

Wyznacznik

Permutacja zbioru

$$\text{Bijekcja } \sigma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

Zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$ S_n

$$\text{Oznaczenie } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Dla n -elementowego zbioru istnieje $n!$ permutacji

Inwersja permutacji

Para $(\sigma(k), \sigma(m))$ taka, że $k < m$ i $\sigma(k) > \sigma(m)$

Para liczb, które zmieniły kolejność

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$$

Inwersje: $(3,1)$ $(3,2)$ $(5,1)$ $(5,2)$ $(5,4)$ $(6,2)$ $(6,4)$

W permutacji σ jest 7 inwersji

Znak permutacji

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^n \text{ gdzie } n \text{ jest liczbą inwersji permutacji}$$

Permutacja jest parzysta $\rightarrow \text{sgn}(\sigma) = 1$

Permutacja jest nieparzysta $\rightarrow \text{sgn}(\sigma) = -1$

W zbiorze S_n połowa permutacji jest parzysta i druga połowa nieparzysta

Złożenie permutacji nieparzystych daje permutację parzystą

Złożenie permutacji parzystej i nieparzystej daje permutację nieparzystą

Wyznacznik macierzy (determinant) - definicja

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

$$\text{Oznaczenia } \det A \quad \det[a_{ij}] \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Istnieją szybsze sposoby na obliczenie wyznacznika

Może być szybko jeśli w macierzy jest dużo zer

Tylko dla macierzy kwadratowej!

Wzory Sarrusa

$$1. \det[a] = a$$

$$2. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$3. \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix}$$

Wzrosty i spadki z przekątnych

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

na zielono - ze znakiem +

na czerwono - ze znakiem -

W każdym składniku sumy jest po 1 wyrazie z każdego wiersza i kolumny

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{macierz } 3 \times 3 \rightarrow 3! \text{ wyrazów w sumie}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ 1 \cdot 5 \cdot 9 \quad + 4 \cdot 8 \cdot 1 \quad + 7 \cdot 2 \cdot 6 \quad - 7 \cdot 5 \cdot 3 \quad - 4 \cdot 2 \cdot 3 \quad - 1 \cdot 8 \cdot 6$$

Wyznacznik macierzy diagonalnej lub trójkątnej

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Wzrost wyrazów na głównej przekątnej

Twierdzenia

1. $\det A = \det A^T$
2. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ twierdzenie Cauchy'ego
3. $\det(A^m) = (\det A)^m$

Przykłady jeśli wiadomo, że $\det A = -2$

$$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-2)^2 = 4$$

$$\det(3A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \det A = 27 \cdot (-2) = -54$$

$$\det(-A) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \det A = (-1)^3 \cdot (-2) = 2$$

Wyznacznik macierzy blokowej

Macierz blokowa - macierz w postaci $\begin{bmatrix} A & 0 \\ D & B \end{bmatrix}$ lub $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$
podmacierze A i B są kwadratowe

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ D & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \det A \cdot \det B$$

Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \det[2] \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 2 \cdot 1 = -6$$

Własności wyznaczników

1. Wyznacznik macierzy, w której wiersze są liniowo zależne jest równy 0

czyli np:

- jest wiersz lub kolumna samych zer
- są powtórzone wiersze lub kolumny
- wiersz (kolumna) jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

2. Wyznacznik macierzy jest jednorodną i addytywną funkcją wierszy i kolumn macierzy

2 dowolnego wiersza lub kolumny można wyłaczyć stąd przed wyznacznik

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A \quad \text{dla } A \in M_{n \times n}(K)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1+3 & 4 \\ 2 & 2+3 & 5 \\ 3 & 3+3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

addytywność dla kolumn jednorodność addytywność liniowa zależność

3. Przerzucenie 2 wierszy lub kolumn zmienia znak wyznacznika na przeciwny

$$\begin{vmatrix} 5 & 1+3 & 3 \\ 2-3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2-3 & 2 & 0 \\ 5 & 1+3 & 3 \end{vmatrix} = - (1 \cdot 2 \cdot 3) = -6$$

$v_1 \leftrightarrow v_3$

4. Wartość wyznacznika nie zmienia się po dodaniu do wiersza (kolumny) wielokrotności innego wiersza (kolumny) pozwala doprowadzić macierz do prostej postaci (np. blokowej albo trójkątnej)

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 10 & 8 & 6 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det[5] \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \cdot \det[1] = 5 \cdot 10 \cdot 1 = 50$$

$v_4 - 2v_1$

Macierz nieosobliwa

$$\det A \neq 0 \quad (\text{kwadratowa})$$

Macierz osobliwa

$$\det A = 0 \quad (\text{kwadratowa})$$

Dopełnienie algebraiczne wyrazu a_{ij} macierzy A

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det B_{ij}$$

gdzie B_{ij} jest macierzą A bez i -tego wiersza i j -tej kolumny

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

Twierdzenie Laplace'a

$$\det A = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$$

(rozwinąć Laplace'a względem i -tego wiersza)

$$\det A = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj}$$

(rozwinąć Laplace'a względem j -tej kolumny)

Łatwe obliczenia jeśli w macierzy jest dużo zer

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 4 \cdot A_{34} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Macierz dołączona A^D

$$A^D = [A_{ij}]^T \text{ gdzie } [A_{ij}] \text{ jest macierzą dopełnień algebraicznych } a_{ij}$$

$$A \cdot A^D = A^D \cdot A = \det(A) \cdot I$$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^D = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Macierz odwrotna A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D \quad \text{jeśli } A \text{ jest niasobliwa}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} \quad \text{jeśli } A \text{ jest odwracalna}$$

Macierz kwadratowa jest odwracalna \Leftrightarrow jest niasobliwa ($\det A \neq 0$)

Przykład wyznaczenie wzoru na A^{-1} dla stopnia 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^D = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}^T \quad \det A = ad - bc$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Minor stopnia k macierzy $A_{m \times n}$

wyznacznik macierzy otrzymanej przez wykreślenie z A
 $m-k$ wierszy i $n-k$ kolumn

$$\text{dla } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{minory stopnia 3: } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{minory stopnia 2: (12 różnych) np. } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

minory stopnia 1: wyrazy macierzy

Rząd macierzy (rank) $r(A)$, $\text{rank}(A)$

największy stopień niezerowego minora

nie może być większy od liczby wierszy ani liczby kolumn

Liczba $k \in \mathbb{N}$ jest rzędem macierzy wtedy i tylko wtedy gdy

1. Istnieje różny od 0 minor stopnia k macierzy A
2. Nie istnieje różny od zera minor stopnia większego niż k macierzy A

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$$

Reguły macierzy nie zmienia się po wykonaniu operacji

- dodania do wiersza (kolumny) wielokrotności innego wiersza (kolumny)
- pomnożenia wiersza lub kolumny przez stałą $\neq 0$
- zamiany wierszy (kolumn) miejscami
- skreślenia zerowego wiersza lub kolumny
- skreślenie wiersza będącego kombinacją liniową innych wierszy

Przykład

wyznaczenie rzędu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(A) \leq \min\{4, 5\} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

nieszerowy minor stopnia 2
 $2 \leq \text{rank}(A) \leq 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{u_2 \leftarrow u_2 - u_1 \\ u_3 \leftarrow u_3 - 3u_1 \\ u_4 \leftarrow u_4 - u_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{u_4 \leftrightarrow u_2 \\ u_2 \leftarrow (-1)u_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

macierz schodkowa, trapezowa

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$$

nieszerowy minor 3 stopnia

Macierz schodkowa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy w postaci schodkowej jest równy liczbie schodków

Przykład

wyznaczenie rzędu macierzy w zależności od t

$$A = \begin{bmatrix} t-1 & -t & 1 \\ -1 & t & 1 \\ -t-1 & 0 & t+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(A) \leq 3$$

$\text{rank}(A) = 3$ dla takich t gdzie $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} t-1 & -t & 1 \\ -1 & t & 1 \\ -t-1 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & -t & 1 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = t^2(t+1)$$

$\text{rank}(A) = 3$ dla $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$$\text{dla } t = -1 \quad \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

podstawienie do przekształconej macierzy

nieszerowy minor stopnia 2

$$\text{dla } t = 0 \quad \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$