Układy równań liniowych

Równanie liniowe

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta$

Układ m równań z n niewiadomymi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + \alpha_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Układ można wyrazić jako $A \cdot X = B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A - macierz współczynników
B - wektor wyrazów wolnych
X - wektor niewiadomych

Rozwiązanie układu

ciąg $(x_1, x_2, \dots x_n)$ spełniający układ

Interpretacja geometryczna układu z 3 niewiadomymi

jedno równanie opisuje płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$

dwa równania opisują przecięcie dwóch płaszczyzn
- linia
- cała płaszczyzna jeśli się pokrywają
- zbiór pusty jeśli są równoległe

trzy równania opisują przecięcie trzech płaszczyzn
- punkt - dokładnie jedno rozwiązanie
- linia / płaszczyzna
- zbiór pusty - np. 2 z 3 płaszczyzn są równoległe

Układ jednorodny $B = 0$

wszystkie wyrazy wolne równe 0

zawsze istnieje conajmniej jedno rozwiązanie - $X = 0$

zbiór rozwiązań jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$

Układ niejednorodny $B \neq 0$

Układ Cramera

ma tyle samo równań co niewiadomych i $\det A \neq 0$

zawsze ma dokładnie jedno rozwiązanie

Metoda Cramera

dla układów Cramera

$$x_1 = \frac{\det A(x_1)}{\det A} \quad x_2 = \frac{\det A(x_2)}{\det A} \quad \dots \quad x_n = \frac{\det A(x_n)}{\det A}$$ wzory Cramera

$A(x_i)$ - macierz A z kolumną odpowiadającą współczynnikom przy x_i zastąpioną przez wyrazy wolne (B)

Kosztowna dla układów większych niż 3×3

$$\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -1 \\ 4x + 4y - 3z = 3 \\ -x - y + z = 2 \end{cases} \qquad \underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{B}{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}} \qquad \det A = 1$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11$$

$x = \frac{3}{1} = 3$

$y = \frac{6}{1} = 6$

$z = \frac{11}{1} = 11$

Metoda macierzowa

dla układów Cramera

dla układu $AX=B$ istnieje 1 rozwiązanie $X = A^{-1}\cdot B$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Metoda eliminacji

dla układów Cramera

zapisać macierz rozszerzoną układu $[A|B]$

wykonywać przekształcenia na wierszach żeby otrzymać $[I|X]$

- mnożenie wiersza przez skalar $\alpha \neq 0$
- dodanie do wiersza wielokrotności innego wiersza
- zamiana wierszy miejscami

(operacje nie zmieniające rzędu)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2+4w_3]{w_1+3w_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{w_3-w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1-w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right] \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Można wydajnie rozwiązać na raz wiele układów

o takich samych A i różnych B

$[A|B_1|B_2|\cdots|B_k] \longrightarrow [I|X_1|X_2|\cdots|X_k]$

Twierdzenie Kroneckera - Capellego

układ z n niewiadomymi ma rozwiązanie $\iff$ $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B)$

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = n$ $\rightarrow$ jest dokładnie 1 rozwiązanie

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = k < n$ $\rightarrow$ jest nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $(n-k)$ parametrów

zbiór rozwiązań jest $(n-k)$ wymiarowy

(prosta dla $n-k=1$, płaszczyzna dla $n-k=2$)

Przykład

$$\begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ -x + 2y + z = 3 \\ \quad\;\; y + 3z = 7 \end{cases} \qquad [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2+w_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] = [A'|B']$$

$[A'|B']$ odpowiada równoważnemu układowi równań

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A')$ i $\operatorname{rank}(A|B) = \operatorname{rank}(A'|B')$

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = 2$ i są 3 niewiadome

jest nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $3-2=1$ parametru

rozwiązanie jest prostą w $\mathbb{R}^3$

Metoda kolumn jednostkowych

na znalezienie nieskończonego zbioru rozwiązań

dla układu gdzie $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|B) = k < n$

1. wykonywać operacje wierszowe na $[A|B]$ żeby dostać k liniowo niezależnych kolumn I_k

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\;\dots\;} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+w_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & 5 & 11 \\ & 3 & 7 \end{array}\right]$$

maksymalna liczba kolumn jednostkowych

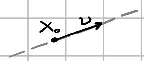
2. zapisać równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 5z = 11 \\ y + 3z = 7 \end{cases}$$

zmienne odpowiadające kolumnom jednostkowym są niewiadomymi

pozostałe zmienne są parametrami

$$\begin{cases} x = 11 - 5z \\ y = 7 - 3z \\ z \in \mathbb{R} \text{ - parametr} \end{cases} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}}_{X_0} + \underbrace{z}_{z} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v}$$

X_0 i v wyznaczają prostą 

rozwiązując układ można otrzymać dowolne X_0 i v na tej prostej

Jądro macierzy (kernel)

$\operatorname{Ker} A$ — zbiór wszystkich wektorów X takich, że $AX = 0$

Układ fundamentalny rozwiązań równania $AX = 0$

dowolna baza przestrzeni rozwiązań tego układu

baza $\operatorname{Ker} A$

Przykład $\operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} = ?$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_2+3w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 20 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1+w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 13 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 20 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 13y + 26v = 0 \\ 11y + z + 20v = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -13y - 26v \\ z = -11y - 20v \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -26 \\ 0 \\ -20 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -26 \\ 0 \\ -20 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Postać rozwiązań układu równań

jeśli X_0 jest rozwiązaniem układu $AX = B$

to zbiór wszystkich rozwiązań wyraża się jako $X_0 + \operatorname{Ker} A$

każde rozwiązanie jest sumą rozwiązania szczególnego X_0

i kombinacji liniowej wektorów układu fundamentalnego

Przykład
$$\begin{cases} x + 2y - z + 6t = 5 \\ -3x + 5y + 4z + 2t = 6 \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = X_0 + \operatorname{Ker} A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -13 \\ 1 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -26 \\ 0 \\ -20 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad y, t \in \mathbb{R}$$

rozwiązanie ogólne niejednorodnego układu równań