

Zestaw 4'

1.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \\ 1 & & 2 & & 1 & & \\ 1 & 3 & & 3 & 1 & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = (b+a)^5$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\ \binom{5}{5} & \binom{5}{4} & \binom{5}{3} & \binom{5}{2} & \binom{5}{1} & \binom{5}{0} & \end{array}$$

Każdy wiersz odpowiada rozkładowi dwumianu Newtona

Każdy wiersz jest symetryczny

k-ty i symetrycznie (n-k)-ty wyraz to współczynniki przy k-tym i (n-k)-tym składniku sumy

$$k\text{-ty od lewej} = k\text{-ty od prawej więc } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$2) \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$\binom{n}{k}$ oznacza k-tą liczbę w n-tym wierszu

wyrazy w n+1 wierszu otrzymuje się sumując wyrazy z wiersza n

dla $n=4, k=1$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \\ 1 & & 2 & & 1 & & \\ \binom{4}{1} & 1 & 3 & 3 & 1 & \binom{4}{k+1} & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ & & \uparrow & & & & \\ & & \binom{n+1}{k+1} & & & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \binom{4}{1} + \binom{4}{2} &= \binom{5}{2} \\ 4 + 6 &= 10 \\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

$$3) \binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$$

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}$$

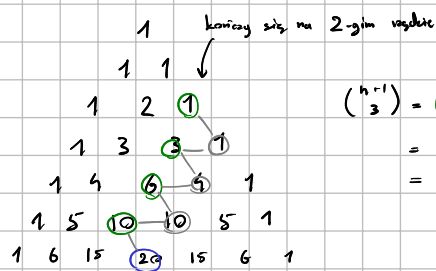
$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \\ 1 & & 2 & & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

$$4) \binom{n+1}{2} = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{n+1}{2} \cdot n = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \binom{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{2} &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \\ &= n + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \\ &= n + (n-1) + \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \binom{n-3}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & 1 & & 1 & & & \\ 1 & & 2 & & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

$$5) \binom{n+1}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}$$



$$\begin{aligned} \binom{n-1}{3} &= \binom{n}{2} + \binom{n}{3} \\ &= \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} \\ &= \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3} \end{aligned}$$

$$6) \binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \dots + \binom{2n}{2n} = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} = \sum_{k=0}^n \left(\binom{2n-1}{2k} + \binom{2n-1}{2k-1} \right) = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} 1^k \cdot 1^{2n-1-k} = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

pozostaje i niepozostaje

$$\begin{aligned} \binom{2n}{1} + \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n-1} &= \binom{2n-1}{0} + \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-1}{2} + \binom{2n-1}{3} + \dots + \binom{2n-1}{2n-2} + \binom{2n-1}{2n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} 1^k \cdot 1^{2n-1-k} = (1+1)^{2n-1} = 2^{2n-1} \end{aligned}$$

z tożsamości 2)

$$\binom{2n}{2k} = \binom{2n-1}{2k-1} + \binom{2n-1}{2k}$$

$$\binom{2n}{0} = 1 = \binom{2n-1}{-1} + \binom{2n-1}{0} = 0 + 1$$

$$7) 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n} \stackrel{?}{=} n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{k}{k} = n \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{k}{k} = n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^n n \cdot \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} = n \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

Liczba podzbiórów zbioru
n-elementowego

$$8) 2^0 \binom{n}{0} + 2^1 \binom{n}{1} + \dots + 2^n \binom{n}{n} \stackrel{?}{=} 3^n$$

$$2^0 \cdot 1^n \binom{n}{0} + 2^1 \cdot 1^{n-1} \binom{n}{1} + \dots + 2^n \cdot 1^0 \binom{n}{n} \quad \int (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(2+1)^n = 3^n$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 2^i \cdot 1^{n-i} = (2+1)^n = 3^n$$

$$9) \binom{m+n}{k} \stackrel{?}{=} \binom{m}{k} \cdot \binom{n}{0} + \binom{m}{k-1} \binom{n}{1} + \dots + \binom{m}{0} \binom{n}{k}$$

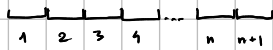
wybieranie podzbiórów

z ich wybór k z m+n

możemy wybrać k z m i 0 z n, k-1 z m i 1 z n

ogólnie p z m i k-p z n

3.



$$N = \binom{n+1}{3} \cdot 2$$

wybór 3 krawędzi ↓
ABC / CBA

$$N = \underbrace{1 \cdot (n+1-2) \cdot 2}_{\text{B na miejscu nr 2}} + \underbrace{2 \cdot (n+1-3) \cdot 2}_{\text{B na miejscu nr 3}} + \dots + \underbrace{(n-1) \cdot 1 \cdot 2}_{\text{B na miejscu nr n}}$$

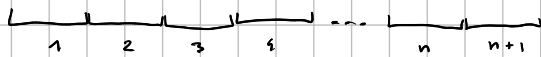
B na miejscu nr 2 B na miejscu nr 3 B na miejscu nr n

1 wartość po lewej
n+1-2 wartości po prawej
ABC / CBA

$$N = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot (n+1-(k+1)) \cdot 2 = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = 2 \cdot \sum_{k=0}^n k(n-k) \quad (\text{oba dodatkowe wyrażenia} = 0)$$

$$\frac{1}{2} N = \sum_{k=0}^n k(n-k) = \binom{n+1}{3}$$

4.



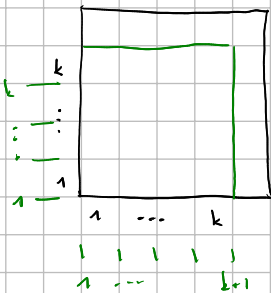
$$N = \underbrace{(n+1-1) \cdot (n+1-1)}_{\text{A siedzi na krawędzie nr 1}} + \underbrace{(n+1-2) \cdot (n+1-2)}_{\text{A na nr 2}} + \dots + \underbrace{(n+1-n) \cdot (n+1-n)}_{\text{A na nr n}}$$

A siedzi na krawędzie nr 1 A na nr 2 A na nr n

B i C wybierają spośród n na prawo

$$N = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

5.



Kwadrat o boku k wyznacza jednocześnie prostokąt zawarty w $k \times k$, a nie zawarty w $(k-1) \times (k-1)$

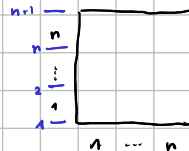
Przylega do górnego boku
Przylega do prawego boku

$$N_k = \underbrace{\binom{k+1}{2}}_{\text{dwa pionowe}} - k + \underbrace{\binom{k+1}{2}}_{\text{dwa pionowe}} - k - \underbrace{k^2}_{\text{kwadratowy liczone podwójnie}} = \frac{(k+1)k}{2} \cdot 2 - k^2 = k^3 + k^2 - k^2 = k^3$$

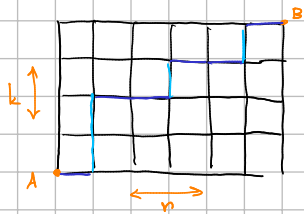
$$N = \sum_{k=1}^n n^3$$

$$\binom{n+1}{2}^2$$

bok długości n \rightarrow n+1 krawędzi
wybór 2 pionowych i 2 pionowych
 \rightarrow jednocześnie dwaśro prostokąt



Przydatne / ciekawe



najkrótsza droga po kracie ma długość $n+k$

na ile sposobów można wybrać optymalną trasę

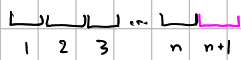
$n+k$ razy wybierasz się czy iść w prawo czy do góry

$$\binom{n+k}{k} = \binom{n+k}{n}$$

↓
w górę

* jeżeli to się ma da $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$



wybioram $k+1$ elementów
fioletowy albo będzie albo nie będzie

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k+1}$$

i jeden już
wybrany (ostatni)

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n x^i y^{n-i}$$

$$(x+y)(x+y) \dots (x+y)$$

wybioram i - elementów podzbiór czynników \rightarrow po mnożeniu da x^i
pozostały $n-i$ - elementów podzbiór daje y^{n-i}
dla każdego i mogą to wybrać na $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$ sposobów

$$\text{liczba podzbiorów} \quad 2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

$$0 = (1-1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (-1)^i = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} - \binom{2n}{3} + \dots + \binom{2n}{2n}$$

$$0 = \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \dots + n \cdot \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^n i \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^n n \binom{n-1}{i-1} \dots$$

$$i \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} = n \frac{(n-1)!}{(i-1)! \cdot (n-i)!} = n \frac{(n-1)!}{(i-1)! \cdot (n-1-(i-1))!} = n \binom{n-1}{i-1}$$

$$\frac{d}{dx} (1+x)^n = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$$