

## Szereg:

Ciąg sum częściowych

dla  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiuje się  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$S_1 = a_1$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Szereg liczbowy o wyrazie ogólnym  $a_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots$$

Suma szeregu zbieżnego

szereg jest zbieżny kiedy istnieje granica ułamek

(w przeciwnym wypadku jest rozbieżny)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$$

Ciąg geometryczny

$$a_n = q^{n-1}$$

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ nq & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

zbieżny dla  $|q| < 1$

Warunki konieczne zbieżności

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\bullet \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$$

gdzie  $R_n = a_n + a_{n+1} + \dots$

Szereg harmoniczny

jest rozbieżny (2. warunek konieczny)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Działania na szeregach zbieżnych

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k \cdot A$$

## Kryteria zbieżności (warunki wystarczające)

dla szeregów o wyrazach nieujemnych

### Kryterium porównawcze

kiedy  $\forall n \geq n_0 \quad 0 \leq a_n \leq b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ jest zbieżny} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ jest rozbieżny}$$

Przykład  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

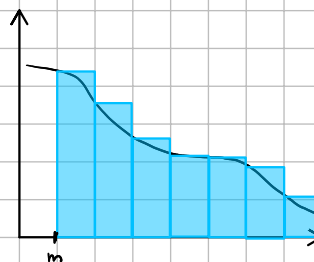
$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \leq \sin(\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ jest rozbieżny}$$

$$\text{więc } \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n}) \text{ też jest rozbieżny}$$

### Kryterium całkowe

$\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$  i  $\int_m^{\infty} f(x) dx$  są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne dla monotonnej i nieujemnej  $f(x)$



Szereg Dirichleta  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$

zbieżny dla  $a > 1$  bo  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx$  zbieżna dla  $a > 1$

rozbieżny dla  $a \leq 1$  bo  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx$  rozbieżna dla  $a \leq 1$

### Kryterium d'Alemberta (ilorazowe)

kiedy  $a_n > 0$  i istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny dla } 0 \leq g < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny dla } g > 1$$

nie rozstrzyga zbieżności dla  $g = 1$

### Kryterium Cauchy'ego (pierwiastkowe)

kiedy istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny dla } 0 \leq g < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny dla } g > 1$$

nie rozstrzyga zbieżności dla  $g = 1$

$$\text{zawsze } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g$$

Przykład

$$a_n = \frac{7^{3n}}{(2n-5)!} \quad \frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^3 \cdot 7^{3n}}{(2n-3)(2n-4)(2n-5)!} \cdot \frac{(2n-5)!}{7^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^3}{(2n-3)(2n-4)} = 0 \quad \text{więc } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!} \text{ jest zbieżny}$$

$$a_n = \left[ \arctan\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right]^{2n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left[ \arctan\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right]^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan^2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 < 1 \quad \text{więc } \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \arctan\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \right]^{2n} \text{ jest zbieżny}$$

### Kryterium Leibniza

jeśli  $a_n$  jest monotonny i  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\text{to } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \text{ jest zbieżny}$$

$$\text{Szereg naprzemienny } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

### Przybliżenie sumy szeregu

sumę szeregu zbieżnego można przybliżyć przez sumę częściową

$$\text{z dowolną dokładnością } |S - s_n| \leq a_{n+1}$$

## Zbieżności bezwzględna i warunkowa

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest bezwzględnie zbieżny wtedy  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  jest zbieżny  
w przeciwnym wypadku jest warunkowo zbieżny

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ jest zbieżny} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny}$$

Przykład

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  jest zbieżny z kryterium Leibniza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ jest rozbieżny}$$

Więc  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  jest warunkowo zbieżny

## Szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

szereg potęgowy o wyrazie ogólnym  $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$   
jest zawsze zbieżny w  $x = x_0$  (w środku)

Przedział zbieżności  $X = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}\}$

Promień zbieżności  $R = \max \{|x| : x \in X\}$

•  $R=0 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  jest zbieżny tylko dla  $x=0$

•  $R=+\infty \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  jest zbieżny  $\forall x \in \mathbb{R}$

•  $0 < R < +\infty \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  jest zbieżny w  $(-R, R)$  i rozbieżny w  $(-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$   
zbieżność w  $x=R$  i  $x=-R$  trzeba rozważyć oddzielnie  
 $S(x)$  jest funkcją ciągłą w  $(-R, R)$

Obliczanie promienia zbieżności

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{dla } 0 < \lambda < +\infty \\ 0 & \text{dla } \lambda = +\infty \\ +\infty & \text{dla } \lambda = 0 \end{cases}$$

## Całkowanie i różniczkowanie szeregów

dla  $R > 0$  i  $x \in (-R, R)$

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{d}{dx} S(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

nie zmienia się  $R$

Szereg Taylora  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

Szereg Maclaurina  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

przybliżenie funkcji  $f$  w otoczeniu punktu  $x_0$

rozwiniecie funkcji w szereg Taylora jest jednoznaczne dla danego  $x_0$

Szereg geometryczny  $\rightarrow$  szereg Maclaurina dla funkcji  $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ dla } |x| < 1$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

na podstawie  $\frac{1}{1-x}$  można rozwinąć dowolną funkcję wymierną  
(zwiększ się promień zbieżności)

## Szereg Fouriera (trygonometryczny)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad f(n) = \begin{cases} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) & \text{dla } n \in \mathbb{N} \\ \frac{a_0}{2} & \text{dla } n=0 \end{cases}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

jeśli jest zbieżny na dowolnym przedziale długości  $2l$  to jest zbieżny w  $\mathbb{R}$   
i jest funkcją okresową o okresie  $2l$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l} + \varphi_n\right) \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \tan(\varphi_n) = \frac{a_n}{b_n}$$

wyraży ogólne określają zależność położenia od czasu w drganiu harmonicznym  
o amplitudzie  $c_n$ , okresie  $\frac{2l}{n}$  i fazie początkowej  $\varphi_n$

Suma częściowa (ciłomian trygonometryczny)

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \quad \text{jest okresowa, okres } 2l$$

## Warunki Dirichleta

funkcja  $f$  ograniczona na  $[a, b]$

1. jest przedziałami monotoniczna na  $(a, b)$
2. jest ciągła (lub nieciągła w skończonym liczbie punktów  $x_i$  i w każdym  $f(x_i) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) \right]$  )
3.  $f(a) = f(b) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$

Jeśli funkcja okresowa  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o okresie  $p = 2l$  spełnia kryteria Dirichleta na przedziale  $[a, a+2l]$   
to jest sumą swojego szeregu Fouriera na przedziale  $[a, a+2l]$

## Wzory Eulera - Fouriera

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) dx \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Funkcja parzysta, spełniająca kryteria rozwija się w

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Funkcja nieparzysta spełniająca warunki rozwija się w

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

## Rozwinięcie funkcji nieokresowej na przedziale

funkcję nieokresową trzeba najpierw rozszerzyć do okresowej i rozwinąć tą rozszerzoną funkcję

( $z: (0, p) \rightarrow \mathbb{R}$  na  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ )

rozszerzać można na różne sposoby więc rozwinięcia do szeregu mogą być różne