

Ciąg monotoniczny (od pewnego miejsca)  
i ograniczony jest zbieżny (ma granicę skończoną)

np.  $(\frac{3^n}{n!})$  jest ograniczony z dołu przez 0 i  
malejący od pewnego momentu  
złg  $\exists g \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3^n}{n!}) = g$

rozumując od tyłu, zakładając że jest zbieżny

$$a_{n+1} = \frac{3}{n+1} \cdot a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{n+1} \cdot a_n \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$g = 0$$

Ciąg  $(a_n)$ :  $(1 + \frac{1}{n})^n$

symbol nieoznaczony  $1^\infty$

jest zbieżny bo jest monotoniczny i ograniczony

Liczba Eulera  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.718...$

podstawa logarytmu naturalnego

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Dla dowolnego podciągu liczb naturalnych

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x_n} \right)^{x_n} = e$$

znaki nie mają znaczenia przy symbolach nieoznaczonych

[uzupełnić]

Symbol Newtona

Dziwian Newtona

Nierówność Bernoulliego  $\rightarrow$  dowód, że  $(1 + \frac{1}{n})^n$  jest monotoniczny

$$1) \cos(\alpha) < \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} < 1$$

$$2) \cos(\alpha) \geq 1 - |\alpha|$$

