

# Funkcje, granice funkcji

Granice umożliwiają badanie zachowania funkcji poza dziedziną i w nieskończoności, badanie asymptot pionowych, poziomych i ukośnych

Nieciągłość pierwszego rodzaju - skokowa

Nieciągłość drugiego rodzaju - co najmniej z 1 strony granica nieistniejąca

Punkty skupienia, punkty izolowane

$$D_f = (a, b] \cup \{c\}$$

Granice definiuje się tylko dla punktów skupienia

Definicja Cauchy'ego

Granica właściwa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

Granica niewłaściwa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < m$$

Granica właściwa w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in D \quad x > K \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

Granica niewłaściwa w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in D \quad x > K \implies f(x) > m$$

## Definicja Heinego

Granica właściwa w punkcie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \iff \forall (x_n) \subset D, x_n \neq x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Granica niewłaściwa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n) \subset D, x_n \neq x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n) \subset D, x_n \neq x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

Granica właściwa w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \iff \forall (x_n) \subset D \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Granica niewłaściwa w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n) \subset D \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$$

Granica funkcji w punkcie nie istnieje, gdy (z definicji Heinego)

$$\exists (x_n'), (x_n''), x_n' \neq x_0 \neq x_n'' \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n' = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n'' = x_0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n'')$$

$$\text{np. dla } x_n' = \frac{1}{n} \quad \text{ i } \quad x_n'' = -\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n'} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n''} = -\infty$$

wzic  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  nie istnieje

Dowód z definicji Cauchy'ego, że  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

→ trzeba wyznaczyć wzór na  $\delta$  tak, żeby doprowadzić do tautologii i stwierdzenia

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

prekstatcom następniki:

$$\frac{1}{x^2} > M \rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{M}} \rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Dowód z definicji Heinego, że  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$

$$\text{niech } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x_n+1}{5x_n+4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{2}$$

Dowód z definicji Cauchy'ego, że  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$

$$\text{zapisując } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2}(x+1) - 1 \right| = \frac{1}{2} |x+1-2| = \frac{1}{2} |x-1|$$

$$\frac{1}{2} |x-1| < \varepsilon \rightarrow |x-1| < 2\varepsilon \rightarrow \text{przyjmując } \delta = 2\varepsilon$$

Dowód z definicji Heinego, że  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$  nie istnieje

$$x_n' = \pi n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n') = 0$$

$$x_n'' = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n'') = 1$$

granice nie są równe więc  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$  nie istnieje

## Twierdzenia

1) z wartości bezwzględnej

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |g|$$

2) o trzech funkcjach (o ścisłaniu)

$$\forall x \in S(x_0) \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \wedge \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = K$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = K$$

3) z funkcją ograniczoną

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \wedge \exists M > 0 \quad \forall x \in S(x_0) \quad |g(x)| \leq M$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

## Twierdzenie o działaniach arytmetycznych

$$\text{niech } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad , \text{ dla } g(x) \neq 0, b \neq 0$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Funkcja zredukowana  $f|_A$

dla  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq A \subset D \subset \mathbb{R}$

to  $g: A \rightarrow \mathbb{R}$  taką, że  $\forall x \in A \quad f(x) = g(x)$

$g$  jest funkcją zredukowaną  $g = f|_A$

Granice jednostronne

lewostronna  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f|_{D \cap (-\infty, x_0)})(x)$

pravostronna  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f|_{D \cap (x_0, +\infty)})(x)$

Twierdzenie (przy istniejących granicach jednostronnych)

granica funkcji istnieje gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

np. nie istnieje  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

$$\text{bo } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

## Podstawowe granice

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2) \forall a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

$$3) \forall r \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$[1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow e$  dla  $f(x) \rightarrow 0$   
i analogicznie dla pozostałych

$$f(x) = e^{\ln(f(x))} = \ln(e^{f(x)})$$

## Przykłady symboli nieoznaczonych

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{(1 + \frac{x}{16})^{\frac{1}{4}} - 1}{\frac{x}{16}} \cdot \frac{1}{16} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 = \ln(3) \cdot 1 = \ln(3)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{x^3 \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\arctan(x+2)} \quad \left| \begin{array}{l} y = \arctan(x+2) \\ x+2 = \tan(y) \\ x \rightarrow -2 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\tan(y) - 2)^2 - 4}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan(y) [\tan(y) - 4]}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{\tan(y) - 4}{\cos(y)} = 1 \cdot (-4) = -4$$

## Ciągłość funkcji

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $x_0 \in D$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w punkcie  $x_0 \in D$

$\Leftrightarrow$

$$\forall (x_n) \subset D \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Funkcja jest ciągła w zbiorze  $A \subset D$  jeśli jest ciągła w każdym jego punkcie

1) Jeśli  $x_0 \in D$  jest punktem skupienia  $D$ , to  $f$  jest ciągła w  $x_0$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2) Jeśli  $x_0 \in D$  jest punktem izolowanym  $D$ , to  $f$  jest ciągła w  $x_0$

3) Jeśli  $x_0 \notin D$  to  $f$  jest nieciągła w  $x_0$

## Twierdzenie o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej

Jeśli funkcja  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w  $x_0 \in D$  i  $f(x_0) \neq 0$   
to istnieje takie otoczenie  $Q(x_0, r)$ , że funkcja ma  
w zbiorze  $D \cap Q(x_0, r)$  taki sam znak jak  $f(x_0)$

## Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych

Jeśli  $f$  i  $g$  są ciągłe w  $x_0$ , to  
 $f+g$ ,  $f-g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  gdy  $g(x_0) \neq 0$   
są ciągłe w  $x_0$

## Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

Jeśli  $f$  jest ciągła i rosnąca na przedziale  $A \subset \mathbb{R}$   
to  $f^{-1}$  też jest ciągła i rosnąca na przedziale  $f(A)$

## Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej

Jeśli  $u = f(x)$  jest ciągła w  $x_0$  i  $h(u)$  jest ciągła w  $u_0 = f(x_0)$   
to  $(h \circ f)(x) = h(f(x))$  też jest ciągła

**Twierdzenie o uprowadzaniu granicy do argumentu funkcji ciągłej**

Jeśli istnieje  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R}$  i  $h(u)$  jest ciągła w  $u_0 = g$

to  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = h(g)$

Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach

- 1) jednomiany
- 2) funkcja wykładnicza
- 3) funkcje trygonometryczne
- 4) wszystkie funkcje odwrotne, złożenia i otrzymane przez operacje arytmetyczne

**Twierdzenie Darboux**

Jeśli  $f$  jest ciągła w  $[a, b]$ ,  $f(a) \neq f(b)$  i  $d$  jest zawarta między  $f(a)$  i  $f(b)$  to istnieje takie  $c \in [a, b]$ , że  $f(c) = d$

Funkcja ciągła przyjmuje wszystkie wartości pośrednie

Jeśli  $f$  jest różnowartościowa to istnieje dokładnie 1 takie  $c$

→ wyznaczanie pierwiastków metodą bisekcji

supremum - kres górny - najmniejsze ograniczenie górne

infimum - kres dolny - największe ograniczenie dolne

**Twierdzenie Weierstrassa**

Jeśli  $f$  jest ciągła w  $[a, b]$ , to jest w tym przedziale ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy (sup i inf)  
(maksimum jest równe supremum, minimum jest równe infimum)

**Punkty nieciągłości**

Punkt  $x_0$ , w którym  $f$  nie jest ciągła ale jest ciągła w jego sąsiedztwie jest punktem nieciągłości

I-go rodzaju → istnieją granice własne, jednostronne w  $x_0$

II-go rodzaju → w każdym pozostałym przypadku