

Funkcja  $f: X \rightarrow Y$

Relacja binarna u zbiorze  $X \times Y$

1.  $\forall x \in X \exists y \in Y (x, y) \in f$
2.  $\forall x \in X \forall y_1, y_2 \in Y [(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2]$

Przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru  $X$   
dokładnie jednego elementu zbioru  $Y$

funkcja  $\sim$  odzwierciedlenie  $\sim$  przekształcenie

Dziedzina funkcji  $f$   $D_f = X$

Argumenty funkcji  $f$  elementy  $D_f$

Wartość funkcji dla argumentu  $x$

$$y = f(x) \quad x \mapsto y \quad x \mapsto f(x)$$

Zbiór wartości

$$f(X) = \{y \in Y : \exists x \in X y = f(x)\} = \{f(x) : x \in X\} \subseteq Y$$

Wykres funkcji  $f: X \rightarrow Y$

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$$

Zbiór wszystkich funkcji  $f: X \rightarrow Y$   $Y^X$

Przykłady funkcji

Identyfikacja  $\text{id}_X: X \rightarrow X$   $\text{id}_X(x) = x$

Funkcja charakterystyczna zbioru  $A$

$$\chi_A: X \rightarrow \{0, 1\} \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A \end{cases}$$

Ciepota z liczby (podłoga)

$$\lfloor \cdot \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \lfloor 5 \rfloor = 5 \quad \lfloor 5.1 \rfloor = 5 \quad \lfloor -5.1 \rfloor = -6$$

Niekończące ciągi

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad a_n = f(n)$$

## Własności funkcji

### Różnowartościowość (iniekcja)

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

funkcja "1-1"

### Surjekcja (funkcja jest "na")

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad y = f(x)$$

$$f(X) = Y$$

### Bijekcja (funkcja wzajemnie jednoznaczna)

różnowartościowa i "na"

Przykład  $f(x) = \sin(x)$

a) niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

nie jest 1-1 bo  $f(0) = f(\pi)$

nie jest "na" bo  $\nexists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 7$

b) niech  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$

nie jest 1-1 bo  $f(0) = f(\pi)$

jest "na" bo  $\forall y \in [-1, 1] \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad y = f(x)$  np  $x = \arcsin(y)$

c) niech  $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

jest różnowartościowa bo jest rosnąca

nie jest "na" bo  $\nexists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 7$

d) niech  $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

jest różnowartościowa

jest "na"

wobec jest bijekcją

e) niech  $f: [-\pi, \pi] \rightarrow [0, 1]$

to nie jest funkcja

## Złożenie funkcji (superpozycja)

dla  $f: X \rightarrow Y$  i  $g: Y \rightarrow Z$

$$g \circ f: X \rightarrow Z \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

nie jest przemienne  $g \circ f \neq f \circ g$  (na ogół!)

$$\text{jest łączna} \quad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

$$f(x) = e^x \quad g(x) = \sin(x)$$

$$(f \circ g)(x) = e^{\sin(x)} \quad (g \circ f)(x) = \sin(e^x)$$

## Funkcja odwrotna $f^{-1}$

$g: Y \rightarrow X$  jest odwrotna do  $f: X \rightarrow Y$

jeśli  $\forall x \in X (g \circ f)(x) = x$  i  $\forall y \in Y (f \circ g)(y) = y$

funkcja posiada funkcję odwrotną  $\iff$  jest bijekcją

funkcja odwrotna do złożenia  $g \circ f$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Wykresy  $f$  i  $f^{-1}$  są symetryczne względem prostej  $y=x$

### Przykład

$$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \sin(x)$$

$$f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], f^{-1}(u) = \arcsin(u)$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, g(x) = e^x$$

$$g^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, g^{-1}(x) = \ln(x)$$

Wyznaczenie funkcji odwrotnej do  $f(x) = e^{3x-1}$   $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$

1) Czy jest "1-1"

$$e^{3x_1-1} = e^{3x_2-1} \Rightarrow 3x_1-1 = 3x_2-1 \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \checkmark$$

2) Czy jest "na"

$$e^{3x-1} = y \quad 3x-1 = \ln(y) \quad x = \frac{\ln(y)+1}{3}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \exists x \in \mathbb{R} \quad x = \frac{\ln(y)+1}{3} \quad \checkmark$$

funkcja odwrotna  $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(\ln(x)+1)$

## Permutacje

Bijekcje skończonego zbioru  $X$

(permutacje elementów zbioru  $X$ )

$f: X \rightarrow X$  gdzie  $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \text{ definiuje permutację}$$

Złożenie permutacji

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ g(1) & g(2) & \dots & g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \dots & f(g(n)) \end{pmatrix}$$

### Przykład

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

złożenie permutacji nie jest przemienne

Słowo permutacja jest bijekcją to istnieje permutacja odwrotna

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

## Obrazy i przeciwobrazy zbioru

niech  $f: X \rightarrow Y$   $A \subseteq X$   $B \subseteq Y$

Obraz zbioru  $A$  wyznaczony przez  $f$

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

$R_f$  jest obrazem zbioru  $D_f$  wyznaczonym przez  $f$

$$\text{dla zbioru jednoelementowego } f(\{a\}) = \{f(a)\}$$

$$\text{dla zbioru skończonego } f(\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}) = \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), \dots, f(a_n)\}$$

$$\text{dla } f: X \rightarrow Y \quad f(X) = R_f \text{ zbiór wartości}$$

Przeciwobraz zbioru  $B$  wyznaczony przez  $f$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

można określić przeciwobraz również dla funkcji nieliniowych

dla zbioru jednoelementowego

$$f^{-1}(\{b\}) = \{x \in X : f(x) = b\} \rightarrow \text{zbiór rozwiązań równania } f(x) = b$$

dla zbiorów skończonych

$$f^{-1}(\{b_1, b_2, \dots, b_n\}) = \{x \in X : f(x) = b_1 \vee f(x) = b_2 \vee \dots \vee f(x) = b_n\}$$

dla przedziałów

$$f^{-1}([a, b]) = \{x \in X : a \leq x \leq b\} \rightarrow \text{zbiór rozwiązań nierówności}$$

## Funkcja 2 zmiennych

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x^2 + y^2$$

wykreś takiej funkcji jest w przestrzeni trójwymiarowej  
(argumenty na płaszczyźnie i wartości jako wysokość)

Przebiegi funkcji

przeciwobrazy zbiorów jednoelementowych

Łączymy na płaszczyźnie pary argumentów, które dają taką samą wartość

$$f^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$$

$$f^{-1}(\{a\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = a\} \quad \text{długość o promieniu } \sqrt{a}$$

$a > 0$

$$f^{-1}(\{-2, 1, 3\}) \rightarrow \text{dwa okręgi o promieniach } 1 : \sqrt{3}$$

$$f^{-1}([1, 4]) \rightarrow \text{pierścieni ograniczony dwiema długościami o promieniach } 1 : 2$$

Własności obrazów i przeciwwobrazów

dla  $f: X \rightarrow Y$   $A, B \subseteq X$   $C, D \subseteq Y$

$$1. f(\emptyset) = \emptyset \quad f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$2. f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$$

$$3. f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \quad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$$

$$4. f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B) \quad f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$$

$$5. A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad f(f^{-1}(C)) \subseteq C$$

Dla różnowartościowej  $f: X \rightarrow Y$

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

$$A = f^{-1}(f(A))$$

Dla funkcji "na"  $f: X \rightarrow Y$

$$f(f^{-1}(C)) = C$$