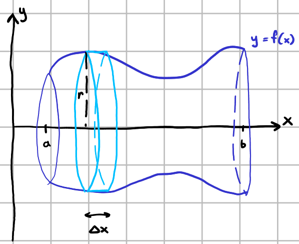
$$|D| = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\,d\varphi = a^2\int_0^\pi (1 + \cos(\varphi))^2\,d\varphi$$

$$= a^2\int_0^\pi [1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)]\,d\varphi = a^2\int_0^\pi \left[1 + 2\cos(\varphi) + \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right]d\varphi$$

$$= a^2\cdot\left[\frac{3}{2}\varphi + 2\sin(\varphi) + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)\right]\Big|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2$$

Objętość bryły obrotowej

Bryła powstała przez obrót wykresu wokół osi

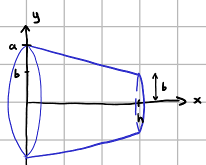


Bryłę dzieli się na walce

$$|V| \approx \sum_{x=a}^{b} \pi r^2 \Delta x = \pi \sum_{x=a}^{b} f^2(x)\,dx$$

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Objętość ściętego stożka



$y = \frac{b-a}{h}x + a$

$$|V| = \pi \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}x + a\right)^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{b-a}{h}x + a \\ dt = \frac{b-a}{h}\,dx \\ dx = \frac{h}{b-a}\,dt \end{array} \right|$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \int_a^b t^2\,dt = \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_a^b = \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{1}{3} (b-a)(b^2 + ba + a^2) = \frac{\pi h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

Łuk zwykły

zadany funkcją $y = f(x)$ lub parametrycznie $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$

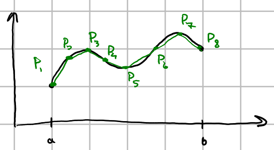
Otwarty lub zamknięty

Gładki - pochodne nie zerują się jednocześnie

$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$

Długość łuku

szacuje się przez długość łamanej



$$|l_n| \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x' \Delta t)^2 + (y' \Delta t)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\Delta t$$

Twierdzenie Lagrange'a

$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{b-a}$

$f(a) - f(b) = f'(c)(b-a)$

Długość łuku zadanego parametrycznie $|L| = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$

Długość łuku zadanego funkcją $|L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$

Długość paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 \quad x \in [0, a]$

$$|L| = \int_0^a \sqrt{1 + x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|\right]\Big|_0^a = \frac{1}{2}\left[a\sqrt{a^2+1} + \ln\left|a + \sqrt{a^2+1}\right|\right]$$

Pole powierzchni obrotowej

pole powstałe przez obrót wykresu wokół osi

przybliżone przez powierzchnię boczną walców

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

$$|S| = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$