Liczby zespolone

$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych

Liczba zespolona - uporządkowana para liczb rzeczywistych (x, y)

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

Dodawanie

$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$(0,0)$ - zero - element neutralny dodawania

Mnożenie

$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$(1,0)$ - jedynka - element neutralny mnożenia

Płaszczyzna zespolona (Gaussa)

dodawanie liczb zespolonych interpretuje się jako dodawanie odpowiadających im wektorów

$\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$

ten zbiór jest utożsamiany ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

zamiast $(x,0)$ przyjmuje się oznaczenie x

$(0,1)$ — jednostka urojona j

$j^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1 \quad j \notin \mathbb{R}$

j jest pierwiastkiem kwadratowym z $-1 \in \mathbb{R}$

$a \cdot j = (a,0) \cdot (0,1) = (a \cdot 0 - 0 \cdot 1, a \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, a)$

$(aj) \cdot (bj) = (0,a) \cdot (0,b) = (0 - ab, 0 \cdot b + 0 \cdot a) = (-ab, 0) = -ab \in \mathbb{R}$

Liczby czysto urojone - $yj = (0,y)$, $y \in \mathbb{R}$

na płaszczyźnie zespolonej, liczby czysto urojone leżą na osi pionowej OY

Postać kanoniczna (algebraiczna)

$z = x + yj = (x, y)$

Działania w postaci kanonicznej – tak samo jak dla liczb rzeczywistych

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$

2) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) - j(y_1 - y_2)$

3) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

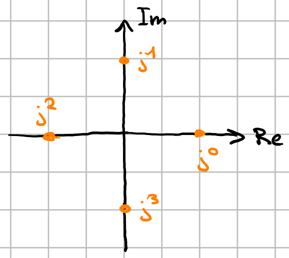
4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j\,\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$

Potęgi j

$j^0 = 1 \quad j^1 = j \quad j^2 = -1 \quad j^3 = -j$

$j^4 = 1 \quad j^5 = j \quad j^6 = -1 \quad j^7 = -j$

$j^k = j^{k \bmod 4}$



Część rzeczywista $z = x + yj \qquad \mathrm{Re}\, z = x \qquad (x \in \mathbb{R})$

Część urojona $z = x + yj \qquad \mathrm{Im}\, z = y \qquad (y \in \mathbb{R})$

$z = \mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z)$

Osie płaszczyzny zespolonej – oś rzeczywista i oś urojona
i oznaczane $\mathrm{Re}\, z$ i $\mathrm{Im}\, z$

Sprzężenie $z = x + yj \qquad \bar{z} = x - yj$

$\overline{2-j} = 2+j$
$\overline{2} = 2$ symetryczne względem osi rzeczywistej
$\overline{3j} = -3j$

$z + 2\bar{z} = 6 + 5j$
$x + yj + 2x - 2yj = 6 + 5j$
$3x - yj = 6 + 5j$
$x = 2 \wedge y = -5 \qquad z = 2 - 5j$

Własności sprzężenia

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

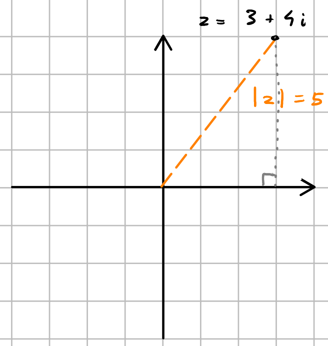
$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\overline{(\bar{z})} = z$

Moduł liczby zespolonej $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ dla $z = x + yj$

odległość od punktu $(0,0)$



Własności modułu

$|z| = 0 \iff z = 0$

$|z| = |\bar{z}|$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ dla $z_2 \neq 0$

$|z^n| = |z|^n$

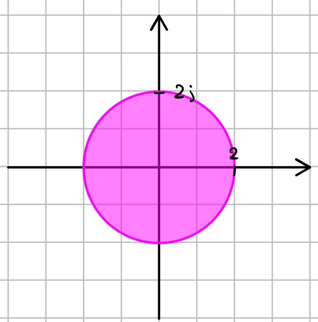
Interpretacja geometryczna

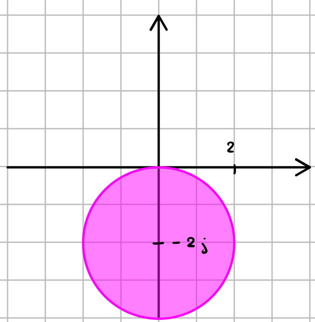
$z = x + yj$ można przedstawić jako punkt (x, y) na płaszczyźnie

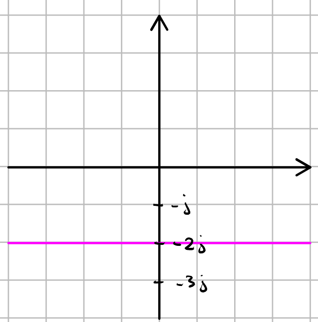
$|z|$ jest odległością tego punktu od punktu $(0,0)$

$|z_1 - z_2|$ jest odległością między z_1 i z_2

$|z| \leq 2$ $\qquad$ $|z+2j| = 2$ $\qquad$ $|z-j| = |z+3j|$







Argument liczby zespolonej φ

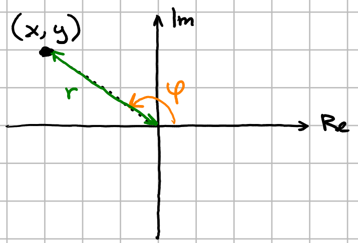
φ – kąt skierowany odpowiadający liczbie zespolonej z

$z = x + yj = r\left(\frac{x}{r} + j\frac{y}{r}\right) = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) \qquad r = |z|$

$\operatorname{Arg} z$ – zbiór argumentów liczby zespolonej z (różnią się o $2\pi n$)

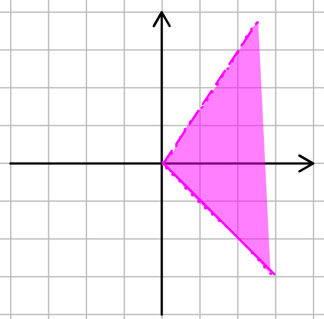
$\arg z$ – argument główny z przedziału $(-\pi, \pi]$

(określone dla $z \neq 0$)

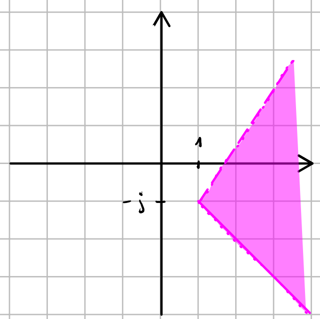


dla $\varphi \in (-\pi, \pi]$ $\qquad \cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \sin\varphi \ \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \qquad \tan\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$

$\arg z \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$



$\arg(z - 1 + j) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$



Postać trygonometryczna

$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$, gdzie $r = |z|$ i $\varphi \in \operatorname{Arg} z$

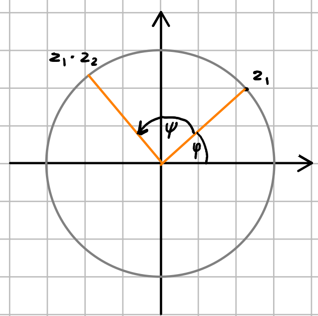
$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$

nie jest określona jednoznacznie

$z_1 = z_2 \iff r_1 = r_2 \ \wedge \ \exists k \in \mathbb{Z} \ \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Mnożenie przez liczbę o module 1 i argumencie φ odpowiada obrotowi mnożnej o φ



$|z_2| = 1$

$\arg z_2 = \varphi$

Działania na postaci trygonometrycznej

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + j\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)\right)$$ wzór Moivre'a

$$\bar{z} = |z|\left(\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi)\right)$$

$$-z = |z|\left(\cos(\varphi+\pi) + j\sin(\varphi+\pi)\right)$$

Postać wykładnicza

$$z = re^{\varphi j} = r\left(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right)$$

gdzie $r=|z|$, $\varphi \in \operatorname{Arg} z$, $z \neq 0$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$ dla $x\in\mathbb{R}$ i $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Przykłady

$e = e\cdot e^{0j}$ $\qquad$ $-\pi = \pi e^{\pi j}$

$2j = 2e^{\frac{\pi}{2}j}$ $\qquad$ $-1-j = \sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi}{4}j}$

$$(1+j)^{22}\cdot(\sqrt{3}-j)^{21} = \left[\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}j}\right]^{22}\cdot\left[2e^{-\frac{\pi}{6}j}\right]^{21}$$

$$= 2^{\frac{22}{2}}\cdot 2^{21}\cdot e^{\frac{22\pi}{4}j-\frac{21\pi}{6}j} = 2^{32}e^{0j} = 2^{32}$$

Pierwiastki liczb zespolonych

$t\in\mathbb{C}$ jest pierwiastkiem n-stopnia z $z\in\mathbb{C}$, jeśli $t^n = z$

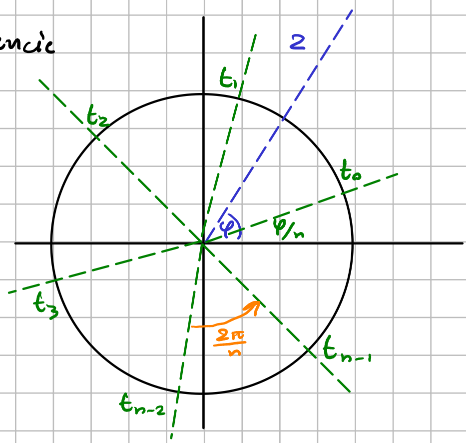
dla $z\neq 0$ istnieje dokładnie n różnych pierwiastków stopnia n z z

$$t_k = \sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}},$$ gdzie $k\in\mathbb{Z} \wedge 0\le k\le n-1$

pierwiastek główny – pierwiastek o najmniejszym nieujemnym argumencie

zbiór pierwiastków $\sqrt[n]{z} = \{t\in\mathbb{C}: t^n = z\}$

pierwiastki – wierzchołki n-kąta foremnego



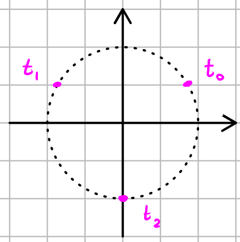
Przykład

$$\sqrt[3]{8j} = \left\{ 2e^{\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}j} : 0 \le k \le 2 \wedge k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$z = 8j \quad \arg z = \frac{\pi}{2} \quad |z| = 8$

$$\left\{ 2e^{\frac{\pi}{6}j},\ 2e^{\frac{5\pi}{6}j},\ 2e^{-\frac{\pi}{2}j} \right\}$$

$$\left\{ \sqrt{3} + j,\ -\sqrt{3} + j,\ -2j \right\}$$



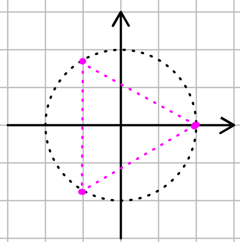
Pierwiastki z 1

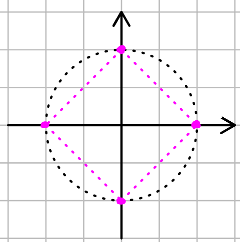
pierwiastki n-stopnia z 1 oznacza się ω_k $(0 \le k \le n-1)$

$$\omega_k = e^{\frac{2k\pi}{n}j} = \omega_1^k$$

$$\sqrt[3]{1} = \left\{ e^{0j},\ e^{\frac{2\pi}{3}j},\ e^{-\frac{2\pi}{3}j} \right\} = \left\{ 1,\ -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$\sqrt[4]{1} = \left\{ e^{0j},\ e^{\frac{\pi}{2}j},\ e^{\pi j},\ e^{-\frac{\pi}{2}j} \right\} = \left\{ 1,\ j,\ -1,\ -j \right\}$$





Jeśli t jest dowolnym pierwiastkiem stopnia n z $z \neq 0$ to

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ t\omega_k : k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \le k \le n-1 \right\}$$

znając jeden z pierwiastków z, pozostałe można otrzymać obracając go o $\frac{2\pi}{n}$

Przykład

$$z^4 = (2+j)^8 = \left[(2+j)^2\right]^4$$

jedno z rozwiązań $\rightarrow$ $z_0 = (2+j)^2 = 3 + 4j$

wszystkie $\rightarrow$ $\left\{ 1 \cdot (3+4j),\ j(3+4j),\ -1(3+4j),\ -j(3+4j) \right\}$

$$\left\{ 3+4j,\ -4+3j,\ -3-4j,\ 4-3j \right\}$$

Pierwiastki kwadratowe

$z = x + yj$, szukam $t = a + bj$ takiego, że $t^2 = z$

$$\left.\begin{aligned} (a+bj)^2 &= z \\ a^2 - b^2 + 2abj &= x + yj \\ |t^2| &= a^2 + b^2 \\ |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left.\begin{aligned} x &= a^2 - b^2 \\ y &= 2ab \\ \sqrt{x^2+y^2} &= a^2 + b^2 \end{aligned}\right\}$$

przykład

$\sqrt{3-4j} = ?$

$t^2 = a^2 - b^2 + 2abj$ $\quad |3-4j| = 5$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

1) $2a^2 = 8 \quad a = -2 \vee a = 2$

2) $-4b = -4 \quad \vee \quad 4b = -4$

$a = -2 \wedge b = 1 \qquad a = 2 \wedge b = -1$

$\sqrt{3-4j} = \{-2+j,\ 2-j\}$ → zawsze liczby przeciwne

wzory z Δ do funkcji kwadratowej działają dla liczb zespolonych

Rozwiązywanie równań w postaci wykładniczej

$z^5 = 8\bar{z}^2$

1) sprawdzam $z = 0$

$0^5 = 8 \cdot 0^2$ ✓

2) dla $z \neq 0$ zapisuję postać wykładniczą

$z = re^{j\varphi} \qquad r = |z| \in \mathbb{R}_+ \qquad \varphi \in \operatorname{Arg} z$

$z^5 = r^5 e^{5\varphi j}$

$\bar{z} = re^{-\varphi j}$

$\bar{z}^2 = r^2 e^{-2\varphi j}$

$r^5 e^{5\varphi j} = 8r^2 e^{-2\varphi j}$

3) porównuję moduły

$r^5 = 8r^2$
$r^3 = 8$
$r = 2 \in \mathbb{R}_+$

4) porównuję argumenty

$5\varphi = -2\varphi + 2k\pi$
$7\varphi = 2k\pi$
$\varphi = \frac{2k\pi}{7}$ → będzie 7 pierwiastków

$\varphi_0 = 0 \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{7} \quad \varphi_2 = \frac{4\pi}{7} \quad \ldots \quad \varphi_6 = \frac{12\pi}{7}$

5) rozwiązanie

$z = 2e^{\frac{2k\pi}{7}j}$ lub $z = 0$
dla $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$