Zestaw 10

1. W przypadku, gdzie granica w punkcie będzie istniała stosuje się oszacowania
i twierdzenie o 3 funkcjach, żeby wykazać, że jakaś wartość jest granicą.
Trzeba wykazać, że zbliżając się do punktu po dowolnej krzywej
(nie tylko po prostych) funkcja zbliża się do wartości granicznej

W przypadu, gdzie granica nie będzie istniała, wskazuje się 2 ciągi
takie, że oba zbiegają do punktu granicznego ale funkcja w granicy
przyjmuje dla nich różne wartości. Korzysta się z definicji Heinego.

Granica prawdopodobnie nie będzie istniała, kiedy mianownik jest wyższego rzędu od licznika

Przydatna nierówność do szacowania
$$(|x| - |y|)^2 \geq 0 \qquad \text{dla } x \neq 0 \wedge y \neq 0$$
$$x^2 - 2|xy| + y^2 \geq 0 \qquad \frac{1}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2|xy|}$$
$$x^2 + y^2 \geq 2|xy|$$

a)
$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2 + 2y^2} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$$

1° dla $x \neq 0 \vee y \neq 0$

$$0 \leq \frac{|x^3 y|}{x^2 + (\sqrt{2}y)^2} \leq \frac{|x^3 y|}{2|x \cdot \sqrt{2} y|} = \frac{|x^3 y|}{2\sqrt{2}|xy|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} x^2$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{2\sqrt{2}} = 0 \implies \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{|x^3 y|}{x^2 + 2y^2} = 0 \implies \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + 2y^2} = 0$$

2° dla $x = 0 \wedge y \neq 0$
$$f(0,y) = \frac{0 \cdot y}{0^2 + 2y^2} = \frac{0}{2y^2} = 0$$

3° dla $x \neq 0 \wedge y = 0$
$$f(x,y) = \frac{x^3 \cdot 0}{x^2 + 2 \cdot 0^2} = \frac{0}{x^2} = 0$$

te 3 przypadki pokrywają dążenie do (0,0) z dowolnego kierunku
więc $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$

b) $f(x,y) = \frac{x + y - 2}{x^2 + y^2 - 2} \qquad (x_0, y_0) = (1,1)$

1° $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n} + 1, \frac{1}{n} + 1\right) \longrightarrow (1,1)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n} + 1 - 2}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1 - 2} = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n^2} + \frac{4}{n}} = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}\left(\frac{1}{n} + 2\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\frac{-1}{n} + 1, \frac{1}{n} + 1\right) \longrightarrow (1,1)$

$$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{\frac{-1}{n} + 1 + \frac{1}{n} + 1 - 2}{\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 1 - 2} = \frac{0}{\frac{2}{n^2}} = 0 \longrightarrow 0$$

Wartości dla ciągów są różne więc z definicji Heinego granica w (1,1) nie istnieje

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ $\qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

1° $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$

$f(x_n, y_n) = \dfrac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{-1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$

$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \dfrac{\frac{1}{n} \cdot \frac{-1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\dfrac{1}{2} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}$

Granica nie istnieje

d) $f(x,y) = \dfrac{x - xy}{2x^2 + (y-1)^2}$ $\qquad (x_0, y_0) = (0,1)$

1° $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, 1\right) \longrightarrow (0,1)$

$f(x_n, y_n) = \dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{2 \cdot \frac{1}{n^2} + 0^2} = \dfrac{0}{\frac{2}{n^2}} = 0 \longrightarrow 0$

2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} + 1\right) \longrightarrow (0,1)$

$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 1\right)}{2 \cdot \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + 1 - 1\right)^2} = \dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} \longrightarrow -\dfrac{1}{3}$

Granica nie istnieje

*) (spoza zestawu)

$f(x,y) = \dfrac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$ $\qquad (x_0, y_0) = (0,0)$

1° $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$

$f(x_n, y_n) = \dfrac{\frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^4}} = \dfrac{\frac{1}{n^4} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{n^2} + 1\right)} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{n^2} + 1} \longrightarrow 0$

2° $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow (0,0)$

$f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \dfrac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$

Granica nie istnieje

2. Dla funkcji określonej fragmentarycznie (z klamrą), wartości pochodnej w niektórych punktach trzeba liczyć z definicji

a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(3x^2+y^2)}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1-\cos(3(0+\Delta x)^2+0^2)}{\Delta x^3} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1-\cos(3\Delta x^2)}{\Delta x^4}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x \sin(3\Delta x^2)}{4\Delta x^3} = \frac{3}{2} \lim_{\Delta x \to 0} 3 \cdot \frac{\sin(3\Delta x^2)}{3\Delta x^2} = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0-0}{\Delta y} = 0$$

b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3-y^3} = (x^3-y^3)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} \cdot (x^3-y^3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-y^3)^2}} \quad \text{dla } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt[3]{-\Delta y^3}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1$$

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x^3}{\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^3}{\Delta x^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y^2} = +\infty$$

3. Istnienie pochodnych cząstkowych i ciągłość są od siebie niezależne

a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$$

$1°\quad (x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0)$
$\qquad\qquad 2°\quad (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0)$

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \qquad\qquad f(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{-1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{1}{2}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nie istnieje więc f nie jest ciągła w $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{\Delta x^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y}{0 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

b)
$$f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^2} \qquad (x_0, y_0) = (0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^4 + y^2} = 0 = f(0,0)$$

funkcja jest ciągła w $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x^4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x^2|}{\Delta x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{\Delta y^2}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} \quad \text{nie istnieje}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0^+} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = 1 \qquad \lim_{\Delta y \to 0^-} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} = -1$$

4.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\forall_{(x,y) \neq (0,0)} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^3 y (x^2+y^2)^2 - x^3 y^2 \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4} = 2x^3 y \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^3} = 2x^3 y \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0 \cdot \Delta y^2}{\Delta y^4} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2x^3 y \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^3} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$1°\quad (x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0)$
$\qquad\qquad 2°\quad (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}, \dfrac{1}{n}\right) \rightarrow (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n) = 2 \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^3} = \frac{2}{n^4} \cdot 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{n^3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)^3} = \frac{4\sqrt{2}}{n^4} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{27}{n^6}} = \frac{4\sqrt{2}}{27} \cdot \frac{\frac{1}{n^6}}{\frac{1}{n^6}} = \frac{4\sqrt{2}}{27}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ nie istnieje więc $\frac{\partial f}{\partial y}$ jest nieciągła w $(0,0)$

5.

a) $f(x,y) = \ln(2xy) - 2x^2 - y^2 \qquad D_f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$

$f_x = \dfrac{1}{2xy} \cdot 2y - 4x = \dfrac{1}{x} - 4x = \dfrac{1 - 4x^2}{x} = \dfrac{4\left(\frac{1}{2} - x\right)\left(\frac{1}{2} + x\right)}{x}$ \qquad $f_x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \lor x = \frac{1}{2}$

$f_y = \dfrac{1}{2xy} \cdot 2x - 2y = \dfrac{1}{y} - 2y = \dfrac{1 - 2y^2}{y} = \dfrac{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - y\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + y\right)}{y}$ \qquad $f_y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \lor y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

punkty krytyczne (do sprawdzenia) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f_{xx} = -x^{-2} - 4 = \dfrac{-1}{x^2} - 4$

$f_{yy} = -y^{-2} - 2 = \dfrac{-1}{y^2} - 2$

$f_{xy} = f_{yx} = 0$

$W\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = W\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{vmatrix} \overset{<0}{-8} & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 32 > 0$

maksimum lokalne w $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $f(x,y) = x + 8y + \dfrac{1}{xy} \qquad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$f_x = \dfrac{1}{y} \cdot (-x^{-2}) + 1 = \dfrac{-1}{x^2 y} + 1 \qquad f_y = \dfrac{-1}{xy^2} + 8$

$f_x = 0 \longrightarrow 1 = \dfrac{1}{x^2 y} \qquad x^2 y = 0 \qquad y = \dfrac{1}{x^2}$

$f_y = 0 \longrightarrow \dfrac{1}{x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = 8 \qquad \dfrac{1}{\frac{1}{x^3}} = 8 \qquad x^3 = 8 \qquad x = 2 \longrightarrow y = \dfrac{1}{4}$

punkt krytyczny $\left(2, \frac{1}{4}\right)$

$f_{xx} = -\dfrac{1}{y} \cdot (-2x^{-3}) = \dfrac{2}{x^3 y}$

$f_{yy} = -\dfrac{1}{x}(-2y^{-3}) = \dfrac{2}{xy^3}$

$f_{xy} = -\dfrac{1}{x^2} \cdot (-1y^{-2}) = \dfrac{1}{x^2 y^2}$

$W\left(2, \frac{1}{4}\right) = \begin{vmatrix} \overset{>0}{1} & 4 \\ 4 & 64 \end{vmatrix} = 48 > 0$

minimum lokalne w $\left(2, \frac{1}{4}\right)$

c) $f(x,y) = (2x + y^2) e^x$

$f_x = (2x + y^2) e^x + 2e^x = e^x (2x + y^2 + 2)$

$f_y = 2y e^x$

$2y e^x = 0 \longrightarrow y = 0$

$e^x (2x + 0 + 2) = 0 \longrightarrow x = -1$

punkt krytyczny $(-1, 0)$

$f_{xx} = 2e^x + (2x + y^2 + 2) e^x = e^x (2x + y^2 + 4)$

$f_{yy} = 2e^x$

$f_{xy} = f_{yx} = 2y e^x$

$W(-1, 0) = \begin{vmatrix} \overset{>0}{\frac{2}{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{vmatrix} = \dfrac{2}{e} \cdot \left(\dfrac{1}{e} + 2\right) > 0$

minimum w $(-1, 0)$

d) $f(x,y) = 2x^2 - x^3 y^2 - \ln(x) \qquad D_f: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$

$f_x = 4x - 3y^2 x^2 - \dfrac{1}{x}$

$f_y = -2x^3 y$

$-2x^3 y = 0 \longrightarrow x = 0 \lor y = 0$

$4x - \dfrac{1}{x} = 0 \qquad 4x = \dfrac{1}{x} \qquad x^2 = \dfrac{1}{4} \longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

punkt krytyczny $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$f_{xx} = 4 - 6y^2 x + \dfrac{1}{x^2}$

$f_{yy} = -2x^3$

$f_{xy} = f_{yx} = -6x^2 y$

$W\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} = -2 < 0$

nie ma ekstremów lokalnych

6. $f(x,y) = xy^2$

$f_x = y^2$ $y^2 = 0 \rightarrow y = 0, \ x \in \mathbb{R}$

$f_y = 2xy$ $2xy = 0 \rightarrow x = 0 \lor y = 0$

punkty krytyczne $(x, 0), \ x \in \mathbb{R}$

$f_{xx} = 0$

$f_{yy} = 2x$ $W(x,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0$
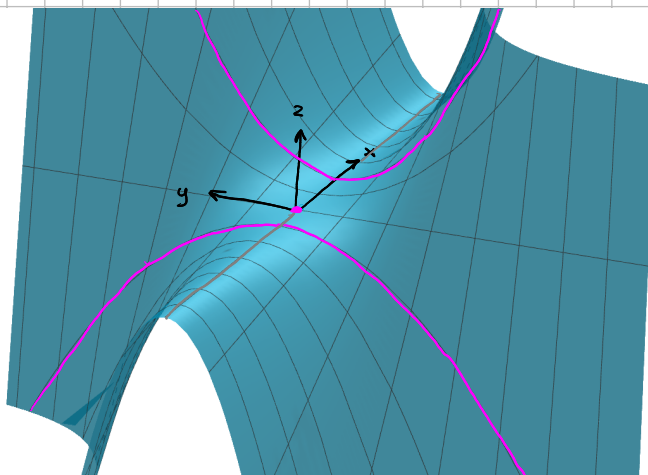
$f_{xy} = f_{yx} = 2y$ nie wiadomo

trzeba określić inną metodą

maksima lokalne $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$

minima lokalne $\{(x,0) \in \mathbb{R} : x > 0\}$

przekroje płaszczyznami prostopadłymi do osi x są parabolami

punk $(0,0)$ nie jest ekstremum (saddle point)