Zestaw 4

1.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

1)

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = (b+a)^5$$

$$\begin{array}{cccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\ \binom{5}{5} & \binom{5}{4} & \binom{5}{3} & \binom{5}{2} & \binom{5}{1} & \binom{5}{0} \end{array}$$

Każdy wiersz odpowiada rozwinięciu dwumianu Newtona
Każdy wiersz jest symetryczny
k-ty i symetrycznie (n-k)-ty wyraz to współczynnik przy k-tym i (n-k)-tym składniku sumy

k-ty od lewej = k-ty od prawej więc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$\binom{n}{k}$ oznacza k-tą liczbę w n-tym rzędzie
wyrazy w n+1 rzędzie otrzymuje się sumując wyrazy z rzędu n

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

$\binom{n}{k}$, $\binom{n}{k+1}$, $\binom{n+1}{k+1}$

dla $n=4,\ k=1$

$$\binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$
$$4 + 6 = 10$$
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

3) $\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&1&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1&&& \\ &&1&&3&&3&&1&& \\ &1&&4&&6&&4&&1& \\ 1&&5&&10&&10&&5&&1 \end{array}$$

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$$

4) $\binom{n+1}{2} = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{(n+1)!}{2!\,(n-1)!} = \binom{n+1}{2}$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&&1&&&&&& \\ &&&&&1&&1&&&&& \\ &&&&1&&2&&1&&&& \\ &&&1&&3&&3&&1&&& \\ &&1&&4&&6&&4&&1&& \\ &1&&5&&10&&10&&5&&1& \\ 1&&6&&15&&20&&15&&6&&1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{2} &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \\ &= n + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \\ &= n + (n-1) + \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \binom{n-2}{2} \\ &\ldots \end{aligned}$$

5) $\binom{n+1}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$

kończy się na 2-gim rzędzie

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\binom{n+1}{3} &= \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \\
&= \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} \\
&= \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3}
\end{aligned}
$$

6) $$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-1}{2k} + \binom{2n-1}{2k-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} 1^k \cdot 1^{2n-1-k} = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

parzyste i nieparzyste

$$\binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \ldots + \binom{2n}{2n-1} = \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2} + \binom{2n-1}{3} + \ldots + \binom{2n-1}{2n-2} + \binom{2n-1}{2n-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{2n-1-k} = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

z tożsamości 2)

$$\binom{2n}{2k} = \binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2k}$$

$$\binom{2n}{0} = 1 = \binom{2n-1}{-1} + \binom{2n-1}{0} = 0 + 1$$

7) $$0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ldots + n\binom{n}{n} \stackrel{?}{=} n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-(k-1))!} \cdot \frac{k}{k} \cdot n$$

$$\sum_{k=0}^{n} n \cdot \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Liczba podzbiorów zbioru n-elementowego

8) $$2^0 \binom{n}{0} + 2^1 \binom{n}{1} + \ldots + 2^n \binom{n}{n} \stackrel{?}{=} 3^n$$

$$2^0 \cdot 1^n \binom{n}{0} + 2^1 \cdot 1^{n-1} \binom{n}{1} + \ldots + 2^n \cdot 1^0 \binom{n}{n}$$

$$(2+1)^n = 3^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 2^i \cdot 1^{n-i} = (2+1)^n = 3^n$$

9) $$\binom{m+n}{k} \stackrel{?}{=} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{0} + \binom{m}{k-1}\binom{n}{1} + \ldots + \binom{m}{0} \cdot \binom{n}{k}$$

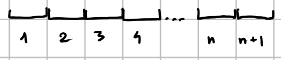
wybieranie podzbiorów

żeby wybrać k z m+n

mogę wziąć k z m i 0 z n, k-1 z m i 1 z n

ogólnie p z m i k-p z n

3.



$N = \binom{n+1}{3} \cdot 2$

wybór 3 kreseł ↓ ABC / CBA

$N = \underbrace{1\cdot(n+1-2)\cdot 2} + \underbrace{2\cdot(n+1-3)\cdot 2} + \dots + \underbrace{(n-1)\cdot 1\cdot 2}$

B na miejscu nr 2
1 wolne po lewej
n+1 - 2 wolne po prawej
ABC / CBA

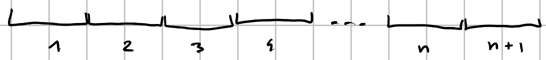
B na miejscu nr 3

B na miejscu n

$N = \sum_{k=1}^{n-1} k\cdot(n+1-(k+1))\cdot 2 = 2\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = 2\cdot\sum_{k=0}^{n} k(n-k)$ (oba dodatkowe wyrazy = 0)

$\frac{1}{2}N = \sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \binom{n+1}{3}$

4.



$N = 2\cdot\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$

ABC/ACB
jedyne możliwe usadzenia na wybranych kanapach

wybór 3 kanap

2 kanapy
B i C siedzą razem

$N = \underbrace{(n+1-1)\cdot(n+1-1)} + \underbrace{(n+1-2)(n+1-2)} + \dots + \underbrace{(n+1-n)(n+1-n)}$

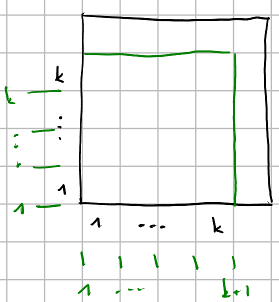
A siedzi na kanapie nr 1
B i C wybierają spośród n na prawo

A na nr 2

A na nr n

$N = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$

5.



Kwadrat o boku k wyznacza jednoznacznie prostokąty zawarte w $k\times k$, a nie zawarte w $(k-1)\times(k-1)$

Przylega do górnego boku
Przylega do prawego boku

$N_k = \binom{k+1}{2}\cdot k + \binom{k+1}{2}\cdot k - k^2 = \frac{(k+1)k}{2}\cdot k\cdot 2 - k^2 = k^3 + k^2 - k^2 = k^3$

dwa dolny pionowe

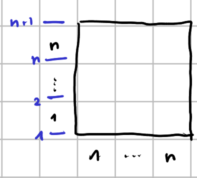
dwa lewy poziome

kwadraty liczone podwójnie

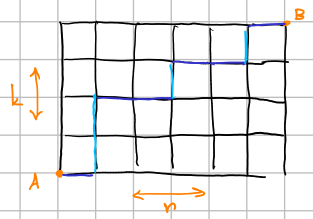
$N = \sum_{k=1}^{n} n^3$

$\binom{n+1}{2}^2$

boki długości n → n+1 krawędzi
wybór 2 poziomych i 2 pionowych
→ jednoznacznie określa prostokąt



Przydatne / ciekawe



najkrótsza droga po kratce ma długość $n+k$

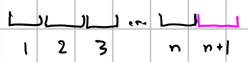
na ile sposobów można wybrać optymalną trasę

$n+k$ razy wybiera się czy iść w prawo czy do góry

$$\underset{\text{w górę}}{\binom{n+k}{k}} = \underset{\text{w prawo}}{\binom{n+k}{n}}$$

* jak to się ma do $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$



wybieram $k+1$ elementów

fioletowy albo będzie albo nie będzie

$\binom{n}{k}$ — i jeden już wybrany (ostatni)

$\binom{n}{k+1}$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-i}$$

$$(x+y)(x+y)\dots(x+y)$$

wybieram i - elementowy podzbiór czynników → po mnożeniu da x^i

pozostały $n-i$ – elementowy podzbiór daje y^{n-i}

dla każdego i mogę to wybrać na $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ sposobów

liczba podzbiorów $2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$

$$0 = (1-1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i}(-1)^i = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} - \binom{2n}{3} + \dots \binom{2n}{2n}$$

$$0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} n\binom{n-1}{i-1} \dots$$

$$i \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} = n\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = n\frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-1-(i-1))!} = n\binom{n-1}{i-1}$$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^n = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}$$