

Pochodne cząstkowe

Pochodna cząstkowa funkcji $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$P_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = f_{x_i}(P_0) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_i^0 + \Delta x_i, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_i}$$

jeśli ta granica istnieje i jest własna

Wszystkie zmienne funkcji poza x_i traktuje się jako stałe i oblicza pochodną tak samo jak dla funkcji 1 zmiennej.

$$f(x, y, z) = x^2 y^3 + e^{xy^2} + x \sin(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2y^3 x + y^2 e^{xy^2} + \sin(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3x^2 y^2 + 2xy e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = x \cos(z)$$

Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

pochodna cząstkowa pochodnej cząstkowej

Oznaczenia

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = f_{xyz}$$

Pochodna cząstkowa mieszana
rzędu $k \geq 2$ i inne niż $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$

Twierdzenie Shwartza

jeśli funkcja ma ciągłe pochodne mieszane rzędu $k \geq 2$
różniące się kolejnością różniczkowania względem zmiennych
to te pochodne są sobie równe

$$f \in C^2(D) \Rightarrow \forall (x, y) \in D \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Przykład

$$z(x, y) = x^3 - 2x^2 y + 3y^2 \quad z \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$1 \text{ rzędu: } \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 4yx \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 2x^2$$

$$2 \text{ rzędu: } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 4y \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4x = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4x$$

Pochodna funkcji złożonej

Funkcja w postaci $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$

$$\varphi'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

Przykład

$$z = x^2 + y \sin(x) \quad x = 2t + \sinh(t) \quad y = e^t - t^2$$

1. sposób

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y \cos(x) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin(x) \quad \frac{dx}{dt} = \cosh(t) + 2 \quad \frac{dy}{dt} = e^t - 2t$$

$$x(0) = 0 \quad y(0) = 1 \quad \frac{dz}{dt}(0) = \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) \cdot \frac{dy}{dt}(0) = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 3$$

2. sposób

$$z = (2t + \sinh(t))^2 + (e^t - t^2) \sin(2t + \sinh(t))$$

$$\frac{dz}{dt} = (4t + 2 \sinh(t)) \cdot (2 + \cosh(t)) + (e^t - 2t) \sin(2t + \sinh(t)) + (e^t - t^2) \cos(2t + \sinh(t)) (2 + \cosh(t))$$

$$\frac{dz}{dt}(0) = 3$$

Funkcja w postaci $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$$

Zamiana zmiennych w wyrażeniach różniczkowych

można prowadzić do uproszczenia wyrażenia różniczkowego

lub opisu obszaru, w którym jest rozpatrywane

Przykład

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = ? \quad x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta)$$

$$z(x, y) = z(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos(\theta) + \frac{\partial z}{\partial y} \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot (-r \sin(\theta)) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot r \cos(\theta)$$

układ
równań

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(\theta) \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin(\theta) \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = r \frac{\partial z}{\partial r}$$

Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Maksimum lokalne w P_0

$$\exists \delta > 0 \quad \forall P \in S(P_0, \delta) \quad f(P) \leq f(P_0) \quad \text{nieściśle}$$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall P \in S(P_0, \delta) \quad f(P) < f(P_0) \quad \text{ściśle}$$

Minimum lokalne w P_0

$$\exists \delta > 0 \quad \forall P \in S(P_0, \delta) \quad f(P) \geq f(P_0) \quad \text{nieściśle}$$

$$\exists \delta > 0 \quad \forall P \in S(P_0, \delta) \quad f(P) > f(P_0) \quad \text{ściśle}$$

W zbiorze ograniczonym funkcja może nie mieć ekstremów lokalnych
ale przyjmować wartości największe / najmniejsze na brzegu zbioru

Warunek konieczny

jeśli funkcja ma w P_0 ekstremum lokalne i istnieją $f_x(P_0)$ i $f_y(P_0)$

$$\text{to } f_x(P_0) = 0 \wedge f_y(P_0) = 0$$

(warunek nie jest wystarczający dla istnienia ekstremum)

Punkt stacjonarny (krytyczny)

pochothane cząstkowe istnieją i są zerują

Warunek wystarczający

$$f_x(P_0) = 0 \wedge f_y(P_0) = 0$$

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x, y) \cdot f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$$

- $W(x_0, y_0) > 0 \rightarrow$ jest ekstremum w P_0
 - $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \rightarrow$ maksimum
 - $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \rightarrow$ minimum
- $W(x_0, y_0) < 0 \rightarrow$ nie ma ekstremum w P_0
- $W(x_0, y_0) = 0 \rightarrow$ nie wiadomo, trzeba skorzystać z innych metod

Szukanie wartości największej / najmniejszej

1. Sprawdzenie punktów stacjonarnych (ekstrema lokalne) we wnętrzu zbioru $\text{Int} D$
2. Sprawdzenie punktów brzegowych zbioru ∂D

Pochodna kierunkowa w \mathbb{R}^2

Wektor - wektor o długości 1

$$\vec{s} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad \alpha - \text{kąt z } OX \quad \beta - \text{kąt z } OY$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

$P_0 \vec{s}$ - półprosta o początku w P_0 i zwrocie \vec{s}

$$\{P \in \mathbb{R}^2: \vec{P_0 P} = t\vec{s} \wedge t \geq 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x, y) = (x_0 + at, y_0 + bt) \wedge t \geq 0\}$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x, y) = (x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\cos(\beta)) \wedge t \geq 0\}$$

$$\frac{df}{ds}(P_0) = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\vec{P_0 P}|} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t\cos(\alpha), y_0 + t\cos(\beta)) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\cos(\beta) = f_x(P_0) \cdot a + f_y(P_0) \cdot b = \begin{bmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$\frac{df}{ds}(P_0)$ mówi jaka jest prędkość zmiany funkcji w kierunku \vec{s} w punkcie P_0

Dla większej liczby zmiennych jest analogicznie

Wyrowadzenie

$$F(t) = f(x(t), y(t))$$

$$F'_t(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \cdot y'(t)$$

Gradient funkcji

$$\nabla f(x, y) = \text{grad } f(P_0) = \begin{bmatrix} f_x(P_0) \\ f_y(P_0) \end{bmatrix}$$

$$\nabla f(P_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0) \right]$$

Wektor wskazujący kierunek najszybszego wzrostu funkcji

$$\frac{df}{ds} = |\nabla f(x, y)| \cdot \cos \angle(\vec{s}, \nabla f(x, y))$$

$\frac{df}{ds}$ ma największą wartość kiedy \vec{s} i $\nabla f(P_0)$ są zgodne

$$-|\nabla f(P_0)| \leq \frac{df}{ds}(P_0) \leq |\nabla f(P_0)|$$

Funkcja uwikłana

jeśli istnieje funkcja $y = f(x)$ spełniająca $\forall x \in X \quad F(x, f(x)) = 0$

to nazywa się funkcją uwikłaną określoną w X równaniem $F(x, y) = 0$

Przykład

$y = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją określoną na $[-1, 1]$ w sposób uwikłany przez $x^2 + y^2 - 1 = 0$
bo $\forall x \in [-1, 1] \quad x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$

Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności

jeśli $F(x_0, y_0) = 0 \wedge F_y(x_0, y_0) \neq 0$

to istnieje dokładnie jedna funkcja uwikłana $y = f(x)$

określona w otoczeniu x_0 przez $F(x, y) = 0$

i spełniająca $y_0 = f(x_0)$

$$f'(x) = - \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad f''(x) = - \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

Różniczka zupełna

składnik liniowy względem Δx i Δy przyrostu

funkcji Δf różniczkalnej w $P_0 = (x_0, y_0)$

$$df(P_0) = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy$$

Różniczalność

funkcja jest różniczkalna w punkcie (x_0, y_0)

\Leftrightarrow

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + K(\Delta x, \Delta y) \cdot \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\text{i } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} K(\Delta x, \Delta y) = 0$$

Przykład

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

$$f_x(2, -1) = 3$$

$$f_y(2, -1) = 2$$

$$df(2, -1) = 3dx + 2dy$$

Różniczki służą do przybliżania wartości funkcji

w pobliżu danego punktu

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df(x, y)$$

Przykład

$$f(x, y) = \sqrt{x \cdot y} \quad P = (2.1, 8.05)$$

$$x = 2 \quad \Delta x = 0.1 \quad y = 8 \quad \Delta y = 0.05$$

$$f_x(2, 8) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot y \Big|_{(2,8)} = 1$$

$$f_y(2, 8) = \frac{1}{2\sqrt{xy}} \cdot x \Big|_{(2,8)} = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{2.1 \cdot 8.05} \approx \sqrt{2 \cdot 8} + 1 \cdot 0.1 + \frac{1}{4} \cdot 0.05 = 4.1125$$