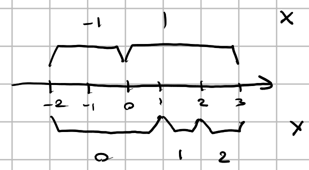
1. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega = [-2; 3]$, a P jest prawdopodobieństwem geometrycznym, określone są zmienne losowe:

$$X(\omega) = \begin{cases} -1 & \omega \in [-2; 0] \\ 1 & \omega \in (0; 3] \end{cases}, \qquad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \in [-2; 1] \\ 1 & \omega \in (1; 2) \\ 2 & \omega \in [2; 3] \end{cases}.$$

Obliczyć $E(Y|X = 1)$ oraz $E(X|Y = 1)$.

$$P(X = x \mid Y = y) = \frac{P(X = x,\ Y = y)}{P(Y = y)}$$



$P(X = -1) = 0.4$

$P(X = 1) = 0.6$

$P(Y = 1) = \frac{1}{5}$

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	0.4	0	0
1	0.2	0.2	0.2

$$E(Y|X=1) = 0 \cdot P(Y=0|X=1) + 1 \cdot P(Y=1|X=1) + 2\, P(Y=2|X=1)$$

$$= 0 + \frac{0.2}{0.6} + 2 \cdot \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$E(X|Y=1) = -1 \cdot P(X=-1|Y=1) + 1 \cdot P(X=1|Y=1)$$

$$= -\frac{0}{0.2} + \frac{0.2}{0.2} = 1$$

2. Zmienne losowe X i Y mają rozkłady dyskretne takie, że $S_X = \{-1, 0, 1\}$, $S_Y = \{0, 1\}$. Wiadomo ponadto, że

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{3}{8},$$

$$P(Y = 0|X = -1) = P(Y = 0|X = 1) = \frac{2}{3}, \; P(Y = 0|X = 0) = 1.$$

Wyznaczyć rozkład łączny zmiennej losowej (X, Y). Wyznaczyć rozkład warunkowy zmiennej losowej X pod warunkiem zdarzenia $\{X + Y = 0\}$ oraz obliczyć $V(X|X + Y = 0)$.

$$P(Y=y \mid X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}$$

$$P(X=x, Y=y) = P(Y=y \mid X=x)P(X=x)$$

$$P(X=-1, Y=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1, Y=0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=0, Y=0) = 1 \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$x \backslash y$	0	1	
-1	1/4	1/8	3/8
0	1/4	0	1/4
1	1/4	1/8	3/8

$$P(X=0) = 1 - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X+Y=0) = P(X=0, Y=0) + P(X=-1, Y=1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=-1 \mid X+Y=0) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=0 \mid X+Y=0) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

$$P(X=1 \mid X+Y=0) = 0$$

$$E(X \mid X+Y=0) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot 0 = -\frac{1}{3}$$

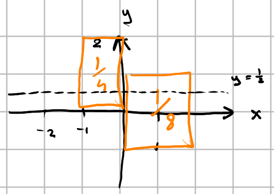
$$E(X^2 \mid X+Y=0) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot 0 = \frac{1}{3}$$

$$V(X \mid X+Y=0) = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/4 & , \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \quad \wedge \quad 0 \leqslant y \leqslant 2 \\ 1/8 & , \quad 0 < x \leqslant 2 \quad \wedge \quad -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & , \quad \text{wp.p.} \end{cases}.$$

Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu warunkowego zmiennej X przy warunku $\left\{Y < \frac{1}{2}\right\}$.



$$P\left(Y < \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

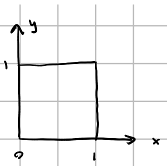
$$F\left(x \mid Y < \tfrac{1}{2}\right) = \frac{P\left(X \leq x,\ Y < \frac{1}{2}\right)}{P\left(Y < \frac{1}{2}\right)}$$

$$F_X\left(x \mid Y < \tfrac{1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(1+x) = \frac{x+1}{4} & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{2} x = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} x & x \in [0, 2) \\ 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

4. Wektor (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = (x+y) \cdot \mathbf{1}_D(x,y), \text{ gdzie } D = \{(x,y) : 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1\}.$$

Wyznaczyć gęstość rozkładu warunkowego zmiennej losowej Y pod warunkiem $\{X = x\}$. Obliczyć $E\left(Y|X = \frac{1}{3}\right)$.



dla $x \in (0,1)$ $\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)\, \mathbb{1}_D(x,y)\, dy = \int_0^1 x+y \; dy = x + \frac{1}{2}$

$$f_X(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

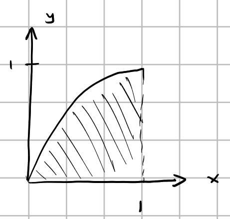
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)}(y) \quad \text{dla } x \in (0,1)$$

$$E\left(Y | X = \tfrac{1}{3}\right) = \int_0^1 y \cdot \frac{y + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}\, dy = \frac{6}{5} \int_0^1 y^2 + \frac{1}{3} y \; dy = \frac{6}{5}\left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{6}y^2\right]_0^1 = \frac{3}{5}$$

5. Wektor (X,Y) ma rozkład ciągły o gęstości

$$f(x,y) = 6xy \cdot \mathbf{1}_D(x,y), \quad \text{gdzie } D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \wedge 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Wyznaczyć funkcje h_1 i h_2, gdzie $h_1(x) = E(Y|X=x)$, $h_2(y) = E(X|Y=y)$.



$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{x}} 6xy \, dy = 3xy^2 \Big|_0^{\sqrt{x}} = 3x^2 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_{y^2}^{1} 6xy \, dx = 3x^2y \Big|_{y^2}^{1} = 3y(1-y^4) & y \in [0,1] \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{6xy}{3y(1-y^4)} \mathbb{1}_{(y^2,1)}(x) = \frac{2x}{1-y^4} \mathbb{1}_{(y^2,1)}(x) & \text{dla } y \in (0,1) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{6xy}{3x^2} \mathbb{1}_{(0,\sqrt{x})}(y) = \frac{2y}{x} \mathbb{1}_{(0,\sqrt{x})}(y) & \text{dla } x \in (0,1) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$E(Y|X=x) = \int_0^{\sqrt{x}} y \cdot \frac{2y}{x} \, dy = \frac{2}{3x} \, y^3 \Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} \quad \text{dla } x \in (0,1)$$

$$E(X|Y=y) = \int_{y^2}^{1} x \cdot \frac{2x}{1-y^4} \, dx = \frac{1}{3}\frac{2}{1-y^4} \, x^3 \Big|_{y^2}^{1} = \frac{1}{3}\frac{2}{1-y^4}(1-y^6) = \frac{2}{3}\frac{1-y^6}{1-y^4} \quad \text{dla } y \in (0,1)$$

Bonus

$$(X, Y) \sim f_{XY}(x,y) = x(y-x)e^{-x}\,\mathbb{1}_D(x,y), \quad D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y\}$$

$E(X|Y=y) = ?$

$E(Y|X=x) = ?$