Teoria mocy

Żeby określić, że zbiory są równoliczne można dobrać elementy w pary
$\to$ istnieje bijekcja z X do Y

$X \sim Y$ są równoliczne

Zbiór nieskończony $\to$ równoliczny z własnym podzbiorem właściwym

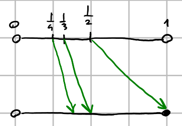
Część nie musi być mniejsza od całości

zbiory równoliczne

$\mathbb{N} \sim 2\mathbb{N}$ $\quad f(k) = 2k$

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \tan(x)$

$(0,1) \sim (0,1]$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-1} & \text{dla } x = \frac{1}{n}, n \in N \\ x & \text{dla } x \neq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$2^X \sim \{0,1\}^X$

zbiór wszystkich podzbiorów X

zbiór wszystkich funkcji $f: X \to \{0,1\}$

$g: 2^X \to \{0,1\}^X$

jeśli $A \in 2^X$ to $g(A) = \chi_A$ – funkcja charakterystyczna

dla innego zbioru, funkcja charakterystyczna musi być inna

każda z funkcji $\{0,1\}^X$ jest funkcją charakterystyczną pewnego zbioru $\quad g^{-1}(\{1\})$

więc g jest bijekcją

równoliczność $\to$ podobne do relacji równoważności (kolekcja wszystkich zbiorów nie jest zbiorem a relacje są określone na zbiorach)

$X \sim X$

$X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$ bijekcja jest odwracalna

$X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$ złożenie bijekcji

Zbiorowi przypisuje się liczbę kardynalną – moc zbioru

$\overline{\overline{X}}, |X|$ $\quad \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} \iff X \sim Y$

Własności

Zbiory przeliczalne

równoliczne z $\mathbb{N}$

co najwyżej przeliczalny – skończony lub równoliczny z $\mathbb{N}$

moc $\to$ $\aleph_0$ alef (alfabet hebrajski)

z elementów zbioru można utworzyć ciąg, ustawić w listę, ponumerować

Hotel Hilberta

suma zbioru skończonego i przeliczalnego jest przeliczalna

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ $\quad B = \{b_1, b_2, \dots\}$

$A \cup B = \{a_1, a_2, \dots a_n, b_1, b_2, \dots\}$

suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna $\to$ $\mathbb{Z}$ jest przeliczalny

$A = \{a_1, a_2, \dots\}$ $\quad B = \{b_1, b_2, \dots\}$

$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$

skończona suma zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym

iloczyn kartezjański zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny $(\mathbb{N}^2) \rightarrow$

	b_1	b_2	b_3	...
a_1	(a_1,b_1)	(a_1,b_2)	(a_1,b_3)	
a_2	(a_2,b_1)	(a_2,b_2)		
a_3	(a_3,b_1)			
$\vdots$				

każda grupa z przekątnej jest skończony

metoda przekątniowa

iloczyn kartezjański skończonej liczby zbiorów przeliczalnych jest przeliczalny

$\mathbb{Q}$ jest przeliczalny

	1	2	3	4	5	6	...
1	1	2	3	4	5	6	...
2	$1/2$	$2/2$	$3/2$	$4/2$	$5/2$	$6/2$	...
3	$1/3$	$2/3$	$3/3$	$4/3$	$5/3$	$6/3$	
$\vdots$							

$q = \frac{a}{b}$, $NWD(a,b)=1$

$q \rightarrow (a,b)$

$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}^2$

Przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna

A_1	a_1^1	a_1^2	a_1^3	...
A_2	a_2^1	a_2^2	a_2^3	...
A_3	a_3^1	a_3^2	a_3^3	...
$\vdots$				

zbiór skończonych ciągów liczb wymiernych $(\mathbb{Q}^n)$ jest przeliczalny
zbiór wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny $(\mathbb{Q}[x])$
zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny
(pierwiastki wielomianów o współczynnikach wymiernych $\mathbb{Q}[x]$)
w postaci $\sqrt[n]{q}$ $q \in \mathbb{Q}$ $n \in \mathbb{N}$
nie wszystkie liczby rzeczywiste

liczby przestępne - rzeczywiste ale nie algebraiczne

Zbiory nieprzeliczalne
zbiory, które są nieskończone i nie są przeliczalne
elementów nie da się ułożyć w ciąg

Dowód, że $(0,1)$ jest nieprzeliczalny (nie wprost) — dowód przekątniowy Cantora

założmy, że $(0,1)$ jest przeliczalny

	cyfry nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego
a_1	$0.\,a_1^1\ a_1^2\ a_1^3 \ldots$
a_2	$0.\,a_2^1\ a_2^2\ a_2^3 \ldots$
a_3	$0.\,a_3^1\ a_3^2\ a_3^3 \ldots$

dla jednoznaczności
weźmy $\frac{1}{2} = 0.4999\ldots$
itp. jeśli nie ma jednoznacznego rozwinięcia

liczba $b = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots$
b_1 - różna od $0, 9, a_1^1$
b_2 - różna od $0, 9, a_2^2$
$\vdots$

b różni się od każdej liczby na liście
różni się od a_n conajmniej cyfrą na pozycji a_n^n

sprzeczność więc $(0,1)$ nie jest przeliczalny

Własności

...

Zbiory nieprzeliczalne

$\mathbb{R}$

każdy przedział w $\mathbb{R}$

zbiór liczb niewymiernych $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

zbiór liczb przestępnych

Continuum $\mathfrak{C}$ (gotyckie c)

moc zbioru $\mathbb{R}$

$\mathfrak{C} \neq \aleph_0$

Porównywanie mocy zbiorów

$\overline{\overline{X}} = n \quad \overline{\overline{Y}} = m$

$n \leq m \iff \exists_{A \in 2^Y} X \sim A \subseteq Y$

$n < m \iff n \leq m \wedge n \neq m$

więc $\aleph_0 < \mathfrak{C}$ bo $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \wedge \overline{\overline{\mathbb{N}}} \neq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$

$\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{Y}} \iff$ istnieje funkcja różnowartościowa $f: X \to Y$

$\iff$ istnieje funkcja "na" $g: Y \to X$

$\overline{\overline{X}} = \mathfrak{C} \wedge \overline{\overline{Y}} = \aleph_0 \implies \overline{\overline{X \setminus Y}} = \mathfrak{C}$

własności ...

twierdzenie Cantora - Bernsteina

$X \subseteq Y \subseteq Z \wedge \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Z}} \implies \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{Z}}$

twierdzenie Cantora $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{2^X}}$

1° $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{2^X}}$

niech $f: X \to 2^X$, $f(x) = \{x\}$

funkcja jest różnowartościowa

więc X jest podzbiorem 2^X i $\overline{\overline{X}} \leq \overline{\overline{2^X}}$

2° $\overline{\overline{X}} \neq \overline{\overline{2^X}}$

dowód nie wprost

załóżmy, że $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{2^X}} \iff$ istnieje bijekcja $g: X \to 2^X$

$\forall x \in X \;\; g(x) \subset X$

niech $Z = \{x \in X : x \notin g(x)\}$, $Z \subseteq X \iff Z \in 2^X$

skoro g jest bijekcją to jest "na"

więc $\exists z \in X \;\; Z = g(z)$

czy $z \in Z$?

$z \in Z \iff z \notin g(z) = Z$ sprzeczność

więc założenie $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{2^X}}$ jest fałszywe

można tworzyć zbiory o coraz większych mocach

$\overline{\overline{2^{\mathbb{R}}}} > \mathfrak{C} \qquad \aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{2^{\mathbb{N}}}} < \overline{\overline{2^{2^{\mathbb{N}}}}} < \dots$

nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów
dowód nie wprost

zatóżmy, że Z jest zbiorem wszystkich zbiorów
wtedy $2^Z \subseteq Z \Leftrightarrow \overline{\overline{2^Z}} \leq \overline{\overline{Z}}$
z tw Cantora $\overline{\overline{Z}} < \overline{\overline{2^Z}}$ } sprzeczność

więc nie istnieje coś takiego jak zbiór wszystkich zbiorów

Arytmetyka liczb kardynalnych

$n = \overline{\overline{X}} \quad m = \overline{\overline{Y}} \quad X \cap Y = \emptyset$
$n + m = \overline{\overline{X \cup Y}}$

$\aleph_0 + \aleph_0 = |2\mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \setminus \{2\mathbb{N}\})| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$
$\aleph_0 + n = |\{1,2,\ldots n\} \cup \{n+1, n+2, \ldots\}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$
$n \in \mathbb{N}$

Własności dodawania
$n + m = m + n$
$n + (m+p) = (n+m) + p$
$n \leq m \Rightarrow n + p \leq m + p$ (ale nie musi dla $n < m$)
$n \geq \aleph_0 \vee m \geq \aleph_0 \Rightarrow n + m = \max\{n, m\}$

$\mathfrak{c} + n = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$

Mnożenie
$n = \overline{\overline{X}} \quad m = \overline{\overline{Y}} \quad n \cdot m = \overline{\overline{X \times Y}}$

- $n \cdot m = m \cdot n$
- $n(m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$
- $n(m + p) = nm + np$
- $n \leq m \Rightarrow n \cdot p \leq m \cdot p$
- $k \cdot m = \underbrace{m + m + \ldots + m}_{k} \quad k \in \mathbb{N}$
- $n \geq \aleph_0 \vee m \geq \aleph_0 \Rightarrow n \cdot m = \max\{n \cdot m\} = n + m$

$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \rightarrow |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

Przykład: kwadrat $[0,1] \times [0,1]$

1° $(0,1) \times (0,1) \sim (0,1)$
niech $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$
zapiszmy nieskończone rozwinięcia dziesiętne
$x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots$ rozwinięcia które nie kończą się zerami
$y = 0.y_1 y_2 y_3 \ldots$ (dla jednoznaczności)

a) zdefiniujmy $f: (0,1)^2 \to (0,1)$
$(x,y) \mapsto 0.x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3 \ldots \in (0,1)$
jest różnowartościowa $\Rightarrow |(0,1)^2| \leq |(0,1)|$

b) $|(0,1)| \leq |(0,1)^2|$
$(0,1) \sim (0,1) \times \{\frac{1}{2}\} \subseteq (0,1)^2 \Rightarrow |(0,1)| \leq |(0,1)^2|$
(odcinek)

z a i b wynika, że skoro $|(0,1)^2| \geq |(0,1)| \wedge |(0,1)^2| \leq |(0,1)|$ to $|(0,1)^2| = |(0,1)|$

$\mathfrak{c} = |(0,1)| = |(0,1)^2| = |(0,1)^2 \cup \text{obwód kwadratu}| = |(0,1) \cup \{0,1\}|$
więc $\mathfrak{c} = |[0,1]| = |[0,1]^2|$