Zadanie 3

3. Korzystając z definicji zbadaj parzystość funkcji:
   (a) $f(x) = x \cdot (2^x - 2^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$,
   (b) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = x(2^x - 2^{-x}), \ x \in R$

$$f(-x) = -x(2^{-x} - 2^x) = x(2^x - 2^{-x}) = f(x)$$

jest parzysta

b) $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad x \in R$

$$f(-x) = \log_2(-x + \sqrt{x^2+1})$$

$$-f(x) = -\log_2(x + \sqrt{x^2+1})$$

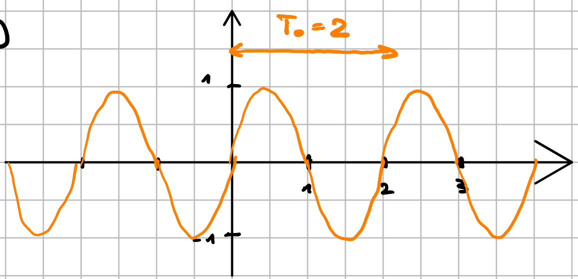
$$= \log_2\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \log_2\left(\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}\right)$$

$$= \log_2\left(\frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\cancel{x^2}+1 \cancel{-x^2}}\right) = \log_2(\sqrt{x^2+1} - x) = f(-x)$$

funkcja jest nieparzysta

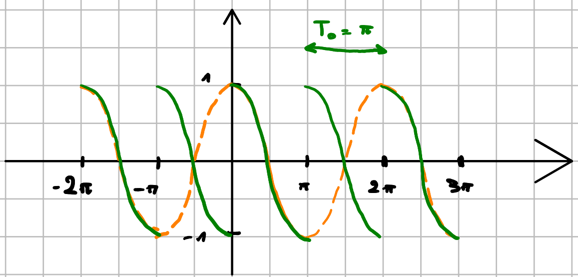
4. Naszkicuj wykres funkcji $f(x)$ i na tej podstawie podaj jej okres podstawowy, jeśli:
   (a) $f(x) = \sin(\pi x)$,
   (b) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x|$,
   (c) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$.

a)



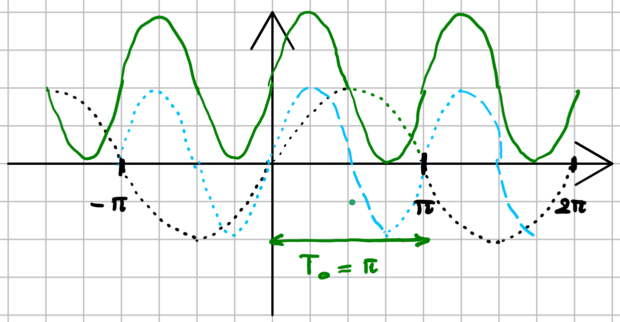
b) $f(x) = \cot(x) \cdot |\sin(x)| = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot |\sin(x)|$

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{dla } x \in [0 + 2k\pi, \ \pi + 2k\pi] \\ -\cos(x) & \text{dla } x \in (\pi + 2k\pi, \ 2\pi + 2k\pi) \end{cases}$$



c) $f(x) = (\sin(x) + \cos(x))^2 = \sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x)$

$f(x) = \sin(2x) + 1$



5. Rozwiąż równanie/nierówność:

(a) $\frac{\log_2 x - 1}{x^2 - x} \leqslant 0$;

(b) $3\log(x+1) = \log(1 - x^2)$;

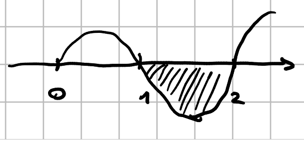
(c) $2^{|x|-1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$.

a) D: $\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{array}\right\} \iff x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$

$$\frac{\log_2(x) - 1}{x^2 - x} = \frac{\log_2(x) - \log_2(2)}{x(x-1)} = \frac{\log_2\left(\frac{1}{2}x\right)}{x(x-1)}$$

$x(x-1)\log_2\left(\frac{1}{2}x\right) \leq 0$

$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2$



$x \in (1, 2]$

6. Korzystając z definicji wykaż, że funkcja $f(x)$ jest różnowartościowa, jeśli

(a) $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 2}{2^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$,

(b) $f(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{2-x}\right), \quad x \in (-1;\ 2)$.

Definicja:
Funkcja $f : X \to Y$ jest **różnowartościowa**, jeśli
$\forall\, x_1, x_2 \in X \left[f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2\right]$.

a) niech $x_1, x_2 \in R$ i $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{3 \cdot 2^{x_1} + 2}{2^{x_1} + 1} = \frac{3 \cdot 2^{x_2} + 2}{2^{x_2} + 1}$$

$$\cancel{3 \cdot 2^{x_1 + x_2}} + 3 \cdot 2^{x_1} + 2 \cdot 2^{x_2} + \cancel{2} = \cancel{3 \cdot 2^{x_1 + x_2}} + 2 \cdot 2^{x_1} + 3 \cdot 2^{x_2} + \cancel{2}$$

$2^{x_1} = 2^{x_2} \iff x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$

b) $f(x) = \log_2\left(\frac{x+1}{2-x}\right) \quad x \in (-1, 2)$

niech $f(x_1) = f(x_2)$

$$\log_2\left(\frac{x_1+1}{2-x_1}\right) - \log_2\left(\frac{x_2+1}{2-x_2}\right) = 0$$

$$\log_2\left(\frac{x_1+1}{2-x_1} \cdot \frac{2-x_2}{x_2+1}\right) = 0$$

$$\frac{2x_1 - x_1x_2 + 2 - x_2}{2x_2 - x_1x_2 + 2 - x_1} = 1$$

$$2x_1 \cancel{- x_1x_2} \cancel{+2} - x_2 = 2x_2 \cancel{- x_1x_2} \cancel{+2} - x_1$$

$$x_1 = x_2$$

7. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x)$ oraz podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z nich, jeśli:

(a) $f(x) = \frac{1}{2^x+4}$,

(b) $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 2}{2^x+1}$,

(c) $f(x) = \sin x, \quad x \in \left[2\pi;\ \frac{5}{2}\pi\right]$,

(d) $f(x) = \cos x, \quad x \in [-3\pi;\ -2\pi]$.

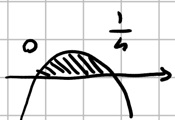
a) $\frac{1}{2^x+4} = y$

$$1 = y \cdot 2^x + 4y$$

$$2^x = \frac{1-4y}{y}$$

$$x = \log_2\left(\frac{1-4y}{y}\right) = f^{-1}(y)$$

$$\frac{1-4y}{y} > 0$$



$$y(1-4y) > 0$$

$$f^{-1}: \left(0, \tfrac{1}{4}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$