Pochodne cząstkowe

Pochodna cząstkowa funkcji $f(x_1, x_2, \dots x_n)$

$P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = f_{x_i}(P_0) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1^0, \dots x_i^0 + \Delta x_i, \dots x_n^0) - f(x_1^0, \dots x_n^0)}{\Delta x_i}$$

jeśli ta granica istnieje i jest właściwa

Wszystkie zmienne funkcji poza x_i traktuje się jako stałe i oblicza pochodną tak samo jak dla funkcji 1 zmiennej.

$$f(x,y,z) = x^2y^3 + e^{xy^2} + x\sin(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2y^3x + y^2e^{xy^2} + \sin(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3x^2y^2 + 2xye^{xy^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = x\cos(z)$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

pochodna cząstkowa pochodnej cząstkowej

Oznaczenia

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = f_{xyz}$$

Pochodna cząstkowa mieszana rzędu $k \geq 2$ i inna niż $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$

Twierdzenie Shwartza

jeśli funkcja ma ciągłe pochodne mieszane rzędu $k \geq 2$ różniące się kolejnością różniczkowania względem zmiennych to te pochodne są sobie równe

$$f \in C^2(D) \Rightarrow \forall_{(x,y) \in D} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Przykład

$z(x,y) = x^3 - 2x^2y + 3y^2 \qquad z \in C^2(\mathbb{R}^2)$

1 rzędu: $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 4yx \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 2x^2$

2 rzędu: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4x$$

Pochodna funkcji złożonej

Funkcja w postaci $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$

$$\varphi'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Przykład

$z = x^2 + y\sin(x) \qquad x = 2t + \sinh(t) \qquad y = e^t - t^2$

1. sposób

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y\cos(x) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin(x) \qquad \frac{dx}{dt} = \cosh(t) + 2 \qquad \frac{dy}{dt} = e^t - 2t$

$x(0) = 0 \quad y(0) = 1 \qquad \frac{dz}{dt}(0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)\frac{dy}{dt}(0) = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 3$

2. sposób

$$z = (2t + \sinh(t))^2 + (e^t - t^2)\sin(2t + \sinh(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = (4t + 2\sinh(t)) \cdot (2 + \cosh(t)) + (e^t - 2t)\sin(2t + \sinh(t)) + (e^t - t^2)\cos(2t + \sinh(t))(2 + \cosh(t))$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = 3$$

Funkcja w postaci $z(u, v) = f(x(u,v), y(u,v))$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$$

Zamiana zmiennych w wyrażeniach różniczkowych
może prowadzić do uproszczenia wyrażenia różniczkowego
lub opisu obszaru, w którym jest rozpatrywane

Przykład

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = ? \qquad x = r\cos(\theta) \quad y = r\sin(\theta)$

$z(x,y) = z(x(r,\theta), y(r,\theta))$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (-r\sin(\theta)) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot r\cos(\theta) \end{aligned}\right. \xrightarrow[\text{równań}]{\text{układ}} \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos(\theta)\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \sin(\theta)\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = r\frac{\partial z}{\partial r}$$

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Maksimum lokalne w P_0

$\exists_{\delta>0} \forall_{P \in S(P_0,\delta)} \; f(P) \leq f(P_0)$ niewłaściwe

$\exists_{\delta>0} \forall_{P \in S(P_0,\delta)} \; f(P) < f(P_0)$ właściwe

Minimum lokalne w P_0

$\exists_{\delta>0} \forall_{P \in S(P_0,\delta)} \; f(P) \geq f(P_0)$ niewłaściwe

$\exists_{\delta>0} \forall_{P \in S(P_0,\delta)} \; f(P) > f(P_0)$ właściwe

W zbiorze ograniczonym funkcja może nie mieć ekstremów lokalnych
ale przyjmować wartości największe / najmniejsze na brzegu zbioru

Warunek konieczny

jeśli funkcja ma w P_0 ekstremum lokalne i istnieją $f_x(P_0)$ i $f_y(P_0)$
to $f_x(P_0)=0 \wedge f_y(P_0)=0$
(warunek nie jest wystarczający dla istnienia ekstremum)

Punkt stacjonarny (krytyczny)

pochodne cząstkowe istnieją i się zerują

Warunek wystarczający

$f_x(P_0)=0 \wedge f_y(P_0)=0$

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y) \cdot f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y)$$

- $W(x_0,y_0)>0 \rightarrow$ jest ekstremum w P_0
  - $f_{xx}(x_0,y_0)<0 \rightarrow$ maksimum
  - $f_{xx}(x_0,y_0)>0 \rightarrow$ minimum
- $W(x_0,y_0)<0 \rightarrow$ nie ma ekstremum w P_0
- $W(x_0,y_0)=0 \rightarrow$ nie wiadomo, trzeba skorzystać z innej metody

Szukanie wartości największej / najmniejszej

1. Sprawdzenie punktów stacjonarnych (ekstrema lokalne) we wnętrzu zbioru $\mathrm{Int}\,D$
2. Sprawdzenie punktów brzegowych zbioru ∂D

Pochodna kierunkowa w $\mathbb{R}^2$

Wersor - wektor o długości 1

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

α - kąt z OX $\quad \beta$ - kąt z OY

$|\vec{s}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$

$P_0\vec{s}$ - półoś o początku w P_0 i zwrocie $\vec{s}$

$\{P \in \mathbb{R}^2 : \overrightarrow{P_0P} = t\vec{s} \wedge t \geq 0\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (x_0 + at, y_0 + bt) \wedge t \geq 0\}$

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\cos(\beta) \wedge t \geq 0\}$

$$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0) = \lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\cos(\beta)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{df}{d\vec{s}} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cos(\beta) = f_x(P_0) \cdot a + f_y(P_0) \cdot b = \begin{bmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$\frac{df}{d\vec{s}}(P_0)$ mówi jaka jest prędkość zmiany funkcji w kierunku $\vec{s}$ w punkcie P_0

Wyprowadzenie

$F(t) = f(x(t), y(t))$

$$F_+'(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot y'(t)$$

Dla większej liczby zmiennych jest analogicznie

Gradient funkcji

$$\nabla f(x,y) = \operatorname{grad} f(P_0) = \begin{bmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(P_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)\right]$$

Wektor wskazujący kierunek najszybszego wzrostu funkcji

$$\frac{df}{d\vec{s}} = |\nabla f(x,y)| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{s}, \nabla f(x,y))$$

$\frac{df}{d\vec{s}}$ ma największą wartość kiedy $\vec{s}$ i $\nabla f(P_0)$ są zgodne

$$-|\nabla f(P_0)| \leq \frac{df}{d\vec{s}}(P_0) \leq |\nabla f(P_0)|$$

Funkcja uwikłana

jeśli istnieje funkcja $y = f(x)$ spełniająca $\forall_{x \in X}\ F(x, f(x)) = 0$

to nazywa się funkcją uwikłaną określoną w X równaniem $F(x,y) = 0$

Przykład

$y = \sqrt{1-x^2}$ jest funkcją określoną na $[-1, 1]$ w sposób uwikłany przez $x^2 + y^2 - 1 = 0$

bo $\forall x \in [-1, 1]\quad x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0$

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności

jeśli $F(x_0, y_0) = 0 \wedge F_y(x_0, y_0) \neq 0$

to istnieje dokładnie jedna funkcja uwikłana $y = f(x)$

określona w otoczeniu x_0 przez $F(x,y) = 0$

i spełniająca $y_0 = f(x_0)$

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \qquad f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

Różniczka zupełna

składnik liniowy względem Δx i Δy przyrostu funkcji Δf różniczkowalnej w $P_0 = (x_0, y_0)$

$$df(P_0) = f_x(P_0)\,dx + f_y(P_0)\,dy$$

Różniczkowalność

funkcja jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0)

$$\Longleftrightarrow$$

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + K(\Delta x, \Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

i $\lim\limits_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} K(\Delta x, \Delta y) = 0$

Przykład

$f(x,y) = x^2 + xy$

$f_x(2,-1) = 3$

$f_y(2,-1) = 2$

$df(2,-1) = 3dx + 2dy$

Różniczki służą do przybliżania wartości funkcji w pobliżu określonego punktu

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x,y) + df(x,y)$$

Przykład

$f(x,y) = \sqrt{xy}$ $\quad P = (2.1, 8.05)$

$x = 2 \quad dx = 0.1 \quad y = 8 \quad dy = 0.05$

$f_x(2,8) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot y \Big|_{(2,8)} = 1$

$f_y(2,8) = \frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot x \Big|_{(2,8)} = \frac{1}{4}$

$$\sqrt{2.1\cdot 8.05} \approx \sqrt{2\cdot 8} + 1\cdot 0.1 + \frac{1}{4}\cdot 0.05 = 4.1125$$