$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{zbieżny dla } \alpha > 1$$
$$\text{rozbieżny dla } \alpha \le 1$$

- Kryterium porównawcze

$0 \le a_n \le b_n$

jeśli $\sum a_n$ rozbieżny to $\sum b_n$ rozbieżny
jeśli $\sum b_n$ zbieżny to $\sum a_n$ zbieżny

1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \qquad \forall_{n>3} \ \frac{\ln(n)}{n} \ge \frac{\ln(3)}{n}$

$\ln(3)\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny (harmoniczny) więc $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ rozbieżny

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$

$|\sin(x)| \le |x| \rightarrow \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny więc $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{1}{n}\right)$ jest zbieżny

- Warunek konieczny

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arccos\left(\frac{n}{2n+1}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\arccos\left(\frac{n}{2n+1}\right) - \frac{\pi}{4}\right] = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \ne 0$$

więc szereg rozbieżny bo nie jest spełniony warunek konieczny

- Kryterium Cauchy'ego

$a_n \ge 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$

$\sum a_n$ rozbieżny dla $g > 1$

$\sum a_n$ zbieżny dla $0 \le g < 1$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n \cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

więc szereg rozbieżny

- Kryterium d'Alemberta

$a_n \ge 0 \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$

$g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozbieżny

$0 \le g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(2n)!\, 3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)! \cdot (n+1)^{n+1}}{(2n+2)(2n+1)(2n)! \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{(2n)! \cdot 3^n}{(n+1)!\ n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot e = \frac{e}{12} < 1$$

szereg zbieżny

- Kryterium całkowe

f nierosnąca i dodatnia

$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ zbieżny $\iff \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ zbieżna

1) $f: [2,+\infty) \to (0,+\infty)$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$$

$$f'(x) \le 0 \iff x^3(1-2\ln(x)) \le 0$$
$$2x^3\left(\tfrac{1}{2} - \ln(x)\right) \le 0$$
$$\ln(x) \ge \tfrac{1}{2}$$
$$x \ge \sqrt{e} < 2$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \left| \begin{matrix} f = \ln(x) & g' = x^{-2} \\ f' = \frac{1}{x} & g = -x^{-1} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{T\to\infty} -\frac{\ln(T)}{T} - \frac{1}{T} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} = 0 - 0 + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\ln(2)+1}{2}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\ln(T)}{T} \overset{H}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} = 0$$

szereg zbieżny

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny bezwzględnie kiedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ zbieżny
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny warunkowo kiedy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ rozbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1$$

szereg zbieżny bezwzględnie

- Kryterium Leibniza

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i a_n nierosnący $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ zbieżny

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

nie można udowodnić rozbieżności z kryterium Leibniza

$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ i $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ malejący

$\frac{2}{\pi}x \le \sin(x) \le x \to \frac{2}{\pi}\frac{1}{n} \le \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ rozbieżny więc $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ rozbieżny

szereg zbieżny warunkowo

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} x^n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \sqrt{n+1}}{3^{n-1}\sqrt{n}} = 3 \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 3$$

$x=-3 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}\sqrt{n}} \cdot (-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ rozbieżny

$x=3 \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}\sqrt{n}} \cdot 3^n = 3\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ zbieżny

przedział $(-3, 3]$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6-2x)^n}{3^n+2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+2^n}(x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n+3^n}(x-3)^n$ → środek $x_0=3$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+3^n} \cdot \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n\left(3+2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \frac{3}{2}$$ → przedział $\left(3-\frac{3}{2}, 3+\frac{3}{2}\right)$

dla $x - \frac{3}{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+2^n} \cdot (-1)^n \cdot \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+2^n}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ nie spełnia warunku koniecznego

dla $x = \frac{3}{2}$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{3^n+2^n} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{3^n+2^n}$ nie spełnia warunku koniecznego

podciągi dążą do 1 i do -1

przedział zbieżności $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{2}\right)$

13.5

$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$= \frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} - x\frac{1}{1-(-x)}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n - x\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n =$

$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$

$= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\cdot(-1)^n x^n$

↓

$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n \cdot 2$

$f^{(28)}(0) = 2\cdot(-1)^{28} \cdot 28! = 2\cdot 28!$

$f^{(29)}(0) = 2\cdot(-1)^{29} \cdot 29! = -2\cdot 29!$