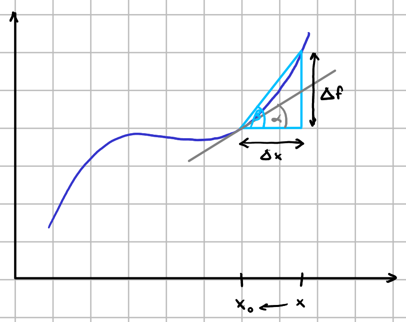
Rachunek różniczkowy funkcji 1 zmiennej

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pochodna f w punkcie x_0 to granica ilorazu różnicowego
(jeśli istnieje i jest właściwa)

Jeśli istnieje pochodna w x_0 to f jest różniczkowalna w x_0

dx – nieskończenie mały przyrost
$df = f'(x_0)\,dx$ – różniczka



$\tan(\beta) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$

$f'(x_0) = \tan(\alpha)$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ – styczna

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ – średnie tempo zmian

$\frac{df}{dx}$ – chwilowe tempo zmian

Pochodną $f: D \to \mathbb{R}$ definiuje się na otwartym przedziale D
bo w definicji istnieją obie granice jednostronne
więc dla każdego x_0 istnieje sąsiedztwo $Q(x_0, r) \subset D$

Na końcu przedziału może istnieć conajwyżej pochodna jednostronna

Nie istnieje $f'(0)$ dla $f(x) = |x|$ i generalnie w "ostrych punktach"

Pochodne jednostronne

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ istnieje $\iff$ $f'_+(x_0)$ i $f'_-(x_0)$ istnieją, są skończone i są sobie równe

Warunek konieczny istnienia pochodnej

$f'(x_0)$ istnieje $\implies$ f jest ciągła w x_0

Pochodne wyższych rzędów

Pochodna pochodnej (o ile istnieje)

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x)$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

$f(x) = x^4$
$f'(x) = \frac{df}{dx} = 4x^3$
$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = 12x^2$
$f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} = 24x$
$f^{(4)}(x) = \frac{d^4 f}{dx^4} = 24$
$f^{(5)}(x) = \frac{d^5 f}{dx^5} = 0$

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na pochodnych

- $(cf)' = cf'$
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Podstawowe pochodne

- $\frac{d}{dx} c = 0 \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha - 1} \qquad x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a) \qquad a > 0, \ x \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
- $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$
- $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
- $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$
- $\frac{d}{dx} \cot(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x)$
- $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

Jeśli $y = f(x)$ jest ciągła i ściśle monotoniczna w (a, b)
i w $x_0 \in (a, b)$ ma pochodną $f'(x_0) \neq 0$
to $x = g(y)$ ma w $y_0 = f(x_0)$ pochodną

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} g(y)} \Bigg|_{y = f(x)}$$

Przykład

$y = \arcsin(x) \iff x = \sin(y)$

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin(y)} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \log_a(x) \iff a^y = x$

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} a^y} = \frac{1}{a^y \ln(a)} = \frac{1}{x \ln(a)}$$

Twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej (reguła łańcuchowa)

Jeśli $u = h(x)$ ma pochodną $h'(x)$ w x,
a $y = f(u)$ ma pochodną $f'(u)$ w $u = h(x)$
to $\varphi(x) = f(h(x))$ ma w x pochodną

$$[f(h(x))]' = f'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Przykład

$$\frac{d}{dx} 2^{\arctan(\sin(x))} = \frac{d}{du} 2^u \cdot \frac{d}{dv} \arctan(v) \cdot \frac{d}{dx} \sin(x)$$

$$2^u \ln(2) \cdot \frac{1}{1+v^2} \cdot \cos(x)$$

$$2^{\arctan(\sin(x))} \ln(2) \cdot \frac{1}{1+\sin^2(x)} \cdot \cos(x)$$

Pochodna logarytmiczna

$$\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

pozwala na łatwiejsze obliczanie pochodnych

Wyprowadzenie

$$x > 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Przykład

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$\ln|f(x)| = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln|x^2+1| - \frac{1}{15}\ln|5-x|$$

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln|f(x)|$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5-x}\right]$$

Pochodna funkcji zadanej parametrycznie

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

jeśli g i h mają skończone pochodne i $g'(t) \neq 0$

to $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Przykład

$$x^2 + y^2 = r^2,\ y > 0 \rightarrow \begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\sin(t) \end{cases},\ t \in [0, \pi]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt} r\sin(t)}{\frac{d}{dt} r\cos(t)} = \frac{r}{r} \cdot \frac{\cos(t)}{-\sin(t)} = -\cot(t) = -\frac{x}{y}$$

Różniczkowanie funkcji w postaci uwikłanej

Okrąg $x^2+y^2=r^2$ można wyrazić jako funkcję 2 zmiennych

$$F(x,y) = x^2+y^2-r^2$$

$$F(x,y)=0 \longrightarrow \text{postać uwikłana}$$

dla okręgu

$$x^2+y^2-2x+4y-3=0 \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^2+y^2-2x+4y-3\right] = \frac{d}{dx}[0]$$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 - 2\frac{d}{dx}x + 4\frac{d}{dx}y - \frac{d}{dx}3 = \frac{d}{dx}0$$

$$2x + \frac{d}{dy}y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - 2 + \frac{d}{dy}[y]\frac{dy}{dx} - 0 = 0$$ traktuję y jako funkcję x

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y+1)\frac{dy}{dx} = -2x+2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-2}{2y+1}$$

Styczna do wykresu

Równanie stycznej do wykresu w punkcie $(x_0, f(x_0))$ (jeśli $f'(x_0)\in\mathbb{R}$)

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

lub $x = x_0$ kiedy $f'(x_0) \longrightarrow \pm\infty$

Normalna do wykresu

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

Kąt między krzywymi

Kąt $\gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ między stycznymi do prostych w punkcie

$$\gamma = \begin{cases} \arctan\left|\dfrac{f'(x_0)-g'(x_0)}{1+f'(x_0)g'(x_0)}\right| & \text{dla } 1+f'(x_0)g'(x_0) \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{dla } 1+f'(x_0)g'(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\gamma = \alpha - \beta = \arctan(\tan(\alpha-\beta))$$

$$= \arctan\left(\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}\right)$$

$$\alpha = f'(x_0) \qquad \beta = g'(x_0)$$

Twierdzenie de l'Hôpitala

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x_0) = 0$

lub $\lim\limits_{x \to x_0} g(x_0) = \pm\infty$

i istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub nie)

to $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

prawdziwe też dla granic jednostronnych i w nieskończoności

Przykład

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Asymptoty

Asymptoty pionowe

w punktach $c \in D_f$

lewostronna $x = c$ dla $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$

prawostronna $x = c$ dla $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$

obustronna jednocześnie prawostronna i lewostronna

Asymptoty ukośne

zachowanie funkcji w $\pm\infty$, ma sens tylko dla nieograniczonej dziedziny

prawostronna $y = mx + k$ kiedy

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge k = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

lewostronna $y = mx + k$ kiedy

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \wedge k = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx]$$

obustronna jednocześnie prawostronna i lewostronna

asymptota pozioma dla $m = 0$

Twierdzenie o zachowaniu słabej nierówności w granicy funkcji

Dla funkcji f i g, takich że $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$

$\exists r>0 \ \forall x \in D \cap S(x_0, r) \quad f(x) \le g(x) \implies a \le b$

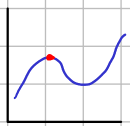
przydatne do dowodzenia twierdzeń

Ekstrema

Przyjmujemy, że krańce przedziałów nie są ekstremami lokalnymi
Ekstremum globalne nie musi być ekstremum lokalnym

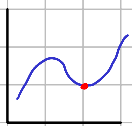
Maksimum lokalne f w x_0

$\exists \delta > 0 \ \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) \le f(x_0)$

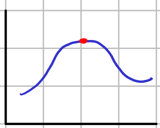


Minimum lokalne f w x_0

$\exists \delta > 0 \ \forall x \in S(x_0, \delta) \quad f(x) \ge f(x_0)$

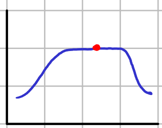


Ekstrema właściwe



$f(x) < f(x_0)$

Ekstrema niewłaściwe



$f(x) \le f(x_0)$

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeśli f ma w x_0 ekstremum i $f'(x_0)$ istnieje to $f'(x_0) = 0$

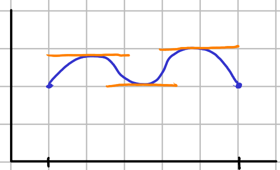
Funkcja może osiągnąć minimum kiedy $f'(x_0)=0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje
Implikacja nie działa w drugą stronę $(y = x^3)$

Punkty krytyczne funkcji

1) Pochodna istnieje i jest równa 0
2) Pochodna nie istnieje

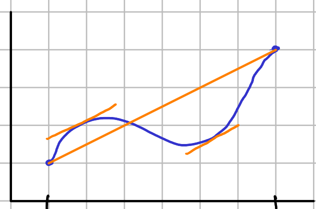
Twierdzenie Rolle'a

Jeśli funkcja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła
i $f(a) = f(b)$
to $\exists c \in (a,b)$ $f'(c) = 0$
(istnieje pozioma styczna)



Twierdzenie Lagrange'a

Jeśli funkcja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$
i różniczkowalna na (a,b)
to $\exists c \in (a,b)$ $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$
(istnieje styczna równoległa do siecznej)



Wnioski z twierdzenia Lagrange'a

1) $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) = 0 \implies f$ jest stała w (a,b)

2) $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) > 0 \implies f$ jest rosnąca (a,b)

3) $\forall x \in (a,b)$ $f'(x) < 0 \implies f$ jest malejąca (a,b)

Można wykazać $\arctan(x) < x - \frac{1}{6}x^3$ na $(0,1)$

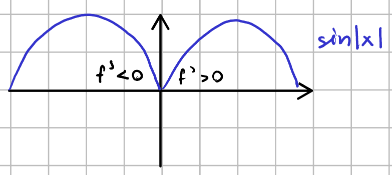
$f(x) = \arctan(x) - x + \frac{1}{6}x^3$ spełnia założenia twierdzenia

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{x^2(x^2-1)}{2(1+x^2)}$$

$\forall x \in (0,1)$ $f'(x) < 0 \to f$ jest malejąca
$f(0) = 0$
więc $\forall x \in (0,1)$ $f(x) = \arctan(x) - x + \frac{1}{6}x^3 < 0$
czyli $\arctan(x) < x - \frac{1}{6}x^3$

I Warunek wystarczający istnienia ekstremum
(first derivative test)

Funkcja ciągła f ma ekstremum lokalne w x_0
jeśli f' zmienia znak w otoczeniu x_0
(nawet jeśli $f'(x_0)$ nie istnieje)



ma minimum lokalne w $x=0$
chociaż $f'(0)$ nie istnieje

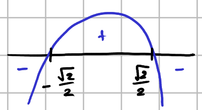
Przykład

$f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ $\quad D_f = [-1,1]$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) + 1 \cdot \sqrt{1-x^2} = \frac{-\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

f' nie istnieje dla $x = \pm 1$ ale to krańce przedziału



$f(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{1}{2}$ minimum lokalne
$f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$ maksimum lokalne

→ Jeśli funkcja ma tylko 1 ekstremum na danym przedziale to jest to ekstremum globalne w tym przedziale

→ Funkcja ciągła w $[a,b]$ osiąga wartość największą i najmniejszą albo na krańcach przedziału albo w ekstremach lokalnych

→ Żeby znaleźć globalne ekstremum f trzeba sprawdzić punkty, gdzie:
- $f'(x) = 0$
- f' nie istnieje → punkty stacjonarne
- krańce przedziału

Wzór Taylora

Jeśli funkcja ma ciągłe pochodne do rzędu $(n-1)$ włącznie
w przedziale domkniętym o końcach x i x_0
oraz ma pochodną rzędu n wewnątrz tego przedziału
to istnieje takie c między x a x_0 że

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{wielomian Taylora}} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{reszta (błąd przybliżenia)}}$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

dla $n=1$ wzór daje to samo co twierdzenie Lagrange'a

skoro funkcję w pobliżu punktu x_0 można przybliżyć przez jej styczną
to w podobny sposób można ją przybliżyć wielomianem stopnia 2, 3, 4, ...

Im wyższy stopień wielomianu $(n-1)$ tym dokładniejsze przybliżenie (mniejszy błąd)
Im bliżej x_0 szacujemy wartość f tym dokładniejsze przybliżenie

Wzór Maclaurina

(wzór Taylora dla $x_0 = 0$)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!}x^n \qquad \Theta \in (0,1)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\Theta x)}{n!}x^n$$

Wzory pozwalają na przybliżenie dowolnej funkcji przez wielomian
i oszacowanie błędu tego przybliżenia

Przybliżenie e^x wielomianem Maclaurina

$$\frac{d^k}{dx^k} e^x = e^x \qquad e^0 = 1$$

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

z błędem $\frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$ dla $0 < \Theta < 1$

wartość błędu zależy od n i x

Przybliżenie $\sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$ $\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin(x)$ $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos(x)$ $\quad f'''(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin(x)$ $\quad f^{(4)}(0) = 0$

...

zostaną tylko wyrazy nieparzystego stopnia

$\sin(x)$ jest funkcją nieparzystą

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Przybliżenie $\cos(x)$

$f'(x) = -\sin(x)$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x)$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin(x)$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos(x)$ $\quad f^{(4)}(0) = 1$

...

zostaną same wyrazy parzystego stopnia

$\cos(x)$ jest funkcją parzystą

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Przybliżenie $\ln(x)$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f'(1) = 1$

$f''(x) = -x^{-2}$ $\quad f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2x^{-3}$ $\quad f^{(3)}(1) = 2$

$f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$ $\quad f^{(4)}(1) = -3!$

szukamy przybliżenia dla $x_0 = 1$

żeby uniknąć problemu z

dzieleniem przez 0

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot x^{-k} \qquad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!$$

$$\ln(x) \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1} \cdot (k-1)!}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$$

$$\ln(x) \simeq (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

$$\ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

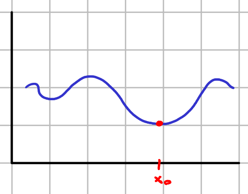
II Warunek wystarczający istnienia ekstremum (second derivative test)

Jeśli funkcja f ma w otoczeniu x_0 pochodne do rzędu n (włącznie), $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ i dla wszystkich pochodnych niższego rzędu $0<k<n$ $f^{(k)}(x_0)=0$ ($f^{(n)}$ jest pierwszą niezerującą się pochodną) to:

1) Jeśli n jest nieparzyste to f nie ma ekstremum w x_0

2) Jeśli n jest parzyste to f ma ekstremum lokalne w x_0
minimum dla $f^{(n)}(x_0) > 0$
maksimum dla $f^{(n)}(x_0) < 0$

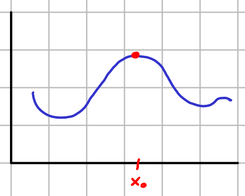
Wypukłość i wklęsłość



wypukła (concave up) w x_0

wykres leży nad styczną w x_0

$f''(x_0) > 0$



wklęsła (concave down) w x_0

wykres leży pod styczną w x_0

$f''(x_0) < 0$

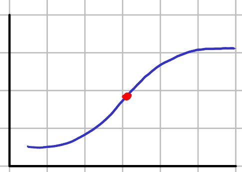
Warunek wystarczający wklęsłości / wypukłości

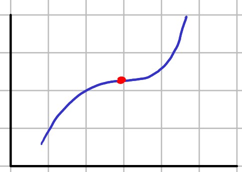
$f''(x_0) > 0 \implies f$ jest wypukła w x_0
$f''(x_0) < 0 \implies f$ jest wklęsła w x_0

Punkt przegięcia krzywej

Punkt taki, że z jednej strony krzywa jest wypukła, a z drugiej wklęsła.
Punkt w którym druga pochodna zmienia znak (warunek wystarczający)

Jeśli x_0 jest punktem przegięcia to $f''(x_0) = 0$ (warunek konieczny)





Może wystąpić w punkcie, gdzie f'' nie istnieje albo się zeruje

Badanie funkcji

1) Dziedzina

2) Cechy szczególne (parzystość, nieparzystość, okresowość)

3) Granice na końcach dziedziny

4) Asymptoty

5) Monotoniczność i ekstrema

6) Wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia

7) Wykres

Funkcje parzyste i nieparzyste wystarczy zbadać w przedziale $(0,+\infty)$ i wykorzystać symetrię

Funkcje okresowe wystarczy zbadać w jednym okresie

Przykład - badanie $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

1) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

2) nie ma cech szczególnych

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\cancel{\frac{-1}{x^2}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$

$x=0 \to$ asymptota pionowa prawostronna

$m_p = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$k_p = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-x] = \lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{-1}{x^2}}e^{\frac{1}{x}}}{\cancel{\frac{-1}{x^2}}} = 1$

$m_l = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

$k_l = \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-x] = 1$

$y = x+1 \to$ asymptota ukośna obustronna

5) $f'(x) = \frac{d}{dx} xe^{\frac{1}{x}} = x\cdot\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + 1\cdot e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$f'>0 \iff e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-1}{x}>0 \iff x(x-1)>0 \iff x\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

$f'<0 \iff x\in(0,1]$

$f(1) = e$ — minimum lokalne

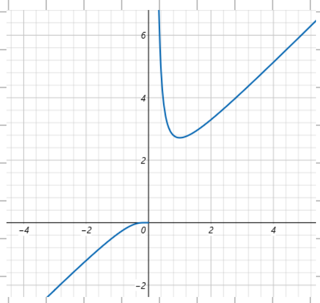
6) $f''(x) = \frac{d}{dx} e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$

$f'' > 0 \iff \frac{1}{x^3} > 0 \iff x > 0$ wypukła w $(0, +\infty)$

$f'' < 0 \iff \frac{1}{x^3} < 0 \iff x < 0$ wklęsła w $(-\infty, 0)$

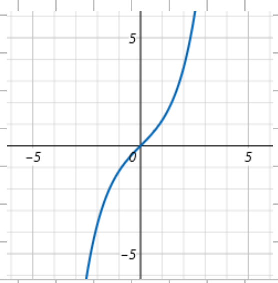
brak punktów przegięcia

7)



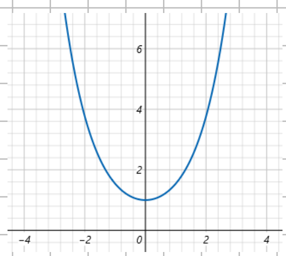
Funkcje hiperboliczne

$\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$



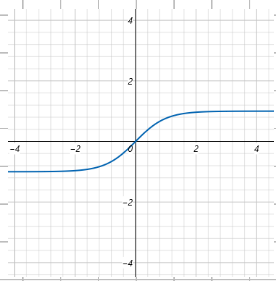
$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$



$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$

$\tanh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$



$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$