Przekształcenia liniowe

Przekształcenie liniowe

Funkcja $\varphi: V \to W$, gdzie V i W to przestrzenie liniowe

taka, że $\forall u, v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

- $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ addytywne
- $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$ jednorodne

(równoważnie) $\varphi(u + \alpha v) = \varphi(u) + \alpha \varphi(v)$

Własności

- złożenie przekształceń liniowych jest przekształceniem liniowym
- $\varphi(0) = 0$
- $\varphi(-v) = -\varphi(v)$

Przekształcenie zerowe

$\varphi: V \to W$ $\varphi(v) = 0_W$

Przekształcenie identycznościowe

$id_V: V \to V$ $id_V(v) = v$

Sprawdzenie czy funkcja jest przekształceniem liniowym

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\varphi((x,y)) = (x+y, x-3y, 2y)$

$u = (x_1, y_1)$ $v = (x_2, y_2)$

$$\varphi(u+v) = \varphi((x_1+x_2, y_1+y_2)) = \begin{bmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ x_1+x_2-3y_1-3y_2 \\ 2y_1+2y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-3y_1 \\ 2y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-3y_2 \\ 2y_2 \end{bmatrix} = \varphi(u) + \varphi(v)$$

$$\varphi(\alpha v) = \varphi\left(\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x - 3\alpha y \\ 2\alpha y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x+y \\ x-3y \\ 2y \end{bmatrix} = \alpha \varphi(v)$$

Przestrzenie nie muszą być jednakowych ani nawet skończonych wymiarów

Geometryczne przekształcenia liniowe

- symetria względem osi przechodzącej przez $(0,0)$
- rzut prostokątny na prostą przechodzącą przez $(0,0)$
- obrót wokół $(0,0)$
- jednokładność względem $(0,0)$

Twierdzenie (1)

Jeśli $\dim V = n$ i $(v_1, \dots v_n)$ jest bazą V

to dla dowolnej przestrzeni liniowej W i $(w_1, \dots w_n) \subset W$

istnieje dokładnie 1 przekształcenie liniowe $\varphi: V \to W$

takie, że $\varphi(v_i) = w_i$ dla $i = 1, 2, \dots n$

Wyznaczanie wzoru przekształcenia

wiadomo, że $\varphi\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ i $\varphi\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$A=(v_1,v_2)=\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)$

$\det M_{\mathcal{E}_2}(A)=\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ więc A jest bazą $\mathbb{R}^2$

z twierdzenia (1) na podstawie wektorów bazy można uzyskać pełnię informacji o przekształceniu

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\varphi\left(x\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=x\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+y\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

trzeba wyznaczyć $\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ i $\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=v_2-v_1\longrightarrow\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right)-\varphi\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\varphi\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right)=\varphi\left(2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=2\varphi\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)+\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\rightarrow\varphi\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=x\cdot\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}+y\cdot\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&5\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x+5y\\y\end{bmatrix}$$

Współrzędne wynikowego wektora są kombinacjami liniowymi współrzędnych wektora wejściowego

Macierz przekształcenia liniowego

$\varphi: V-W$

$A=(v_1,\dots v_n)$ - baza V

$B=(w_1,\dots w_m)$ - baza W

każdy wektor $\varphi(v_i)$ można wyrazić jako kombinację liniową wektorów z bazy B

$\varphi(v_1)=a_{11}w_1+a_{21}w_2+\dots+a_{m1}w_m$

$\vdots$

$\varphi(v_n)=a_{n1}w_1+a_{n2}w_2+\dots a_{nm}w_m$

$$M_B^A(\varphi)=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$ macierz przekształcenia φ w bazach A i B

kolumna - współrzędne wektora $\varphi(v_i)$ w bazie B

Dla tego samego przekształcenia można wyznaczyć różne macierze zależnie od wyboru bazy, zawsze macierze będą tych samych wymiarów ($\dim W\times\dim V$)

Znając wzór, najprościej wyznaczyć macierz z bazy kanonicznej.

Przekształcenie jako mnożenie przez macierz

$$\varphi(v) = u \iff M_B^A(\varphi) \cdot M_A(v) = M_B(u)$$

Przekształcenie można wyrazić jako mnożenie wektora przez macierz przekształcenia

Macierz złożenia przekształceń

$\varphi: V \to W \quad \psi: W \to U$

A - baza V, B - baza W, C - baza U

$$M_C^A(\psi \circ \varphi) = M_C^B(\psi) \cdot M_B^A(\varphi)$$

Przykład

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3y \\ x - 4y \end{bmatrix} \qquad \psi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 2x - 5z$$

$$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_3}(\psi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}(\psi \circ \varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 18 \end{bmatrix}$$

$$(\psi \circ \varphi)\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = -x + 18y$$

Macierz zmiany bazy

$$M_A^B(id) = M_A(B)$$

Macierz przekształcenia w innej bazie

$\varphi: V \to W$

A, C - bazy V $\quad B, D$ - bazy W

$$M_D^C(\varphi) = M_D^B(id) \cdot M_B^A(\varphi) \cdot M_A^C(id)$$

zmiana bazy z B do D ← przekształcenie z A do B ← zmiana bazy z C do A

Przykład

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{baza } A \quad M_{\mathcal{E}_2}(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = v_2 = (0,1)_A \qquad M_A^A(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\varphi(v_2) = v_1 = (1,0)_A$$

$$M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\varphi) = M_{\mathcal{E}_2}^A(id) \cdot M_A^A(\varphi) \cdot M_A^{\mathcal{E}_2}(id)$$

$$M_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_2}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 5 \\ y \end{bmatrix}$$

Jądro przekształcenia liniowego $\varphi: V \to W$

przeciwobraz przestrzeni zerowej

$\operatorname{Ker} \varphi = \{ v \in V : \varphi(v) = 0_W \}$

Obraz przekształcenia liniowego $\varphi: V \to W$

zbiór wartości

$\operatorname{Im} \varphi = \{ \varphi(v) : v \in V \}$

$\operatorname{Ker} \varphi$ jest podprzestrzenią V

$\operatorname{Im} \varphi$ jest podprzestrzenią W

$\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$

Rząd przekształcenia $\varphi: V \to W$

$\operatorname{rank}(\varphi) = \dim \operatorname{Im} \varphi$ (dla skończenie wymiarowego $\operatorname{Im} \varphi$)

$\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank}(M_B^A(\varphi))$ (A - baza V, B - baza W)

będzie taki sam dla każdego wyboru bazy

Przykład

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-3y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \{0_V\} \qquad \operatorname{Im} \varphi = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad \operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2 = \dim \operatorname{Im} \varphi$$

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$$
$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \{0_V\} + \operatorname{rank}(\varphi)$$
$$2 = 0 + 2$$

Przekształcenie nieosobliwe (różnowartościowe)

$\varphi: V \to W$ jest nieosobliwe $\iff \operatorname{Ker} \varphi = \{0_V\} \iff \operatorname{rank}(\varphi) = \dim V$

Izomorfizm

Przekształcenie różnowartościowe i "na" $\varphi: V \to W$

V i W - przestrzenie izomorficzne

$\varphi: V \to W$ jest izomorfizmem $\iff \operatorname{Ker} \varphi = \{0_V\} \wedge \operatorname{Im} \varphi = W$

$\dim V = \dim W \implies$ każde przekształcenie $\varphi: V \to W$ jest izomorfizmem

Przestrzenie izomorficzne mają równe wymiary.

Macierz izomorfizmu jest kwadratowa i nieosobliwa.

Każda przestrzeń liniowa wymiaru n nad ciałem $\mathbb{K}$ jest izomorficzna z $\mathbb{K}$

więc np. wielomiany i liczby zespolone można wyrazić jako wektory z $\mathbb{R}^n$