Funkcje, granice funkcji

Granice umożliwiają badanie zachowania funkcji poza dziedziną i w nieskończoności, badanie asymptot pionowych, poziomych i ukośnych

Nieciągłość pierwszego rodzaju – skokowa

Nieciągłość drugiego rodzaju – conajmniej z 1 strony granica niewłaściwa

Punkty skupienia, punkty izolowane

$D_f = (a, b] \cup \{c\}$

Granicę definiuje się tylko dla punktów skupienia

Definicja Cauchy'ego

Granica właściwa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Granica niewłaściwa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}_+ \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}_- \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < m$$

Granica właściwa w nieskończoności

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in D \quad x > K \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Granica niewłaściwa w nieskończoności

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}_- \ \exists K \in \mathbb{R}_+ \ \forall x \in D \quad x > K \Rightarrow f(x) < m$$

Definicja Heinego

Granica właściwa w punkcie

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \iff \forall (x_n) \subset D,\ x_n \neq x_0 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Granica niewłaściwa

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n) \subset D,\ x_n \neq x_0 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n) \subset D,\ x_n \neq x_0 \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$$

Granica właściwa w nieskończoności

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = g \iff \forall (x_n) \subset D \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Granica niewłaściwa w nieskończoności

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n) \subset D \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$$

Granica funkcji w punkcie nie istnieje, gdy (z definicji Heinego)

$$\exists (x_n')(x_n''),\ x_n' \neq x_0 \neq x_n'' \quad \lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = x_0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} f(x_n') \neq \lim_{n\to\infty} (x_n'')$$

np. dla $x_n' = \frac{1}{n}$ i $x_n'' = -\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n'} = +\infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n''} = -\infty$$

więc $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje

Dowód z definicji Cauchy'ego, że $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

→ trzeba wyznaczyć wzór na δ tak, żeby doprowadzić do tautologii w stwierdzenia

$\forall_{M \in \mathbb{R}_+} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} \quad 0 < |x - 0| < \delta \implies \frac{1}{x^2} > M$

przekształcam następnie:

$\frac{1}{x^2} > M \to x < \frac{1}{\sqrt{M}} \to \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$

$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \implies x < \frac{1}{\sqrt{M}}$

Dowód z definicji Heinego, że $\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$

niech $\lim_{n \to \infty} x_n = 2 \implies \lim_{n \to \infty} \frac{3x_n + 1}{5x_n + 4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{2}$

Dowód z definicji Cauchy'ego, że $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2(x-1)} = 1$

zapisuję $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in D} \quad 0 < |x - 1| < \delta \implies \left| \frac{x^2 - 1}{2(x-1)} - 1 \right| < \varepsilon$

$\left| \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2}(x+1) - 1 \right| = \frac{1}{2} |x + 1 - 2| = \frac{1}{2} |x - 1|$

$\frac{1}{2} |x - 1| < \varepsilon \to |x - 1| < 2\varepsilon \to$ przyjmuję $\delta = 2\varepsilon$

Dowód z definicji Heinego, że $\lim_{x \to +\infty} \sin(x)$ nie istnieje

$x_n' = \pi n \qquad \lim_{n \to \infty} \sin(x_n') = 0$

$x_n'' = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{n \to \infty} \sin(x_n'') = 1$

granice nie są równe więc $\lim_{x \to \infty} \sin(x)$ nie istnieje

Twierdzenia

1) z wartością bezwzględną

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \implies \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |g|$$

2) o trzech funkcjach (o ściskaniu)

$$\forall x \in S(x_0) \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \ \wedge \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = K$$

$$\implies \lim_{x\to x_0} g(x) = K$$

3) z funkcją ograniczoną

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \ \wedge \ \exists M>0 \quad \forall x\in S(x_0) \quad |g(x)| \leq M$$

$$\implies \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$$

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych

niech $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b\in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \pm b$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = a\cdot b$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, dla $g(x)\neq 0$, $b\neq 0$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Funkcja zredukowana $f|_A$

dla $f: D \to \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subset D \subset \mathbb{R}$

to $g: A \to \mathbb{R}$ taka, że $\forall x \in A \; f(x) = g(x)$

g jest funkcją zredukowaną $g = f|_A$

Granice jednostronne

lewostronna $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f|_{D \cap (-\infty, x_0)} \right)(x)$

prawostronna $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f|_{D \cap (x_0, +\infty)} \right)(x)$

Twierdzenie (przy istniejących granicach jednostronnych)

granica funkcji istnieje gdy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

np. nie istnieje $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

bo $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ i $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

Podstawowe granice

1) $$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

2) $\forall a>0$ $$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

3) $\forall r\in\mathbb{R}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} \to e$ dla $f(x)\to 0$
i analogicznie dla pozostałych

$$\boxed{f(x) = e^{\ln(f(x))} = \ln(e^{f(x)})}$$

Przykłady symboli nieoznaczonych

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{16+x} - 2}{x} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{(1+\frac{x}{16})^{\frac{1}{4}} - 1}{\frac{x}{16}} \cdot \frac{1}{16} = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{x^2}-1}{x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 = \ln(3)\cdot 1 = \ln(3)$$

3) $$\lim_{x\to\infty} (2x+1)\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x}\cdot\frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 2\cdot 1 = 2$$

4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{x^3\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(x)}\cdot\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5) $$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$$

6) $$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{\arctan(x+2)}$$

$y = \arctan(x+2)$
$x+2 = \tan(y)$
$x\to -2 \Rightarrow y\to 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{(\tan(y)-2)^2 - 4}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\tan(y)[\tan(y) - 4]}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y}\cdot\frac{\tan(y)-4}{\cos(y)} = 1\cdot(-4) = -4$$

Ciągłość funkcji

$f: D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in D} \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$f: D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall_{(x_n) \subset D} \; \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Funkcja jest ciągła w zbiorze $A \subset D$ jeśli jest ciągła w każdym jego punkcie

1) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem skupienia D, to f jest ciągła w x_0
$$\Longleftrightarrow$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem izolowanym D, to f jest ciągła w x_0

3) Jeśli $x_0 \notin D$ to f jest nieciągła w x_0

Twierdzenie o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej

jeśli funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in D$ i $f(x_0) \neq 0$
to istnieje takie otoczenie $Q(x_0, r)$, że funkcja ma
w zbiorze $D \cap Q(x_0, r)$ taki sam znak jak $f(x_0)$

Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych

jeśli f i g są ciągłe w x_0, to
$f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ gdy $g(x_0) \neq 0$
są ciągłe w x_0

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

Jeśli f jest ciągła i rosnąca na przedziale $A \subset \mathbb{R}$
to f^{-1} też jest ciągła i rosnąca na przedziale $f(A)$

Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej

Jeśli $u = f(x)$ jest ciągła w x_0 i $h(u)$ jest ciągła w $u_0 = f(x_0)$
to $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ też jest ciągła

Twierdzenie o wprowadzaniu granicy do argumentu funkcji ciągłej

Jeśli istnieje $\lim_{x \to x_0} f(x) = g \in \mathbb{R}$ i $h(u)$ jest ciągła w $u_0 = g$

to $\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x \to x_0} f(x)) = h(g)$

Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach

1) jednomian

2) funkcja wykładnicza

3) funkcje trygonometryczne

4) wszystkie funkcje odwrotne, złożenia i otrzymane przez operacje arytmetyczne

Twierdzenie Darboux

Jeśli f jest ciągła w $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ i d jest zawarta między $f(a)$ i $f(b)$ to istnieje takie $c \in [a, b]$, że $f(c) = d$

Funkcja ciągła przyjmuje wszystkie wartości pośrednie
Jeśli f jest różnowartościowa to istnieje dokładnie 1 takie c

→ wyznaczanie pierwiastków metodą bisekcji

supremum - kres górny - najmniejsze ograniczenie górne
infimum - kres dolny - największe ograniczenie dolne

Twierdzenie Weierstrassa

Jeśli f jest ciągła w $[a, b]$, to jest w tym przedziale ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy (sup i inf)
(maksimum jest równe supremum, minimum jest równe infimum)

Punkty nieciągłości

Punkt x_0, w którym f nie jest ciągła ale jest ciągła w jego sąsiedztwie jest punktem nieciągłości

I-go rodzaju → istnieją granice właściwe, jednostronne w x_0
II-go rodzaju → w każdym pozostałym przypadku