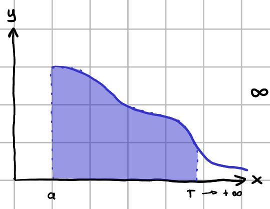
# Całki niewłaściwe

## Całka niewłaściwa I rodzaju

w przedziale nieskończonym



$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_a^T f(x)\,dx$$

$\infty \cdot 0$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{S\to-\infty} \int_S^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{S\to-\infty} \int_S^c f(x)\,dx + \lim_{T\to+\infty} \int_c^T f(x)\,dx$$

2 niezależne granice

istnieje właściwa granica $\Leftrightarrow$ istnieje całka $\Leftrightarrow$ całka zbieżna

granica nie istnieje / jest niewłaściwa $\Leftrightarrow$ całka nie istnieje $\Leftrightarrow$ całka rozbieżna

Przykłady

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T\to+\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^T = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{\alpha-1}\left(1-T^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{dla } \alpha>1 \\ +\infty & \text{dla } \alpha<1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{T\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^T = \lim_{T\to+\infty} \ln(T) = +\infty$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ jest zbieżna dla $\alpha>1$ i rozbieżna dla $\alpha \le 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{S\to-\infty} \arctan(x)\Big|_S^0 + \lim_{T\to+\infty} \arctan(x)\Big|_0^T = 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-0 = \pi$$

Zbieżność całek można badać stosując kryteria zbieżności

## Kryterium porównawcze

$0 \le f \le g$

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ jest zbieżna $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna $\Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)$ jest rozbieżna

Można zbadać zbieżność jednej całki badając zbieżność jej oszacowania

(np. przez funkcję typu $\frac{1}{x^\alpha}$)

Przykład $\forall_{x>1}\ 0 \le \frac{(3-\sin(2x))\,x}{5(x+1)(x^2+1)} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{3-\sin(2x)}{5} \cdot \frac{1}{x^2+1} \le 1 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{x^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ jest zbieżna, więc $\int_1^{+\infty} \frac{(3-\sin(2x))\,x}{5(x+1)(x^2+1)}\,dx$ jest zbieżna

## Kryterium ilorazowe

$f>0 \quad g>0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K>0,\ K\in\mathbb{R} \Longrightarrow$ Całki $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ i $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne

Przykład $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)\arctan(x^2)\cdot\left[(x+1)\sqrt[3]{x}+2x+3\right]}{\ln(x+1)\cdot\left[x^2\sqrt{x}+2\sqrt{x}+3\right]} = ?$

dobieram oszacowanie $g(x) = \frac{x\sqrt[3]{x}}{x^2\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{6}}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} \cdot \arctan(x^2) \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+2x+3}{x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+3} \cdot x^{\frac{7}{6}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+1)} \cdot \arctan(x^2) \cdot \frac{x^{\frac{5}{2}}+x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{13}{6}}+3x^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+3} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \frac{\pi}{2} > 0$$

więc całka $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna

## Bezwzględna i warunkowa zbieżność

$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ jest zbieżna $\to$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest bezwzględnie zbieżna

$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ jest rozbieżna i $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna $\to$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest warunkowo zbieżna

Jeśli $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ jest zbieżna to $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna

## Wartość główna całki $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} f(x)\,dx = P\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

jeśli granica istnieje to jest wartością główną $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

jeśli $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna to istnieje jej wartość główna

Przykład

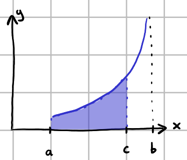
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,dx \to \text{rozbieżna}$$

$$P\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,dx = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \sin(x)\,dx = \lim_{T\to+\infty} (-\cos(x))\Big|_{-T}^{T} = \lim_{T\to+\infty} -\cos(T) + \cos(-T) = 0$$

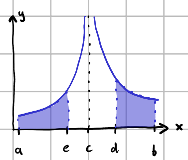
## Całka niewłaściwa II rodzaju

funkcji nieograniczonej

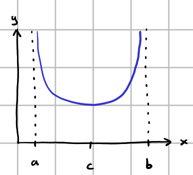
także samo oznaczenie jak całka Riemanna




$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$




$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{e\to c^-} \int_a^e f(x)\,dx + \lim_{d\to c^+} \int_d^b f(x)\,dx$$




$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Przykład

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to0^+} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_c^1 = \lim_{c\to0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - c^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{dla } \alpha<1 \\ +\infty & \text{dla } \alpha>1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c\to0^+} \ln|x|\Big|_c^1 = \lim_{c\to0^+} -\ln(c) = +\infty$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ jest zbieżna dla $\alpha<1$ i rozbieżna dla $\alpha\geq1$

Przy podstawieniu całka niewłaściwa może zamienić się we właściwą i na odwrót

$$\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin(t) \\ dx = 2\cos(t)\,dt \\ x=0 \to t=0 \\ x=2 \to t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\sin^3(t)}{\sqrt{4-4\sin^2(t)}} \cdot 2\cos(t)\,dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\,dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\sin(t)\,dt$$

$$= \left| \begin{array}{l} u=\cos(t) \\ du = -\sin(t)\,dt \end{array} \right| = -8\int_1^0 (1-u^2)\,du = 8\int_0^1 (1-u^2)\,du = 8\left[u - \tfrac{1}{3}u^3\right]\Big|_0^1 = \frac{16}{3}$$

Definiuje się analogiczne kryteria zbieżności

Kryterium porównawcze

$0 \le f \le g$

$\int_a^b g(x)\,dx$ jest zbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna

$\int_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ jest rozbieżna

Kryterium ilorazowe

$f > 0 \quad g > 0$

$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0 \quad K \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Całki $\int_a^b f(x)\,dx$ i $\int_a^b g(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne

Bezwzględna zbieżność

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ jest zbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ jest bezwzględnie zbieżna

w przeciwnym wypadku $\int_a^b f(x)\,dx$ jest warunkowo zbieżna

$\int_a^b |f(x)|\,dx$ jest zbieżna $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna

Wartość główna

$f: [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$

$$P\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right]$$

jeśli istnieje granica właściwa to jest wartością główną $\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx$ jest zbieżna $\Rightarrow$ istnieje jej wartość główna

Przykład

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} \to \text{rozbieżna}$$

$$P\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[ \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^1 \right] = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ln(\varepsilon) - \ln(\varepsilon) = 0$$