1.

a) $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

f jest ciągła w $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

granica $\lim_{x \to 0} f(x)$ nie istnieje

więc f nie jest ciągła (1 rodzaj nieciągłości)
granice obustronne istnieją i są skończone

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin(x)} & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \\ 0 & \text{dla } \{0, \pi\} \end{cases}$

f jest ciągła w $(-\pi, 0) \cup (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \neq f(0) = 0$

f jest nieciągła w $x = 0$ (1 rodzaj)

$\lim_{x \to \pi^+} \frac{x}{\sin(x)} = \left\{ \frac{\pi}{0^-} \right\} = -\infty$

$\lim_{x \to \pi^-} \frac{x}{\sin(x)} = \left\{ \frac{\pi}{0^+} \right\} = +\infty$

f jest nieciągła w $x = \pi$ (2 rodzaj)

c) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x)$ nie istnieje

f jest ciągła w $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
f jest nieciągła w $x = 0$ (2 rodzaju)

2.

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{dla} \quad x<1 \\ \log_a(x) & \text{dla} \quad 1 \le x \le 4 \\ \dfrac{\pi}{\arctan(\frac{1}{x-4})} & \text{dla} \quad x>4 \end{cases} \qquad a,b \; \mathbb{R} \quad a>0, \; a \neq 1$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{\pi}{\arctan(\frac{1}{x-4})} = \left\{ \frac{\pi}{\arctan(\frac{1}{0^+})} \to \frac{\pi}{\arctan(+\infty)} \right\} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2$$

f jest ciągła w $\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

$\log_a(4) = 2$

$a^2 = 4 \qquad \cancel{a=-2} \vee a = 2$
$\notin D$

$f(1) = \log_2(1) = 0$

f jest ciągła w $\mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$\lim_{x\to 1^-} 2x+b = 0 \iff 2+b=0 \iff b=-2$

f jest ciągła dla $a=2$, $b=-2$

3.

$f(x) = e^x - 2\cos(x)$

f jest ciągła w $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(1) = e - 2\cos(1) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_0 \in (0,1) \quad f(x_0) = 0$$

z tw. Darboux

$2\cos(1) < 2$

$e > 2$

4.

$f(x) = \ln(x) + 2x - 1$

f jest rosnąca i ciągła

$f(\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2}) + 1 - 1 = \ln(\frac{1}{2}) < 0$

$f(1) = \ln(1) + 2 - 1 = 0 + 2 - 1 = 1$

$f(\frac{1}{2}) < 0 \wedge f(1) > 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in [\frac{1}{2}, 1] \quad f(x_0) = 0$

z twierdzenia Darboux

ponieważ f jest rosnąca to jest to jedyny pierwiastek

Twierdzenie Darboux

Niech $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła

wtedy $\forall \lambda \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \in [a,b] \quad f(c) = \lambda$

$(\lambda \in [f(b), f(a)])$

5.

$x^x = 3$

niech $f(x) = x^x - 3 \qquad f: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

f jest ciągła w $[1, 2]$?

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^1 - 3 = -2 < 0 \\ f(2) = 2^2 - 3 = 1 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_0 \in [1,2] \quad f(x_0) = 0$$

z tw. Darboux

6. $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{3x+3h+2} - \frac{1}{3x+2}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\frac{3x+2}{(3x+3h+2)(3x+2)} - \frac{3x+3h+2}{(3x+3h+2)(3x+2)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x}+\cancel{2} - \cancel{3x} - 3h - \cancel{2}}{h(3x+3h+2)(3x+2)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{-3}{(3x+3h+2)(3x+2)} = -\frac{3}{(3x+2)^2}$$

7

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases} \qquad k = 1 \text{ lub } k = 2$$

dla $k = 1$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(\Delta x) \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)$$

granica nie istnieje więc $f'(0)$ nie istnieje

dla $k = 2$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = 0$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{dla } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{0 + \Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{-0-\Delta x} - \sqrt{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\sqrt{-\Delta x}}{-|\Delta x|} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -\sqrt{\frac{-\Delta x}{(\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \to 0^-} -\sqrt{\frac{-1}{\Delta x}} = -\infty$$

pochodne jednostronne są nieskończone i różne więc $f'(0)$ nie istnieje

8.

a) $f(x) = x^{\cos(2x)} = e^{\ln\left(x^{\cos(2x)}\right)} = e^{\cos(2x)\ln(x)}$

$$\frac{df}{dx} = e^{\cos(2x)\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left[\cos(2x) \cdot \ln(x)\right]$$

$$= e^{\cos(2x)\ln(x)} \cdot \left[\cos(2x) \cdot \frac{1}{x} - 2\sin(2x)\ln(x)\right]$$

$$= x^{\cos(2x)} \cdot \left[\frac{1}{x}\cos(2x) - 2\sin(2x)\ln(x)\right]$$

b) $f(x) = \log_x(\arctan(x)) = \frac{\ln(\arctan(x))}{\ln(x)}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left[\ln(\arctan(x))\right] \cdot \ln(x) - \ln(\arctan(x)) \cdot \frac{d}{dx}\left[\ln(x)\right]}{(\ln(x))^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\arctan(x)} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(x) - \ln(\arctan(x)) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2(x)}$$

$$= \frac{\frac{\ln(x)}{\arctan(x)(1+x^2)} - \frac{\ln(\arctan(x))}{x}}{\ln^2(x)}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{x\ln(x) - \ln(\arctan(x))\arctan(x)(1+x^2)}{x\ln^2(x)\arctan(x)(1+x^2)}$$

$e^u \to e^u \cdot$

c) $h(x) = \sqrt[x]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$$\frac{dh}{dx} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right] = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left[\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\ln(1+x)\right]$$

$$\frac{dh}{dx} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \cdot \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right)$$

$$\frac{dh}{dx} = \sqrt[x]{x+1} \cdot \frac{x - \ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}$$