1.

a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 0\}$ $\mathbb{R}^2$ na $\mathbb{R}$

$(-1,2) + (2,-1) = (1,1)$

$-2 \leq 0$ $-2 \leq 0$ $\cancel{1 \leq 0}$

nie jest podprzestrzenią

b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y)^2 = z^2\}$ $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$

$v_1 = (2,2,4)$ $v_2 = (-2,-2,4)$ W – 2 płaszczyzny

$v_1 + v_2 = (0,0,8) \notin W$

W nie jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$

c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y)^2 + z^2 = 0\}$ $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$

$(x+y)^2 + z^2 = 0 \iff (x+y)^2 = 0 \wedge z^2 = 0$

$\iff x+y = 0 \wedge z = 0$

$\iff y = -x \wedge z = 0$

$W = \{(x,-x,0) : x \in \mathbb{R}\}$

$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, -x_1 - x_2, 0) = (x_1 + x_2, -(x_1+x_2), 0) \in W$

$\alpha v = (\alpha x, -\alpha x, 0) \in W$

jest podprzestrzenią

d) $W = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 3\}$ $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

$3j + 3j = 6j \notin W$

nie jest przestrzenią liniową

e) $W = \{v \in \mathbb{R}[x] : v'(1) = 0\}$ $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$

$(v_1 + v_2)'(1) = v_1'(1) + v_2'(1) = 0 \implies v_1 + v_2 \in W$

$(\alpha v)'(1) = \alpha \cdot v'(1) = \alpha \cdot 0 = 0 \implies \alpha v \in W$

jest podprzestrzenią

$W = \{v \in \mathbb{R}[x] : a_0 + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \dots\}$

$\frac{dv}{dx} = 2a_2(x-1) + 3a_3(x-1)^2 + \dots$

dla $x = 1$ to się zeruje

2.

a) $A = ((2,1,1), (3,0,1), (0,3,1))$ $\quad \mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$

1 sposób $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 6 - 3 = 0$ A nie jest bazą $\mathbb{R}^3$
i A jest liniowo zależny

2 sposób

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = \frac{-2\alpha}{3} = \frac{6\gamma}{3} = 2\gamma \\ -3\gamma + 2\gamma + \gamma = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = -3\gamma \\ \beta = 2\gamma \\ \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$-3v_1 + 2v_2 + v_3 = 0$ $\qquad v_3 = 3v_1 - 2v_2 = \begin{bmatrix} 6-6 \\ 3 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

A jest liniowo zależny

b) $A = (1-2j, 3+j)$ $\quad \mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$

$$\frac{1-2j}{3+j} = \frac{(1-2j)(3-j)}{(3+j)(3-j)} = \frac{3-j-6j-2}{9-j^2} = \frac{1-7j}{10} = \frac{1}{10} - \frac{7}{10}j$$

$v_1 = \left(\frac{1}{10} - \frac{7}{10}j\right) v_2$ $\qquad$ układ jest liniowo zależny
nie jest bazą $\mathbb{C}$

c) $A = (1-2j, 3+j)$ $\quad \mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ układ jest bazą $\mathbb{C}$
i jest liniowo niezależny

$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ -2j\alpha + j\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{3}\alpha \\ \beta = 2\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$(1, j)$ jest bazą $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$
↳ układ 2 wektorów
  ↳ wymiar = 2
  ↳ układ 2 niezależnych liniowo wektorów jest bazą $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

$a(1-2j) + b(3+j) = 0$

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $A = ((x+2)^2, x+2)$ $\quad \mathbb{R}_2[x]$ nad $\mathbb{R}$

$v_1 = x^2 + 4x + 4 \quad v_2 = x + 2$

$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$

$\alpha x^2 + 4\alpha x + 4\alpha + \beta x + 2\beta = 0$

$\alpha x^2 + (4\alpha + \beta)x + (4\alpha + 2\beta) = 0$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 4\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

układ jest liniowo niezależny

A nie jest bazą $\mathbb{R}_2[x]$

$w = \alpha v_1 + \alpha v_2$

$w = x^2 = \alpha v_1 + \beta v_2$

$x^2 = \alpha x^2 + (4\alpha + \beta)x + (4\alpha + 2\beta)$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 4\alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -4 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

w nie da się wyrazić jako kombinacja liniowa v_1 i v_2

$\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 =$ liczba zmiennych
więc układ jest liniowo niezależny
0 parametrów

Liczba wektorów w układzie $\rightarrow 2$
Liczba wymiarów $\mathbb{R}_2[x]$ nad $\mathbb{R} \rightarrow 3$ $\quad 2 \neq 3$

3.

$$v = \begin{bmatrix} -7 \\ \pi \\ \pi \end{bmatrix} \qquad B = \left((7,8,0), (0,1,8), (1,0,\pi) \right)$$

1 sposób

$$\begin{bmatrix} -7 \\ \pi \\ \pi \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -7 = 7a + c \\ \pi = 8a + b \\ \pi = 8b + \pi c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -7a - 7 \\ \pi = 8a + b \\ \pi = 8b - 7\pi a - 7\pi \end{cases}$$

$$8a + b = 8b - 7\pi a - 7\pi$$
$$(8 + 7\pi) a = 7b - 7\pi$$
$$a = \frac{7b - 7\pi}{8 + 7\pi}$$

$$\pi = 56 \frac{b - \pi}{8 + 7\pi} + b$$
$$8\pi + 7\pi^2 = 56b - 56\pi + 8b + 7\pi b$$
$$(64 + 7\pi) b = 64\pi + 7\pi^2$$

$$b = \pi$$
$$a = \frac{7\pi - 7\pi}{8 + 7\pi} = 0$$
$$c = -7$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \pi \\ c = -7 \end{cases} \qquad 0 \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + \pi \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} - 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ \pi \\ \pi \end{bmatrix}$$

w bazie $((0,1,8),(1,0,\pi)\ (7,8,0))$
ma współrzędne $(\pi, -7, 0)$

2 sposób

$$\begin{bmatrix} -7 \\ \pi \\ \pi \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & \pi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & \pi \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -7 \\ \pi \\ \pi \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 1 & -7 \\ 8 & 1 & 0 & \pi \\ 0 & 8 & \pi & \pi \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 7+\pi \\ 0 & 8 & \pi & \pi \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - 7w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & 8 & -56 - 7\pi \\ 1 & 1 & -1 & 7+\pi \\ 0 & 8 & \pi & \pi \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{7}w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 8+\pi \\ 1 & 1 & -1 & 7+\pi \\ 0 & 8 & \pi & \pi \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 - 8w_1]{w_2 - w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 8+\pi \\ 1 & 0 & \frac{1}{7} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{64}{7}+\pi & -64-7\pi \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 8+\pi \\ 1 & 0 & \frac{1}{7} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{64}{7}+\pi & -64-7\pi \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 \cdot \frac{7}{64+7\pi}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 8+\pi \\ 1 & 0 & \frac{1}{7} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 - \frac{1}{7}w_3]{w_1 + \frac{8}{7}w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \pi \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

$$\frac{64 + 7\pi}{7} \qquad \frac{7}{64 + 7\pi} \cdot (-64 - 7\pi) = -7$$

$$(-7, \pi, \pi) = (0, \pi, -7)_B$$

4. $B = (x+1,\ 3x+4)$ $\qquad \mathbb{R}_3[x]$ nad $\mathbb{R}$

$A = (x+1,\ 3x+4,\ x^2,\ x^3) = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 = 0$

$\delta x^3 + \gamma x^2 + (\alpha + 3\beta)x + (\alpha + 4\beta) = 0$

$$\begin{cases} \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \delta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

układ jest liniowo niezależny

$w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = \delta x^3 + \gamma x^2 + (\alpha + 3\beta)x + (\alpha + 4\beta)$

$$\begin{cases} a = \delta \\ b = \gamma \\ c = \alpha + 3\beta \\ d = \alpha + 4\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = c - 3(d-c) = 4c - 3d \\ \beta = d - c \\ \gamma = b \\ \delta = a \end{cases}$$

każdy wektor można wyrazić jako kombinację wektorów układu

A jest bazą

$2x + 2 = (2, 0, 0, 0)_A$

$x^3 + x^2 + x = (4 - 3\cdot 0,\ 0 - 1,\ 1,\ 1)_A = (4, -1, 1, 1)_A = 4x + 4 - 3x - 4 + x^2 + x^3 = x^3 + x^2 + x$

$(2, 0, 1, -1)_A = 2x + 2 + x^2 - x^3 = -x^3 + x^2 + 2x + 2$

2 sposób

$$x+1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 3x+4 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det B \neq 0 \rightarrow B$ jest bazą $\mathbb{R}_3[x]$ nad $\mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_4 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3 - 3w_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$2x + 2 = ax^3 + bx^2 + c(x+1) + d(3x+4)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \cdot (x+1)$$

$$x^3 + x^2 + x = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = x^3 + x^2 + 4x + 4 - 3x - 4$$

$$B \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = 2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 1(x+1) - 1(3x+4) = 2x^3 - 2x - 3$$

5.

a) $V = \text{span}\{(1,0,3,1),(0,1,2,-1),(1,-1,1,2)\}$

$$\dim V = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

dowolne 2 z 3 wektorów są bazą V $((1,0,3,1),(0,1,2,-1))$

b) $V = \text{span}\{(1,0,2),(2,1,1),(3,2,0),(-1,3,-11),(2,-1,7)\}$

$$\dim V = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -11 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ v_3-2v_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} \\ \\ v_3+3v_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} = 2$$

bazą V są na przykład $((1,0,2),(2,1,1))$

c) $V = \text{span}\{v_1 - v_2 + v_3 - v_4,\ v_1 + v_2 - v_3 + v_4,\ 2v_1 + v_2 - v_3 + v_4\} \subseteq W$

(v_1, v_2, v_3, v_4) jest bazą W

$$\dim V = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$(v_1 - v_2 + v_3 - v_4,\ v_1 + v_2 - v_3 + v_4)$ jest bazą V

6. $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

$U + W = \text{span}\{(3,-1,0,0),(0,0,2,1),(3,0,-2,0),(0,1,0,1)\}$

$$\dim(U+W) = \text{rank}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \frac{1}{3}v_1 \\ \\ \frac{1}{2}v_3 \\ \\ \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ v_2+v_1 \\ \\ v_4-v_3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{bmatrix} = 3$$

$$\dim U = \text{rank}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\dim W = \text{rank}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) = 1$