

Wektory: wartości własne

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$ wektor własne jest zdefiniowany od 0

$Av = \lambda v$ wektor własne związane z wartością własną

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

wartość własna wektor własny

wartości własne to niezerowe
wektory 2 podprzestrzeni własne
 $v \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$

widmian charakterystyczny $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

pierwiastki widmianu - wartości własne

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 2 \\ &= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 \\ &= \lambda(\lambda-3) \end{aligned}$$

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad \text{dla } \lambda = 3$$

$$\begin{bmatrix} 2-3 & 1 \\ 2 & 1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kiedy krotność pierwiastka jest równa n
to wyktor podprzestrzeni $\in [1, n]$
rozkład Jordan'a

$$V_\lambda = \{x \in M(n \times 1, \mathbb{R}): (A - \lambda I)x = 0\}$$

$$V_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix})$$

1 i 2.

$$a) \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ \frac{3}{5} & 3 \end{bmatrix} \quad x_A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} - t & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} - t \end{bmatrix} = -\left(\frac{3}{5} + t\right)\left(\frac{3}{5} - t\right) - \frac{16}{25} = t^2 - 1$$

$$= (t-1)(t+1)$$

$$A' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} A \quad x_{A'}(t) = (-3-t)(3-t) - 16$$

$$= t^2 - 9 - 16$$

$$= (t-5)(t+5)$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -5$$

$$\frac{1}{5} \hookrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$A - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R1} \rightarrow -8, \text{R2} \rightarrow 4} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R2} \rightarrow \frac{1}{8}, \text{C1} \rightarrow 1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x - \frac{1}{2}a &= 0 \\ y &= a \end{aligned}$$

$$V_1 = \text{span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix})$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ a \end{bmatrix} = a' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R1} \rightarrow 2, \text{R2} \rightarrow 4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{R2} \rightarrow 1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \text{span}(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix})$$

podprzestrzenie bez dg. takie
samo dla macierzy pomnożonej
przez skalar - mogą być łatwiejsze
obliczenia

$$b) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad x_A(t) = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$$

$$(A - iI)v = 0 \quad \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{i \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_i = \text{span}(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$(A + iI)v = 0 \quad \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{i \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{-i} = \text{span}(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$c) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4-t & 0 & 6 \\ 2 & 1-t & 4 \\ -1 & 0 & -1-t \end{bmatrix} = \begin{aligned} & (4-t)(1-t)(-1-t) + 0 + 0 + 6(1-t) - 0 - 0 \\ & = (4-4t-t^2)(-1-t) + 6 - 6t \\ & = -4 + 5t - t^2 - 4t + 5t^2 - t^3 + 6 - 6t \\ & = -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 \\ & = (t-1)(-t^2 + 3t - 2) \\ & = -(t-1)^2(t-2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ \hline 1 & & -1 & 3 & -3 \\ & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$t^2 - 2t - t + 2$$

$$t(t-2) - (t-2)$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \uparrow & \uparrow & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} +2v_1 \\ -v_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \text{span}([[-3, -2, 1]])$$

$$d) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5-t & -3 & 6 \\ 4 & -t & 4 \\ -1 & 2 & -2-t \end{bmatrix} = \begin{aligned} & (5-t)(-t)(-2-t) + 12 + 48 \\ & - 6t - 8(5-t) + 12(-2-t) \\ & = -t(-10 - 5t + 2t + t^2) + 60 - 6t - 40 + 8t - 24 - 12t \\ & = 10t + 3t^2 - t^3 - 4 - 10t \\ & = -t^3 + 3t^2 - 4 \\ & = (t+1)(-t^2 + 4t - 4) \\ & = -(t+1)(t-2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 3 & 0 & -4 \\ \hline 1 & & 1 & -4 & 4 \\ & -1 & 4 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+6v_3} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \text{span}([-1, 0, 1])$$

$$\lambda = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{+3v_3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \text{span}([0, 2, 1])$$

$$e) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 3 & -5-t & 3 \\ 6 & -6 & 9-t \end{vmatrix} &= (1-t)(-5-t)(9-t) - 54 - 54 - 18(-5-t) + 18(1-t) \Rightarrow (9-t) \\ &= (-5-t+5t+t^2)(9-t) - 108 + 20 + 18t \Rightarrow 8t + 36 - 2t \\ &= -20 + 16t + 3t^2 + 5t - 4t^2 - t^3 + 36 - 2t \\ &= -t^3 + 12t + 16 \\ &= -(t-4)(t+2)^2 \end{aligned}$$

$$\lambda = 4 \quad \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-v_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-v_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c} | \\ \uparrow \\ | \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_4 = \text{span}([1, 1, 2])$$

$$\lambda = -2 \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{-2} = \text{span}([1, 1, 0], [-1, 0, 1])$$

3.

$A \in M$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\chi_{3A}(\lambda) = \det(3A - \lambda I) = \det(3A - \lambda I)$$

$$\chi_A(t) = 0 \Rightarrow \det(A - tI) = 0$$

$$1) \quad \chi_{3A}(3t) = \det(3IA - 3tI) = \det(3(A - tI)) = \det(3I \cdot (A - tI)) \\ = \det(3I) \cdot \det(A - tI) = \det(3I) \cdot 0 = 0$$

$$\chi_{3A}(3t) = 0 \Rightarrow 3t \text{ ist ein Eigenwert von } 3A$$

$$2) \quad \chi_{A-I}(\lambda) = \det(A - I - \lambda I) = \det(A - (\lambda + 1)I)$$

$$\chi_{A-I}(t-1) = \det(A - (t-1+1)I) = \det(A - tI) = 0$$

$$\chi_{A-I}(t-1) = 0 \Rightarrow t-1 \text{ ist ein Eigenwert von } A - I$$

$$3) \quad \chi_{A^2}(\lambda) = \det(A^2 - \lambda I)$$

$$\chi_{A^2}(t^2) = \det(A^2 - t^2 I)$$

$$Av = \lambda v \quad | \cdot A$$

$$A \cdot Av = A(\lambda v)$$

$$A^2v = \lambda(Av)$$

$$A^2v = \lambda \cdot (\lambda v)$$

$$A^2v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2 \text{ ist ein Eigenwert von } A^2$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(3-\lambda) - 16 = -9 + \lambda^2 - 16$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda) - 16 = 16 - 2\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 16$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda) - 16$$

A) $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \uparrow & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_s^A = \text{span}([1, 2])$$

$$\lambda = -5$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \uparrow & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_{-5}^A = \text{span}([-2, 1])$$

B)

$$\lambda = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \dots \quad V_0^B = V_{-5}^A$$

$$\lambda = 10$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \dots \quad V_{10}^B = A_5^A$$

C) $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \uparrow & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_0^C = \text{span}([-1, 2])$$

$$\lambda = 10$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \uparrow & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_{10}^C = \text{span}(2, 1)$$

transponieren

zammeinsetzen von Ergebnis
ergibt dann V_λ^B

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad 1^{\circ} \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -a+2b=-6 \\ -c+2d=12 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 2a+b=-8 \\ 2c+d=-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -a+2b=-6 \\ 2a+b=-8 \end{array} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & -6 & 12 \\ 2 & 1 & -8 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{+2U_1} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & 5 & -20 & 20 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} +2U_2 \\ \times 2 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 6 & -12 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} +2U_2 \\ \times 2 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} -c+2d=12 \\ 2c+d=-4 \end{array} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2^{\circ} \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \times (-1) \\ +2U_1 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 20 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \times 2 \\ \times 2 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \times 2 \\ \times 2 \end{array}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array} \right]$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \det(A_1) \cdot A_1^{-1} \quad ?$$

alternatywny sposób

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Macierz przekształcenia można wyrazić jako iloczyn 3 macierzy

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

\downarrow

$V_1 \ V_2 \quad \lambda_1 \ \lambda_2 \quad V_1 \ V_2$

macierz diagonalizowalna macierz diagonalna macierz przekształcenia
wartości własne wartości własne w bazie własne

własności

$$Av = \lambda v \quad Bv = \lambda' v$$

$$\bullet A^n v = \lambda^n v$$

$$\bullet (\alpha A)v = (\alpha \lambda)v$$

$$\bullet (A+B)v = (\lambda + \lambda')v$$

$$\text{rot}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{macierz rotacji}$$

nie ma wektorów własne

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha) & \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad \text{bo zatem nie zostaje przekształcenie}\quad (\text{dla } \alpha \neq k\pi)$$

tak samo dla stoczenia obrotu
z jednostkową osią