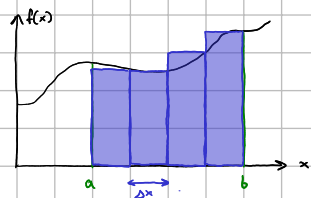


Całka oznaczona Riemanna

Dokonyje się podziału przedziału $[a, b]$



Nie ma znaczenia czy wybierze się
prawy / lewy / środkowy punkt

Podział nie musi być na równe przedziały

Suma Riemanna $\sum_{x=a}^b f(x) \Delta x$ = suma pól prostokątów \approx pole pod krzywą

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \Delta x = \text{pole pod wykresem} \in \mathbb{R}$$

$\int_a^b f(x) dx$ istnieje $\Leftrightarrow f$ jest całkowna w sensie Riemanna na $[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, b]$

a - dolna granica całkowania

b - górna granica całkowania

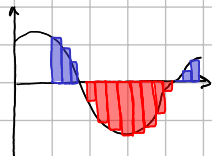
Warunek wystarczający

Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona w $[a, b]$

i jest ciągła w $[a, b]$ z wyjątkiem skończonej liczby punktów

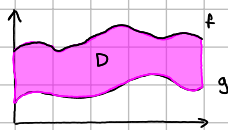
Interpretacja geometryczna

Pole nad osią x liczone jako
dodatnie, a pod osią jako ujemne



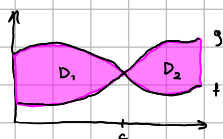
Pole między krzywą a osią x $\int_a^b |f(x)| dx$

Pole między krzywymi



$$|D| = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

Ma znaczenie która funkcja jest wyżej

Własności całek oznaczonych

1. $f, g \in R[a, b]$ f i g różniąc się tylko w skończonym liczbie punktów

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

2. $f, g \in R[a, b]$ $f \leq g$ w $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3. $f \in R[a, b]$ $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. $a > b$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

5. $\int_a^a f(x) dx = 0$

6. $f, g \in R[a, b]$ $k \in \mathbb{R} \Rightarrow f \pm g \in R[a, b]$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

7. $f \in R[a, b]$ $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot f \in R[a, b]$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

8. $f, g \in R[a, b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

9. Jeśli istnieje $\int_a^c f(x) dx$, $\alpha = \min(a, b, c)$, $\beta = \max(a, b, c)$
to niezależnie od wzajemnego położenia a, b, c

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

10. $f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sup_{x \in [a, b]} (|f(x)|) \cdot |b - a|$$

nierówność trójkąta

Funkcja górnej granicy całkowania

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \in R[a, b]$ i $a \in [a, b]$ to F jest ciągła na $[a, b]$

jeśli f jest ciągła w $x_0 \in [a, b]$ to $F'(x_0) = f(x_0)$

np. $F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt \Rightarrow F'(x) = e^{x^2}$

Twierdzenie Newtona - Leibniza

jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a, b]$ i $a \in [a, b]$

1. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ jest funkcją pierwotną do f na $[a, b]$

2. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$

Przykłady

pole między prostymi $y = \frac{1}{2}x$, $y=0$, $x=1$, $x=4$

$$|D| = \int_1^4 \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2 \Big|_1^4 = \frac{15}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \ln |\cos(x)| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Całkowanie przez części

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

$$\int_0^{\pi} x \sin(x) dx = \left| \begin{matrix} f=x & g'=\sin(x) \\ f'=1 & g=-\cos(x) \end{matrix} \right| = -x \cos(x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x) dx = \pi + \sin(x) \Big|_0^{\pi} = \pi$$

Zamiana zmiennych

$$a = \varphi(\alpha) \quad b = \varphi(\beta)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left| \begin{matrix} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \\ x=a \Rightarrow t=\alpha \\ x=b \Rightarrow t=\beta \end{matrix} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Przykłady

$$\int_2^6 \sqrt{4x+1} dx = \left| \begin{matrix} u=4x+1 \\ du=4dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{4} \int_9^{25} \sqrt{u} du$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left| \begin{matrix} x=2\sin(t) \\ dx=2\cos(t) dt \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2(t)} \cdot 2\cos(t) dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$$

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx = \left| \begin{matrix} t=\sqrt{1+3x} \\ x=\frac{t^2-1}{3} \\ dx=\frac{2}{3}t dt \end{matrix} \right| = \int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}}{t} \cdot \frac{2}{3}t dt = \frac{2}{9} \int_1^4 [t^2-1] dt = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) \Big|_1^4 = 4$$

Zastosowania geometryczne całki Riemanna

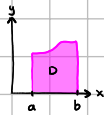
Pole między krzywymi $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$

$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

W układzie kartezjańskim pole dowolnej figury można utworzyć z trapezów krzywoliniowych przylegających do osi x lub y

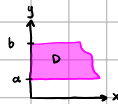
Pole trapezu przylegającego do osi x na $[a, b]$

$$|D| = \int_a^b y dx$$



Pole trapezu przylegającego do osi y na $[a, b]$

$$|D| = \int_a^b x dy$$

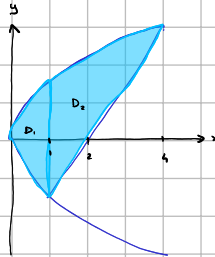


Pole każdej figury w układzie biegunowym można utworzyć z pól wycinków krzywoliniowych

$$|D| = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\varphi$$

Pole między prostą i parabolą

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$



$$|D_1| = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{4x} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{x} dx = 4 \cdot \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

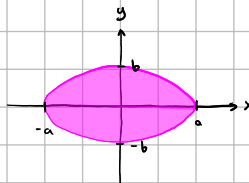
$$|D_2| = \int_1^4 [\sqrt{4x} - (2x - 4)] dx = 2 \int_1^4 \sqrt{x} dx - 2 \int_1^4 [x - 2] dx$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_1^4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 - 2x \right) \Big|_1^4 = 2 \cdot \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3} \right) - 2 \left(0 + \frac{3}{2} \right) = \frac{28}{3} - 3 = \frac{19}{3}$$

$$|D| = |D_1| + |D_2| = \frac{8}{3} + \frac{19}{3} = 9$$

Pole elipsy

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



$$|D| = 4 \int_0^a y dx = \left. \begin{matrix} x = a \cos(t) \\ dx = -a \sin(t) dt \\ x=0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x=a \rightarrow t=0 \end{matrix} \right|$$

$$= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin(t) \cdot (-a \sin(t)) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt$$

$$= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos(2t)] dt = 2ab \cdot \left(t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

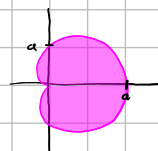
$$= 2ab \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi ab$$

Pole kardiody $\begin{cases} r = a(1 + \cos(\varphi)) \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$

$$|D| = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos(\varphi))^2 d\varphi$$

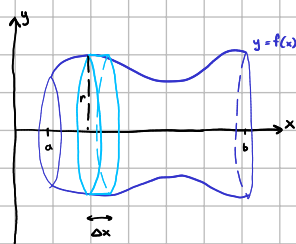
$$= a^2 \int_0^\pi [1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)] d\varphi = a^2 \int_0^\pi \left[1 + 2\cos(\varphi) + \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} \right] d\varphi$$

$$= a^2 \cdot \left[\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin(\varphi) + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right] \Big|_0^\pi = \frac{3}{2} \pi a^2$$



Objętość bryły obrotowej

Bryła powstała przez obrót wykresu wokół osi

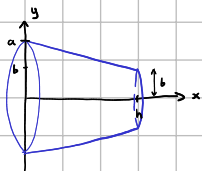


Bryłę dzieli się na walce

$$|V| \approx \sum_{x=a}^b \pi r^2 \Delta x = \pi \sum_{x=a}^b f^2(x) \Delta x$$

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Objętość ściętego stoika



$$y = \frac{b-a}{h}x + a$$

$$|V| = \pi \int_0^h \left(\frac{b-a}{h}x + a \right)^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{b-a}{h}x + a \\ dt = \frac{b-a}{h} dx \\ dx = \frac{h}{b-a} dt \end{array} \right|$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \int_a^b t^2 dt = \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_a^b = \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{1}{3} (b-a)(b^2 + ba + a^2) = \frac{\pi h}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

Tak zryglę

zadany funkcją $y=f(x)$ lub parametrycznie $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ t \in [a, b] \end{cases}$

Otwarty lub zamknięty

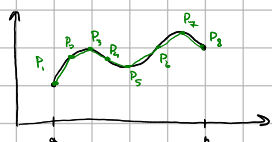


Gładki - pochodne nie zerują się jednocześnie

$$\forall t \in [a, b] \quad [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$$

Długość łuku

szacuje się przez długość łamanej



$$|L_n| \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x' \Delta t)^2 + (y' \Delta t)^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \Delta t$$

Twierdzenie Lagrange'a

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Długość łuku zadanego parametrycznie

$$|L| = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Długość łuku zadanego funkcją

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Długość paraboli $y = \frac{1}{2}x^2 \quad x \in [0, a]$

$$|L| = \int_0^a \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| \right]_0^a = \frac{1}{2} [a \sqrt{a^2 + 1} + \ln |a + \sqrt{a^2 + 1}|]$$

Pole powierzchni obrotowej

pole powstałe przez obrót wykresu wokół osi
przybliżone przez powierzchnię boczną walca

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$|S| = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

