Równania różniczkowe zwyczajne

Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu n

$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$

$y = y(x)$ - funkcja niewiadoma

n - najwyższy rząd pochodnej

prawie nigdy nie da się rozwiązać analitycznie, poza szczególnymi przypadkami

Całka szczególna równania różniczkowego (CS)

jedno z rozwiązań równania

funkcja, która spełnia równanie na określonym przedziale

Przykład

$y' = 3x^2 \rightarrow$ CS: y^3, y^3+5, y^3+999, ...

Warunek początkowy równania

dla równania rzędu n to układ równań

który ogranicza zbiór rozwiązań do jednego konkretnego

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Zagadnienie Cauchy'ego - wyznaczenie CS równania spełniającej zadany warunek początkowy

Całka ogólna równania (CO)

(dla najprostszych typów równań)

n-parametrowa rodzina funkcji

zbiór wszystkich całek szczególnych

Przykład

$y'' + y = 0 \rightarrow y = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$ - całka ogólna, 2 parametry

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y_1(x_0) = y_1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} C_1 \sin(x_0) + C_2 \cos(x_0) = y_0 \\ C_1 \cos(x_0) - C_2 \sin(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Warunek początkowy daje zawsze układ Cramera $\rightarrow$ dokładnie 1 rozwiązanie $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$

Równania o zmiennych rozdzielonych

równania 1. rzędu w postaci

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{lub} \quad y'(x) = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Longrightarrow \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx \Rightarrow G(y) = F(x) + C$$

Równanie $G(y) = F(x) + C$ wyznacza całkę ogólną $y' = \frac{f(x)}{g(y)}$

Dla każdego warunku początkowego istnieje dokładnie 1 całka szczególna

Przykład

$y' = \frac{-x}{y}$, $y(-1) = 2$

$\int y\,dy = \int -x\,dx \rightarrow y^2 = -x^2 + C \rightarrow (2)^2 = -(-1)^2 + C \rightarrow C = 5$

$x^2 + y^2 = 5$

na przedziale $y \in (0, +\infty)$ CS: $y = \sqrt{5 - x^2}$

Równania w postaci $y' = f(\frac{y}{x})$

stosuje się standardowe podstawienie i sprowadza do równania o zmiennych rozdzielonych

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$
$$y = ux$$
$$y' = u'x + u$$

Po podstawieniu równanie ma postać

$$u'x + u = f(u) \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{f(u)-u}} \longrightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

Nie zawsze wyjdzie jawne rozwiązanie, częściej uwikłane

Przykład

$$y' = \frac{y}{x} + \tan(\tfrac{y}{x}) \qquad u = \frac{y}{x}$$

$$u'x + u = u + \tan(u) \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\tan(u)}{x} \longrightarrow \int \frac{du}{\tan(u)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\cos(u)}{\sin(u)} du = \left| \begin{matrix} t = \sin(u) \\ dt = \cos(u)\, du \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|\sin(u)| + C \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\ln|\sin(u)| = \ln|x| + C \rightarrow \ln\left|\frac{\sin(u)}{x}\right| = C \rightarrow \frac{\sin(u)}{x} = C \rightarrow \sin(\tfrac{y}{x}) = Cx$$

Dla równań $y' = f(ax + by + c) \longrightarrow$ podstawienie $\boxed{u(x) = ax + by(x) + c}$

Równania liniowe rzędu n

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

równanie jednorodne (RJ) $- f(x) = 0$

równanie niejednorodne (NJ) $- f(x) \neq 0$

równanie o stałych współczynnikach $- a_i(x) = a_i \in \mathbb{R}$

Równanie liniowe pierwszego rzędu

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Całka ogólna równania jednorodnego (CORJ)

$$y' + p(x)y = 0 \qquad y = 0 \text{ - całka szczególna}$$

Dla warunku początkowego istnieje dokładnie 1 całka szczególna

$$y = C e^{-\int p(x)\,dx}$$
$$y_0 = y(x_0)$$
$$y = y_0 e^{-\int [p(x) - p(x_0)] dx}$$

Wyprowadzenie dla $y \neq 0$

$$y' = -p(x)y$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\, dx$$
$$\ln|y| = -P(x) + C$$
$$y = C \cdot e^{-P(x)}$$

$$y_0 = y(x_0)$$
$$y_0 = C e^{-P(x_0)}$$
$$C = y_0 e^{P(x_0)}$$

$$y(x) = y_0 e^{P(x_0)} \cdot e^{-P(x)} = y_0 e^{P(x_0) - P(x)}$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego

1. Rozwiązać równanie jednorodne → wyznaczyć przestrzeń rozwiązań
2. Przesunąć przestrzeń rozwiązań do punktu szczególnego

CORN = CORJ + CSRN

jeśli y_1 jest CS równania $y' + p(x) = f_1(x)$
i y_2 jest CS równania $y' + p(x) = f_2(x)$
to $y_1 + y_2$ jest CS równania $y' + p(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Metoda uzmienniania stałej

1. znaleźć CORJ

2. znaleźć funkcję $C(x)$ taką, że $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$ jest CSRN

3. policzyć pochodną $y' = C'(x) e^{-\int p(x)dx} + - C(x) p(x) e^{-\int p(x)dx}$

4. podstawić y i y' do równania niejednorodnego

$$C'(x) e^{-\int p(x)dx} \cancel{- p(x) C(x) e^{-\int p(x)dx}} \cancel{+ p(x) C(x) e^{-\int p(x)dx}} = f(x) \qquad / \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

$$C'(x) = f(x) e^{\int p(x)dx} \qquad / \int \dots dx$$

$$C(x) = \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx + C_1$$

Całka ogólna równania niejednorodnego $y' + p(x)y = f(x)$

$$y(x) = C e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

dla ciągłych f, p

Dla warunku początkowego daje dokładnie 1 rozwiązanie

Przykład

$y' - \tan(x) y = \cos(x) \qquad y(0) = 0$

1. RJ

$y' - \tan(x) y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\tan(x)}{\frac{1}{y}}$

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$

$\ln|y| = -\ln|\cos(x)| + C$

$y \cos(x) = C \rightarrow y = \frac{C}{\cos(x)}$

2. RN

$y' = \frac{d}{dx} \frac{C}{\cos(x)} = \frac{C'(x)\cos(x) + C(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$

podstawiam

$\frac{C'(x)\cos(x) + C(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} - \tan(x) \frac{C(x)}{\cos(x)} = \cos(x)$

$\frac{C'(x)\cos(x)}{\cos^2(x)} + \frac{C(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} - \frac{C(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \cos(x)$

$C'(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$C(x) = \frac{1}{2}\int[1 + \cos(2x)]dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

3. CORN

$y = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C}{\cos(x)}$

$y(0) = \frac{C}{1} = 0 \rightarrow C = 0$

4. CSRN

$y(x) = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)}{\cos(x)}$

Metoda zgadywania

dla równania typu $y' + py = f(x)$, $p \in \mathbb{R}$

gdzie $f(x) = e^{\alpha x}\left[W_1(x)\cos(\beta x) + W_2(x)\sin(\beta x)\right]$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\quad W_1, W_2 \in \mathbb{R}[x]$

przewiduje się rozwiązanie (CSRN) w postaci

$y_1 = x^k e^{\alpha x}\left[V_1(x)\cos(\beta x) + V_2(x)\sin(\beta x)\right]$

$V_1, V_2 \in \mathbb{R}[x]$

$\deg V_1 = \deg V_2 = \max\{\deg W_1, \deg W_2\}$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha + j\beta \neq -p \\ 1 & \text{dla } \alpha + j\beta = p \end{cases}$$

1. znaleźć CORJ $- y_0$
2. wyznaczyć CSRN $- y_1$ przez zgadywanie
3. CORN = CORJ + CSRN $-$ $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$

Przykład

$y' + 2y = xe^{-2x}$

1. CORJ

$y' + 2y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -2y$

$\int \frac{dy}{y} = -2\int 1\,dx$

$\ln|y| = -2x + C = \ln|e^{-2x}| + C$

$\frac{y}{e^{-2x}} = C \qquad y = Ce^{-2x}$

2. CSRN

$y_1 = xe^{-2x}\left[Ax + B\right] = e^{-2x}(Ax^2 + Bx)$

$y_1' = e^{-2x}(2Ax + B) - 2e^{-2x}(Ax^2 + Bx)$

podstawiam

$e^{-2x}(2Ax + B) \cancel{- 2e^{-2x}(Ax^2 + Bx)} + \cancel{2e^{-2x}(Ax^2 + B)} = xe^{-2x}$

$2Ax + B = x$

$\begin{cases} 1 = 2A \\ 0 = B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = 0 \end{cases} \qquad y_1 = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x}$

3. CORN

$y(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-2x} + Ce^{-2x}$

Równania jednorodne liniowe rzędu 2

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Całki szczególne równania y_1, y_2 tworzą układ fundamentalny rozwiązań (są liniowo niezależne i są bazą przestrzeni rozwiązań)

kiedy $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ $\qquad W(x)$ – wyznacznik Wrońskiego

Wtedy CORJ ma postać $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (kombinacja liniowa)
i warunek początkowy wyznacza dokładnie 1 rozwiązanie

Przykład

$y'' + y = 0$, CS: $y_1 = \cos(x)$ $\quad y_2 = \sin(x)$

$W(x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \neq 0$

więc $\{\cos(x), \sin(x)\}$ - układ podstawowy całek

$y(x) = C_1\cos(x) + C_2\cos(x)$

Równania jednorodne o stałych współczynnikach

$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = 0, \quad p_i \in \mathbb{R}$

szuka się CS w postaci $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{C}$

wtedy $\frac{d^n}{dx^n} = r^n e^{rx}$

Równanie charakterystyczne – $r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \ldots + p_1 r + p_0 = 0$

ma zawsze n rozwiązań w $\mathbb{C}$

Rozwiązywanie $y'' + py' + qy = 0$ (CORJ)

$r^2 + pr + q = 0$

1° $\Delta > 0$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $r_1 \neq r_2$

CS: $y_1 = e^{r_1 x}$ $y_2 = e^{r_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0$$

$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

2° $\Delta = 0$ $r_1 = r_2 = r_0 \in \mathbb{R}$

CS: $y_1 = e^{r_0 x}$ $y_2 = xe^{r_0 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_0 x} & xe^{r_0 x} \\ r_0 e^{r_0 x} & xr_0 e^{r_0 x} + e^{r_0 x} \end{vmatrix} = xr_0 e^{2r_0 x} + e^{2r_0 x} - xr_0 e^{2r_0 x} = e^{2r_0 x} \neq 0$$

$y = C_1 e^{r_0 x} + C_2 x e^{r_0 x}$

3° $\Delta < 0$ $r_1 = \alpha + \beta j$ $r_2 = \alpha - \beta j$ $\beta \neq 0$ $W(x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$

CS: $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Przykład

$y'' - 3y' - 4y = 0$

$r^2 - 3r - 4 = (r-4)(r+1) = 0$

$r_1 = 4$ $r_2 = -1$

$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$

Metoda uzmienniania stałych dla $y'' + py' + q = f(x)$ (CORN)

1. znaleźć CORJ $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

2. znaleźć takie $C_1(x)$ i $C_2(x)$ żeby
$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$ spełniało dane równanie niejednorodne

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \rightarrow C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \rightarrow C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx$$

Przykład

$y'' + y = \frac{1}{\sin(x)}$ $\rightarrow$ CORJ $= C_1\cos(x) + C_2\sin(x)$

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(x)} \end{bmatrix} \qquad W(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$C_1'(x) = -1$ $C_2' = \cot(x)$

$C_1(x) = \int -1\,dx = -x + C_1$ $C_2(x) = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln|\sin(x)| + C_2$

CORN: $y(x) = (-x + C_1)\cos(x) + (\ln|\sin(x)| + C_2)\sin(x)$

$= C_1\cos(x) + C_2\sin(x) - x\cos(x) + \sin(x)\ln|\sin(x)|$