Macierze

Macierz o wymiarach m na n nad ciałem $\mathbb{K}$ to funkcja

$$A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(i, j) \longmapsto a_{ij} \in \mathbb{K}$$

wartości funkcji – wyrazy macierzy

Oznaczenie $[a_{ij}]_{m \times n}$

macierz o m wierszach i n kolumnach

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i-ty wiersz macierzy A

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

j-ta kolumna macierzy A
$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Zbiór wszystkich macierzy $m \times n$ z elementami z ciała $\mathbb{K}$

$$\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$$

Macierz zerowa 0, $0_{m \times n}$

wszystkie wyrazy równe 0

Macierz kwadratowa stopnia n

macierz $n \times n$

Główna przekątna (diagonala)

ciąg $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$

Macierz trójkątna

górna

wszystkie wyrazy poniżej diagonali równe 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 0 & 9 & j \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

dolna

wszystkie wyrazy powyżej diagonali równe 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Macierz diagonalna

wszystkie wyrazy poza diagonalą równe 0, kwadratowa

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(2, 5, -7)$$

Macierz jednostkowa I_n

1 na diagonali, 0 poza diagonalą

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach
w zbiorze $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

Dodawanie macierzy

$$[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

można dodać tylko macierze tych samych wymiarów
suma macierzy trójkątnych górnych będzie macierzą trójkątną górną
element neutralny - macierz zerowa

Mnożenie macierzy przez skalar
$\alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha \cdot [a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m\times n}$$

$$-2j \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3j & -4 \\ j & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4j & 6 & 8j \\ 2 & 0 & -6j \end{bmatrix}$$

Macierz przeciwna
$-A = (-1) \cdot A = [-a_{ij}]_{m\times n}$

istnieje dla każdej macierzy
odwrotna do A względem dodawania

Odejmowanie macierzy
$A - B = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$

Iloczyn macierzy
$[c_{ij}]_{m\times n} = [a_{ik}]_{m\times p} \cdot [b_{kj}]_{p\times n}$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$ dla $i \in \{1,2,\dots m\}$ $j \in \{1,2,\dots n\}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (1)(1) + (2)(-2) + (3)(2) & (1)(2) + (2)(3) + (3)(1) \\ (2)(1) + (1)(-2) + (-1)(2) & (2)(2) + (1)(3) + (-1)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} (1)(1) + (2)(2) & (1)(2) + (2)(1) & (1)(3) + (2)(-1) \\ (-2)(1) + (3)(2) & (-2)(2) + (3)(1) & (-2)(3) + (3)(-1) \\ (2)(1) + (1)(2) & (2)(2) + (1)(1) & (2)(3) + (1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

A · B jest wykonalne kiedy A ma tyle samo kolumn co B wierszy

$$\begin{array}{ccc} & B & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ A & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \\ & & A \cdot B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & A & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ B & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & -9 \\ 4 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\ & & B \cdot A \end{array}$$

Własności działań na macierzach

$A, B, C \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

Dodawanie i mnożenie przez skalar

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
5. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta)A$

Mnożenie macierzy

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \qquad A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad B \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{K}) \quad C \in \mathbb{M}_{p\times r}(\mathbb{K})$
2. $A \cdot I_n = I_m \cdot A = A \qquad A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B) \qquad \alpha \in \mathbb{K} \quad A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad B \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$
4. $A \cdot (B + C) = AB + AC \qquad A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad B, C \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$
5. $(A + B) \cdot C = AC + BC \qquad A, B \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad C \in \mathbb{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$

mnożenie nie jest przemienne

iloczyn macierzy niezerowych może być macierzą zerową (dzielniki zera)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda [a_{ij}]_{n\times n} = \lambda I_n [a_{ij}]_{n\times n} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot [a_{ij}]_{m\times n}$$

Potęgowanie macierzy kwadratowych

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n}$$

Macierz transponowana

$A^T = [b_{ji}]_{n \times m}$ $\quad A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$b_{ji} = a_{ij}$ dla $i \in \{1,2,\dots m\}$ $j \in \{1,2,\dots n\}$

Kolumny A^T są wierszami A

Wiersze A^T są kolumnami A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Własności

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$

2. $(A^T)^T = A$

3. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Macierz odwrotna (do macierzy kwadratowej) A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

jeśli istnieje to jest jednoznaczna i macierz A jest odwracalna

nie każda macierz kwadratowa jest odwracalna

Własności

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

3. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Metoda eliminacji na wyznaczanie macierzy odwrotnej

Zapisuję macierz $[A \mid I]$ i przekształcam tak, żeby otrzymać $[I \mid A^{-1}]$

Przekształcenia:

- mnożenie wiersza przez skalar $\alpha \neq 0$
- dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza
- zamiana wierszy miejscami

Przykład $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 - 2w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{3 \cdot w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 - \frac{4}{3}w_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 + 2w_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

B^{-1} nie istnieje

jeśli pojawia się wiersz samych 0 to macierz nie jest odwracalna