**ZAD 1.** (2 pkt.) Wyznaczyć granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} a_n$, jeśli istnieje lub udowodnić, że nie istnieje:

$$a_n = \frac{2(-1)^n \cdot n^2 - n + 3}{n^2 - 1}$$

$a'_n = 2n$ $\quad \lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2(-1)^{2n} \cdot (2n)^2 - 2n + 3}{(2n)^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 2n + 3}{4n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left[8 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right]}{n^2\left[4 - \frac{1}{n^2}\right]} = \frac{8}{4} = 2$

$a''_n = 2n+1$ $\quad \lim_{n\to\infty} a''_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2(-1)^{2n+1} \cdot (2n+1)^2 - (2n+1) + 3}{(2n+1)^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2(4n^2 + 4n + 1) - 2n + 2}{4n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-8n^2 - 10n}{4n^2 + 4n} = \frac{-8}{4} = -2$

$\lim_{n\to\infty} a'_n \neq \lim_{n\to\infty} a''_n \implies \lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje

$a'_n, a''_n$ — podciągi $a_n$

**ZAD 2.** (4 pkt) Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$\lim_{x\to 0^+} (\arcsin(x))^{\tan(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\arcsin(x)^{\tan(x)}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan(x)\ln(\arcsin(x))} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to 0^+} \overset{0}{\tan(x)} \ \overset{-\infty}{\ln(\arcsin(x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\arcsin(x))}{\cot(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\arcsin(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} - \frac{\sin^2(x)}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin(x)}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sin^2(x)}{\arcsin(x)} = -1 \cdot 0$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{\arcsin(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{n\to 0^+} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{1} = 0$

**ZAD 3.** (4 pkt) Wykazać, że

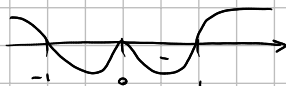$$\ln\frac{1-x}{1+x} \leqslant -2x \quad \text{dla} \quad x \in [0,1)$$

$\forall_{x\in[0,1)} \quad \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \leq -2x$

$\forall_{x\in[0,1)} \quad \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2x \leq 0$

$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2x \qquad D_f = [0,1)$

$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} + 2 = \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} + 2 = \frac{-2}{(1-x)(1+x)} + 2$

$\frac{df}{dx} = \frac{-2 + 2(1-x^2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2x^2}{(1-x)(1+x)}$



$\frac{df}{dx} > 0 \iff -2x^2(1-x)(1+x) > 0$

$f$ nie ma ekstremów lokalnych $\cup$ $(0,1)$ $\quad \forall_{x\in(0,1)} \ \frac{df}{dx} < 0$

$f(0) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{1+x} = 0$

$\forall_{x\in[0,1)} \ f(x) \leq 0 \iff \forall_{x\in[0,1)} \ \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \leq -2x$

**ZAD 1.** (2 pkt.) Wyznaczyć granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} a_n$, jeśli istnieje lub udowodnić, że nie istnieje:

$$a_n = 2 + \frac{n+1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}$$

$a_n' = a_{2n}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n' = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{2n+1}{2n}\cdot\sin(\pi n) = 2 + 1\cdot 0 = 2$

$a_n'' = a_{4n+1}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n'' = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{4n+2}{4n+1}\sin(2\pi n + \frac{\pi}{2}) = 2 + 1\cdot 1 = 3$

$\lim_{n\to\infty} a_n' \neq \lim_{n\to\infty} a_n'' \implies \lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje $\quad a_n', a_n''$ – podciągi $a_n$

**ZAD 2.** (4 pkt) Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$$

$\lim_{x\to 0^-} e^{\tan(x)\,\ln\left(\arccos(x) - \frac{\pi}{2}\right)} = e^0 = 1$

$\lim_{x\to 0^-} \underset{0}{\tan(x)}\,\underset{-\infty}{\ln\left(\arccos(x) - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\left(\arccos(x) - \frac{\pi}{2}\right)}{\cot(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(x)}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0\cdot 1 = 0$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(x)}{\arccos(x)-\frac{\pi}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin(x)\cos(x)}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{-1} = 0$

**ZAD 3.** (4 pkt) Wykazać, że

$$2x \leqslant \ln\frac{1+x}{1-x} \quad \text{dla} \quad x \in [0,1)$$

$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x$ $\quad \forall_{x\in[0,1)}\ f(x) \geqslant 0$ ?

$\frac{df}{dx} = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1\cdot(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} - 2 = \frac{\cancel{1-x}}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^{\cancel{2}}} - 2 = \frac{2}{1-x^2} - 2 = \frac{2-2+2x^2}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2}$

$\frac{df}{dx} > 0 \iff 2x^2(1-x)(1+x) > 0 \iff -2x^2(x-1)(x+1) > 0$



$f\nearrow \cup [0,1) \to$ nie ma ekstremów lokalnych

$f(0) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$\forall_{x\in[0,1)}\ f(x) \geqslant 0 \iff \forall_{x\in[0,1)}\ 2x \leq \ln\frac{1+x}{1-x}$

1. (3p) Wyznacz granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{(2-n) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n \cdot \left(2 + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}$ lub wykaż, że nie istnieje.

$$a_n' = a_{8n} = \frac{(2-8n)\sin(2\pi n)}{8n(2+\cos(2\pi n))} = \frac{(2-8n)\cdot 0}{8n(2+1)} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n' = 0$$

$$a_n'' = a_{8n+2} = \frac{(2-8n-2)\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}{(8n+2)(2+\cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right))} = \frac{-8n-1}{(8n+2)(2+0)} = \frac{-8n}{16n+4} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n'' = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n' \neq \lim_{n\to\infty} a_n'' \implies \lim_{n\to\infty} a_n \text{ nie istnieje}$$

2. (3p) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to\infty} (\text{arcctg}\,x)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(\text{arccot}(x))} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\text{arccot}(x))}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\text{arccot}(x)} \cdot \frac{-1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{1+x^2} \cdot \underset{\text{ograniczona}}{\frac{1}{\text{arccot}(x)}} = 0$$

3. (4p) Czy istnieje taka wartość rzeczywistego parametru $a$, dla której funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{dla} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{x}, & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła i różniczkowalna w swojej dziedzinie? Odpowiedź uzasadnij.

$f$ jest ciągła w $0 \iff f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\forall_{a\in\mathbb{R}} \quad f(0) = 0 \cdot a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\sin(x)}{1} = 0$

$f$ jest ciągła w $(-\infty, 0) \to ax$ - funkcja elementarna

$f$ jest ciągła w $(0, +\infty) \to \frac{\cos(x)-1}{x}$ funkcja elementarna

$\left. \phantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}} \right\}$ $\forall_{a\in\mathbb{R}}$ $f$ jest ciągła w $\mathbb{R}$

$f$ jest różniczkowalna w $(-\infty, 0)$ i $(0, +\infty) \to$ funkcje elementarne

$f$ jest różniczkowalna w $0 \iff f_-'(0) = f_+'(0)$ i te pochodne istnieją

$f_-'(0) = a$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos(x)-1}{x} - ax}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos(x)-1-ax^2}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)-1-ax^2}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin(x)-2ax}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cos(x)-2a}{2} = \frac{-1-2a}{2}$$

$f_-'(0) = f_+'(0) \iff a = \frac{-1-2a}{2} \iff 2a = -1-2a \iff a = -\frac{1}{4}$

$f$ jest ciągła i różniczkowalna w $\mathbb{R}$ dla $a = -\frac{1}{4}$

4. (4p) Dla funkcji $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$ wyznacz
- asymptoty,
- przedziały monotoniczności,
- ekstrema lokalne.

$1 + \ln(x) = 0 \iff \ln(x) = -1 \iff x = e^{-1}$

$D = (0, \tfrac{1}{e}) \cup (\tfrac{1}{e}, +\infty)$

$\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{e}^-} f(x) = \left\{ \dfrac{e^{-1}}{1+(-1)^-} = \dfrac{e^{-1}}{0^-} \right\} = -\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{e}^+} f(x) = \left\{ \dfrac{e^{-1}}{1+(-1)^+} = \dfrac{e^{-1}}{0^+} \right\} = +\infty$

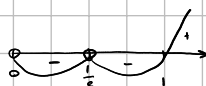$\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left\{ \dfrac{0^+}{1-\infty} \right\} = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1+\ln(x)} = \left\{ \dfrac{1}{1+\infty} \right\} = 0$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{x}{1+\ln(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=\!=\!=} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

$x = \tfrac{1}{e}$ asymptota pionowa dwustronna     bez asymptot ukośnych i poziomych

$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1 \cdot (1+\ln(x)) - x \cdot \frac{1}{x}}{(1+\ln(x))^2} = \dfrac{1+\ln(x)-1}{[1+\ln(x)]^2} = \dfrac{\ln(x)}{[1+\ln(x)]^2}$

$\dfrac{df}{dx} > 0 \iff \ln(x)[1+\ln(x)]^2 > 0$



$f \searrow \cup (0, \tfrac{1}{e}), (\tfrac{1}{e}, 1]$
$f \nearrow \cup [1, +\infty)$

minimum lokalne $\cup$ $x=1$ $f(1) = \dfrac{1}{1+\ln(1)} = 1$

**Zadanie 2**

Oblicz granicę ciągu $(a_n)$, $n \geq 2$ dla $n \to \infty$:

$$a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n + n^2}{3n+2}}$$

$a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^n + n^2}{3n+2}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{3n+2} 2^n + \dfrac{n^2}{3n+2}}$

$\sqrt[n]{\dfrac{1}{3n+2} 2^n} \leq \sqrt[n]{\dfrac{1}{3n+2} 2^n + \dfrac{n^2}{3n+2}} \leq \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3n+2} 2^n + \dfrac{n^2}{3n+2} 2^n}$

$\qquad b_n \qquad\qquad\qquad a_n \qquad\qquad\qquad c_n$

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{3n+2}} \cdot \sqrt[n]{2^n} = 1 \cdot 2 = 2$

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2}{3n+2}} \cdot \sqrt[n]{2^n} = 1 \cdot 2 = 2$

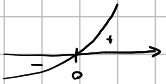$\Longrightarrow \displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 2$

z twierdzenia o 3 ciągach

## Zadanie 3

Udowodnij, że dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność:

$$e^x \geq x+1$$

$f(x) = e^x - x - 1 \qquad \forall_{x \in \mathbb{R}} \ f(x) \geq 0 \ ?$

$\dfrac{df}{dx} = e^x - 1 \qquad \dfrac{df}{dx} > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$



$f \searrow \ \cup \ (-\infty, 0]$

$f \nearrow \ \cup \ [0, +\infty)$

minimum lokalne $\cup \ x = 0 \quad f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

$f$ jest ciągła $\cup \ \mathbb{R}$

$\forall_{x \in \mathbb{R}} \ f(x) \geq 0 \iff \forall_{x \in \mathbb{R}} \ e^x \geq x+1$

## Zadanie 4

Sprawdź, czy funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{ctg}(|x|) & \text{dla } x \in (-\pi/2, \pi/2), \ x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

$f'_-(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} x \cot(|x|) = \lim\limits_{x \to 0^-} x \cot(-x)$

$= \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cot(-x)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\frac{-1}{\sin^2(-x)} \cdot (-1)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0^-} -\dfrac{x^2}{\sin^2(-x)} = \lim\limits_{x \to 0^-} -\left(\dfrac{-x}{\sin(-x)}\right)^2 = -1$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x \cot(|x|) = \lim\limits_{x \to 0^+} x \cot(x)$

$= \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\tan(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos^2(x) = 1$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \implies f'(0)$ nie istnieje $\implies f$ nie jest różniczkowalna $\cup \ 0$

## Zadanie 1. [3p]

Powołując się na odpowiednie twierdzenia (proszę je sformułować) znajdź i precyzyjnie uzasadnij ile wynosi granica

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^{2019} \cdot 3^n + (2^n)^2 + n}.$$

$a_n = \sqrt[n]{n^{2019} \cdot 3^n + (2^n)^2 + n} = \sqrt[n]{n^{2019} \cdot 3^n + 4^n + n}$

$b_n = \sqrt[n]{4^n} \qquad c_n = \sqrt[n]{n^{2019} \cdot 4^n + n^{2019} \cdot 4^n + n^{2019} \cdot 4^n} = \sqrt[n]{3n^{2019} \cdot 4^n}$

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \ b_n \leq a_n \leq c_n$

$\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 4$

$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{3n^{2019}} \cdot \sqrt[n]{4^n} = 1 \cdot 4 = 4$

$\Biggr\} \implies \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 4$

na podstawie tw. o 3 ciągach

## Zadanie 2. [3p]

Powołując się na odpowiednie twierdzenia precyzyjnie zbadaj ciągłość funkcji $f$ w każdym punkcie dziedziny, w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ a \cdot \operatorname{arc\,tg}(x+1) & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}.$$

$f$ jest ciągła $\cup \ (0, +\infty)$, bo $\dfrac{e^{3x}-1}{x}$ jest funkcją elementarną

$f$ jest ciągła $\cup \ (-\infty, 0)$, bo $\forall_{a \in \mathbb{R}} \ a \cdot \arctan(x+1)$ jest funkcją elementarną i $\arctan(x)$ jest ciągła $\cup \ \mathbb{R}$

$f$ jest ciągła $\cup \ 0 \iff f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \iff \dfrac{\pi}{4} a = 3 \iff a = \dfrac{12}{\pi}$

$f(0) = a \cdot \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4} a$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3e^{3x}}{1} = 3$

**ZADANIE 3.** [4p] Znajdź asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}$.

$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x\ln(x)}{(x-1)\ln(x)} - \frac{x-1}{(x-1)\ln(x)} = \frac{x\ln(x) - x + 1}{(x-1)\ln(x)}$$

$$\lim_{x \to 1}\left[ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{x\ln(x) - x + 1}{(x-1)\ln(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x) - 1 + 0}{(x-1) \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{\frac{x-1}{x} + \ln(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1 \cdot x - (x-1) \cdot 1}{x^2} + \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x - x + 1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1+x}{x^2}} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left| \frac{0}{-1} - \frac{1}{-\infty} = 0 - 0 \right| = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x\ln(x)} \right] = \left| \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} = 0 - 0 \right| = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[ \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right] = \left| 1 - \frac{1}{\infty} \right| = 1$$

asymptota pozioma prawostronna $y = 1$

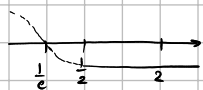**ZADANIE 4.** [4p] Znajdź ekstrema funkcji $f(x) = \ln\left( \dfrac{1}{x^{2x}} \right)$ na zbiorze $\left[ \frac{1}{2}, 2 \right]$.

$$\frac{d}{dt} t^{-1} = -1 t^{-2}$$

$$\ln\left( \frac{1}{x^{2x}} \right) = \ln\left( x^{-2x} \right) = -2x\ln(x)$$

$$\frac{d}{dx} x^{2x} = \frac{d}{dx} e^{2x\ln(x)} = e^{2x\ln(x)} \frac{d}{dx}[2x\ln(x)] = 2e^{2x\ln(x)} \cdot \left( x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x) \right) = 2x^{2x}(1 + \ln(x))$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{1}{x^{2x}}} \cdot \left( -(x^{2x})^{-2} \right) \cdot 2x^{2x}(1 + \ln(x)) = x^{2x} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x^{4x}} \cdot 2 \cdot x^{2x}(1 + \ln(x)) = -2(1 + \ln(x))$$

$$\frac{df}{dx} > 0 \iff -2(1 + \ln(x)) > 0 \iff 1 + \ln(x) < 0 \iff \ln(x) < -1 \iff x < \frac{1}{e}$$

nie ma ekstremów lokalnych w $\left[ \frac{1}{2}, 2 \right]$

$f \searrow $ w $\left[ \frac{1}{2}, 2 \right]$

$$f\left( \frac{1}{2} \right) = \ln\left( \frac{1}{\left( \frac{1}{2} \right)^1} \right) = \ln(2) \qquad f(2) = \ln\left( \frac{1}{2^3} \right) = \ln(2^{-3}) = -8\ln(2)$$

maximum $\ln(2)$

minimum $-8\ln(2)$

**ZAD 1.** (2 pkt.) Wyznaczyć granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} a_n$, jeśli istnieje lub udowodnić, że nie istnieje:

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2 + n - 5}{2n^2 + 1}$$

$$a_n' = a_{2n} = \frac{(-1)^{2n} \cdot (2n)^2 + 2n - 5}{2(2n)^2 + 1} = \frac{4n^2 + 2n - 5}{8n^2 + 1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n' = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$a_n'' = a_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1} \cdot (2n+1)^2 + 2n+1 - 5}{2(2n+1)^2 + 1} = \frac{-4n^2 - 4n - 1 + 2n + 1 - 5}{8n^2 + 8n + 2 + 1} = \frac{-4n^2 - 2n - 5}{8n^2 + 8n + 3} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n'' = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n' \neq \lim_{n\to\infty} a_n'' \implies \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{nie istnieje}$$

**ZAD 2.** (4 pkt) Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{arctg} x)^{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan(x))^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin(x)\ln(\arctan(x))} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(\arctan(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\arctan(x))}{\frac{1}{\sin(x)}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2(x)}{(1+x^2)\arctan(x)\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+x^2} \cdot \tan(x) \cdot \frac{\sin(x)}{\arctan(x)} = -1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\arctan(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

**ZAD 3.** (4 pkt) Wykazać, że

$$\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} \quad \text{dla} \quad x \in (-1, +\infty)$$

$$\forall x \in (-1, +\infty) \quad \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4} \quad ?$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1-2x+x^2}{1+2x+x^2} + \frac{1+2x+x^2}{1+2x+x^2}} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$f \text{ jest stała na przedziale } (-1, +\infty) \text{ i przyjmuje wartość } \frac{\pi}{4}$$

7. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x)$ oraz podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z nich, jeśli:

(a) $f(x) = \frac{1}{2^x + 4}$,

(b) $f(x) = \frac{3 \cdot 2^x + 2}{2^x + 1}$,

(c) $f(x) = \sin x, \quad x \in \left[2\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$,

(d) $f(x) = \cos x, \quad x \in [-3\pi; -2\pi]$.

**b)**

$$y = \frac{3 \cdot 2^x + 2}{2^x + 1} \qquad y: \mathbb{R} \to (2, 3)$$

$$y 2^x + y = 3 \cdot 2^x + 2$$

$$2^x = \frac{2-y}{y-3} \qquad \frac{-y+2}{y-3} = \frac{-y+3-1}{y-3} = -1 + \frac{-1}{y-3} \in (0, +\infty)$$

$$x = \log_2\left(\frac{2-y}{y-3}\right) \qquad x: (2,3) \to \mathbb{R}$$

**d)**

$$y = \cos(x) \qquad y: [-3\pi, -2\pi] \to [-1, 1]$$

$$\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$x + 3\pi \in [0, \pi]$$

$$x = \arccos(y) - 3\pi$$

$$x: [-1, 1] \to [-3\pi, -2\pi]$$

**2.1**

g) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}} = \left[e^\infty\right] = +\infty$

h) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{2n^2 + 2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2 + 2 + 2n - 1}{2n^2 + 2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2n-1}{2n^2+1}\right)^{n+1}$

$= \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n^2+1}{2n-1}}\right)^{\frac{2n^2+1}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n^2+1} \cdot (n+1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2n^2+1}{2n-1}}\right)^{\frac{2n^2+1}{2n-1}}\right]^{\frac{2n^2+n-1}{2n^2+1}} = e^1 = e$

i) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2019} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2019} = 1^{2019} = 1$

j) $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \left[\ln(n+3) - \ln(n)\right] = \lim\limits_{n \to \infty} n \ln\left(\frac{n+3}{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \ln\left(\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \ln\left(\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3\right) = \ln(e^3) = 3$

$$\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^3$$

**2.3**

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \sin(x))^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1 - \sin(x))} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - \sin(x))}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1 - \sin(x)} \cdot (-\cos(x))}{1} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x) - 1} = \frac{1}{-1} = -1$

**3.8**

a) $\frac{d}{dx} x^{\cos(2x)} = \frac{d}{dx} e^{\cos(2x)\ln(x)} = e^{\cos(2x)\ln(x)} \frac{d}{dx} \cos(2x)\ln(x) = x^{\cos(2x)}\left(\frac{\cos(2x)}{x} - 2\sin(2x)\ln(x)\right)$

b) $\frac{d}{dx} \log_x(\arctan(x)) = \frac{d}{dx} \frac{\ln(\arctan(x))}{\ln(x)} = \frac{\frac{1}{\arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x) - \ln(\arctan(x))\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

**4.1**

o) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)} = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2x\ln(x)} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$