Teoria mnogości

Pojęcie pierwotne teorii mnogości to zbiór oraz bycie elementem zbioru.

Pozostałe pojęcia definiuje się za pomocą tych dwóch.

$x \in A$ — x jest elementem zbioru A

$x \notin A$ — x nie należy do zbioru A

$\emptyset$ — zbiór pusty

Relacja inkluzji

$A \subseteq B$ — A jest podzbiorem zbioru B

stosujemy zamiennie $\subset$ i $\subseteq$

Równość zbiorów

$A = B$

Zbiór pusty jest tylko jeden i jest podzbiorem każdego zbioru
Zbiór A jest swoim własnym podzbiorem

$A \subseteq A \qquad \emptyset \subseteq A$

Inkluzja właściwa

$A \subsetneq B$ — A jest podzbiorem właściwym zbioru B

$A \subseteq B \land A \neq B$

Sposoby określania zbioru

- wypisanie elementów

$\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b, a, b, a, a\}$

zbiór może być elementem zbioru $\{\{1\}\}$

elementy mogą być różnych typów

$A = \{\emptyset, 1, \{2,3\}\}$

$1 \in A \qquad \{1\} \subseteq A$

$2 \notin A \qquad \{2,3\} \in A$

$\emptyset \subseteq A \qquad \emptyset \in A \qquad \{\emptyset\} \subseteq A \qquad \{\emptyset\} \neq \emptyset$

- określenie za pomocą funkcji zdaniowej

$\{x \in X : W(x)\}$

np. $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$ przedział

$\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z}\ n = 2k\} = 2\mathbb{Z}$ zbiór liczb parzystych

antynomia Russela

niech $W = \{x : x \notin x\}$

czy $W \in W$?

jeśli $W \in W$ to musi spełniać $\phi(x): x \notin x$

jeśli $W \notin W$ to nie spełnia $\phi(x): x \notin x$

sprzeczność → obiekt W nie jest zbiorem, pytanie nie ma sensu

Własności zbiorów określa zbiór aksjomatów ZFC
(Zermello – Frankla z aksjomatem wyboru)

- aksjomat regularności
  niemożliwe jest $x \in x$
  niemożliwe jest $x \in y \in z \ldots \in x$

- zbiór jako obraz zbioru wyznaczony przez funkcję

  dla $f : X \to Y$ i $A \subseteq X$

  $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq Y$

  np. $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Podstawowe działania na zbiorach

niech X będzie ustaloną przestrzenią, a A i B jej podzbiorami

- Suma $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$
- Iloczyn $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$
- Różnica $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$
- Dopełnienie $A' = X \setminus A = \{x : x \in X \wedge x \notin A\}$

Równoważne są warunki

$$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A \iff A \setminus B = \emptyset$$

Własności

1. $A \subseteq A$ zwrotność
2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$ przechodność
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$ antysymetryczność

Własności działań na zbiorach

1.
2. ...
3.
4.
5.
6.

Monotoniczność sumy i iloczynu

dla $A \subseteq A_1 \quad B \subseteq B_1$

$\rightarrow A \cup B \subseteq A_1 \cup B_1$

$\rightarrow A \cap B \subseteq A_1 \cap B_1$

Dowód $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in L$

$x \in A \cap (B \cup C)$

$x \in A \quad \wedge \quad x \in B \cup C$

$x \in A \quad \wedge \quad (x \in B \vee x \in C)$

$(x \in A \wedge x \in B) \cup (x \in A \wedge x \in C)$

$x \in A \cap B \quad \vee \quad x \in A \cap C$

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in P$ co kończy dowód

Zbiór potęgowy

$2^A = P(A) = \{B : B \subseteq A\}$

zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A

$\emptyset, A \in P(A)$

$A \subseteq B \implies P(A) \subseteq P(B)$

jeśli X ma n elementów to $P(X)$ ma 2^n elementów

np. $A = \{1, 2, 3\}$

$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

Produkt - iloczyn kartezjański zbiorów

symbol (x,y) oznacza uporządkowaną parę elementów x i y

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

$$X \times Y = \begin{cases} \{(x,y) : x \in X \wedge y \in Y & \text{dla } X \neq \emptyset \wedge Y \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{dla } X = \emptyset \vee Y = \emptyset \end{cases}$$

oznaczenie $X \times X = X^2$

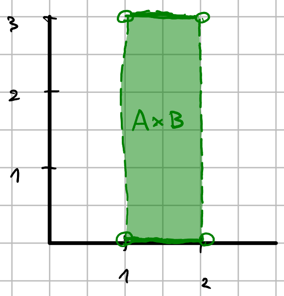
jeśli X ma n elementów i Y ma m elementów
to $X \times Y$ ma $m \cdot n$ elementów

jeśli $X \neq Y$ to $X \times Y \neq Y \times X$

np.

$A = (1, 2) \qquad B = [0, 3]$

$A \times B = \{(x,y): 1 < x < 2 \wedge 0 \leq y \leq 3\}$



Dla danych zbiorów X, Y, Z

$X \times (Y \circ Z) = \ldots$

niech $X_1, X_2, \ldots X_n$ - zbiory niepuste i $n \geq 2$ i $n \in \mathbb{N}$

$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \prod_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, x_2, \ldots x_n): x_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in X_n\}$

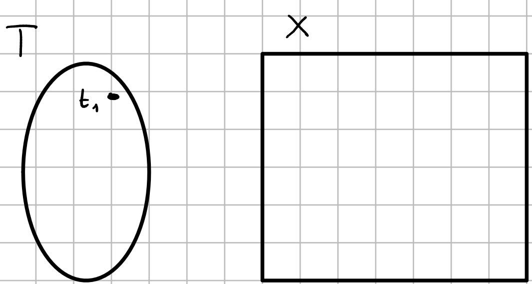
np. n-wymiarowa przestrzeń rzeczywista

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}\}$

Indeksowane rodziny zbiorów

Indeksowana rodzina zbioru X to funkcja
$f: T \to 2^X$
elementy zbioru T to indeksy

Indeksowaną rodzinę oznacza się $(A_t)_{t \in T}$



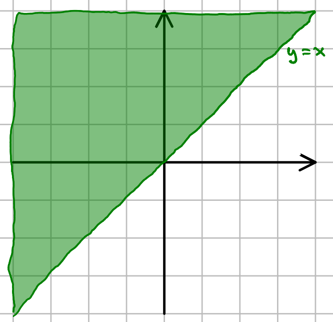
np. $X = \mathbb{R} \quad T = \mathbb{N} \quad A_t = \{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{t} \leq x \leq t\}$

$A_1 = \{1\}$
$A_2 = [\frac{1}{2}, 2]$
$A_{10} = [\frac{1}{10}, 10]$

rodzinę o własności $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{N} \quad t_1 < t_2 \Longrightarrow A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$
nazywa się wstępującą

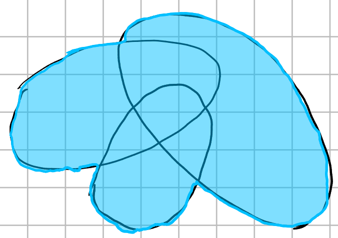
przykład $X = \mathbb{R}^2$ $T = \mathbb{N}$ $A_t = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq tx \}$

A_1



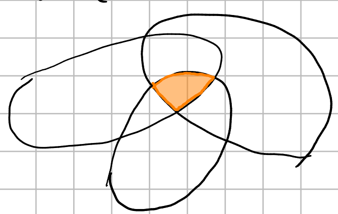
Uogólniona suma zbiorów A_t, $t \in T$

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \{ x \in X : \exists_{t \in T}\ x \in A_t \}$$



Uogólniony iloczyn zbiorów

$$\bigcap_{t\in T} A_t = \{ x \in X : \forall_{t \in T}\ x \in A_t \}$$

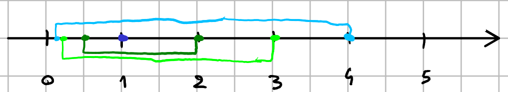


W przypadku gdy indeksy są kolejnymi liczbami naturalnymi $n \geq n_0$

$$\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n \qquad \bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n$$

przykład:

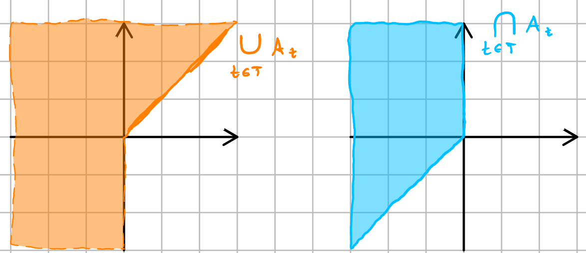
uogólniona suma $A_t = [\frac{1}{t}, t]$, $T = \mathbb{N}$



$\bigcap_{t\in T} A_t = \{1\}$ $\bigcup_{t\in T} A_t = (0, +\infty)$

przedziały są domknięte ale ich suma jest otwarta

przykład: $A_t = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq tx \}$



Własności działań uogólnionych

1.

2.

3.

4. . . .

5.

6.

7.

8.

"Źle wpływa na intelekt, gdy się wszystko rozumie"

Joseph Conrad