

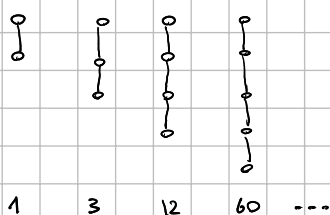
1.

Drewno o wierzchołkach  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

a)  $\forall v \in V \deg(v) \in \{1, 2\}$

Każde Przekucie  $\rightarrow$  różne elementy  $\rightarrow (n-2)! \cdot \binom{n}{2}$

$n=2$   $n=3$   $n=4$



$\binom{n}{2} (n-2)!$   
 $\uparrow$   $\uparrow$   
 2 strony ścieżki

1		1				
2	3	2	2	3	4	4
3	2	3	4	2	4	2
4		4	3	4	2	3
						5

Każde takie drzewo jest grafem liniowym  $P_n$

$\binom{n}{2} (n-2)! = \frac{n(n-1)}{2} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2}$

b)  $\exists v \in V \deg(v) = n-1$

$n=4$



$n=5$



$\binom{n}{1}$   
 wybór korzenia



Wierzchołek o stopniu  $n-1$  jest korzeniem, pozostałe wierzchołki to liście

Korzeń jest połączony z każdym liściem

Dodanie dodatkowej krawędzi utworzyłoby cykl

Korzeń należy do wszystkich krawędzi drzewa

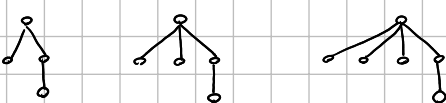
c)  $\exists v \in V \deg(v) = n-2$

$\underbrace{(x, x, \dots, x, y)}_{n-3} \rightarrow \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{1} \cdot \binom{n-2}{1^2}$

$n=4$

$n=5$

$n=6$



$(1, 1, 1, n-3) = \binom{n}{1} \binom{n-1}{1} \binom{n-2}{1^2} \binom{n-3}{n-3} = n(n-1)(n-2)$

korzeń

wierzchołek stopnia 2

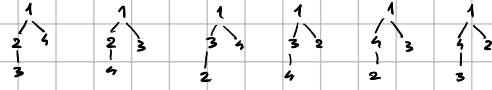
liść niesąsiadujący z korzeniem

reszta

Wierzchołek o stopniu  $n-2$  to korzeń

Jest 1 wierzchołek niesąsiadujący z korzeniem

Jest 1 wierzchołek stopnia 2 sąsiadujący z tym



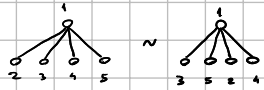
$T(n, k)$  - liczba drzew o zbiorze wierzchołków  $\{1, 2, \dots, n\}$ , w których stopień wierzchołka nr 1 wynosi  $k$

$$T(n, k) = \binom{n-2}{k-1} \cdot (n-1)^{n-k-1} \quad \text{dla } 1 \leq k \leq n-1$$

2.

$$T(5, 5) = 0$$

$$T(5, 4) = 1$$

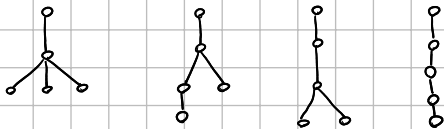


$$T(5, 3) = \binom{4}{1, 1, 2} = 4 \cdot 3 = 12$$



$$T(5, 2) = \underbrace{\binom{4}{2, 2} \cdot 2! \cdot 2! \cdot \frac{1}{2}}_{\text{uporządkowane odnogi}} + \underbrace{\binom{4}{3, 1} \cdot 3!}_{\text{odbiicie}} + \underbrace{\binom{4}{1, 1, 2}}_{\text{odnogi}} = 48$$

$$T(5, 1) = \binom{4}{1, 3} + \binom{4}{1, 1, 1, 1} + \binom{4}{1, 1, 1, 1} + \binom{4}{1, 1, 2} = 4 \cdot 4! + 4! + 4 \cdot 3 = 64$$



3.

$$\begin{aligned}
 a) \quad T(5,4) &= \binom{3}{2} \cdot 4^0 = 1 \\
 T(5,3) &= \binom{3}{2} \cdot 4^1 = 12 \\
 T(5,2) &= \binom{3}{1} \cdot 4^2 = 48 \\
 T(5,1) &= \binom{3}{0} \cdot 4^3 = 64
 \end{aligned}$$

$$b) \quad T(n, n-1) = 1$$

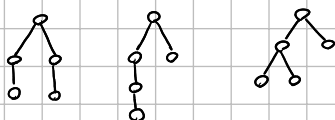
Jak w zadaniu 1.b, wierzchołek stopnia  $n-1$  sąsiaduje ze wszystkimi pozostałymi oraz jest ustalony więc jest dokładnie 1 możliwość

c)

$$\frac{T(n, k)}{T(n, k+1)} \stackrel{?}{=} \frac{(n-1) \cdot k}{n-k-1}$$

$$T(5, 2)$$

$$T(5, 3)$$



Wybieram wierzchołek inny niż korzeń i sąsiadujące z korzeniem  $(n-k-1)$   
i dołączam go do korzenia (jednoznacznie)  
→ dla każdego wariantu  $(n-k-1)$  możliwości

Dla każdego poddrzewa korzenia

usuwam dowolnie wybranego korzenia z poddrzewem

dołączam dowolnie wybranego, otrzymując poddrzewo

z jednym z wierzchołków innego poddrzewa

$$\begin{aligned}
 (n-1-n_1) + (n-1-n_2) + \dots + (n-1-n_{k+1}) &= (n-1) \cdot (k+1) - (n_1 + n_2 + \dots + n_{k+1}) \\
 &= (n-1) \cdot (k+1) - (n-1) = (n-1) \cdot k
 \end{aligned}$$

liczba wierzchołków w wszystkich poddrzewach

$$T(n, k) \cdot (n-k-1) = T(n, k+1) \cdot (n-1)k$$

$$\frac{T(n, k)}{T(n, k+1)} = \frac{(n-1)k}{n-k-1} \quad T(n, k) = \frac{(n-1)k}{n-k-1} \cdot T(n, k+1)$$

d)

$$T(n, n-1) = 1$$

$$T(n, n-2) = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{n - (n-2) - 1} \cdot 1 = (n-1)(n-2)$$

$$T(n, n-3) = \frac{(n-1) \cdot (n-3)}{n - (n-3) - 1} \cdot (n-1)(n-2) = \frac{(n-1)(n-3)}{2} \cdot (n-1)(n-2) = \binom{n-2}{2} \cdot (n-1)^2$$

$$T(n, n-4) = \frac{(n-1) \cdot (n-4)}{n - (n-4) - 1} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot (n-1)^2 = (n-1)^3 \cdot \frac{(n-4)}{3} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-2)!}{3! \cdot (n-2-3)!} \cdot (n-1)^3 = \binom{n-2}{3} (n-1)^3$$

$$T(n, n-5) = \frac{(n-1) \cdot (n-5)}{n - (n-5) - 1} \cdot \binom{n-2}{3} (n-1)^3 = \frac{n-5}{4} \cdot \frac{(n-2)!}{3! \cdot (n-5)!} \cdot (n-1)^4 = \frac{(n-2)!}{4! \cdot (n-6)!} \cdot (n-1)^4 = \binom{n-2}{4} (n-1)^4$$

$$T(n, n-5) = \binom{n-2}{4} (n-1)^4$$

$$\binom{n-2}{n-2-4} (n-1)^n$$

$$\binom{n-2}{(n-5)-1} (n-1)^{(n-2)-(n-5)+1}$$

$$\binom{n-2}{(n-5)-1} (n-1)^{n-(n-5)-1}$$

$$T(n, k) = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

$$\begin{cases} T(n, n-1) = 1 \\ T(n, k) = \frac{(n-1)k}{n-k-1} \cdot T(n, k+1) \end{cases}$$

1° przypadek bazowy

$$\binom{n-2}{n-2} \cdot (n-1)^{n-(n-1)-1} = 1 \cdot (n-1)^0 = 1$$

2°

$$T(n, k) = \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

$$\Rightarrow T(n, k+1) = \frac{n-k-1}{(n-1)k} \cdot \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

$$= \frac{n-k-1}{(n-1)k} \cdot \frac{(n-2)!}{(k-1)! \cdot (n-2-(k-1))!} \cdot (n-1)^{n-k-1}$$

$$= (n-k-1) \cdot \frac{(n-2)!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot (n-1)^{n-(k+1)-1}$$

$$= \frac{(n-2)!}{k! \cdot (n-2-k)!} \cdot (n-1)^{n-(k+1)-1} = \binom{n-2}{(k+1)-1} (n-1)^{n-(k+1)-1}$$

Z zasady indukcji wzór zachodzi

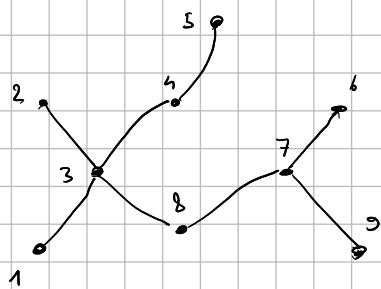
e) Wszystkich drzew o  $n$  wierzchołkach jest  $T(n, 1) + T(n, 2) + \dots + T(n, n-1)$ 

$$\sum_{k=1}^{n-1} T(n, k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} (n-1)^{n-k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} = \binom{n-2}{k-1} \cdot (n-1)^{(n-2)-(k-1)} \cdot 1^{(k-1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \cdot (n-1)^{(n-2)-k} \cdot 1^k = (n-1+1)^{n-2} = n^{n-2}$$

## Kod Pruetera



Składa się z  $n-2$  elementów  
→ numery nie-liści

$(3, 3, 4, 3, 8, 7, 7)$

$3 \times '3'$

$1 \times '4'$

$1 \times '8'$

$2 \times '7'$

liczba wystąpień w kodzie →  $\deg(v) - 1$

Drewo jednoznacznie oznacza kod i kod jednoznacznie oznacza drzewo

$(3, 3, 4, 3, 8, 7, 7)$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

kod składa się z  $n-2$  liczb naturalnych z  $\{1, \dots, n\}$

wszystkich możliwości jest  $n^{n-2}$  (tw. Cayleya)

Budowanie grafu na podstawie kodu ...

4.

Ile w sumie liści mają wszystkie drzewa o wierzchołkach  $\{1, \dots, n\}$

$$T(n, 1) = \binom{n-2}{0} (n-1)^{n-1-1} = (n-1)^{n-2}$$

liczba drzew gdzie  $\deg(v_1) = 1$

analogicznie dla każdego  $v_i$

dla  $n$  wierzchołków w sumie będzie  $n \cdot (n-1)^{n-2}$