

Wielomiany

Wielomian stopnia $n \in \mathbb{N}_0$ o współczynnikach z ciała K

to funkcja $v: K \rightarrow K$

$$v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \quad a_n \neq 0$$

można zdefiniować np. dla $K = \mathbb{R}$ albo $K = \mathbb{C}$

Wielomian zerowy $v(t) \equiv 0$

ma stopień $-\infty$

Wielomiany stałe - stopień mniejszy od 1

$K[t]$ zbiór wielomianów o współczynnikach z ciała K

Stopień wielomianu $\deg(v)$

Dodawanie i mnożenie wielomianów

$$(v_1 + v_2)(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$(v_1 \cdot v_2)(t) = v_1(t) \cdot v_2(t)$$

Algebra $(K[t], +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z jednostką
nie jest ciałem bo nie wszystkie wielomiany są odwracalne (tylko stałe niezerowe)

$$\deg(v_1 \cdot v_2) = \deg(v_1) + \deg(v_2)$$

$$\deg(v_1 + v_2) \leq \max\{\deg(v_1), \deg(v_2)\}$$

Rozkładalność

Wielomian $v \in K[t]$ jest rozkładalny jeśli istnieje

wielomiany $v_1, v_2 \in K[t]$ o dodatnich stopniach

takich, że $v = v_1 \cdot v_2$

wielomian

rozkładalny nad ciałem

\mathbb{C} \mathbb{R} \mathbb{Q}

$$t^2 - 2 = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})$$

✓ ✓ ✗

$$t^2 + 4 = (t + 2j)(t - 2j)$$

✓ ✗ ✗

$$t - 3$$

✗ ✗ ✗

$$t^3 + 1 = (t + 1)(t^2 - t + 1)$$

✓ ✓ ✓

$$t^2 + j$$

✓ — —

Nierozkładalne nad \mathbb{C} \rightarrow stopnia 0 i 1

Nierozkładalne nad \mathbb{R} \rightarrow stopnia 0, 1 i niekrotne 2 ($\Delta < 0$)

Dzielenie z resztą

$$\text{dla } v(t) = p(t) \cdot q(t) + r(t)$$

$$\deg(r) < \deg(p)$$

$r \rightarrow$ reszta z dzielenia v przez p

v jest podzielne przez p jeśli r jest wielomianem zerowym

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 1 \\ 2x^4 + x^2 + 3x \quad (x^2 + 1) \\ \hline \ominus 2x^4 + 2x^2 \\ \hline -x^2 + 3x \\ -x^2 \quad -1 \\ \hline 3x + 1 \end{array}$$

Twierdzenie o dzieleniu z resztą

Reszta z dzielenia $v \in K[t]$
przez $(t-a)$ jest równa $v(a)$

Pierwiastek wielomianu

Element ciała $t_0 \in K$ taki, że $v(t_0) = 0$

Twierdzenie Bézout

t_0 jest pierwiastkiem $v \iff v$ jest podzielne przez $(t-t_0)$

Pierwiastek k -krotny

$t_0 \in K$ takie że $v(t) = (t-t_0)^k \cdot q(t)$ i $q(t_0) \neq 0$

Zasadne twierdzenie algebry

Każdy wielomian $v \in \mathbb{C}[z]$ różny od wielomianu stałego ma pierwiastek $z_0 \in \mathbb{C}$

niech $v(z) \rightarrow$ wielomian stopnia n

$$\begin{aligned} \text{wtedy } v(z) &= (z-z_1) v_1(z) \\ &= (z-z_1)(z-z_2) v_2(z) \\ &= (z-z_1)(z-z_2) \cdots (z-z_n) \cdot a \end{aligned}$$

1. Każdy wielomian $v \in \mathbb{C}[z]$ stopnia n ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając krotności)
2. Każdy wielomian $v \in \mathbb{C}[z]$ można rozłożyć na czynniki liniowe (mogą się powtarzać)

Przykład pierwiastki wielomianu $v(z) = z^4 + 4$

$$z^4 + 4 = 0 \iff z^4 = -4$$

$$\sqrt[4]{-4} = \{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$$

$$v(z) = (z-1-i)(z+1-i)(z+1+i)(z-1+i)$$

Dla wielomianów kwadratowych

$$v(z) = az^2 + bz + c$$

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a} \quad \text{gdzie } \delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Jeśli współczynniki $v \in \mathbb{C}[z]$ są liczbami rzeczywistymi
i liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem v
to \bar{z}_0 też jest pierwiastkiem v

Dowód

$$\text{dla } v(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i \quad a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow a_i = \overline{a_i}$$

$$\text{i } v(z_0) = 0$$

$$v(\bar{z}_0) = \sum_{i=0}^n a_i \bar{z}_0^i = \sum_{i=0}^n \overline{a_i z_0^i} = \overline{\sum_{i=0}^n a_i z_0^i} = \overline{v(z_0)} = \overline{0} = 0$$

Jeśli $z_0 \in \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem v to
 v jest podzielne przez $(z - z_0) \cdot (z - \bar{z}_0)$

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - 2\operatorname{Re} z_0 \cdot z + |z_0|^2$$

Wielomiany $v \in \mathbb{R}[x]$ są rozkładalne na
wielomiany liniowe i nierozkładalne kwadratowe ($\Delta < 0$)

Rozkład $v(x) = x^4 + 4$

1) wykorzystując liczby zespolone

znajdując rozkład nad \mathbb{C}

$$v(x) = (x - (1+i))(x - (1-i))(x - (-1-i))(x - (-1+i))$$

wymniam czynniki z parami pierwiastków sprzężonych

$$(x - (1+i))(x - (1-i)) = x^2 - 2x + 2$$

$$(x - (-1-i))(x - (-1+i)) = x^2 + 2x + 2$$

$$v(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

$$2) \quad x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$$

$$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

Rozkład $v(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$ nad \mathbb{R} i nad \mathbb{C}

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = z^2(z - 1) + 4(z - 1)$$

$$= (z^2 + 4)(z - 1) \rightarrow \text{rozkład nad } \mathbb{R}$$

$$= (z + 2j)(z - 2j)(z - 1) \rightarrow \text{rozkład nad } \mathbb{C}$$

Funkcje wymierne

$$\frac{f(t)}{g(t)} \quad \text{gdzie } f, g \in K[t] \text{ i } \deg(g) > 0$$

Funkcja wymierna jest właściwa kiedy $\deg(f) < \deg(g)$

Każda funkcja wymierna można wyrazić jako sumę ułamków i funkcji wymiernej właściwej

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{p(t) \cdot g(t) + r(t)}{g(t)} = p(t) + \frac{r(t)}{g(t)} \quad \deg(r) < \deg(g)$$

Przykład

$$\frac{2x^4 + x^2 + 3x}{x^2 + 1} = 2x^2 - 1 + \frac{3x + 1}{x^2 + 1}$$

Ułamki proste

$$\frac{f(t)}{(h(t))^k} \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{N}, \deg(f) < \deg(h),$$

h - wielomian nierozkładalny w $K[t]$

Zespólony ułamek prosty

$$\frac{A}{(z+a)^n} \quad \begin{matrix} A, a \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

Rzeczywisty ułamek prosty 1. rodzaju

$$\frac{A}{(x+a)^n} \quad \begin{matrix} A, a \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

Rzeczywisty ułamek prosty 2. rodzaju

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} \quad \begin{matrix} A, B, p, q \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N} \\ \Delta = p^2 - 4q < 0 \end{matrix}$$

Twierdzenie

Każda właściwa funkcja wymierna nad ciałem K

jest jednoznacznie rozkładalna na sumę ułamków prostych nad ciałem K

Zespółona funkcja wymierna ułamkowa

$$P(z)$$

$$c_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\dots(z-z_m)^{k_m}$$

jest sumą $(k_1+k_2+\dots+k_m)$ ułamków prostych,
gdzie każdemu czynnikowi $(z-z_i)^{k_i}$ odpowiada
suma k_i ułamków prostych z kolejnymi potęgami w mianowniku

$$\frac{A_{i1}}{z-z_i} + \frac{A_{i2}}{(z-z_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(z-z_i)^{k_i}}$$

Przykład

$$\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+j}$$

1) rozpisuję ułamki z nieznanymi współczynnikami

$$\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{A z(z+j) + B(z+j) + C z^2}{z^2(z+j)}$$

2) sprowadzam do wspólnego mianownika

$$z^2+j = A z(z+j) + B(z+j) + C z^2$$

3) przyrównuję liczniki

$$\text{dla } z=0 \rightarrow j = B_j \Leftrightarrow B=1$$

$$\text{dla } z=-j \quad -1+j = -C \Leftrightarrow C=1-j$$

4) podstawiam pierwiastki mianownika, żeby wyznaczyć kolejne współczynniki

$$z^2+j = A z^2 + A_j z + B z + B_j + C z^2$$

$$z^2+j = (A+C) z^2 + (A_j+B) z + B_j$$

5) wyznaczam pozostałe współczynniki

$$A+C=1 \Leftrightarrow A=1-(1-j)=j$$

$$\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{j}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1-j}{z+j}$$

6) finalna postać

Rzeczywista funkcja wymierna ułamekowa

$$P(x)$$

$$a_n (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_m)^{k_m} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_m x + q_m)^{l_m}$$

jest sumą $(k_1 + k_2 + \dots + k_m)$ ułamków prostych 1. rodzaju
i $(l_1 + l_2 + \dots + l_m)$ ułamków prostych 2. rodzaju

każdy czynnik $(x - x_i)^{k_i}$ odpowiada sumie

$$\frac{A_{i1}}{x - x_i} + \frac{A_{i2}}{(x - x_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(x - x_i)^{k_i}}$$

każdy czynnik $(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}$ odpowiada sumie

$$\frac{B_{i1}x + C_{i1}}{x^2 + p_i x + q_i} + \frac{B_{i2}x + C_{i2}}{(x^2 + p_i x + q_i)^2} + \dots + \frac{B_{il_i}x + C_{il_i}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}}$$

Przykład

$$\frac{5x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

$$\frac{5x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A x(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2}{x^2(x^2 + 1)}$$

$$5x^3 + x^2 + 3x + 1 = Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2$$

$$5x^3 + x^2 + 3x + 1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + Ax + B$$

$$\begin{cases} 5 = A + C \\ 1 = B + D \\ 3 = A \\ 1 = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 1 \\ C = 2 \\ D = 0 \end{cases}$$

$$\frac{5x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{x^2 + 1}$$