Wyznacznik

Permutacja zbioru

Bijekcja $\sigma: \{1,2,\dots n\} \to \{1,2,\dots n\}$

Zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1 \dots n\}$ S_n

Oznaczenie $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Dla n-elementowego zbioru istnieje $n!$ permutacji

Inwersja permutacji

Para $(\sigma(k), \sigma(m))$ taka, że $k < m$ i $\sigma(k) > \sigma(m)$

Para liczb, które zmieniły kolejność

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$$

Inwersje: $(3,1)$ $(3,2)$ $(5,1)$ $(5,2)$ $(5,4)$ $(6,2)$ $(6,4)$

W permutacji σ jest 7 inwersji

Znak permutacji

$sgn(\sigma) = (-1)^n$ gdzie n jest liczbą inwersji permutacji

Permutacja jest parzysta $\to$ $sgn(\sigma) = 1$

Permutacja jest nieparzysta $\to$ $sgn(\sigma) = -1$

W zbiorze S_n połowa permutacji jest parzysta i druga połowa nieparzysta

Złożenie permutacji nieparzystych daje permutację parzystą

Złożenie permutacji parzystej i nieparzystej daje permutację nieparzystą

Wyznacznik macierzy (determinant) - definicja

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

Oznaczenia $\det A$ $\det[a_{ij}]$ $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Istnieją szybsze sposoby na obliczenie wyznacznika

Może być szybciej jeśli w macierzy jest dużo zer

Tylko dla macierzy kwadratowej!

Wzory Sarrusa

1. $\det[a] = a$

2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$

Wyrazy wzięte z przekątnych

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

na zielono - ze znakiem +

na czerwono - ze znakiem -

W każdym składniku sumy jest po 1 wyrazie z każdego wiersza i kolumny

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{macierz } 3\times 3 \rightarrow 3! \text{ wyrazów w sumie}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+1\cdot 5\cdot 9 \qquad +4\cdot 8\cdot 1 \qquad +7\cdot 2\cdot 6 \qquad -7\cdot 5\cdot 3 \qquad -4\cdot 2\cdot 3 \qquad -1\cdot 8\cdot 6$$

Wyznacznik macierzy diagonalnej lub trójkątnej

$$\det(A) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

Iloczyn wyrazów na głównej przekątnej

Twierdzenia

1. $\det A = \det A^T$

2. $\det(A\cdot B) = \det A \cdot \det B$ twierdzenie Cauchy'ego

3. $\det(A^m) = (\det A)^m$

Przykłady jeśli wiadomo, że $\det A = -2$

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\det(3A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \det A = 27\cdot(-2) = -54$$

$$\det(-A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \det A = (-1)^3(-2) = 2$$

Wyznacznik macierzy blokowej

Macierz blokowa – macierz w postaci $\left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline D & B \end{array}\right]$ lub $\left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$

podmacierze A i B są kwadratowe

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline D & B \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right] = \det A \cdot \det B$$

Przykład

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \left|\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \det[2] \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 2\cdot 1 = -6$$

Własności wyznaczników

1. Wyznacznik macierzy, w której wiersze są liniowo zależne jest równy 0
   czyli np:
   - jest wiersz lub kolumna samych zer
   - są powtórzone wiersze lub kolumny
   - wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

2. Wyznacznik macierzy jest jednorodną i addytywną funkcją wierszy i kolumn macierzy

   Z dowolnego wiersza lub kolumny można wyłączyć stałą przed wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ dla $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+j & 4 \\ 2 & 2+j & 5 \\ 3 & 3+j & 6 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & j & 4 \\ 2 & j & 5 \\ 3 & j & 6 \end{vmatrix}}_{\text{addytywność dla kolumn}} = \underbrace{0 + j \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}_{\text{jednorodność}} = \underbrace{j\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right)}_{\text{addytywność}} = \underbrace{j(0+0)}_{\text{liniowa zależność}} = 0$$

3. Przestawienie 2 wierszy lub kolumn zmienia znak wyznacznika na przeciwny

$$\begin{vmatrix} 5 & 1+j & 3 \\ 2-j & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{w_1 \longleftrightarrow w_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-j & 2 & 0 \\ 5 & 1+j & 3 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 \cdot 3) = -6$$

4. Wartość wyznacznika nie zmienia się po dodaniu do wiersza (kolumny) wielokrotności innego wiersza (kolumny)
   pozwala doprowadzić macierz do prostszej postaci (np. blokowej albo trójkątnej)

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 10 & 8 & 6 & 5 \end{vmatrix} \underset{w_4 - 2w_1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det[5] \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \cdot \det[1] = 5 \cdot 10 \cdot 1 = 50$$

Macierz nieosobliwa
$\det A \neq 0$ (kwadratowa)

Macierz osobliwa
$\det A = 0$ (kwadratowa)

Dopełnienie algebraiczne wyrazu a_{ij} macierzy A

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det B_{ij}$$

gdzie B_{ij} jest macierzą A bez i-tego wiersza i j-tej kolumny

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \qquad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Twierdzenie Laplace'a

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

(rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza)

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

(rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny)

Łatwe obliczenia jeśli w macierzy jest dużo zer

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 4 \cdot A_{34} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Macierz dołączona A^D

$A^D = [A_{ij}]^T$ gdzie $[A_{ij}]$ jest macierzą dopełnień algebraicznych a_{ij}

$$A \cdot A^D = A^D \cdot A = \det(A) \cdot I$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D$$ jeśli A jest nieosobliwa

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$ jeśli A jest odwracalna

Macierz kwadratowa jest odwracalna $\Leftrightarrow$ jest nieosobliwa ($\det A \neq 0$)

Przykład wyznaczenie wzoru na A^{-1} dla stopnia 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^D = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \det A = ad - bc$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Minor stopnia k macierzy $A_{m \times n}$

wyznacznik macierzy otrzymanej przez wykreślenie z A
m-k wierszy i n-k kolumn

dla $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

minory stopnia 3: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

minory stopnia 2: (12 różnych) np. $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

minory stopnia 1: wyrazy macierzy

Rząd macierzy (rank) $r(A)$, $\operatorname{rank}(A)$

największy stopień niezerowego minora
nie może być większy od liczby wierszy ani liczby kolumn

Liczba $k \in \mathbb{N}$ jest rzędem macierzy wtedy i tylko wtedy gdy
1. Istnieje różny od 0 minor stopnia k macierzy A
2. Nie istnieje różny od zera minor stopnia większego niż k macierzy A

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$

Rząd macierzy nie zmienia się po wykonaniu operacji
- dodania do wiersza (kolumny) wielokrotności innego wiersza (kolumny)
- pomnożenia wiersza lub kolumny przez stałą $\neq 0$
- zamiany wierszy (kolumn) miejscami
- skreślenia zerowego wiersza lub kolumny
- skreślenie wiersza będącego kombinacją liniową innych wierszy

Przykład wyznaczanie rzędu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}(A) \le \min\{4,5\} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \text{niezerowy minor stopnia 2}$$

$$2 \le \operatorname{rank}(A) \le 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{w_3 - 3w_1 \\ w_4 - w_1}]{w_2 - w_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-1} & \cancel{-5} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{w_4 + w_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[w_2 \leftrightarrow w_3]{w_2 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

macierz schodkowa, trapezowa

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \quad \text{niezerowy minor 3 stopnia}$$

Macierz schodkowa
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy w postaci schodkowej jest równy liczbie schodków

Przykład wyznaczanie rzędu macierzy w zależności od t

$$A = \begin{bmatrix} t-1 & -t & 1 \\ -1 & t & 1 \\ -t-1 & 0 & t+1 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}(A) \le 3$$

$\operatorname{rank}(A) = 3$ dla takich t gdzie $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} t-1 & -t & 1 \\ -1 & t & 1 \\ -t-1 & 0 & t+1 \end{vmatrix} \underset{k_1 + k_3}{=} \begin{vmatrix} t & -t & 1 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = t^2(t+1)$$

$\operatorname{rank}(A) = 3$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

dla $t = -1$
$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

podstawienie do przekształconej macierzy niezerowy minor stopnia 2

dla $t = 0$
$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$