

Liczby zespolone

\mathbb{C} - zbiór liczb zespolonych

Liczba zespolona - uporządkowana para liczb rzeczywistych (x, y)

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Dodawanie

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$(0, 0)$ - zero - element neutralny dodawania

Mnożenie

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$(1, 0)$ - jedynka - element neutralny mnożenia

Płaszczyzna zespolona (Gausa)

dodawanie liczb zespolonych interpretuje się jako dodawanie odpowiadających im wektorów

$$\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$$

ten zbiór jest utożsamiany ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

zamiast $(x, 0)$ przyjmuje się oznaczenie x

$(0, 1)$ - jednostka urojona j

$$j^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \quad j \notin \mathbb{R}$$

j jest pierwiastkiem kwadratowym $-1 \in \mathbb{R}$

$$a \cdot j = (a, 0) \cdot (0, 1) = (a \cdot 0 - 0 \cdot 1, a \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, a)$$

$$(a_j) \cdot (b_j) = (0, a) \cdot (0, b) = (0 \cdot 0 - a \cdot b, 0 \cdot b + a \cdot 0) = (-ab, 0) = -ab \in \mathbb{R}$$

Liczby czyste urojone - $yj = (0, y)$, $y \in \mathbb{R}$

na płaszczyźnie zespolonej, liczby czyste urojone leżą na osi pionowej OY

Postać kanoniczna (algebraiczna)

$$z = x + yj = (x, y)$$

Działania w postaci kanonicznej - tak samo jak dla liczb rzeczywistych

$$1) z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$2) z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) - j(y_1 - y_2)$$

$$3) z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

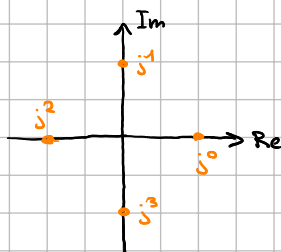
$$4) \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Potęgi j

$$j^0 = 1 \quad j^1 = j \quad j^2 = -1 \quad j^3 = -j$$

$$j^4 = 1 \quad j^5 = j \quad j^6 = -1 \quad j^7 = -j$$

$$j^k = j^{k \bmod 4}$$



Część rzeczywista $z = x + yj$ $\operatorname{Re} z = x$ ($x \in \mathbb{R}$)

Część urojona $z = x + yj$ $\operatorname{Im} z = y$ ($y \in \mathbb{R}$)

$$z = \operatorname{Re}(z) + j \operatorname{Im}(z)$$

Ośk płaszczyzny zespolonej - oś rzeczywista i oś urojona
i oznaczone $\operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} z$

Spaczenie $z = x + yj$ $\bar{z} = x - yj$

$$\overline{2-j} = 2+j$$

$$\overline{2} = 2$$

$$\overline{3j} = -3j$$

symetryczne względem osi rzeczywistej

$$z + 2\bar{z} = 6 + 5j$$

$$x + yj + 2x - 2yj = 6 + 5j$$

$$3x - yj = 6 + 5j$$

$$x = 2 \wedge y = -5 \quad z = 2 - 5j$$

Własności spaczenia

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

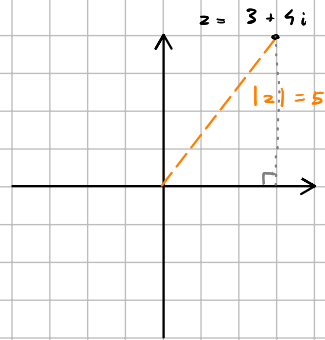
$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

Moduł liczby zespolonej $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ dla $z = x + yi$
odległość od punktu $(0,0)$



Własności modułu

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{dla } z_2 \neq 0$$

$$|z^n| = |z|^n$$

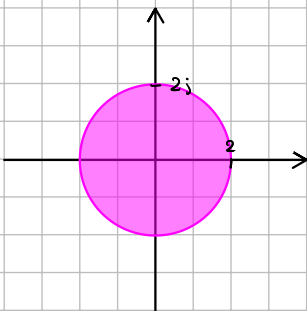
Interpretacja geometryczna

$z = x + yi$ można przedstawić jako punkt (x, y) na płaszczyźnie

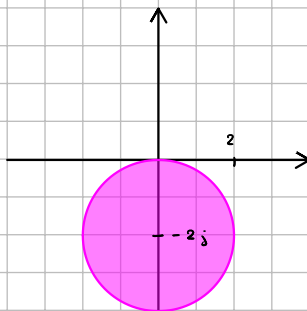
$|z|$ jest odległością tego punktu od punktu $(0,0)$

$|z_1 - z_2|$ jest odległością między z_1 i z_2

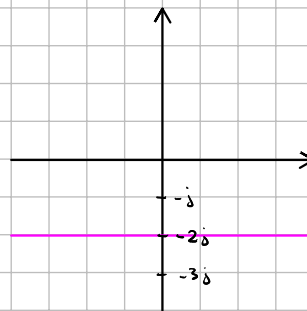
$$|z| \leq 2$$



$$|z + 2j| = 2$$



$$|z - j| = |z + 3j|$$



Argument liczby zespolonej φ

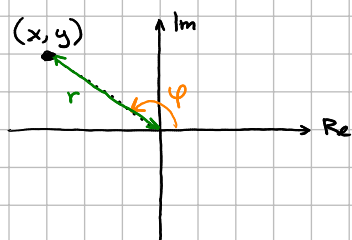
φ - kąt skierowany odpowiadający liczbie zespolonej z

$$z = x + jy = r\left(\frac{x}{r} + j\frac{y}{r}\right) = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad r = |z|$$

$\text{Arg } z$ - zbiór argumentów liczby zespolonej z (różniący się o $2\pi n$)

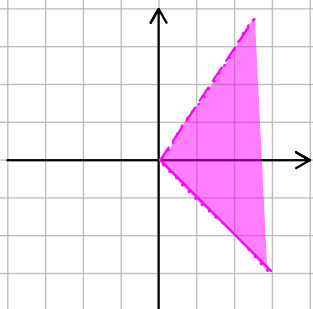
$\arg z$ - argument główny z przedziału $(-\pi, \pi]$

(określone dla $z \neq 0$)

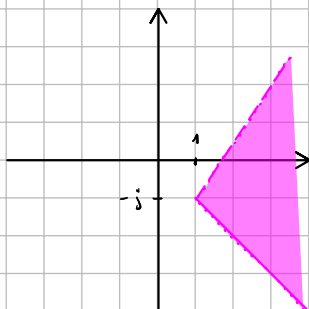


$$\text{dla } \varphi \in (-\pi, \pi] \quad \cos \varphi = \frac{\text{Re } z}{|z|} \quad \sin \varphi = \frac{\text{Im } z}{|z|} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}$$

$$\arg z \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$$



$$\arg(z - 1 + j) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$$



Postać trygonometryczna

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi), \text{ gdzie } r = |z| \text{ i } \varphi \in \text{Arg } z$$

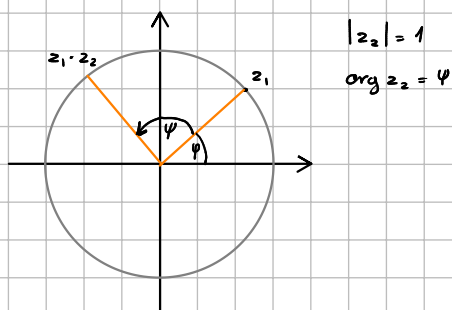
$$x = r \cos \varphi \quad y = r \sin \varphi$$

nie jest określona jednoznacznie

$$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \wedge \exists k \in \mathbb{Z} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Mnożenie przez liczbę o module 1 i argumentcie ψ
odpowiada obrótowi mnożonej o ψ



Działania na postaci trygonometrycznej

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi)) \quad \text{wzór Moirre'a}$$

$$\bar{z} = |z| (\cos(-\varphi) + j \sin(-\varphi))$$

$$-z = |z| (\cos(\varphi + \pi) + j \sin(\varphi + \pi))$$

Postać wykładnicza

$$z = r e^{j\varphi} = r (\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$$

$$\text{gdzie } r = |z|, \varphi \in \text{Arg } z, z \neq 0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \quad ; \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Przykłady

$$e = e = e^{0j}$$

$$-1 = e^{j\pi}$$

$$2j = 2 e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$-1-j = \sqrt{2} e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

$$(1+j)^{22} \cdot (\sqrt{3}-j)^{21} = \left[\sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \right]^{22} \cdot \left[2 e^{-j\frac{\pi}{6}} \right]^{21}$$

$$= 2^{\frac{22}{2}} \cdot 2^{21} \cdot e^{\frac{22\pi j}{4} - \frac{21\pi j}{6}} = 2^{32} e^{0j} = 2^{32}$$

Pierwiastki liczb zespolonych

$t \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem n -stopnia z $z \in \mathbb{C}$, jeśli $t^n = z$

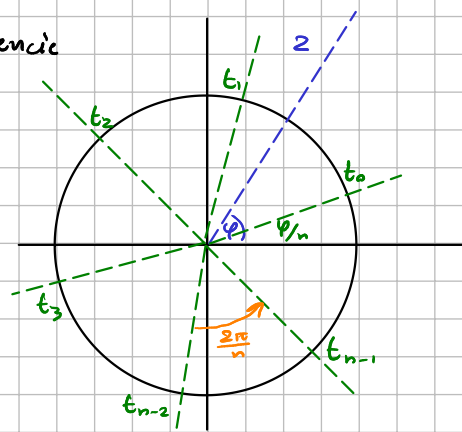
dla $z \neq 0$ istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z z

$$t_k = \sqrt[n]{r} e^{j \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq n-1$$

pierwiastek główny - pierwiastek o najmniejszym nieujemnym argumencie

$$\text{zbiór pierwiastków} \quad \sqrt[n]{z} = \{ t \in \mathbb{C} : t^n = z \}$$

pierwiastki - wierzchołki n -kąta foremnego



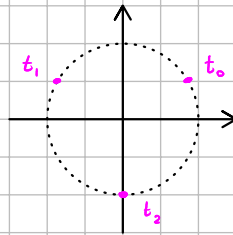
Przykład

$$\sqrt[3]{8j} = \left\{ 2e^{\frac{\pi + 2k\pi}{3}j} : 0 \leq k \leq 2 \wedge k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\left\{ 2e^{\frac{\pi}{6}j}, 2e^{\frac{5\pi}{6}j}, 2e^{-\frac{\pi}{2}j} \right\}$$

$$\left\{ \sqrt{3} + j, -\sqrt{3} + j, -2j \right\}$$

$$z = 8j \quad \arg z = \frac{\pi}{2} \quad |z| = 8$$



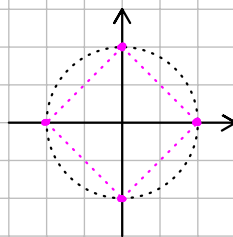
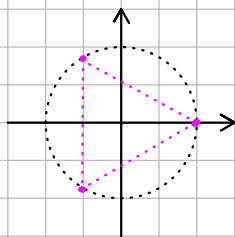
Pierwiastki $z = 1$

pierwiastki n -stopnia $z = 1$ oznaczają ω_k ($0 \leq k \leq n-1$)

$$\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}j} = \omega_1^k$$

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ e^{0j}, e^{\frac{2\pi}{3}j}, e^{-\frac{2\pi}{3}j} \right\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$\sqrt[4]{1} = \left\{ e^{0j}, e^{\frac{\pi}{2}j}, e^{\pi j}, e^{-\frac{\pi}{2}j} \right\} = \{1, j, -1, -j\}$$



Jeśli t jest dowolnym pierwiastkiem stopnia n z $z \neq 0$ to

$$\sqrt[n]{z} = \{ t\omega_k : k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq k \leq n-1 \}$$

znając jeden z pierwiastków z , pozostałe można otrzymać obracając go o $\frac{2\pi}{n}$

Przykład

$$z^4 = (2+j)^8 = [(2+j)^2]^4$$

$$\text{jedno z rozwiązań} \rightarrow z_0 = (2+j)^2 = 3+4j$$

$$\text{wszystkie} \rightarrow \{1 \cdot (3+4j), j(3+4j), -1(3+4j), -j(3+4j)\}$$

$$\{3+4j, -4+3j, -3-4j, 4-3j\}$$

Pierwiastki kwadratów

$$z = x + yj, \text{ szukam } t = a + bj \text{ takiego, że } t^2 = z$$

$$\left. \begin{aligned} (a+bj)^2 &= z \\ a^2 - b^2 + 2abj &= x + yj \\ |t^2| &= a^2 + b^2 \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} x &= a^2 - b^2 \\ y &= 2ab \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= a^2 + b^2 \end{aligned} \right\}$$

przykład

$$\sqrt{3-4j} = ?$$

$$t^2 = a^2 - b^2 + 2abj \quad |3-4j|=5$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = -4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1) \quad 2a^2 = 8 \quad a = -2 \vee a = 2 \\ 2) \quad -4b = -4 \quad \vee \quad 4b = -4 \\ \quad a = -2 \wedge b = 1 \quad \quad a = 2 \wedge b = -1 \end{array}$$

$$\sqrt{3-4j} = \{-2+j, 2-j\} \rightarrow \text{zawsze liczby sprzężone}$$

Wzory Δ do funkcji kwadratowej działają dla liczb zespolonych

Rozwiązanie równań w postaci wykładniczej

$$z^5 = 8\bar{z}^2$$

1) sprawdzam $z=0$

$$0^5 = 8 \cdot 0^2 \quad \checkmark$$

2) dla $z \neq 0$ zapisujemy postać wykładniczą

$$z = r e^{j\varphi} \quad r = |z| \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi \in \text{Arg } z$$

$$z^5 = r^5 e^{5j\varphi}$$

$$\bar{z} = r e^{-j\varphi}$$

$$\bar{z}^2 = r^2 e^{-2j\varphi}$$

$$r^5 e^{5j\varphi} = 8 r^2 e^{-2j\varphi}$$

3) porównujemy moduły

$$r^5 = 8r^2$$

$$r^3 = 8$$

$$r = 2 \in \mathbb{R}_+$$

4) porównujemy argumenty

$$5\varphi = -2\varphi + 2k\pi$$

$$7\varphi = 2k\pi$$

$$\varphi = \frac{2k\pi}{7}$$

\rightarrow będzie 7 interwałów

$$\varphi_0 = 0 \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{7} \quad \varphi_2 = \frac{4\pi}{7} \quad \dots \quad \varphi_6 = \frac{12\pi}{7}$$

5) rozwiązanie

$$z = 2 e^{\frac{2k\pi}{7}j} \quad \text{lub } z=0$$

$$\text{dla } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

