

## Rachunek zdań

Zdanie - stwierdzenie, które ma jednoznacznie określoną wartość

Wartościowanie - przypisanie wartości logicznej

$v(p) = 1 \rightarrow$  zdanie prawdziwe

$v(p) = 0 \rightarrow$  zdanie fałszywe

## Funktory zdaniotwórcze

negacja  $\sim, \neg$

koniunkcja  $\wedge$

alternatywa  $\vee$

implikacja  $\Rightarrow$

równoważność  $\Leftrightarrow$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Implikacja jeśli ..., to ...

$p \Rightarrow q$   
poprzednik      następnik

Jeśli  $p \Rightarrow q$  jest prawdziwa to

$\rightarrow p$  jest warunkiem wystarczającym dla  $q$

$\rightarrow q$  jest warunkiem koniecznym dla  $p$

Dla implikacji  $p \Rightarrow q$

•  $q \Rightarrow p$  jest odwrotna

•  $\neg p \Rightarrow \neg q$  jest przeciwna

•  $\neg q \Rightarrow \neg p$  jest przeciwstawna (i równoważna)

## Równoważność wtedy i tylko wtedy gdy

Dla prawdziwej  $p \Leftrightarrow q$

→  $p$  jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla  $q$

$$\models [((\neg 5 \neq 1) \Leftrightarrow \sin(\pi) = 0) \Rightarrow \sqrt{2} > 1]$$

$$\models [(\text{fałsz} \Leftrightarrow \text{prawda}) \Rightarrow \text{prawda}]$$

$$\models (\text{fałsz} \Rightarrow \text{prawda}) = 1$$

## Tautologia

→ zdanie, które jest zawsze prawdziwe niezależnie od wartości zmiennych zdaniowych

Sprawdzenie czy zdanie  $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$  jest tautologią

Metoda 1. - tabela

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$r = (p \Rightarrow q)$	$s = (r \wedge \neg q)$	$s \Rightarrow \neg p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

→ zdanie jest tautologią

Metoda 2. nie uprost

Zakładam, że zdanie nie jest tautologią → może być fałszywe  
i dążę do sprzeczności

$$\underbrace{[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q]}_1 \Rightarrow \underbrace{\neg p}_0 \quad \text{bo } 1 \Rightarrow 0 \text{ jest fałszywe}$$

$$\begin{cases} \models [(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] = 1 \\ \models (\neg p) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \models (p \Rightarrow q) = 1 \\ \models (\neg q) = 1 \\ \models (p) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \models (p) = 1 \\ \models (q) = 0 \\ \models (1 \Rightarrow 0) = 1 \end{cases}$$

sprzeczność

Zdanie nie może być fałszywe więc musi być tautologią

# Podstatové práva rachunku zdań

$$1. \quad (p \wedge p) \Leftrightarrow p$$

$$2. \quad (p \vee p) \Leftrightarrow p$$

$$3. \quad \sim(\sim p) \Leftrightarrow p$$

$$4. \quad p \vee \sim p$$

$$5. \quad \sim(p \wedge \sim p)$$

$$6. \quad \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$$

$$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$$

$$7. \quad (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$8. \quad \sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$$

$$9. \quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$$

$$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$$

$$10. \quad p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

$$11. \quad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$12. \quad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$13. \quad [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

$$14. \quad (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

Zdania logiczne  $\Phi$  i  $\Psi$  są równoważne jeśli  $\Phi \iff \Psi$  jest tautologią

Chcąc skonstruować z twierdzenia typu (Założenie  $\implies$  Teza)

$\rightarrow$  trzeba sprawdzić czy założenia są spełnione

$\left\{ \begin{array}{l} \text{jeśli tak to zachodzi teza} \\ \text{jeśli nie to twierdzenie pozostaje prawdziwe} \end{array} \right.$

np. dla stwierdzenia

Jeśli  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją rosnącą to jest funkcją różnowartościową

1)  $f(x) = x$        $1 \implies 1$       prawda

2)  $f(x) = -x$        $0 \implies 1$       prawda

3)  $f(x) = 3$        $0 \implies 0$       prawda

# Funkcje zdaniowe i kwantyfikatory

Funkcja zdaniowa jednej zmiennej to wyrażenie  $\phi(x)$ ,  $x \in X \neq \emptyset$ , które staje się zdaniem (prawdziwym albo fałszywym), gdy za zmienną  $x$  podstawimy element zbioru  $X$

Zbiór  $X$  to zakres zmienności funkcji  $\phi$

Element  $x_0 \in X$  spełnia funkcję  $\phi$  jeśli  $\phi(x_0)$  jest zdaniem prawdziwym

Zbiór elementów spełniających funkcję  $\phi$   $\{x \in X : \phi(x)\}$

na przykład:

1)  $X = \mathbb{R}$ ,  $\phi(x): x < 7$

$$\{x \in \mathbb{R} : \phi(x)\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 7\} = (-\infty, 7)$$

2)  $X = \mathbb{N}$ ,  $\phi(x): x > 3 \Rightarrow x = 7$

$$\{x \in \mathbb{N} : \phi(x)\} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 3 \vee x = 7\} = \{1, 2, 3, 7\}$$

Kwantyfikator ogólny (universalny)  $\forall \rightarrow$  dla każdego

$$\forall x \in X \phi(x)$$

dla każdego elementu ze zbioru  $X$  zachodzi  $\phi(x)$

jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy  $\{x \in X : \phi(x)\} = X$

Kwantyfikator szczególny (egzystencjalny)  $\exists \rightarrow$  istnieje

$$\exists x \in X \phi(x)$$

istnieje element w zbiorze  $X$  dla którego zachodzi  $\phi(x)$

jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy  $\{x \in X : \phi(x)\} \neq \emptyset$

## Przykłady

- 1)  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{Z}, x+y = \pi \rightarrow$  funkcja zdaniowa 2 zmiennych
- 2)  $\exists y \in \mathbb{Z} (x+y = \pi) \rightarrow$  funkcja zdaniowa 1 zmiennej
- 3)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Z} (x+y = \pi) \rightarrow$  zdanie fałszywe
- 4)  $\forall y \in \mathbb{Z} \exists x \in \mathbb{R} (x+y = \pi) \rightarrow$  zdanie prawdziwe

## Kwantyfikatory ograniczone

dla  $x \in X, \phi(x)$  i  $A \subseteq X$

- $(\forall x \in A) \phi(x) \iff \forall x \in X (x \in A \implies \phi(x))$
- $(\exists x \in A) \phi(x) \iff \exists x \in X (x \in A \wedge \phi(x))$

przykład: zbiór elementów  $x \in \mathbb{R}$  spełniających  $\phi(x)$

$$1) \phi(x): \forall y \in \mathbb{R} \ x > \sin(y)$$

$$\{x \in \mathbb{R} : \phi(x)\} = (1, +\infty)$$

$$2) \phi(x): \exists y \in \mathbb{R} \ x > \sin(y)$$

$$\{x \in \mathbb{R} : \phi(x)\} = (-1, +\infty)$$

# Prawa rachunku kwantyfikatorów

Uogólnienie jest prawem jeśli prawdziwe dla dowolnej interpretacji występujących w nim symboli i funkcji zdaniowych

$\phi(x), \psi(x)$  to funkcje zdaniowe,  $x \in X \neq \emptyset$

1.  $\forall x \phi(x) \Rightarrow \exists x \phi(x)$
2.  $\sim(\forall x) \phi(x) \Leftrightarrow \exists x (\sim \phi(x))$   
 $\sim(\exists x) \phi(x) \Leftrightarrow \forall x (\sim \phi(x))$
3.  $\forall x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \Leftrightarrow \forall x \phi(x) \wedge \forall x \psi(x)$
4.  $\exists x (\phi(x) \vee \psi(x)) \Leftrightarrow \exists x \phi(x) \vee \exists x \psi(x)$
5.  $\exists x (\phi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow \exists x \phi(x) \wedge \exists x \psi(x)$
6.  $\forall x \phi(x) \vee \forall x \psi(x) \Rightarrow \forall x (\phi(x) \vee \psi(x))$

## Prawa włączania i wyłączenia kwantyfikatorów

niech  $\phi(x)$  - funkcja zdaniowa,  $x \in X \neq \emptyset$ ,  $\beta$  - zdanie  
 $\diamond$  - dowolny z symbolów  $\wedge, \vee, \Rightarrow$

1.  $\forall x (\beta \diamond \phi(x)) \Leftrightarrow \beta \diamond \forall x \phi(x)$   
oraz  $\forall x (\phi(x) \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\exists x \phi(x) \Rightarrow \beta)$
2.  $\exists (\beta \diamond \phi(x)) \Leftrightarrow \beta \diamond \exists x \phi(x)$   
oraz  $\exists x (\phi(x) \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\forall x \phi(x) \Rightarrow \beta)$

## Prawa przestawiania kwantyfikatorów

dla  $\phi(x, y)$ ,  $x \in X, y \in Y$

1.  $\forall x \forall y \phi(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x \phi(x, y)$
2.  $\exists x \exists y \phi(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x \phi(x, y)$
3.  $\exists x \forall y \phi(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x \phi(x, y)$