

Funkcja $f: X \rightarrow Y$

Relacja binarna \cup zbiorze $X \times Y$

1. $\forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in f$
2. $\forall x \in X \forall y_1, y_2 \in Y [(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$

Przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru X
jednemu elementowi zbioru Y

funkcja ~ odwzorowanie ~ przekształcenie

Dziedzina funkcji f $D_f = X$

Argumenty funkcji f elementy D_f

Wartości funkcji dla argumentu x

$$y = f(x) \quad x \mapsto y \quad x \mapsto f(x)$$

Zbiór wartości

$$f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X \quad y = f(x)\} = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y$$

Wydruk funkcji $f: X \rightarrow Y$

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

Zbiór wszystkich funkcji $f: X \rightarrow Y$ Y^X

Przykłady funkcji

Identyczność $id_X: X \rightarrow X \quad id_X(x) = x$

Funkcja charakterystyczna zbioru A

$$\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A \end{cases}$$

Ciągłość z liczbami (podłoga)

$$\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \quad \lfloor 5 \rfloor = 5 \quad \lfloor 5.1 \rfloor = 5 \quad \lfloor -5.1 \rfloor = -6$$

Nieskończone ciągi

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad a_n = f(n)$$

Własności funkcji

Różnowartościowość (iniekcja)

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

funkcja "1-1"

Suradeja (funkcja jest "na")

$$\forall y \in Y \exists x \in X \quad y = f(x)$$

$$f(x) = y$$

Bijekcja (funkcja wzajemnie jednoznaczna)

różnowartościowa i "na"

Przykład $f(x) = \sin(x)$

a) mówiąc $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

nie jest 1-1 bo $f(0) = f(\pi)$

nie jest "na" bo $\neg \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 7$

b) mówiąc $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

nie jest 1-1 bo $f(0) = f(\pi)$

jest "na" bo $\forall y \in [-1, 1] \exists x \in \mathbb{R} \quad y = f(x)$ np. $x = \arcsin(y)$

c) mówiąc $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

jest różnowartościowa bo jest rosnąca

nie jest "na" bo $\neg \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 7$

d) mówiąc $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

jest różnowartościowa

jest "na"

więc jest bijekcją

e) mówiąc $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, 1]$

to nie jest funkcja

Złożenie funkcji (superpozycja)

dla $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$

$g \circ f: X \rightarrow Z \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$

nie jest przemienne $g \circ f \neq f \circ g$ (na ogół)

jest liniowa $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$f(x) = e^x \quad g(x) = \sin(x)$$

$$(f \circ g)(x) = e^{\sin(x)} \quad (g \circ f)(x) = \sin(e^x)$$

Funkcja odwrotna f^{-1}

$g: Y \rightarrow X$ jest odwrotną do $f: X \rightarrow Y$

jeśli: $\forall x \in X (g \circ f)(x) = x$ i $\forall y \in Y (f \circ g)(y) = y$

funkcja posiada funkcję odwrotną \Leftrightarrow jest bijekcją

funkcja odwrotna do złożenia $g \circ f$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Wykres f i f^{-1} są symetryczne względem prostej $y=x$

Przykład

$$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], \quad f(x) = \sin(x)$$

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad f^{-1}(x) = \arcsin(x)$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad g(x) = e^x$$

$$g^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g^{-1}(x) = \ln(x)$$

Wyznacz funkcję odwrotną do $f(x) = e^{3x-1}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

1) Czy f jest "1-1"

$$e^{3x_1-1} = e^{3x_2-1} \Rightarrow 3x_1-1 = 3x_2-1 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \checkmark$$

2) Czy f jest "no"

$$e^{3x-1} = y \quad 3x-1 = \ln(y) \quad x = \frac{\ln(y)+1}{3}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \exists x \in \mathbb{R} \quad x = \frac{\ln(y)+1}{3} \quad \checkmark$$

funkcja odwrotna $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(\ln(x)+1)$

Permutacje

Bijekcje skończonego zbioru X

(permutacje elementów zbioru X)

$f: X \rightarrow X$ gdzie $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \text{ definicja permutacji}$$

Złożenie permutacji:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g(1) & g(2) & \dots & g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \dots & f(g(n)) \end{pmatrix}$$

Przykład

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Złożenie permutacji nie jest przenikowe

Skoro permutacja jest bijekcją to istnieje permutacja odwrotna

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Obrazy i przeciwbrazy zbioru

niech $f: X \rightarrow Y$ $A \subseteq X$ $B \subseteq Y$

Obraz zbioru A wyznaczony przez f

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

R_f jest obrazem zbioru D_f wyznaczonym przez f

dla zbioru jednoelementowego $f(\{a_0\}) = \{f(a_0)\}$

dla zbioru skończonego $f(\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}) = \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n)\}$

dla $f: X \rightarrow Y$ $f(X) = R_f$ zbiór wartości

Przeciwbrazy zbioru B wyznaczony przez f

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

można określić przeciwbrazy również dla funkcji nieskończonych

dla zbioru jednoelementowego

$$f^{-1}(\{b_0\}) = \{x \in X : f(x) = b_0\} \rightarrow \text{zbior rozwiązań równania } f(x) = b_0$$

dla zbiorów skończonych

$$f^{-1}(\{b_1, b_2, \dots, b_n\}) = \{x \in X : f(x) = b_1 \vee f(x) = b_2 \vee \dots \vee f(x) = b_n\}$$

dla przedziałów

$$f^{-1}([a, b]) = \{x \in X : a \leq x \leq b\} \rightarrow \text{zbior rozwiązań nierówności}$$

Funkcja 2 zmiennej

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

wybraszając funkcji jest w przestrzeni trójwymiarowej
(argumenty na płaszczyźnie i wartości jako wysokość)

Poziomice funkcji

przeciwbrazy zbiorów jednoelementowych

Także na płaszczyźnie pary argumentów, które dają taką samą wartość

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$$

$$f^{-1}(\{a\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a\} \text{ okrąg o promieniu } \sqrt{a}$$

$$f^{-1}(\{-2, 1, 3\}) \rightarrow \text{dwa okręgi o promieniach } 1 : \sqrt{3}$$

$$f^{-1}((1, 4)) \rightarrow \text{okrągły obszar ograniczony okręgiem o promieniu } 1 : 2$$

Własności obrazów i przeciwoobrazów

dla $f: X \rightarrow Y$ $A, B \subseteq X$ $C, D \subseteq Y$

$$1. f(\emptyset) = \emptyset \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$2. f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$3. f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$4. f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \quad f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$$

$$5. A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad f(f^{-1}(C)) \subseteq C$$

Dla rożnorodnych $f: X \rightarrow Y$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

$$A = f^{-1}(f(A))$$

Dla funkcji "na" $f: X \rightarrow Y$

$$f(f^{-1}(C)) = C$$