

Funkcje wielu zmiennych

Pojęcia

Odległość między punktami w \mathbb{R}^n $d(A, B)$

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Otoczenie punktu A o promieniu r $Q(A, r)$


(kolo bez brzoju w \mathbb{R}^2)

$$Q(A, r) = \{P \in \mathbb{R}^n : d(P, A) < r\}$$

Sąsiedztwo punktu A o promieniu r $S(A, r)$


(kolo bez brzoju i środka w \mathbb{R}^2)

$$S(A, r) = \{P \in \mathbb{R}^n : 0 < d(P, A) < r\} = Q(A, r) \setminus \{A\}$$

Brzoju zbioru Z ∂Z 

Punkty, w których każdym otoczeniu są punkty ze zbioru i spoza zbioru.


Punkt brzojowy może należeć lub nie należeć do zbioru.

Wnętrze zbioru Z $\text{Int} Z$ 

Punkty należące do zbioru razem ze swoim otoczeniem

$$A \in \text{Int} Z \iff \exists r > 0 \ Q(A, r) \subset Z$$

Zbiór otwarty $Z = \text{Int} Z$

Zbiór ograniczony $\exists r > 0 \ Z \subset Q(0, r)$ 

Zbiór nieograniczony $\forall r > 0 \ \sim(Z \subset Q(0, r))$

Zbiór skończony - składa się z $n \in \mathbb{N}$ punktów


Zbiór nieskończony - ani skończony ani pusty

Kule zwykłe w \mathbb{R}^n

$$L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_i(t), \dots, x_n = x_n(t) \wedge t \in [\alpha, \beta]\}$$

$x_i(t)$ - ciągłe w $[\alpha, \beta]$, wartościowe w (α, β)

(bez samoprzecięć)

Kula otwarta $(x_1(\alpha), \dots, x_n(\alpha)) \neq (x_1(\beta), \dots, x_n(\beta))$ 

Kula zamknięta $(x_1(\alpha), \dots, x_n(\alpha)) = (x_1(\beta), \dots, x_n(\beta))$ 

Kule gładkie (regulowne) - $x_i(t)$ mają ciągłe pochodne i nie zerują się jednocześnie

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \ [x_1'(t)]^2 + \dots + [x_n'(t)]^2 > 0$$

Zbiór spójny

Każde 2 punkty można połączyć gładkim łukiem zawartym w zbiorze



Ciąg w \mathbb{R}^n

$(x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ k -ty wyraz ciągu $k \in \mathbb{N}$

$$P_k \rightarrow P_0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} d(P_k, P_0) = 0$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_\varepsilon \ \forall k > k_\varepsilon \ d(P_k, P_0) < \varepsilon$$

$$\iff \forall i = 1, \dots, n \ \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = x_i^0$$

Punkt skupienia zbioru Z

ma taki punkt Z w każdym sąsiedztwie

$$P_0 \text{ jest punktem skupienia} \iff \exists (P_k) \subset Z \quad P_k \neq P_0 \wedge P_k \rightarrow P_0$$

Punkt izolowany Z - należy do Z i nie jest punktem skupienia

Zbiór domknięty - zawiera swoje wszystkie punkty skupienia

(wnętrze i brzeg)

$$\bar{D} = \text{Int } D \cup \partial D$$

Obszar - zbiór otwarty i spójny

Obszar domknięty \bar{D} - obszar razem z brzegiem

Funkcja 2 zmiennych

$$z = f(x, y) \quad \text{płaszczyzna w } \mathbb{R}^3$$

Dziedzina - zbiór punktów dla których przyjmuje wartości rzeczywiste

Granica funkcji wielu zmiennych $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = g \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \in D \quad 0 < d(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - g| < \epsilon \quad (\text{Cauchy'ego})$$

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = g \in \mathbb{R} \iff \forall (P_k) \subset D, P_k \neq P_0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = g \quad (\text{Heinego})$$

Granica oznacza zbliżanie się do punktu granicznego z każdego kierunku
(nie definiuje się granic jednostronnych)

W przypadku symbolu nieoznaczonego, to że wartość jest granicą, wykazuje się z definicji

Nożycami wykazać, że granica nie istnieje z definicji Heinego - znaleźć 2 ciągi o różnych granicach

$$\text{Granica podwójna} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y)$$

Ciągłość funkcji wielu zmiennych $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ jest ciągła w } P_0 \in D \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \in D \quad d(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - f(P_0)| < \epsilon \quad (\text{Cauchy'ego})$$

$$f \text{ jest ciągła w } P_0 \in D \iff \forall (P_k) \subset D \quad \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P_0 \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(P_k) = f(P_0) \quad (\text{Heinego})$$

Funkcja jest ciągła w zbiorze - jest ciągła w każdym jego punkcie

- P_0 jest punktem skupienia dziedziny $\rightarrow f$ jest ciągła w $P_0 \iff \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$
- P_0 jest punktem izolowanym dziedziny $\rightarrow f$ jest ciągła w P_0
- $P_0 \notin D \rightarrow f$ jest nieciągła w P_0

Własności funkcji wielu zmiennych

Lokalne zachowanie znaku

$$f \text{ jest ciągła w } P_0 \wedge f(P_0) \neq 0 \Rightarrow \exists r > 0 \forall P \in D \cap Q(P_0, r) \quad \operatorname{sgn}(f(P)) = \operatorname{sgn}(f(P_0))$$

Twierdzenie Weierstrassa

jeśli funkcja jest ciągła w zbiorze ograniczonym i domkniętym
to jest w nim ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy

$$\exists P \in \bar{A} \subset D \quad f(P) = \inf_{P \in \bar{A}} f(P)$$

$$\exists P \in \bar{A} \subset D \quad f(P) = \sup_{P \in \bar{A}} f(P)$$

wykres funkcji jest ograniczony z góry i z dołu przez płaszczyzny

Twierdzenie Darboux

jeśli f jest ciągła, $f(P_1) < \mu < f(P_2)$ i istnieje łuk zwykły o końcach P_1, P_2
to na łuku istnieje punkt P_μ taki, że $f(P_\mu) = \mu$

funkcja ciągła przyjmuje wartości pośrednie