Rachunek zdań

Zdanie – stwierdzenie, które ma jednoznacznie określoną wartość

Wartościowanie – przypisanie wartości logicznej

$v(p) = 1$ → zdanie prawdziwe

$v(p) = 0$ → zdanie fałszywe

Funktory zdaniotwórcze

negacja	$\sim, \neg$
koniunkcja	$\wedge$
alternatywa	$\vee$
implikacja	$\Rightarrow$
równoważność	$\Leftrightarrow$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Implikacja

jeśli ..., to ...

$p \Rightarrow q$

poprzednik / następnik

Jeśli $p \Rightarrow q$ jest prawdziwa to

→ p jest warunkiem wystarczającym dla q

→ q jest warunkiem koniecznym dla p

Dla implikacji $p \Rightarrow q$

- $q \Rightarrow p$ jest odwrotna
- $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest przeciwna
- $\neg q \Rightarrow \neg p$ jest przeciwstawna (i równoważna)

Równoważność — wtedy i tylko wtedy gdy

Dla prawdziwej $p \Leftrightarrow q$

→ p jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla q

$w[((\neg 5 \neq 1) \Leftrightarrow \sin(\pi) = 0) \Longrightarrow \sqrt{2} > 1]$

$w[(\text{fałsz} \Leftrightarrow \text{prawda}) \Longrightarrow \text{prawda}]$

$w(\text{fałsz} \Longrightarrow \text{prawda}) = 1$

Tautologia

→ zdanie, które jest zawsze prawdziwe niezależnie od wartości zmiennych zdaniowych

Sprawdzenie czy zdanie $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$ jest tautologią

Metoda 1. – tabela

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$r = (p \Rightarrow q)$	$s = (r \wedge \neg q)$	$s \Rightarrow \neg p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

→ zdanie jest tautologią

Metoda 2. nie wprost

Zakładam, że zdanie nie jest tautologią → może być fałszywe i dążę do sprzeczności

$$[\underbrace{(p \Rightarrow q) \wedge \neg q}_{1}] \Rightarrow \underbrace{\neg p}_{0}$$ bo $1 \Rightarrow 0$ jest fałszywe

$$\begin{cases} w[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] = 1 \\ w(\neg p) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w(p \Rightarrow q) = 1 \\ w(\neg q) = 1 \\ w(p) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} w(p) = 1 \\ w(q) = 0 \\ w(1 \Rightarrow 0) = 1 \end{cases}$$

sprzeczność

Zdanie nie może być fałszywe więc musi być tautologią

Podstavové práva rachunku zdaní

1. $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
2. $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
3. $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
4. $p \vee \sim p$
5. $\sim(p \wedge \sim p)$
6. $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

   $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
7. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
8. $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
9. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

   $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
10. $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

    $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
11. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
12. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
13. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
14. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

Zdania logiczne Φ i Ψ są równoważne jeśli $\Phi \iff \Psi$ jest tautologią

Chcąc skorzystać z twierdzenia typu (Założenie $\Rightarrow$ Teza)

→ trzeba sprawdzić czy założenia są spełnione

- jeśli tak to zachodzi teza
- jeśli nie to twierdzenie pozostaje prawdziwe

np. dla stwierdzenia

Jeśli $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą to jest funkcją różnowartościową

1) $f(x) = x$ $\quad 1 \Rightarrow 1$ $\quad$ prawda

2) $f(x) = -x$ $\quad 0 \Rightarrow 1$ $\quad$ prawda

3) $f(x) = 3$ $\quad 0 \Rightarrow 0$ $\quad$ prawda

Funkcje zdaniowe i kwantyfikatory

Funkcja zdaniowa jednej zmiennej to wyrażenie $\phi(x)$, $x \in X \neq \emptyset$, które staje się zdaniem (prawdziwym albo fałszywym), gdy za zmienną x podstawi się element zbioru X

Zbiór X to zakres zmienności funkcji ϕ

Element $x_0 \in X$ spełnia funkcję ϕ jeśli $\phi(x_0)$ jest zdaniem prawdziwym

Zbiór elementów spełniających funkcję ϕ $\{x \in X : \phi(x)\}$

na przykład:

1) $X = \mathbb{R}$, $\phi(x)$: $x < 7$

$\{x \in \mathbb{R} : \phi(x)\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 7\} = (-\infty, 7)$

2) $X = \mathbb{N}$, $\phi(x)$: $x > 3 \Rightarrow x = 7$

$\{x \in \mathbb{N} : \phi(x)\} = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 3 \lor x = 7\} = \{1, 2, 3, 7\}$

Kwantyfikator ogólny (uniwersalny) $\forall$ → dla każdego

$\forall_{x \in X} \ \phi(x)$

dla każdego elementu ze zbioru X zachodzi $\phi(x)$

jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy $\{x \in X : \phi(x)\} = X$

Kwantyfikator szczegółowy (egzystencjalny) $\exists$ → istnieje

$\exists_{x \in X} \ \phi(x)$

istnieje element w zbiorze X dla którego zachodzi $\phi(x)$

jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy $\{x \in X : \phi(x)\} \neq \emptyset$

Przykłady

1) $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{Z}$, $x+y=\pi$ → funkcja zdaniowa 2 zmiennych

2) $\exists y \in \mathbb{Z}\ (x+y=\pi)$ → funkcja zdaniowa 1 zmiennej

3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ (x+y=\pi)$ → zdanie fałszywe

4) $\forall y \in \mathbb{Z}\ \exists x \in \mathbb{R}\ (x+y=\pi)$ → zdanie prawdziwe

Kwantyfikatory ograniczone

dla $x \in X$, $\phi(x)$ i $A \subseteq X$

- $(\forall x \in A)\,\phi(x) \iff \forall x \in X\ (x \in A \Rightarrow \phi(x))$
- $(\exists x \in A)\,\phi(x) \iff \exists x \in X\ (x \in A \wedge \phi(x))$

przykład: zbiór elementów $x \in \mathbb{R}$ spełniających $\phi(x)$

1) $\phi(x)$: $\forall y \in \mathbb{R}\quad x > \sin(y)$

$\{x \in \mathbb{R} : \phi(x)\} = (1, +\infty)$

2) $\phi(x)$: $\exists y \in \mathbb{R}\quad x > \sin(y)$

$\{x \in \mathbb{R} : \phi(x)\} = (-1, +\infty)$

Prawa rachunku kwantyfikatorów

Wyrażenie jest prawem jeśli prawdziwe dla dowolnej interpretacji występujących w nim symboli i funkcji zdaniowych

$\phi(x)$, $\psi(x)$ to funkcje zdaniowe, $x \in X \neq \emptyset$

1. $\forall x\, \phi(x) \Rightarrow \exists x\, \phi(x)$
2. $\sim(\forall x)\, \phi(x) \iff \exists x\, (\sim\phi(x))$

   $\sim(\exists x)\, \phi(x) \iff \forall x\, (\sim\phi(x))$
3. $\forall x\, (\phi(x) \wedge \psi(x) \iff \forall x\, \phi(x) \wedge \forall x\, \psi(x)$
4. $\exists x\, (\phi(x) \vee \psi(x)) \iff \exists x\, \phi(x) \vee \exists x\, \psi(x)$
5. $\exists x\, (\phi(x) \wedge \psi(x)) \Rightarrow \exists x\, \phi(x) \wedge \exists x\, \psi(x)$
6. $\forall x\, \phi(x) \vee \forall x\, \psi(x) \Rightarrow \forall x\, (\phi(x) \vee \psi(x))$

Prawa włączania i wyłączania kwantyfikatorów

niech $\phi(x)$ – funkcja zdaniowa, $x \in X \neq \emptyset$, β – zdanie
$\diamond$ – dowolny z symboli $\wedge, \vee, \Rightarrow$

1. $\forall x\, (\beta \diamond \phi(x)) \iff \beta \diamond \forall x\, \phi(x)$

   oraz $\forall x\, (\phi(x) \Rightarrow \beta) \iff (\exists x\, \phi(x) \Rightarrow \beta)$

2. $\exists (\beta \diamond \phi(x)) \iff \beta \diamond \exists x\, \phi(x)$

   oraz $\exists x\, (\phi(x) \Rightarrow \beta) \iff (\forall x\, \phi(x) \Rightarrow \beta)$

Prawa przestawiania kwantyfikatorów

dla $\phi(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$

1. $\forall x\, \forall y\, \phi(x,y) \iff \forall y\, \forall x\, \phi(x,y)$
2. $\exists x\, \exists y\, \phi(x,y) \iff \exists y\, \exists x\, \phi(x,y)$
3. $\exists x\, \forall y\, \phi(x,y) \Rightarrow \forall y\, \exists x\, \phi(x,y)$