1.

a) $xRy \iff (x|y \vee y|x) \qquad R \subseteq \mathbb{N}^2$

✓ zwrotna $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ x|x$

✓ symetryczna $xRy \iff (x|y \vee y|x) \iff (y|x \vee x|y) \iff yRx$

✗ antysymetryczna np dla 2 i 4 $v(2R4 \wedge 4R2) = 1 \wedge v(2=4) = 0$

✗ spójna np dla 2 i 3 $2 \not R 3 \wedge 3 \not R 2 \wedge 3 \neq 2$

✗ przechodnia dla 2, 5, 10

$2R10 \wedge 10R5 \implies 2R5$

$\underset{1}{(2|10 \vee 10|2) \wedge (10|5 \vee 5|10)} \implies \underset{0}{(2|5 \vee 5|2)}$

b) $xRy \iff (x|y \wedge y \neq x) \qquad R \subseteq \mathbb{N}^2$

✗ zwrotna $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ v(x \neq x)$

✗ symetryczna $xRy \implies x = an \wedge y = bn \wedge a < b$

$yRx \implies x = an \wedge y = bn \wedge a > b$

$xRy \wedge yRx \implies a<b \wedge a>b$ sprzeczność

✓ antysymetryczna $\forall_{x,y \in \mathbb{N}} \sim (xRy \wedge yRx)$ $\quad 0 \Rightarrow 1$, $0 \Rightarrow 0$

✗ spójna dla 2 i 3 $2 \not R 3 \wedge 3 \not R 2 \wedge 2 \neq 3$

✓ przechodnia $xRy \implies x = an \wedge y = bn \wedge a < b$

$yRz \implies y = bn \wedge z = cn \wedge b < c$

$x = an \wedge z = cn \wedge a < c \iff xRz$

c) $xRy \iff x^2 \neq y^2 \qquad R \subseteq \mathbb{R}^2$

✗ zwrotna $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ v(x^2 \neq x^2)$

✓ symetryczna $xRy \iff x^2 \neq y^2 \iff y^2 \neq x^2 \iff yRx$

✗ antysymetryczna $2R3 \wedge 3R2 \wedge 2 \neq 3$

✗ spójna $2 \not R -2 \wedge -2 \not R 2 \wedge 2 \neq -2$

✗ przechodnia $2R3 \wedge 3R-2 \wedge 2 \not R -2$

d) $xRy \iff |x| + |y| = 3 \qquad R \subseteq \mathbb{Z}$

✗ zwrotna $1 \not R 1$

✓ symetryczna $xRy \iff |x| + |y| = 3 \iff |y| + |x| = 3 \iff yRx$

✗ antysymetryczna $1R2 \wedge 2R1 \wedge 1 \neq 2$

✗ spójna $1 \not R 3 \wedge 3 \not R 1 \wedge 1 \neq 3$

✗ przechodnia $1R2 \wedge 2R-1 \wedge 1 \not R -1$

e) $xRy \iff \mathrm{Re}\,x \leq \mathrm{Re}\,y \qquad R \subseteq \mathbb{C}^2$

✓ zwrotna $\forall_{x \in \mathbb{C}}\ \mathrm{Re}\,x \leq \mathrm{Re}\,x$

✗ symetryczna $1+j\ R\ 2+j \wedge 2+j\ \not R\ 1+j$

✗ antysymetryczna $1+2j\ R\ 1+j \wedge 1+j\ R\ 1+2j \wedge 1+j \neq 1+2j$

✓ spójna $\forall_{x,y \in \mathbb{C}}\ \mathrm{Re}\,x \leq \mathrm{Re}\,y \vee \mathrm{Re}\,x > \mathrm{Re}\,y$

✓ przechodnia $\mathrm{Re}\,x \leq \mathrm{Re}\,y \wedge \mathrm{Re}\,y \leq \mathrm{Re}\,z \implies \mathrm{Re}\,x \leq \mathrm{Re}\,z \iff xRz$

2.

a) $m \varrho n \iff m^2 \leq n^2 \qquad X = \mathbb{Z}$

✓ zwrotna $\forall_{m \in \mathbb{Z}}\ m^2 \leq m^2$

✗ symetryczna dla 1 i 2 $\quad 1^2 \leq 2^2 \wedge \sim(2^2 \leq 1^2)$

nie jest relacją równoważności

b) $m \varrho n \iff \max\{3, m\} = \max\{3, n\} \qquad X = \mathbb{Z}$

✓ zwrotna $\max\{3, m\} = \max\{3, m\}$

✓ symetryczna $\max\{3, m\} = \max\{3, n\} \iff \max\{3, n\} = \max\{3, m\}$

✓ przechodnia $\max\{3, m\} = \max\{3, n\} \wedge \max\{3, n\} = \max\{3, k\}$

$\iff \max\{3, m\} = \max\{3, k\} \iff m \varrho k$

$[3]_\varrho = \{3, -2, -9999, 0, \dots\} = \{k \in \mathbb{Z} ,\ k \leq 3\}$

$[4]_\varrho = \{4\}$

c) $k \varrho m \iff 3 | km \qquad X = \mathbb{Z}$

✗ zwrotna dla 1 $\quad 3 \nmid 1 \cdot 1$

nie jest relacją równoważności

d) $k \varrho m \iff 4 | (k^3 - m^3) \qquad X = \mathbb{Z}$

✓ zwrotna $4 | 0$

✓ symetryczna $4 | (k^3 - m^3)$

$\iff k^3 - m^3 = 4n$

$\iff m^3 - k^3 = 4 \cdot (-n) \qquad -n \in \mathbb{Z}$

$\iff m \varrho k$

✓ przechodnia $k \varrho m \iff k^3 = 4a + m^3$

$m \varrho n \iff m^3 = 4b + n^3$

$k^3 = 4\underbrace{(a+b)}_{\in \mathbb{Z}} + n^3 \qquad a, b \in \mathbb{Z}$

jest relacją równoważności

$[1]_\varrho = \{1, 5, \dots\} = \{k \in \mathbb{Z} : k^3 \bmod 4 = 1\}$

$[0]_\varrho = \{0, 2, -2, 4, \dots\} = \{k \in \mathbb{Z} : k^3 \bmod 4 = 0\}$

e) $A \varrho B \iff A \cap B \neq \emptyset \qquad X = 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$

✓ zwrotna $\forall_{A \in X}\ A \cap A = A \neq \emptyset$

✓ symetryczna $A \varrho B \iff A \cap B \neq \emptyset \iff B \cap A \neq \emptyset \iff B \varrho A$

✗ przechodnia $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\} \neq \emptyset$

$\{3,4,5\} \cap \{5,6,7\} = \{5\} \neq \emptyset$

$\{1,2,3\} \cap \{5,6,7\} = \emptyset$

nie jest relacją równoważności

f) $A \varrho B \iff A \subseteq B \vee B \subseteq A \qquad X = 2^Y$, Y ma conajmniej 2 elementy

✓ zwrotna $A \subseteq A$

✓ symetryczna $A \varrho B \iff A \subseteq B \vee B \subseteq A \iff B \subseteq A \vee A \subseteq B \iff B \varrho A$

✗ przechodnia $\{1,2\} \varrho \{2\} \qquad \{2\} \subseteq \{1,2\}$

$\{2\} \varrho \{2,3\} \qquad \{2\} \subseteq \{2,3\}$

$\{1,2\} \not\varrho \{2,3\} \qquad \{1,2\} \not\subseteq \{2,3\} \wedge \{2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$

nie jest relacją równoważności

g) $x \varrho y \iff x - y \in \mathbb{Q} \qquad X = \mathbb{R}$

✓ zwrotna $\quad x - x = 0 \in \mathbb{Q}$

✓ symetryczna $\quad a \in \mathbb{Q} \iff -a \in \mathbb{Q}$

$x \varrho y \iff x - y \in \mathbb{Q} \iff y - x \in \mathbb{Q} \iff y \varrho x$

✓ przechodnia

$x \varrho y \iff x - y = \frac{a}{b} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{Z} \quad b,d \neq 0$

$y \varrho z \iff y - z = \frac{c}{d} \qquad z = y - \frac{c}{d}$

$x - z = x - y + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}$

jest relacją równoważności

$[\pi]_\varrho = \{\pi, \pi + 1, \pi + \frac{2}{3}, \dots\}$

$[\sqrt{2}]_\varrho = \{\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} + \frac{2}{3}, \dots\}$

h) $x \varrho y \iff x - y = \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \qquad X = \mathbb{R}$

✓ zwrotna $\quad x - x = 0 = \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor$

✓ symetryczna $\quad x \varrho y \iff x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$

$\iff y - \lfloor y \rfloor = x - \lfloor x \rfloor \iff y \varrho x$

✓ przechodnia $\quad x \varrho y \iff x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$

$y \varrho z \iff y - \lfloor y \rfloor = z - \lfloor z \rfloor$

$x - \lfloor x \rfloor = z - \lfloor z \rfloor \iff x \varrho z$

i) $x \varrho y \iff \mathrm{Re}\, x = \mathrm{Re}\, y \qquad X = \mathbb{C}$

✓ zwrotna $\quad \mathrm{Re}\, x = \mathrm{Re}\, x$

✓ symetryczna $\quad x \varrho y \iff \mathrm{Re}\, x = \mathrm{Re}\, y \iff \mathrm{Re}\, y = \mathrm{Re}\, x \iff y \varrho x$

✓ przechodnia $\quad x \varrho y \iff \mathrm{Re}\, x = \mathrm{Re}\, y$

$y \varrho z \iff \mathrm{Re}\, y = \mathrm{Re}\, z$

$\mathrm{Re}\, x = \mathrm{Re}\, z \iff x \varrho z$

$[1]_\varrho = \{1, 1 + j, 1 + \sqrt{3} j, 1 - 999 j, \dots\} = \{1 + bj \in \mathbb{C} : b \in \mathbb{R}\}$

$[-5]_\varrho = \{-5, -5 + j, -5 + \sqrt{3} j, \dots\} = \{-5 + bj \in \mathbb{C} : b \in \mathbb{R}\}$

j) $x \varrho y \iff x - y \in \mathbb{Z} \qquad X = \mathbb{C}$

✓ zwrotna $\quad x - x = 0 \in \mathbb{Z}$

✓ symetryczna $\quad x - y \in \mathbb{Z} \iff y - x \in \mathbb{Z} \iff y \varrho x$

✓ przechodnia $\quad x \varrho y \iff x - y \in \mathbb{Z} \qquad x = y + a \qquad a, b \in \mathbb{Z}$

$y \varrho z \iff y - z \in \mathbb{Z} \qquad z = y + b$

$x - z = y + a - y - b = a - b \in \mathbb{Z} \iff x \varrho z$

$[\sqrt{2} + j]_\varrho = \{\sqrt{2} + j, \sqrt{2} + 3j, 2 + \sqrt{2} + j, \dots\} = \{a + bj \in \mathbb{C} : a - \sqrt{2} \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{R}\}$

$[j]_\varrho = \{j, 1 + j, 1, 5 + 5j, \dots\} = \{a + bj \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{R}\}$

k) $x \varrho y \iff x^4 = y^4 \qquad X = \mathbb{C}$

✓ zwrotna $\quad x^4 = x^4$

✓ symetryczna $\quad x^4 = y^4 \iff y^4 = x^4$

✓ przechodnia $\quad x^4 = y^4 \wedge y^4 = z^4 \iff x^4 = z^4$

jest relacją równoważności

$[1]_\varrho = \{1, j, -1, -j\} = \sqrt[4]{1}$

$[16]_\varrho = \{2, 2j, -2, -2j\} = \sqrt[4]{16}$

3.

$X = [-5, 5]$ $\quad \rho: \ x \rho y \iff |x+2| = |y+2| \quad \rho \in X^2$

✓ zwrotna $\quad |x+2| = |x+2|$

✓ symetryczna $\quad x \rho y \iff |x+2| = |y+2| \iff |y+2| = |x+2| \iff y \rho x$

✓ przechodnia $\quad x \rho y \iff |x+2| = |y+2|$

$x + 2 = y + 2 \ \vee \ x + 2 = -y - 2$

$x = y \ \vee \ x = -y - 4$

$y \rho z \iff y = z \ \vee \ y = -z - 4$

$x \rho y \wedge y \rho z \iff x = z \ \vee \ x = -(-z-4) - 4$

$x = z \ \vee \ x = z \implies x \rho z$

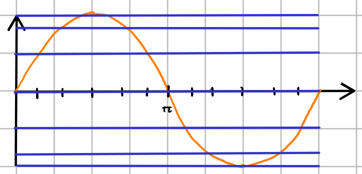
$[1]_\rho = \{1, -5\}$ $\qquad [0]_\rho = \{0, -4\}$

$[2]_\rho = \{2\}$ $\qquad [3]_\rho = \{3\}$

4.

$A = \{ k \in \mathbb{Z} : \ -44 \leq k \leq 44 \}$

$m R n \iff \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \qquad R \subseteq A^2$



7 klas abstrakcji $\quad \left[\frac{n\pi}{6}\right]_R = \left[\pi - \frac{n\pi}{6}\right]_R = \left[\frac{n\pi}{6} + 2k\pi\right]_R$

$\left[\frac{\pi}{6}\right]_R \ \left[\frac{\pi}{3}\right]_R \ \left[\frac{\pi}{2}\right]_R \ [\pi]_R \ \left[\frac{7\pi}{6}\right]_R \ \left[\frac{4\pi}{3}\right]_R \ \left[\frac{3\pi}{2}\right]_R$

✓ zwrotna $\quad \forall_{n \in A} \ \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

✓ symetryczna $\quad \forall_{n,m \in A} \ \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) \iff \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

✓ przechodnia $\quad \forall_{n,m,k \in A} \ \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) \wedge \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right) \implies \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)$