

Rachunek różniczkowy funkcji 1 zmiennej

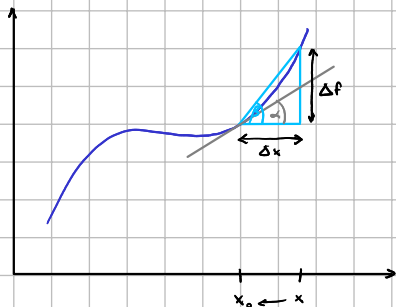
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pochodna f w punkcie x_0 to granica ilorazu różnicowego (jeśli istnieje i jest uściśwa)

Jeśli istnieje pochodna w x_0 to f jest różniczkowalna w x_0

dx - nieskończenie mały przyrost

$df = f'(x_0) dx$ - różniczka



$$\tan(\beta) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{— styczna}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \quad \text{— średnie tempo zmian}$$

$$\frac{df}{dx} \quad \text{— chwilowe tempo zmian}$$

Pochodną $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definiuje się na otwartym przedziale D

bo w definicji istnieją obie granice jednostronne

więc dla każdego x_0 istnieje sąsiedztwo $Q(x_0, r) \subset D$

Na końcu przedziału może istnieć co najmniej jedna pochodna jednostronna

Nie istnieje $f'(0)$ dla $f(x) = |x|$ i generalnie w "ostrych punktach"

Pochodne jednostronne

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ istnieje $\Leftrightarrow f'_+(x_0)$ i $f'_-(x_0)$ istnieją, są skończone i są sobie równe

Warunek konieczny istnienia pochodnej

$f'(x_0)$ istnieje $\Rightarrow f$ jest ciągła w x_0

Pochodne wyższych rzędów

Pochodna pochodnej (o ile istnieje)

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

$$f(x) = x^4$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 4x^3$$

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = 12x^2$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4 f}{dx^4} = 24$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d^5 f}{dx^5} = 0$$

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na pochodnych

- $(cf)' = c f'$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Podstawowe pochodne

- $\frac{d}{dx} c = 0 \quad c \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} x^a = a x^{a-1} \quad x > 0, a \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a) \quad a > 0, x \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
- $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
- $\frac{d}{dx} \cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x)$
- $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

Jeśli $y = f(x)$ jest ciągła i ściśle monotoniczna w (a, b)
i w $x_0 \in (a, b)$ ma pochodną $f'(x_0) \neq 0$
to $x = g(y)$ ma w $y_0 = f(x_0)$ pochodną

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} g(y)} \Big|_{y=f(x)}$$

Przykład

$$y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y)$$

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin(y)} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$$

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} a^y} = \frac{1}{a^y \ln(a)} = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej (reguła L'Hôpitala)

Jeśli $u = h(x)$ ma pochodną $h'(x)$ w x ,
 a $y = f(u)$ ma pochodną $f'(u)$ w $u = h(x)$
 to $\varphi(x) = f(h(x))$ ma w x pochodną

$$[f(h(x))]' = f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Przykład

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} 2^{\arctan(\sin(x))} &= \frac{d}{du} 2^u \cdot \frac{d}{dv} \arctan(v) \cdot \frac{d}{dx} \sin(x) \\ 2^u \ln(2) &= \frac{1}{1+v^2} \cdot \cos(x) \\ 2^{\arctan(\sin(x))} \ln(2) &= \frac{1}{1+\sin^2(x)} \cdot \cos(x) \end{aligned}$$

Pochodna logarytmiczna

$$\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{pozwala na łatwiejsze obliczanie pochodnych}$$

Wyprośzczenie

$$x > 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Przykład

$$f(x) = 3 \sqrt{\frac{x^3(x^2+1)}{5\sqrt{5-x}}}$$

$$\ln|f(x)| = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - \frac{1}{15} \ln|5-x|$$

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln|f(x)|$$

$$f'(x) = 3 \sqrt{\frac{x^3(x^2+1)}{5\sqrt{5-x}}} \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5-x} \right]$$

Pochodna funkcji zadanej parametrycznie

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases} \quad \text{jeśli } g \text{ i } h \text{ mają skończone pochodne i } g'(t) \neq 0$$

$$\text{to } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Przykład

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt} r \sin(t)}{\frac{d}{dt} r \cos(t)} = \frac{r}{r} \cdot \frac{\cos(t)}{-\sin(t)} = -\cot(t) = -\frac{x}{y}$$

Różniczkowanie funkcji w postaci uwikłanej

Okrąg $x^2 + y^2 = r^2$ można wyrazić jako funkcję 2 zmiennych

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$$

$$F(x, y) = 0 \rightarrow \text{postać uwikłana}$$

dla drugiego

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0 \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} [x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3] = \frac{d}{dx} [0]$$

$$\frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 - 2 \frac{d}{dx} x + 4 \frac{d}{dx} y - \frac{d}{dx} 3 = \frac{d}{dx} 0$$

$$2x + \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2 + \frac{d}{dy} [y] \frac{dy}{dx} - 0 = 0 \quad \text{traktuje } y \text{ jako funkcję } x$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y + 1) \frac{dy}{dx} = -2x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - 2}{2y + 1}$$

Styczna do wykresu

Równanie stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ (jeśli $f'(x_0) \in \mathbb{R}$)

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{lub } x = x_0 \quad \text{kiedy } f'(x_0) \rightarrow \pm \infty$$

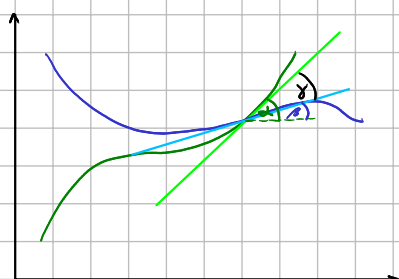
Normalna do wykresu

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Kąt między krzywymi

Kąt $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ między stycznymi do prostych w punkcie

$$\gamma = \begin{cases} \arctan \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right| & \text{dla } 1 + f'(x_0)g'(x_0) \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } 1 + f'(x_0)g'(x_0) = 0 \end{cases}$$



$$\gamma = \alpha - \beta = \arctan(\tan(\alpha - \beta)) \\ = \arctan \left(\frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)} \right)$$

$$\alpha = f'(x_0) \quad \beta = g'(x_0)$$

Twierdzenie de l'Hôpitala

$$\text{Jeśli } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0) = 0$$

$$\text{lub } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_0) = \pm \infty$$

i istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub nie)

$$\text{to } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

prawdzie też dla granic jednostronnych i w nieskończoności

Przykład

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Asymptoty

Asymptoty pionowe

w punktach $c \in D_f$

lewostronna $x = c$ dla $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm \infty$

pravostronna $x = c$ dla $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm \infty$

obustronna jednocześnie pravostronna i lewostronna

Asymptoty ukośne

zachowanie funkcji w $\pm \infty$, ma sens tylko dla nieograniczonej dziedziny

pravostronna $y = mx + k$ kiedy

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad k = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

lewostronna $y = mx + k$ kiedy

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \wedge \quad k = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx]$$

obustronna jednocześnie pravostronna i lewostronna

asymptota pozioma dla $m = 0$

Twierdzenie o zachowaniu słabej nierówności w granicy funkcji

Dla funkcji f i g , takich że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$

$$\exists r > 0 \forall x \in D \cap S(x_0, r) \quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow a \leq b$$

przydatne do dowodzenia twierdzeń

Ekstrema

Przyjmujemy, że krawce przedziału nie są ekstremami lokalnymi
Ekstremum globalne nie musi być ekstremum lokalnym

Maksimum lokalne f w x_0

$$\exists \delta > 0 \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) \leq f(x_0)$$

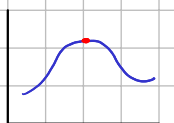


Minimum lokalne f w x_0

$$\exists \delta > 0 \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) \geq f(x_0)$$



Ekstrema wąskie



$$f(x) < f(x_0)$$

Ekstrema niewąskie



$$f(x) \leq f(x_0)$$

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli f ma w x_0 ekstremum i $f'(x_0)$ istnieje to $f'(x_0) = 0$

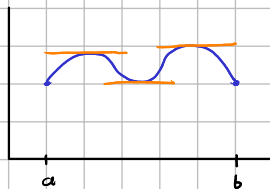
Funkcja może osiągnąć minimum kiedy $f'(x_0) = 0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje.
Implikacja nie działa w drugą stronę ($y = x^3$)

Punkty krytyczne funkcji

- 1) Pochodna istnieje i jest równa 0
- 2) Pochodna nie istnieje

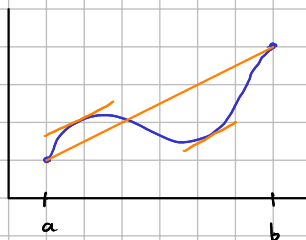
Twierdzenie Rolle'a

Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła
i $f(a) = f(b)$
to $\exists c \in (a, b) \quad f'(c) = 0$
(istnieje pozioma styczna)



Twierdzenie Lagrange'a

Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$
i różniczkowalna na (a, b)
to $\exists c \in (a, b) \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$
(istnieje styczna równoległa do secznej)



Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

- 1) $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) = 0 \Rightarrow f$ jest stała w (a, b)
- 2) $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ jest rosnąca (a, b)
- 3) $\forall x \in (a, b) \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ jest malejąca (a, b)

Można wykazać $\arctan(x) < x - \frac{1}{6}x^3$ na $(0, 1)$

$f(x) = \arctan(x) - x + \frac{1}{6}x^3$ spełnia założenia twierdzenia

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$$

$\forall x \in (0, 1) \quad f'(x) < 0 \rightarrow f$ jest malejąca

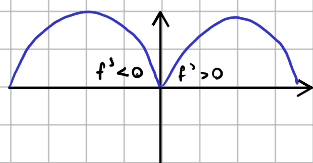
$$f(0) = 0$$

więc $\forall x \in (0, 1) \quad f(x) = \arctan(x) - x + \frac{1}{6}x^3 < 0$

czyli $\arctan(x) < x - \frac{1}{6}x^3$

I Warunki wystarczające istnienia ekstremum (first derivative test)

Funkcja ciągła f ma ekstremum lokalne w x_0
jeśli f' zmienia znak w otoczeniu x_0
(nawet jeśli $f'(x_0)$ nie istnieje)



$\sin|x|$

ma minimum lokalne w $x=0$
choć $f'(0)$ nie istnieje

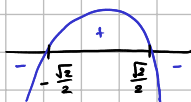
Przykład

$$f(x) = x\sqrt{1-x^2} \quad D_f = [-1, 1]$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) + 1 \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

f' nie istnieje dla $x = \pm 1$ ale to brzoje przedziału



$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{minimum lokalne}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{maksimum lokalne}$$

→ Jeśli funkcja ma tylko 1 ekstremum na danym przedziale
to jest to ekstremum globalne w tym przedziale

→ Funkcja ciągła w $[a, b]$ osiąga wartości największą i najmniejszą
albo na brzojach przedziału albo w ekstremach lokalnych

→ Żeby znaleźć globalne ekstremum f trzeba sprawdzić punkty, gdzie:

- $f'(x) = 0$

- f' nie istnieje

- brzoje przedziału

→ punkty stacjonarne

Wzór Taylora

Jeśli funkcja ma ciągłe pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie w przedziale domkniętym o końcach x i x_0 oraz ma pochodną rzędu n wewnątrz tego przedziału to istnieje takie c między x , a x_0 że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^n$$

wielomian Taylora reszta (błąd przybliżenia)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^n$$

dla $n=1$ wzór daje to samo co twierdzenie Lagrange'a

skoro funkcję w pobliżu punktu x_0 można przybliżyć przez jej styczną to w podobny sposób można ją przybliżyć wielomianem stopnia 2, 3, 4, ...

Im wyższy stopień wielomianu $(n-1)$ tym dokładniejsze przybliżenie (mniejszy błąd)
Im bliżej x_0 szacujemy wartość f tym dokładniejsze przybliżenie

Wzór Maclaurina

(wzór Taylora dla $x_0=0$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \quad \theta \in (0,1)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2} x^2 + \frac{f'''(0)}{6} x^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$$

Wzory pozwalają na przybliżenie dowolnej funkcji przez wielomian i oszacowanie błędów tego przybliżenia

Przybliżenie e^x wielomianem Maclaurina

$$\frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x \quad e^0 = 1$$

$$e^x \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$= \text{błądem } \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{dla } 0 < \Theta < 1$$

wartość błędów zależy od n i x

Przybliżenie $\sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$	$f'(0) = 1$	zostanę tylko wyrazy nieparzystego stopnia $\sin(x)$ jest funkcją nieparzystą
$f''(x) = -\sin(x)$	$f''(0) = 0$	
$f'''(x) = -\cos(x)$	$f'''(0) = -1$	
$f^{(4)}(x) = \sin(x)$	$f^{(4)}(0) = 0$	
...		

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Przybliżenie $\cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$	$f'(0) = 0$	zostanę same wyrazy parzystego stopnia $\cos(x)$ jest funkcją parzystą
$f''(x) = -\cos(x)$	$f''(0) = -1$	
$f'''(x) = \sin(x)$	$f'''(0) = 0$	
$f^{(4)}(x) = \cos(x)$	$f^{(4)}(0) = 1$	
...		

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Przybliżenie $\ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f'(1) = 1$	szukamy przybliżenia dla $x_0 = 1$ żeby uniknąć problemu z dzielnikiem przez 0
$f''(x) = -x^{-2}$	$f''(1) = -1$	
$f'''(x) = 2x^{-3}$	$f'''(1) = 2$	
$f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$	$f^{(4)}(1) = -3!$	

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k} \quad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

$$\ln(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$$

$$\ln(x) \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

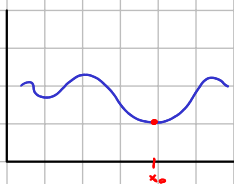
$$\ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

II Warunek wystarczający istnienia ekstremum (second derivative test)

Jeśli funkcja f ma w otoczeniu x_0 pochodne do rzędu n (włącznie),
 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ i dla wszystkich pochodnych niższego rzędu $0 < k < n$ $f^{(k)}(x_0) = 0$
($f^{(n)}$ jest pierwszą niezerującą się pochodną) to:

- 1) Jeśli n jest nieparzyste to f nie ma ekstremum w x_0 .
- 2) Jeśli n jest parzyste to f ma ekstremum lokalne w x_0
minimum dla $f^{(n)}(x_0) > 0$
maksimum dla $f^{(n)}(x_0) < 0$

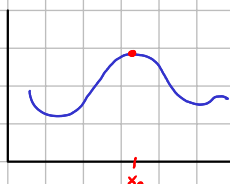
Wypukłość i wklęsłość



wypukła (concave up) w x_0

wykreś leży nad styczną w x_0

$$f''(x_0) > 0$$



wklęsła (concave down) w x_0

wykreś leży pod styczną w x_0

$$f''(x_0) < 0$$

Warunek wystarczający wklęsłości / wypukłości

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \text{ jest wypukła w } x_0$$

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \text{ jest wklęsła w } x_0$$

Punkt przegięcia krzywizny

Punkt taki, że z jednej strony krzywa jest wypukła, a z drugiej wklęsła.
Punkt w którym druga pochodna zmienia znak (warunek wystarczający)

Jeśli x_0 jest punktem przegięcia to $f''(x_0) = 0$ (warunek konieczny)



Mozie wystąpić w punkcie, gdzie f'' nie istnieje albo się zeruje

Badanie funkcji

- 1) Dziedzina
- 2) Cechy szczególne (parzystość, nieparzystość, okresowość)
- 3) Granice na końcach dziedziny
- 4) Asymptoty
- 5) Monotonizność i ekstremum
- 6) Wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia
- 7) Wykres

Funkcje parzyste i nieparzyste wystarczy zbadać w przedziale $(0, +\infty)$ i wykazać symetrię

Funkcje okresowe wystarczy zbadać w jednym okresie

Przykład - badanie $f(x) = x e^{\frac{1}{x}}$

- 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- 2) nie ma cech szczególnych
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{\infty}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^3}} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$
 $x=0 \rightarrow$ asymptota pionowa prawostronna

$$m_p = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$k_p = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = 1$$

$$m_l = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$k_l = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 1$$

$y = x + 1 \rightarrow$ asymptota ukośna obustronna

$$5) f'(x) = \frac{d}{dx} x e^{\frac{1}{x}} = x \cdot \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + 1 \cdot e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$$f' > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$$

$$f' < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1]$$

$f(1) = e$ - minimum lokalne

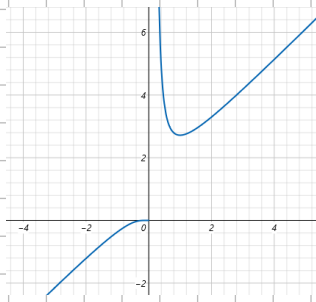
$$6) \quad f''(x) = \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$f'' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad \text{vypuklá} \quad \cup \quad (0, +\infty)$$

$$f'' < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x < 0 \quad \text{vklęslá} \quad \cup \quad (-\infty, 0)$$

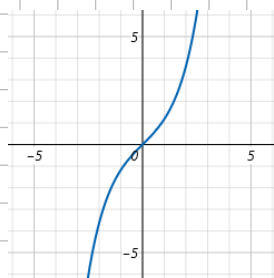
brak punktů přeskyku

7)



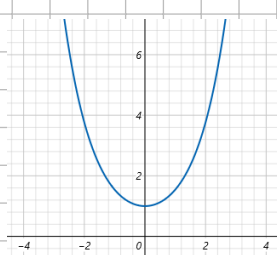
Funkce hyperbolane

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$



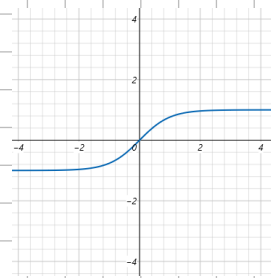
$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$



$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$