1.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \phantom{x +{}} 2y + z = -4 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ \phantom{x +{}} 2y + z = 4 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

$$[A|B_1|B_2] = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{v_3 - v_1} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[v_2 \cdot \frac{1}{2}]{\substack{v_1 - v_2 \\ v_3 + \frac{1}{2}v_2}} \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[v_3 \cdot (-\frac{2}{3})]{\substack{v_1 + \frac{4}{3}v_3 \\ v_2 + \frac{1}{3}v_3}} \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{13}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -3 & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{8}{3} \end{array}\right]$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{10}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

2.

a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{v_3 - 2v_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{v_1 + 2v_3 \\ v_2 + v_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + z \\ y = 2 + z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad z \in \mathbb{R}$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -8 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 8 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{v_2 + v_1 \\ v_3 - 2v_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{4}v_2]{v_1 - v_3} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 3 & 0 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[v_3 + v_2]{v_1 - 5v_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$\uparrow \quad t_1 \quad \uparrow \quad \uparrow \quad t_2$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{v_2 - v_1 \\ v_3 - v_1 \\ v_4 - v_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{v_2 \cdot \frac{1}{2} \\ v_3 \cdot \frac{1}{2}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{v_1 + v_2 \\ v_3 - v_2 \\ v_4 - 3v_2}} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{array}\right] \xrightarrow{v_2 + v_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x = y = z = 1$

3.

a) $\left[\begin{array}{ccc|c} a & a+2 & 2(a-1) & 0 \\ 1 & a & 3-a & a+1 \end{array}\right]$ maksymalny minor $\begin{vmatrix} a & a+2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a - 2 = a^2 - 2a + a - 2 = (a+1)(a-2)$

dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = 2$

jest nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru

dla $a = -1$

$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-1 \cdot w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{4} & \cancel{0} \end{array}\right]$

nieskończenie wiele rozwiązań, 2 parametry

dla $a = 2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2} w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$

układ sprzeczny

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & a & 2a \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & a+2 & 4+a \end{array}\right]$ $\begin{vmatrix} 1 & a-1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ a & -1 & a+2 \end{vmatrix} = a + 2 - 2a - a^2 - 2(a-1)(a+2)$

$= a + 2 - \cancel{2a} - a^2 - 2a^2 - 4a + \cancel{2a} + 4$

$= -3a^2 - 3a + 6$

$= -3(a^2 + a - 2) = -3(a^2 + 2a - a - 2)$

$= -3(a-1)(a+2)$

dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = 3 = n$

jest dokładnie 1 rozwiązanie

dla $a = 1$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2 - 2w_1 \\ w_3 - w_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{3} \end{array}\right]$ $\begin{cases} x + z = 2 \\ y - 2z = -3 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $z \in \mathbb{R}$

$w_3 = -w_2$

nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru

dla $a = -2$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2 + w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$

układ sprzeczny, 0 rozwiązań

c) $\left[\begin{array}{cc|c} a-1 & a+3 & 4 \\ 1 & a & 2a \\ 2 & 3a+1 & 4a \end{array}\right]$

$$\begin{vmatrix} a-1 & a+3 & 4 \\ 1 & a & 2a \\ 2 & 3a+1 & 4a \end{vmatrix} = \underset{w_3 - 2w_2}{\begin{vmatrix} a-1 & a+3 & 4 \\ 1 & a & 2a \\ 0 & a+1 & 0 \end{vmatrix}} = \underset{\substack{w_1 - w_3 \\ w_2 - w_3}}{\begin{vmatrix} a-1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2a \\ 0 & a+1 & 0 \end{vmatrix}} = 4a+4 - 2a(a+1)(a-1) = 4a+4 - 2a(a^2-1)$$

$$= 4a+4 - 2a^3 + 2a = -2a^3 + 6a + 4 = -2(a^3 - 3a - 2)$$

$$= -2(a+1)(a^2 - a - 2) = -2(a+1)^2(a-2)$$

$$\begin{array}{l} \quad a^2 - a - 2 \\ \hline a^3 \quad -3a - 2 \;:\; (a+1) \\ a^3 + a^2 \\ \hline \quad -a^2 - 3a \\ \quad -a^2 - a \\ \hline \qquad -2a - 2 \\ \qquad -2a - 2 \end{array}$$

dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

$\mathrm{rank}(A|B) = 3 \wedge \mathrm{rank}(A) \leq 2$

układ sprzeczny

dla $a = -1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2} w_3]{-\frac{1}{2} w_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru

dla $a = 2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_2 - w_1 \\ w_3 - 2w_1}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-3} & \cancel{0} \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \cdot (-\frac{1}{3})]{w_1 + \frac{5}{3} w_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

1 rozwiązanie

d) $\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & a & 6 & -a & a+2 \\ 3-a & a-2 & a-1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & a-3 \end{array}\right]$

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -a \\ 3-a & a-1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 4a(a-1) - 12(3-a)$$

$$= 24 - 4a^2 + 4a - 36 + 12a$$

$$= -4a^2 + 16a - 12 = -4(a^2 - 4a + 3)$$

$$= -4(a^2 - 3a - a + 3) = -4(a-3)(a-1)$$

dla $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|B) = 3$

jest nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 1 parametru

dla $a = 1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 6 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \cancel{-4} & \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2} w_2]{\frac{1}{6} w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \frac{1}{6} & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$w_3 = -2w_2$ $\qquad$ $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|B) = 2$

nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów

dla $a = 3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{w_1 - 3w_2 \\ w_3 - 2w_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -4 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

układ sprzeczny, 0 rozwiązań

4. $v \in \mathbb{R}_3[x]$ $\quad v = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$v(-2) = -4$

$v(-1) = -1$

$v(1) = -1$

$v(2) = 8$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -8 & 4 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{v_2+v_3 \\ v_1+8v_3 \\ v_4-8v_3}} \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{3}v_1 \\ \frac{1}{2}v_2}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_1-4v_2 \\ v_3-v_2 \\ v_4+4v_2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_3-\frac{1}{2}v_1 \\ v_4+3v_1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}v_1 \\ -\frac{1}{6}v_4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_1+\frac{1}{2}v_4 \\ v_3-\frac{1}{2}v_4 \\ v_2-v_4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$v(x) = x^3 + x^2 - x - 2$

5.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_2-v_1 \\ v_3-2v_1}} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14 & -14 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{v_1-2v_2} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14 & -14 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}v_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14 & -14 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_2-v_1 \\ v_3+14v_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sprzeczność, wektor nie jest kombinacją liniową podanych

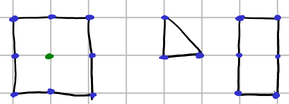
6.

$S = \alpha W + \beta B + \gamma$

W - punkty wewnątrz

B - punkty na brzegu

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$



$$\begin{cases} 4 = \alpha + 8\beta + \gamma \\ \frac{1}{2} = 3\beta + \gamma \\ 2 = 6\beta + \gamma \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_1-v_3 \\ v_2-v_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}v_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{v_1-2v_2 \\ v_3-6v_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$S = W + \frac{1}{2}B - 1$