Wielomiany

Wielomian stopnia $n \in \mathbb{N}_0$ o współczynnikach z ciała K
to funkcja $w: K \to K$
$w(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \qquad a_n \neq 0$
można zdefiniować np. dla $K = \mathbb{R}$ albo $K = \mathbb{C}$

Wielomian zerowy $w(t) \equiv 0$
ma stopień $-\infty$

Wielomiany stałe – stopień mniejszy od 1

$K[t]$ zbiór wielomianów o współczynnikach z ciała K

Stopień wielomianu $\deg(w)$

Dodawanie i mnożenie wielomianów

$(w_1 + w_2)(t) = w_1(t) + w_2(t)$
$(w_1 \cdot w_2)(t) = w_1(t) \cdot w_2(t)$

Algebra $(\mathbb{K}[t], +, \cdot)$ jest pierścieniem przemiennym z jedynką
nie jest ciałem bo nie wszystkie wielomiany są odwracalne (tylko stałe niezerowe)

$\deg(w_1 \cdot w_2) = \deg(w_1) + \deg(w_2)$
$\deg(w_1 + w_2) \leq \max\{\deg(w_1) + \deg(w_2)\}$

Rozkładalność

Wielomian $w \in \mathbb{K}[t]$ jest rozkładalny jeśli istnieją
wielomiany $w_1, w_2 \in \mathbb{K}[t]$ o dodatnich stopniach
takie, że $w = w_1 \cdot w_2$

wielomian	rozkładalny nad ciałem $\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$
$t^2 - 2 = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$	✓	✓	×
$t^2 + 4 = (t+2j)(t-2j)$	✓	×	×
$t - 3$	×	×	×
$t^3 + 1 = (t+1)(t^2 - t + 1)$	✓	✓	✓
$t^2 + j$	✓	—	—

Nierozkładalne nad $\mathbb{C}$ → stopnia 0 i 1
Nierozkładalne nad $\mathbb{R}$ → stopnia 0, 1 i niektóre 2 $(\Delta < 0)$

Dzielenie z resztą

dla $w(t) = p(t) \cdot q(t) + r(t) \qquad \deg(r) < \deg(p)$

r → reszta z dzielenia w przez p
w jest podzielne przez p jeśli r jest wielomianem zerowym

$$(2x^4 + x^2 + 3x) : (x^2 + 1) = 2x^2 - 1$$
$$\ominus\ (2x^4 + 2x^2)$$
$$-x^2 + 3x$$
$$-x^2 \quad -1$$
$$3x + 1$$

Twierdzenie o dzieleniu z resztą

Reszta z dzielenia $v \in \mathbb{K}[t]$
przez $(t-a)$ jest równa $v(a)$

Pierwiastek wielomianu
Element ciała $t_0 \in \mathbb{K}$ taki, że $v(t_0) = 0$

Twierdzenie Bezout
t_0 jest pierwiastkiem $v \iff v$ jest podzielne przez $(t - t_0)$

Pierwiastek k-krotny

$t_0 \in \mathbb{K}$ takie że $v(t) = (t-t_0)^k \cdot q(t)$ i $q(t_0) \neq 0$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian $v \in \mathbb{C}[z]$ różny od wielomianu
stałego ma pierwiastek $z_0 \in \mathbb{C}$

niech $v(z) \rightarrow$ wielomian stopnia n
wtedy $v(z) = (z - z_1)\, v_1(z)$
$= (z - z_1)(z - z_2)\, v_2(z)$
$= (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n) \cdot a$

1. Każdy wielomian $v \in \mathbb{C}[z]$ stopnia n ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając krotność)

2. Każdy wielomian $v \in \mathbb{C}[z]$ można rozłożyć na czynniki liniowe (mogą się powtarzać)

Przykład pierwiastki wielomianu $v(z) = z^4 + 4$

$z^4 + 4 = 0 \iff z^4 = -4$

$\sqrt[4]{-4} = \{1+j, -1+j, -1-j, 1-j\}$

$v(z) = (z-1-j)(z+1-j)(z+1+j)(z-1+j)$

Dla wielomianów kwadratowych
$v(z) = az^2 + bz + c$

$z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ gdzie $\delta \in \sqrt{b^2 - 4ac}$

Jeśli współczynniki $w \in \mathbb{C}[z]$ są liczbami rzeczywistymi
i liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem w
to $\overline{z_0}$ też jest pierwiastkiem w

Dowód

$$\text{dla} \quad w(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i \qquad a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow a_i = \overline{a_i}$$
$$\text{i} \quad w(z_0) = 0$$

$$w(\overline{z_0}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z_0}^n = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z_0^n} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z_0^n} = \overline{w(z_0)} = \overline{0} = 0$$

Jeśli $z_0 \notin \mathbb{R}$ jest pierwiastkiem w to
w jest podzielne przez $(z - z_0)\cdot(z - \overline{z_0})$

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - 2\operatorname{Re} z_0 \cdot z + |z_0|^2$$

Wielomiany $w \in \mathbb{R}[x]$ są rozkładalne na
wielomiany liniowe i nierozkładalne kwadratowe $(\Delta < 0)$

Rozkład $w(x) = x^4 + 4$

1) wykorzystując liczby zespolone

znajduję rozkład nad $\mathbb{C}$
$$w(x) = (x-(1+j))(x-(1-j))(x-(-1-j))(x-(-1+j))$$

wymnażam czynniki z parami pierwiastków sprzężonych
$$(x-(1+j))(x-(1-j)) = x^2 - 2x + 2$$
$$(x-(-1-j))(x-(-1+j)) = x^2 + 2x + 2$$

$$w(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$$

2) $$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2+2)^2 - 4x^2$$
$$= (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$$

Rozkład $w(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$ nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = z^2(z-1) + 4(z-1)$$
$$= (z^2 + 4)(z-1) \longrightarrow \text{rozkład nad } \mathbb{R}$$
$$= (z+2j)(z-2j)(z-1) \longrightarrow \text{rozkład nad } \mathbb{C}$$

Funkcje wymierne

$$\frac{f(t)}{g(t)} \quad \text{gdzie} \quad f, g \in \mathbb{K}[t] \quad i \quad \deg(g) > 0$$

Funkcja wymierna jest właściwa kiedy $\deg(f) < \deg(g)$

Każda funkcja wymierna można wyrazić jako
sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{p(t) \cdot g(t) + r(t)}{g(t)} = p(t) + \frac{r(t)}{g(t)} \qquad \deg(r) < \deg(g)$$

Przykład

$$\frac{2x^4 + x^2 + 3x}{x^2+1} = 2x^2 - 1 + \frac{3x+1}{x^2+1}$$

Ułamek prosty

$$\frac{f(t)}{(h(t))^k}$$ gdzie $k \in \mathbb{N}$, $\deg(f) < \deg(h)$,
h – wielomian nierozkładalny w $\mathbb{K}[t]$

Zespolony ułamek prosty

$$\frac{A}{(z+a)^n} \qquad A, a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Rzeczywisty ułamek prosty 1. rodzaju

$$\frac{A}{(x+a)^n} \qquad A, a \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Rzeczywisty ułamek prosty 2. rodzaju

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \qquad A, B, p, q \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \Delta = p^2 - 4q < 0$$

Twierdzenie
Każda właściwa funkcja wymierna nad ciałem $\mathbb{K}$
jest jednoznacznie rozkładalna na sumę ułamków prostych nad ciałem $\mathbb{K}$

Zespolona funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(z)}{c_n(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\dots(z-z_m)^{k_m}}$$

jest sumą $(k_1+k_2+\dots+k_m)$ ułamków prostych,
gdzie każdemu czynnikowi $(z-z_i)^{k_i}$ odpowiada
suma k_i ułamków prostych z kolejnymi potęgami w mianowniku

$$\frac{A_{i1}}{z-z_i} + \frac{A_{i2}}{(z-z_i)^2} + \dots + \frac{A_{ik_i}}{(z-z_i)^{k_i}}$$

Przykład

$$\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+j}$$

1) rozpisuję ułamki z nieznanymi współczynnikami

$$\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{Az(z+j)+B(z+j)+Cz^2}{z^2(z+j)}$$

2) sprowadzam do wspólnego mianownika

$$z^2+j = Az(z+j)+B(z+j)+Cz^2$$

3) przyrównuję liczniki

dla $z=0 \rightarrow j = Bj \Leftrightarrow B=1$
dla $z=-j \quad -1+j = -C \Leftrightarrow C = 1-j$

4) podstawiam pierwiastki mianowników, żeby wyznaczyć kolejne współczynniki

$$z^2+j = Az^2+Ajz+Bz+Bj+Cz^2$$
$$z^2+j = (A+C)z^2+(Aj+B)z+Bj$$

$$A+C=1 \Leftrightarrow A = 1-(1-j) = j$$

5) wyznaczam pozostałe współczynniki

$$\frac{z^2+j}{z^2(z+j)} = \frac{j}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1-j}{z+j}$$

6) finalna postać

Rzeczywista funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_m)^{k_m}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{l_m}}$$

jest sumą $(k_1+k_2+\dots+k_m)$ ułamków prostych 1. rodzaju i $(l_1+l_2+\dots+l_m)$ ułamków prostych 2. rodzaju

każdy czynnik $(x-x_i)^{k_i}$ odpowiada sumie

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i}+\frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2}+\dots+\frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}}$$

każdy czynnik $(x^2+p_ix+q_i)^{l_i}$ odpowiada sumie

$$\frac{B_{i1}x+C_{i1}}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{B_{i2}x+C_{i2}}{(x^2+p_2x+q_2)^2}+\dots+\frac{B_{il_i}x+C_{l_i}}{(x^2+p_{l_i}x+q_{l_i})^{l_i}}$$

Przykład

$$\frac{5x^3+x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\frac{5x^3+x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

$$5x^3+x^2+3x+1=Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+Dx^2$$

$$5x^3+x^2+3x+1=(A+C)x^3+(B+D)x^2+Ax+B$$

$$\begin{cases}5=A+C\\1=B+D\\3=A\\1=B\end{cases}\rightarrow\begin{cases}A=3\\B=1\\C=2\\D=0\end{cases}$$

$$\frac{5x^3+x^2+3x+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2x}{x^2+1}$$