Przestrzenie liniowe

Przestrzeń liniowa to trójka $((V,+),(\mathbb{K},\oplus,\odot),\cdot)$ o własnościach:

- $(V,+)$ jest grupą przemienną
- $(\mathbb{K},\oplus,\odot)$ jest ciałem
- operacja $\cdot : \mathbb{K}\times V \to V$ spełnia warunki dla $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $u,v\in V$
  - $(\alpha\oplus\beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v$
  - $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v$
  - $\alpha\cdot(\beta\cdot v) = (\alpha\odot\beta)\cdot v$
  - $1\cdot v = v$ (1 to jedynka ciała $\mathbb{K}$)

Wektory – elementy zbioru V
Skalary – elementy zbioru $\mathbb{K}$
Operacja $\cdot$ – mnożenie wektora przez skalar

Przykłady przestrzeni liniowych

- $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$
  $v_1=(x_1,y_1)$ $v_2=(x_2,y_2)$ $\alpha\in\mathbb{R}$
  $v_1+v_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$
  $\alpha\cdot v_1 = (\alpha x_1,\ \alpha y_1)$

- $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ $n\in\mathbb{N}$
  $v_1=(x_1,x_2,\dots x_n)$ $v_2=(y_1,y_2,\dots y_n)$ $\alpha\in\mathbb{R}$
  $v_1+v_2 = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\dots\ x_n+y_n)$
  $\alpha\cdot v_1 = (\alpha x_1,\ \alpha x_2,\dots\ \alpha x_n)$

- $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$
  wektory – liczby zespolone
  skalary – liczby rzeczywiste
  $v_1+v_2=(a_1+a_2)+j(b_1+b_2)$
  $\alpha\cdot v = \alpha a + \alpha bj$

- $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$ przestrzeń wielomianów rzeczywistych
  $(v_1+v_2)(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_n+b_n)x^n$
  $\alpha\cdot v(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \dots + \alpha a_n x^n$

Wektor zerowy 0
element neutralny dodawania w grupie $(V,+)$

$\alpha v = 0 \iff \alpha = 0 \lor v = 0$

w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$ $0=(0,0,\dots 0)$
w przestrzeni $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$ 0 – wielomian zerowy

Wektor przeciwny $-v$
$(-\alpha)\cdot v = \alpha\cdot(-v) = -(\alpha v)$

Odejmowanie wektorów
$v-u = v+(-u)$

Obcięcie funkcji $\varphi = f|_A$
dla $f: X\to Y$ $\varphi: A\subseteq X\to Y$ $\forall_{x\in A}\ f(x)=\varphi(x)$
$\varphi = f|_A$ jest obcięciem funkcji f do zbioru A

Podprzestrzeń

Podzbiór $W \subseteq V$ z działaniami jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej $((V,+), \mathbb{K}, \cdot)$ jeśli $((W, +|_W), \mathbb{K}, \cdot|_W)$ jest przestrzenią liniową.

- Addytywność $\forall_{v,u \in W} \; v+u \in W$
- Jednorodność $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \forall_{v \in W} \; \alpha v \in W$
- Do każdej podprzestrzeni należy wektor zerowy 0
- Podprzestrzeń trywialna / zerowa $\{0\}$ jest podprzestrzenią każdej przestrzeni
- Każda przestrzeń liniowa jest swoją własną podprzestrzenią - podprzestrzeń niewłaściwa
- Jeśli U i W są podprzestrzeniami V to $U \cap W$ jest podprzestrzenią V
- Jeśli U i W są podprzestrzeniami V to $U + W$ jest podprzestrzenią V

Suma algebraiczna $U+W = \{u+w : u \in U \wedge w \in W\}$

Podprzestrzenie $\mathbb{R}^2$ to proste przechodzące przez punkt $(0,0)$, $\{0\}$ i $\mathbb{R}^2$
Podprzestrzenie $\mathbb{R}^3$ to proste i płaszczyzny przechodzące przez punkt $(0,0,0)$, $\{0\}$ i $\mathbb{R}^3$

Sprawdzenie czy zbiór jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$

- $W = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$
  $v_1 = (x_1, 0) \quad v_2 = (x_2, 0) \quad \alpha \in \mathbb{R}$
  $v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, 0) \in W$
  $\alpha v_1 = (\alpha x_1, 0) \in W$
  Oba warunki są spełnione więc W jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$

- $W = \{ w \in \mathbb{R}[x] : w(2) = 0 \}$
  $(v_1 + v_2)(2) = v_1(2) + v_2(2) = 0 + 0 = 0$
  $(\alpha v_1)(2) = \alpha v_1(2) = \alpha \cdot 0 = 0$
  Oba warunki są spełnione więc W jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$

Kombinacja liniowa

Kombinacja liniowa wektorów $v_1, v_2, \dots v_n$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ to wektor $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, v_2, \dots v_n$ w ciele $\mathbb{K}$ oznacza się $\mathrm{Lin}\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ albo $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots v_n\}$

Dla dowolnych $v_1, v_2, \dots v_n \in V$ $\mathrm{span}\{v_1, v_2, \dots v_n\}$ jest podprzestrzenią V i nazywa się przestrzenią rozpiętą albo generowaną przez $v_1, v_2, \dots v_n$

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$

- przestrzeń generowana przez 2 niezerowe wektory może być płaszczyzną lub prostą
  $\mathrm{span}\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ - przestrzeń $z=0$
  $\mathrm{span}\{(1,0,0), (2,0,0)\}$ - oś x

- przestrzeń generowana przez 3 niezerowe wektory może być całą $\mathbb{R}^3$, płaszczyzną lub prostą
  $\mathrm{span}\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = \mathbb{R}^3$

Układ wektorów

Układ to uporządkowany ciąg $(v_1, v_2, \dots v_n)$

Podukład $(v_{i_1}, v_{i_2}, \dots v_{i_k})$ układu $(v_1, v_2, \dots v_n)$ zachowuje kolejność $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$

Układ pusty $\emptyset$

Liniowa niezależność

Układ jest liniowo niezależny kiedy

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

W przeciwnym wypadku układ jest liniowo zależny

Układ pusty jest liniowo niezależny

Układ jest liniowo zależny $\iff$ jeden z wektorów jest kombinacją liniową pozostałych

Układ liniowo niezależny rozpina przestrzeń takiego wymiaru ile ma wektorów

Zależność można łatwo określić:

- Jeśli zawiera wektor zerowy 0 to jest liniowo zależny
- Układ 2 niezerowych wektorów jest liniowo zależny
  $\iff$ jeden jest wielokrotnością drugiego
- Układ 1 wektora jest liniowo zależny $\iff$ wektor jest 0
- Podukład układu liniowo niezależnego jest liniowo niezależny

Sprawdzenie czy układ jest liniowo niezależny

$(v_1, v_2, v_3) = ((0,1,-2), (1,2,-1), (1,0,3))$

rozwiązuję równanie $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$

jeśli ma więcej rozwiązań niż rozwiązanie zerowe to jest zależny

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \gamma = -\beta \\ \alpha = -2\beta \\ 4\beta - \beta - 3\beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \beta \in \mathbb{R} \\ \gamma = -\beta \end{cases}$$

jest nieskończenie wiele rozwiązań

$-2v_1 + v_2 - v_3 = 0 \qquad v_3 = v_2 - 2v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

układ jest liniowo zależny

Baza przestrzeni liniowej

Liniowo niezależny układ wektorów rozpinający daną przestrzeń

Każdy wektor w przestrzeni można wyrazić jako kombinację liniową wektorów bazy w jednoznaczny sposób

$\forall_{v \in V} \exists_{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in \mathbb{K}} \quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$

$(v_1, v_2, \dots v_n)$ - baza przestrzeni V

$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ - współrzędne wektora v w bazie $(v_1, v_2, \dots v_n)$

Bazą przestrzeni zerowej $\{0\}$ jest układ pusty $\emptyset$

Bazę przestrzeni liniowej można wybrać na wiele sposobów,
każda składa się z tej samej liczby wektorów

Wymiar przestrzeni $\dim V$

Liczba elementów bazy V jeśli jest skończona
przestrzeń jest skończenie wymiarowa

Jeśli nie istnieje skończona baza przestrzeni V
to V jest nieskończenie wymiarowa

Sprawdzenie czy $\mathcal{A} = (v_1, v_2, v_3) = ((0,1,0), (1,0,1), (0,1,-3))$ jest bazą $\mathbb{R}^3$

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$ układ jest liniowo niezależny

$$(x,y,z) \stackrel{?}{=} a v_1 + b v_2 + c v_3 \qquad ((0,1,0), (1,0,1), (0,1,-3))$$

$$\begin{cases} x = b \\ y = a + c \\ z = b - 3c \end{cases} = \begin{cases} a = y - \frac{x-z}{3} \\ b = x \\ c = \frac{x-z}{3} \end{cases}$$ dowolny wektor można wyrazić jako kombinację liniową układu

Oba warunki są spełnione więc $\mathcal{A}$ jest bazą $\mathbb{R}^3$

Warunki równoważne
- Układ $(v_1, v_2, \dots v_n)$ jest bazą przestrzeni V
- Układ $(v_1, v_2, \dots v_n)$ jest liniowo niezależny i $\dim V = n$
- $\operatorname{span}\{v_1, v_2, \dots v_n\} = V$ i $\dim V = n$
- Układ $(v_1, v_2, \dots v_n)$ jest maksymalnym liniowo niezależnym układem w V

Każdy wektor można przedstawić jednoznacznie jako kombinację liniową wektorów bazy

Bazę przestrzeni można wybrać na wiele sposobów
każda składa się z tej samej liczby wektorów

Baza kanoniczna (standardowa) $\mathcal{E}_n$

$\mathcal{E}_n = (e_1, \dots e_n) = ((1,0,\dots 0), (0,1,\dots 0), \dots (0,0,\dots 1))$

$\mathcal{E}_n$ jest bazą przestrzeni $\mathbb{K}^n$

1 i 0 to jedynka i zero ciała $\mathbb{K}$

$e_1, \dots e_n$ – wektory jednostkowe

Wektory jako wiersze i kolumny macierzy

dla $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

kolumny A można interpretować jako wektory z $\mathbb{K}^m$

wiersze A można interpretować jako wektory z $\mathbb{K}^n$

dla A_j - j-ta kolumna A, A^i – i-ty wiersz A

$\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{span}\{A_1, \dots A_n\} = \dim \operatorname{span}\{A^1, \dots A^m\}$

Macierz układu wektorów

$B = (v_1, \dots v_n)$ jest bazą przestrzeni V

Dowolny wektor $v \in V$ można przedstawić jako

$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$M_B(v) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ macierz współrzędnych v w bazie B

$M_B(A)$ - macierz współrzędnych wektorów układu A w bazie B

kolumny to współrzędne kolejnych wektorów

Przykład $v = (x, y, z)$ $\quad M_{E_3}(v) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Twierdzenie

Jeśli $B = (v_1, \dots v_n)$ jest bazą V

dla dowolnego układu $A = (u_1, \dots u_m)$ w V

$\dim \operatorname{span}\{u_1, \dots u_m\} = \operatorname{rank}(M_B(A))$

Przykład - określenie wymiaru $V = \operatorname{span}\{(2,0,0,-2), (-3,0,0,3), (0,1,0,2), (0,2,0,4)\}$

przyjmując bazę E_4

$$M_{E_4}(V) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \dim V = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

Warunki równoważne

Jeśli $B = (v_1, \dots v_n)$ jest bazą V

- $A = (u_1, \dots u_m)$ jest bazą V
- $\operatorname{rank}(M_B(A)) = n$
- $\det M_B(A) \neq 0$

Kryterium z wyznacznikiem pozwala łatwo sprawdzić czy układ jest bazą

Macierz zmiany bazy $M_A(B)$

Macierz przejścia od bazy A do bazy B

jeśli A i B są bazami przestrzeni V

$M_A(B) = (M_B(A))^{-1}$

$M_B(w) = M_B(A) \cdot M_A(w)$

Przykład

mając bazy $E_2 = (e_1, e_2) = ((1,0), (0,1))$

$B = (v_1, v_2) = ((1,1), (-1,1))$

$$M_{E_2}(B) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_B(E_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

kolumny $M_B(E_2)$ - wektory e_1 i e_2 wyrażone w bazie B

$e_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})_B \qquad e_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_B$

wyrażenie wektora $(5, 1)$ w bazie B

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\frac{1}{2})(5) + (\frac{1}{2})(1) \\ (-\frac{1}{2})(5) + (\frac{1}{2})(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$v = (5, 1) = (3, -2)_B = 3v_1 - 2v_2$