Rachunek całkowy

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"] \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"] \end{tikzcd}$$

W oparciu o definicje z rachunku różniczkowego definiuje się operacje odwrotne

Funkcja pierwotna

F jest funkcją pierwotną $f: X \to \mathbb{R}$ na przedziale X jeśli

$$\forall_{x \in X} \ \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Pochodna jest określona jednoznacznie
Funkcji pierwotnych jest nieskończenie wiele

np. dla 2^x: $\frac{1}{\ln(2)} 2^x$, $\frac{1}{\ln(2)} 2^x + 1$, $\frac{1}{\ln(2)} 2^x + 2$, ...

Warunek wystarczający

Jeśli f jest ciągła na X to f ma funkcję pierwotną na X

Implikacja odwrotna nie zachodzi

Może istnieć funkcja pierwotna dla funkcji nieciągłej w przeliczalnej liczbie punktów

Twierdzenie podstawowe o funkcjach pierwotnych

Jeśli F jest funkcją pierwotną f to każdą funkcję pierwotną można zapisać w postaci
$F + C_0$, $C_0 \in \mathbb{R}$

$\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$ → rodzina wszystkich funkcji pierwotnych

Całka nieoznaczona (antiderivative)

$\int f(x)\,dx$ → zbiór wszystkich funkcji pierwotnych f

Jeśli F jest funkcją pierwotną f to

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\frac{d}{dx} \int f(x)\,dx = f(x) + C$$

$$\int \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(x) + C$$

Podstawowe wzory

Nie dla każdej funkcji da się znaleźć całkę nieoznaczoną

Nie ma jawnych wzorów

$$\int 0 \, dx = C$$

$$\int 1 dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \qquad x>0, \ \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad x \neq 0$$

$$\int a^{x} dx = \frac{1}{\ln(a)} e^{x} + C \qquad a>0, \ a \neq 1$$

$$\int e^{x} dx = e^{x} + C$$

$$\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x + C$$

$$\int \log_a(x) \, dx = \frac{x \log_a(x) - x}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$$

$$\int \tan(x) \, dx = -\ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \cot(x) \, dx = \ln|\sin(x)| + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = \cot(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

$$\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$$

$$\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2(x)} = \tanh(x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2(x)} = -\coth(x) + C$$

Własności

$$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int f(x) \, dx \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

Całkowanie przez części

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Użyteczne kiedy $\int f'(x)g(x)\,dx$ jest łatwiejsza do policzenia
Trzeba dobrać odpowiednie podstawienie dla f i g

Można stosować wielokrotnie, zwłaszcza dla funkcji typu
$\int x^n e^x\,dx$, $\int x^n \sin(x)\,dx$, ...
Jeśli dojdzie się do sprzeczności to nic nie znaczy

Wyprowadzenie

$$\frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} f(x)g(x)\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

$$\int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

Przykład

- $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln(x) - x + C$

  $f = \ln(x)$ $\quad g' = 1$
  $f' = \frac{1}{x}$ $\quad g = x$

- $\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x) - \int -\cos(x)\,dx = \sin(x) - x\cos(x) + C$

  $f = x$ $\quad g' = \sin(x)$
  $f' = 1$ $\quad g = -\cos(x)$

- $\int e^{-x}\cos(x)\,dx = e^{-x}\sin(x) + \int e^{-x}\sin(x)\,dx = e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\cos(x)\,dx$

  $f = e^{-x}$ $\quad g' = \cos(x)$ $\qquad f = e^{-x}$ $\quad g' = \sin(x)$
  $f' = -e^{-x}$ $\quad g = \sin(x)$ $\qquad f' = -e^{-x}$ $\quad g = -\cos(x)$

  $$2\int e^{-x}\cos(x)\,dx = e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) + C$$
  $$\int e^{-x}\cos(x)\,dx = \frac{e^{-x}}{2}\left(\sin(x) - \cos(x)\right) + C$$

- $\int \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx = -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\int x^{-3}\,dx = -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^{-2}\right) + C = -\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

  $f = \ln(x)$ $\quad g' = x^{-3}$
  $f' = \frac{1}{x}$ $\quad g = -\frac{1}{2}x^{-2}$

Całkowanie przez podstawienie

$$\int f(x)\,dx = \int g(h(x)) \cdot h'(x)\,dx$$

podstawienie
$t = h(x)$
$dt = h'(x)\,dx$

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C = G(h(x)) + C$$

Użyteczne kiedy $\int g(t)\,dt$ jest prostsza do policzenia
Trzeba znaleźć dobre podstawienie

Wyprowadzenie

$$\frac{d}{dx}\left[g(h(x))\right] = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\int \frac{d}{dx} g(h(x))\,dx = \int g'(h(x)) \cdot h'(x)\,dx$$

$u = h(x)$ $\quad du = h'(x)\,dx$

$$g(h(x)) + C = \int g'(u)\,du$$

Przykład

- $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\arcsin(t) + C = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

  $x\,dx \to t = x^2$
  $dt = 2x\,dx$
  $x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$$\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,t^{-\frac{1}{2}+1} = 2t^{\frac{1}{2}}$$

- $$\int \frac{\sin(x)\,dx}{\sqrt{1+2\cos(x)}} = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{2\cos(x)+1} + C$$

  $\sin(x)\,dx \to t \sim \cos(x)$
  $t = 2\cos(x) + 1$
  $dt = -2\sin(x)\,dx$
  $\sin(x)\,dx = -\frac{1}{2}dt$

- $$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2}dt = \frac{1}{2}\int t^{-2}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-1} \cdot t^{-1} + C = -\frac{1}{2x^2+2} + C$$

  $x\,dx \to t \sim x^2$
  $t = x^2 + 1$
  $dt = 2x\,dx$
  $x\,dx = \frac{1}{2}dt$

- $$\int \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x}dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{3}{2}\left(\ln(x)+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

  $\frac{1}{x}dx \to t \sim \ln(x)$
  $t = \ln(x) + 1$
  $dt = \frac{1}{x}dx$

- $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2t}{t(t^2-1)}dt = 2\int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = 2\left[\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}\right.$$

$$= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C$$

$t = \sqrt{e^x+1}$ $\quad 2t\,dt = e^x\,dx$

$t^2 = e^x + 1$ $\quad dx = \frac{2t\,dt}{e^x} = \frac{2t\,dt}{t^2-1}$

Całkowanie przez podstawienie (2. postać)

dla różnowartościowej funkcji $\varphi(t)$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C$$

$x = \varphi(t)$

$dx = \varphi'(t)\,dt$

Przykład

- $\int \arccos(x)\,dx = \int -t\sin(t)\,dt = t\cos(t) - \sin(t) + C = x\arccos(x) - \sin(\arccos(x)) + C$

  $x = \cos(t) \quad t \in [0,\pi]$

  $t = \arccos(x)$

  $dx = -\sin(t)\,dt$

- $\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \sqrt{9-9\sin^2(t)}\cdot 3\cos(t)\,dt = \int 3\sqrt{1-\sin^2(t)}\cdot 3\cos(t)\,dt = 9\int \cos^2(t)\,dt$

  $= 9\int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \frac{9}{2}\int 1\,dt + \frac{9}{2}\int \cos(2t)\,dt = \frac{9}{2}t + \frac{9}{4}\sin(2t) + C$

  $= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + \sin\left(2\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right) + C$

  $x = 3\sin(t) \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

  $t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$

  $dx = 3\cos(t)\,dt$

Standardowe podstawienia

- $\int \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \left| x = r\sin(t) \right|$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$ podstawienie Eulera

- $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{1}{a}dx \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{a} \\ dt = \frac{1}{a}dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$

- $\int R(e^x)\,dx = \left| t = e^x \right|$

Nie każda całka wyraża się przez funkcje elementarne

Całki funkcji wymiernych

Każdą funkcję wymierną można przedstawić jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej

$$R(x) = W(x) + \frac{L(x)}{M(x)}, \quad \deg(L) < \deg(M)$$

Każdą funkcję wymierną właściwą można przedstawić jako sumę ułamków prostych

$$\frac{L(x)}{M(x)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{k_j} \frac{A_{ij}}{(x-a_j)^i} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{l_j} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_jx+q_j)^i} \right)$$

Ułamek prosty I rodzaju

$$\frac{A}{(x-a)^n}$$

Ułamek prosty II rodzaju

$$\frac{Bx+C}{x^2+px+q} \quad \Delta < 0$$

Całkowanie ułamków prostych

I rodzaju

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = \begin{cases} A\ln|x-a| + C & \text{dla } k=1 \\ \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k} + C & \text{dla } k>1 \end{cases}$$

II rodzaju

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}$$

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx = \left| \begin{matrix} t = x^2+px+q \\ dt = (2x+p)\,dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^k} = \begin{cases} \ln|t| + C & \text{dla } k=1 \\ \frac{1}{1-k}t^{1-k} + C & \text{dla } k>1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right]^k} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{\frac{4}{4q-p^2}}\left(x+\frac{p}{2}\right) \\ dx = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}\,dt \end{matrix} \right| = \left(\frac{4q-p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}-k} \int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$$

dla $k=1$ $\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) + C$

dla $k \geq 2$ stosować wzór rekurencyjny dopóki nie da się łatwo policzyć

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

W ten sposób można obliczyć całkę każdej funkcji wymiernej

Całki funkcji trygonometrycznych

Korzysta się z tożsamości i podstawień standardowych

- $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin(x)\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$
- $\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos((\alpha-\beta)x) - \cos((\alpha+\beta)x)\right]$
- $\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\cos((\alpha-\beta)x) + \cos((\alpha+\beta)x)\right]$
- $\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}\left[\sin((\alpha-\beta)x) + \sin((\alpha+\beta)x)\right]$

Podstawienia

- $\int R(\cos(x), \sin(x))\,dx$
  - $R(-\cos(x), \sin(x)) = -R(\cos(x), \sin(x)) \rightarrow |t = \sin(x)|$
  - $R(\cos(x), -\sin(x)) = -R(\cos(x), \sin(x)) \rightarrow |t = \cos(x)|$
  - $R(-\cos(x), -\sin(x)) = R(\cos(x), \sin(x)) \rightarrow |t = \tan(x)|$

- $\int R(\cos(x), \sin(x))\,dx = \left|\begin{array}{l} t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|$ Podstawienie universalne

  Zawsze działa i prowadzi do całki funkcji wymiernej

Wzór Ostrogradskiego

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{W_{n-1}(x)(2ax+b)}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} + W_{n-1}'(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad \Big/ \cdot\sqrt{ax^2+bx+c}$$

$$W_n(x) = \frac{1}{2}W_{n-1}(x)(2ax+b) + W_{n-1}'(x)(ax^2+bx+c) + \lambda$$

$W_{n-1}(x)$ jest o 1 stopień niższy od $W_n(x)$

Najpierw trzeba obliczyć współczynniki wielomianu $W_{n-1}(x)$ i λ → układ równań

Potem trzeba obliczyć całkę $\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

- $\int\sqrt{x^2+k}\,dx = \int\frac{x^2+k}{\sqrt{x^2+k}}\,dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+k} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$

Podstawienia Eulera

Do całek w postaci $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$ dla $a>0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$ dla $c>0$
- $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ dla $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Pozostałe podstawienia

- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx = \left| x = a\sin(t) \right|$

- $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx = \left| x = a\tan(t) \right|$

- $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx = \left| x = \frac{a}{\cos(t)} \right|$

- $\int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots x^{\frac{p_n}{q_n}})\,dx = \left| \begin{array}{l} x = t^k \\ k = NWW(q_1, \dots q_n) \end{array} \right|$

- $\int R(x, (ax+b)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots (ax+b)^{\frac{p_n}{q_n}})\,dx = \left| \begin{array}{l} ax+b = t^k \\ k = NWW(q_1, \dots q_n) \end{array} \right|$

- $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx = \left| \begin{array}{l} \frac{ax+b}{cx+d} = t^k \\ k = NWW(q_1, \dots q_n) \end{array} \right|$

- $\int \frac{Ax + B}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \left| x - \alpha = \frac{1}{t} \right|$