

Równania różniczkowe zwyczajne

Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$y = y(x)$ - funkcja niewiadoma

n - najwyższy rząd pochodnej

prawie nigdy nie da się rozwiązać analitycznie, poza szczególnymi przypadkami

Całka szczególna równania różniczkowego (CS)

jedno z rozwiązań równania

funkcja, która spełnia równanie na określonym przedziale

Przykład

$$y' = 3x^2 \rightarrow \text{CS: } y^3, y^3 + 5, y^3 + 999, \dots$$

Warunek początkowy równania

dla równania rzędu n to układ równań

który ogranicza zbiór rozwiązań do jednego konkretnego

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Zagadnienie Cauchy'ego - wyznaczenie CS równania spełniającej zadany warunek początkowy

Całka ogólna równania (CO)

(dla najprostszych typów równań)

n -parametrowa rodzina funkcji

zbiór wszystkich całek szczególnych

Przykład

$$y'' + y = 0 \rightarrow y = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) \text{ - całka ogólna, 2 parametry}$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 \sin(x_0) + C_2 \cos(x_0) = y_0 \\ C_1 \cos(x_0) - C_2 \sin(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Warunek początkowy daje zawsze układ Cramera \rightarrow dokładnie 1 rozwiązanie $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$

Równania o zmiennych rozdzielonych

równanie 1. rzędu w postaci

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \iff \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{lub} \quad y'(x) = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \implies \int g(y) dy = \int f(x) dx \implies G(y) = F(x) + C$$

Równanie $G(y) = F(x) + C$ wyznacza całkę ogólną $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$

Dla każdego warunku początkowego istnieje dokładnie 1 całka szczególna

Przykład

$$y' = \frac{-x}{y}, \quad y(-1) = 2$$

$$\int y dy = \int -x dx \rightarrow y^2 = -x^2 + C \rightarrow (2)^2 = -(-1)^2 + C \rightarrow C = 5$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$\text{na przedziale } y \in (0, \infty) \quad \text{CS: } y = \sqrt{5 - x^2}$$

Równania w postaci $y' = f(\frac{y}{x})$

stosuje się standardowe podstawienie i sprowadza do równania o zmiennych rozdzielonych

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u$$

Po podstawieniu równanie ma postać

$$u'x + u = f(u) \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{f(u) - u}} \rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

Nie zawsze wyjdzie jawne rozwiązanie, części są uwikłane

Przykład

$$y' = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right) \quad u = \frac{y}{x}$$

$$u'x + u = u + \tan(u) \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\tan(u)}{x} \rightarrow \int \frac{du}{\tan(u)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\cos(u)}{\sin(u)} du = \left| \begin{matrix} b = \sin(u) \\ dt = \cos(u) du \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|\sin(u)| + C \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\ln|\sin(u)| = \ln|x| + C \rightarrow \ln\left|\frac{\sin(u)}{x}\right| = C \rightarrow \frac{\sin(u)}{x} = C \rightarrow \sin\left(\frac{y}{x}\right) = Cx$$

Dla równań $y' = f(ax + by + c) \rightarrow$ podstawienie $|u(x) = ax + by(x) + c|$

Równania liniowe rzędu n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

równanie jednorodne (RJ) - $f(x) = 0$

równanie nieliniowe (NJ) - $f(x) \neq 0$

równanie o stałych współczynnikach - $a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$

Równanie liniowe pierwszego rzędu

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Całka ogólna równania jednorodnego (COR)

$$y' + p(x)y = 0 \quad y=0 - \text{całka szczególna}$$

Dla warunku początkowego istnieje dokładnie 1 całka szczególna

$$y = C e^{-\int p(x) dx}$$

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y = y_0 e^{-\int [p(x) - p(x_0)] dx}$$

Wyprowadzenie dla $y \neq 0$

$$y' = -p(x)y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x) dx$$

$$\ln|y| = -P(x) + C$$

$$y = C \cdot e^{-P(x)}$$

$$y_0 = y(x_0)$$

$$y_0 = C e^{-P(x_0)}$$

$$C = y_0 e^{P(x_0)}$$

$$y(x) = y_0 e^{P(x_0)} \cdot e^{-P(x)} = y_0 e^{P(x_0) - P(x)}$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego

1. Rozwiązać równanie jednorodne \rightarrow wyznaczyć przestrzeń rozwiązań
2. Przesunąć przestrzeń rozwiązań do punktu szczególnego

$$CORN = CORJ + CSRN$$

jeśli y_1 jest CS równania $y' + p(x) = f_1(x)$
 i y_2 jest CS równania $y' + p(x) = f_2(x)$
 to $y_1 + y_2$ jest CS równania $y' + p(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Metoda uzmienniania stałej

1. znaleźć CORJ
2. znaleźć funkcję $C(x)$ taką, że $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}$ jest CSRN
3. policzyć pochodną $y' = C'(x) e^{-\int p(x) dx} + -C(x) p(x) e^{-\int p(x) dx}$
4. podstawić y i y' do równania niejednorodnego

$$C'(x) e^{-\int p(x) dx} - \cancel{p(x) C(x) e^{-\int p(x) dx}} + \cancel{p(x) C(x) e^{-\int p(x) dx}} = f(x) \quad / \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$C'(x) = f(x) e^{\int p(x) dx} \quad / \int \dots dx$$

$$C(x) = \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx + C_1$$

Całka ogólna równania niejednorodnego $y' + p(x)y = f(x)$

$$y(x) = C e^{-\int p(x) dx} + e^{-\int p(x) dx} \cdot \int f(x) e^{\int p(x) dx} dx$$

dla ciągłych f, p

Dla warunków początkowych daje dokładne 1 rozwiązanie

Przykład

$$y' - \tan(x)y = \cos(x) \quad y(0) = 0$$

1. RJ

$$y' - \tan(x)y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan(x)}{y}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$$

$$\ln|y| = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$y \cos(x) = C \rightarrow y = \frac{C}{\cos(x)}$$

2. RN

$$y' = \frac{d}{dx} \frac{C}{\cos(x)} = \frac{C'(x) \cos(x) + C(x) \sin(x)}{\cos^2(x)}$$

podstawiam

$$\frac{C'(x) \cos(x) + C(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} - \tan(x) \frac{C(x)}{\cos(x)} = \cos(x)$$

$$\frac{C'(x) \cos(x)}{\cos^2(x)} + \frac{C(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} - \frac{C(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} = \cos(x)$$

$$C'(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$C(x) = \frac{1}{2} \int [1 + \cos(2x)] dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

3. CORN

$$y = \frac{\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C}{\cos(x)}$$

$$y(0) = \frac{C}{1} = 0 \rightarrow C = 0$$

4. CSRN

$$y(x) = \frac{\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x)}{\cos(x)}$$

Metoda zgadywania

dla równania typu $y' + p y = f(x)$, $p \in \mathbb{R}$

gdzie $f(x) = e^{\alpha x} [W_1(x) \cos(\beta x) + W_2(x) \sin(\beta x)]$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $W_1, W_2 \in \mathbb{R}[x]$

przebudujmy rozwiązanie (CSRN) w postaci

$$y_1 = x^k e^{\alpha x} [V_1(x) \cos(\beta x) + V_2(x) \sin(\beta x)]$$

$V_1, V_2 \in \mathbb{R}[x]$

$$\deg V_1 = \deg V_2 = \max\{\deg W_1, \deg W_2\}$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha + j\beta \neq -p \\ 1 & \text{dla } \alpha + j\beta = -p \end{cases}$$

1. znaleźć CORJ - y_0

2. wyznaczyć CERN - y_1 przez zgadywanie

3. CORN = CORJ + CERN - $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$

Przykład

$$y' + 2y = x e^{-2x}$$

1. CORJ

$$y' + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int 1 dx$$

$$\ln|y| = -2x + C = \ln|e^{-2x}| + C$$

$$\frac{y}{e^{-2x}} = C \quad y = C e^{-2x}$$

2. CERN

$$y_1 = x e^{-2x} [Ax + B] = e^{-2x} (Ax^2 + Bx)$$

$$y_1' = e^{-2x} (2Ax + B) - 2e^{-2x} (Ax^2 + Bx)$$

podstawiam

$$e^{-2x} (2Ax + B) - 2e^{-2x} (Ax^2 + Bx) + 2e^{-2x} (Ax^2 + Bx) = x e^{-2x}$$

$$2Ax + B = x$$

$$\begin{cases} 1 = 2A \\ 0 = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases} \quad y_1 = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$$

3. CORN

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + C e^{-2x}$$

Równania jednorodne liniowe rzędu 2

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Całki szczególne równania y_1, y_2 tworzą układ fundamentalny rozwiązań

(są liniowo niezależne i są bazą przestrzeni rozwiązań)

$$\text{Kiedy } W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

$W(x)$ - wyznacznik Wronskiego

Wtedy CORJ ma postać $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (kombinacja liniowa)

i warunki początkowe wyznacza dokładnie 1 rozwiązanie

Przykład

$$y'' + y = 0, \quad \text{CS: } y_1 = \cos(x) \quad y_2 = \sin(x)$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \neq 0$$

układ $\{\cos(x), \sin(x)\}$ - układ podstawowy całek

$$y(x) = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

Równania jednorodne o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y = 0, \quad p_i \in \mathbb{R}$$

szukamy stg CS w postaci $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$

$$\text{wtedy } \frac{d^n}{dx^n} = r^n e^{rx}$$

$$\text{Równanie charakterystyczne - } r^n + p_{n-1} r^{n-1} + \dots + p_1 r + p_0 = 0$$

ma zawsze n rozwiązań w \mathbb{C}

Rozwiązanie $y'' + py' + qy = 0$ (CORJ)

$$r^2 + pr + q = 0$$

$$1^\circ \Delta > 0 \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R} \quad r_1 \neq r_2$$

$$CS: y_1 = e^{r_1 x} \quad y_2 = e^{r_2 x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$$

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$$2^\circ \Delta = 0 \quad r_1 = r_2 = r_0 \in \mathbb{R}$$

$$CS: y_1 = e^{r_0 x} \quad y_2 = x e^{r_0 x}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_0 x} & x e^{r_0 x} \\ r_0 e^{r_0 x} & x r_0 e^{r_0 x} + e^{r_0 x} \end{vmatrix} = x r_0 e^{2r_0 x} + e^{2r_0 x} - x r_0 e^{2r_0 x} = e^{2r_0 x} \neq 0$$

$$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x}$$

$$3^\circ \Delta < 0 \quad r_1 = \alpha + \beta i \quad r_2 = \alpha - \beta i \quad \beta \neq 0$$

$$CS: y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$$W(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Przykład

$$y'' - 3y' - 4y = 0$$

$$r^2 - 3r - 4 = (r-4)(r+1) = 0$$

$$r_1 = 4 \quad r_2 = -1$$

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$$

Metoda uzmienniania stałych dla $y'' + py' + qy = f(x)$ (CORN)

$$1. \text{ znaleźć CORJ } y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$2. \text{ znaleźć takie } C_1(x) \text{ i } C_2(x) \text{ żeby}$$

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) \text{ spełniało dane równanie nieliniowe}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x) dx$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \rightarrow C_2(x) = \int C_2'(x) dx$$

Przykład

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(x)} \rightarrow \text{CORJ} = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(x)} \end{bmatrix} \quad W(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$C_1'(x) = -1$$

$$C_2' = \cot(x)$$

$$C_1(x) = \int -1 dx = -x + C_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)} dx = \ln|\sin(x)| + C_2$$

$$\text{CORN: } y(x) = (-x + C_1) \cos(x) + (\ln|\sin(x)| + C_2) \sin(x) \\ = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x) - x \cos(x) + \sin(x) \ln|\sin(x)|$$