

Teoria mnogości

Pojęcie pierwotne teorii mnogości to zbiór oraz być elementem zbioru.

Pozostałe pojęcia definiuje się za pomocą tych dwóch.

$x \in A$ x jest elementem zbioru A

$x \notin A$ x nie należy do zbioru A

\emptyset zbiór pusty

Relacja inkluzji

$A \subseteq B$ A jest podzbiorem zbioru B
stosujemy zamiennie \subset i \subseteq

Równość zbiorów

$$A = B$$

Zbiór pusty jest tylko jeden i jest podzbiorem każdego zbioru
Zbiór A jest swoim właściwym podzbiorem

$$A \subset A \quad \emptyset \subset A$$

Inkluzja właściwa

$A \subset B$ A jest podzbiorem właściwym zbioru B
 $A \subseteq B \wedge A \neq B$

Sposoby określania zbioru

- wypisać elementy

$$\{a, b\} = \{b, a\} = \{b, b, a, b, a, a\}$$

zbiór może być elementem zbioru $\{\{1\}\}$

elementy mogą być różnych typów

$$A = \{\emptyset, 1, \{2, 3\}\}$$

$$1 \in A \quad \{1\} \subseteq A$$

$$2 \notin A \quad \{2, 3\} \in A$$

$$\emptyset \subseteq A \quad \emptyset \in A \quad \{\emptyset\} \subseteq A \quad \{\emptyset\} \neq \emptyset$$

- określić za pomocą funkcji zdaniowej

$$\{x \in X : W(x)\}$$

np. $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = (0, +\infty)$ przedział

$\{n \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} n = 2k\} = 2\mathbb{Z}$ zbiór liczb parzystych

anty nomia Russela

niech $W = \{x : x \notin x\}$
czy $W \in W$?

jeśli $W \in W$ to musi spełniać $\phi(x) : x \notin x$

jeśli $W \notin W$ to nie spełnia $\phi(x) : x \notin x$

sprzeczność \rightarrow obiekt W nie jest zbiorem, pytać nie ma sensu

Własności zbiorów określa zbiór aksjomatów ZFC
(Zermello - Frankla z aksjomatem wyboru)

- aksjomat regularności

nie możliwe jest $x \in x$

nie możliwe jest $x \in y \in z \dots \in x$

- zbiór jako obraz zbioru wyznaczony przez funkcję

dla $f : X \rightarrow Y$ i $A \subseteq X$

$f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq Y$

np. $\{2k : k \in \mathbb{Z}\} \quad f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

Podstawowe działania na zbiorach

niech X będzie ustalonym przestrzenią, a A i B jej podzbiórami

- Suma $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$
- Iloczyn $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$
- Różnica $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$
- dopełnienie $A' = X \setminus A = \{x : x \in X \wedge x \notin A\}$

Różnoważne są warunki

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$$

Własności

1. $A \subseteq A$ zwrótność
2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ przechodność
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ antysymetryczność

Własności działań na zbiorach

- 1.
2. ...
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

Monotonizacja sumy i iloczynu

dla $A \subseteq A_1, B \subseteq B_1$

$$\begin{aligned} \rightarrow A \cup B &\subseteq A_1 \cup B_1 \\ \rightarrow A \cap B &\subseteq A_1 \cap B_1 \end{aligned}$$

Dowód $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$x \in L$$

$$x \in A \cap (B \cup C)$$

$$x \in A \wedge x \in B \cup C$$

$$x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$x \in P \quad \text{co kończy dowód}$$

Zbiór potęgowy

$$2^A = P(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

zbiór wszystkich podzbiorów zbioru A

$$\emptyset, A \in P(A)$$

$$A \subseteq B \implies P(A) \subseteq P(B)$$

jeśli X ma n elementów to $P(X)$ ma 2^n elementów

np. $A = \{1, 2, 3\}$

$$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

Produkt - iloczyn kartezjański zbiorów

symbol (x, y) oznacza uporządkowaną parę elementów x i y

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$X \times Y = \begin{cases} \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\} & \text{dla } X \neq \emptyset \wedge Y \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{dla } X = \emptyset \vee Y = \emptyset \end{cases}$$

oznaczenie $X \times X = X^2$

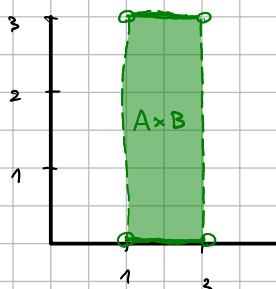
jeśli X ma n elementów i Y ma m elementów
to $X \times Y$ ma $m \cdot n$ elementów

jeśli $X \neq Y$ to $X \times Y \neq Y \times X$

np.

$$A = (1, 2) \quad B = [0, 3]$$

$$A \times B = \{(x, y) : 1 < x < 2 \wedge 0 \leq y \leq 3\}$$



Dla danych zbiorów X, Y, Z

$$X \times (Y \times Z) = \dots$$

niech X_1, X_2, \dots, X_n - zbiory niepuste i $n \geq 2$ i $n \in \mathbb{N}$

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{i=1}^n X_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\}$$

np. n -wymiarowa przestrzeń rzeczywista

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

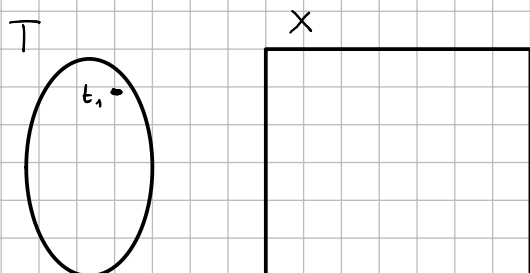
Indeksowane rodziny zbiorów

Indeksowana rodzina zbioru X to funkcja

$$f: T \rightarrow 2^X$$

elementy zbioru T to indeksy

Indeksowaną rodzinę oznacza się $(A_t)_{t \in T}$



np. $X = \mathbb{R} \quad T = \mathbb{N} \quad A_t = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{t} \leq x \leq t\}$

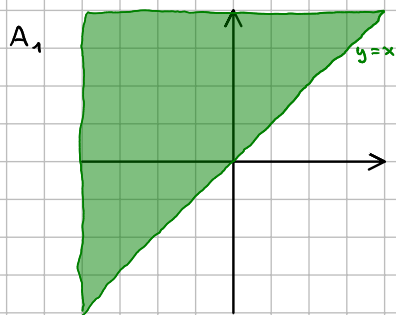
$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = [\frac{1}{2}, 2]$$

$$A_{10} = [\frac{1}{10}, 10]$$

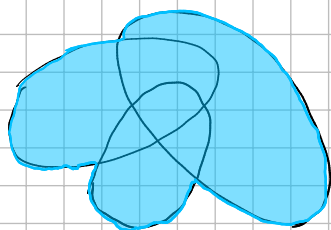
rodzina o własności $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{N} \quad t_1 < t_2 \implies A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$
nazwa się rosnącą

przykład $X = \mathbb{R}^2$ $T = \mathbb{N}$ $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq tx\}$



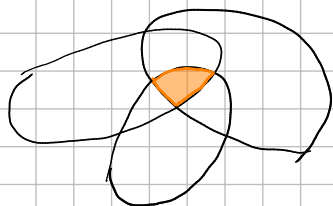
Uogólniona suma zbiorów A_t , $t \in T$

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \in X : \exists t \in T \ x \in A_t\}$$



Uogólniony iloczyn zbiorów

$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \in X : \forall t \in T \ x \in A_t\}$$

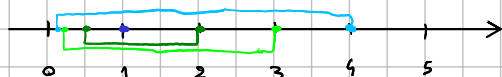


W przypadku gdy indeksy są kolejnymi liczbami naturalnymi $n \geq n_0$

$$\bigcup_{t \in T} A_t = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n \quad \bigcap_{t \in T} A_t = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n$$

przykład:

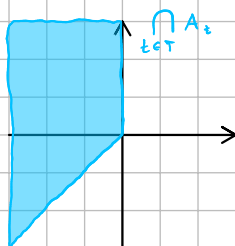
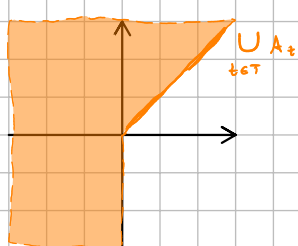
uogólniona suma $A_t = [\frac{1}{t}, t]$, $T = \mathbb{N}$



$$\bigcap_{t \in T} A_t = \{1\} \quad \bigcup_{t \in T} A_t = (0, +\infty)$$

przebiegły są domknięte ale ich suma jest otwarta

przykład: $A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq tx\}$



Własności działań uogólnionych

1.

2.

3.

4.

• • •

5.

6.

7.

8.

"Złe wpływa na intelekt, gdy się wszystko rozumie"
Joseph Canot