

Wektory i wartości własne

$A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ $\lambda \in \mathbb{R}$ wektor własny jest z definicji różny od 0

$Av = \lambda v$ wektor własny związany z wartością własną

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

wartość własna wektor własny

wektory własne to niezerowe
wektory z podprzestrzeni własnej
 $v \in V \setminus \{0\}$

widomian charakterystyczny $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$
pierwiastki wielomianu - wartości własne

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 2$$

$$= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2$$

$$= \lambda(\lambda - 3)$$

kiedy krotność pierwiastka jest równa n
to wymiar podprzestrzeni $\in [1, n]$

rozkład Jordana

$(A - \lambda I)v = 0$ dla $\lambda = 3$

$$V_\lambda = \{x \in M(n \times 1, \mathbb{R}) : (A - \lambda I)x = 0\}$$

$$V_0 = \{ \begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right)$$

1 i 2.

a) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -\frac{3}{5}-t & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5}-t \end{vmatrix} = -(\frac{3}{5}+t)(\frac{3}{5}-t) - \frac{16}{25}$

$$= -\frac{9}{25} + t^2 - \frac{16}{25} = t^2 - 1$$

$$= (t-1)(t+1)$$

$$A' = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}A$$

$$\chi_{A'}(t) = (-3-t)(3-t) - 16$$

$$= t^2 - 9 - 16$$

$$= (t-5)(t+5)$$

$\hookrightarrow \lambda'_1 = 5 \quad \lambda'_2 = -5$

$\cdot \frac{1}{5} \hookrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -1$

$\lambda_1 = 1$

$$A - 1 \cdot I \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\uparrow]{+v_2, -\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} x - \frac{1}{2}a = 0 \\ y = a \end{matrix}$$

$$V_1 = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a \\ a \end{bmatrix} = a' \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A - (-1)I \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

podprzestrzenie będą takie
same dla macierzy pomnożonej
przez skalar - mogą być takijsze
obliczenia

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\chi_A(t) = t^2 + 1 = (t-i)(t+i)$

$$(A - iI)v = 0 \quad \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdot (-i)]{\cdot i} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_i = \text{span} \left(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$(A + iI)v = 0 \quad \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdot (-i)]{\cdot (-i)} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{-i} = \text{span} \left(\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$c) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4-t & 0 & 6 \\ 2 & 1-t & 4 \\ -1 & 0 & -1-t \end{vmatrix} = (4-t)(1-t)(-1-t) + 0 + 0 + 6(1-t) - 0 - 0$$

$$= (4-t)(-t^2+2t-1) + 6(1-t)$$

$$= -4t^2 + 8t - 4 - t^3 + 2t^2 - t + 6 - 6t$$

$$= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2$$

$$= (t-1)(-t^2+3t-2)$$

$$= -(t-1)(t^2-3t+2)$$

$$= -(t-1)^2(t-2)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & \\ & -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}$$

$$t^2 - 2t - t + 2$$

$$t(t-2) - (t-2)$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ & \uparrow & \uparrow \\ & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2b \\ a \\ b \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\cdot(-1)]{\cdot \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-2u_1]{+2u_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \text{span}([-3, -2, 1])$$

$$d) \quad A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5-t & -3 & 6 \\ 4 & -t & 4 \\ -1 & 2 & -2-t \end{vmatrix} = (5-t)(-t)(-2-t) + 12 + 48$$

$$= -6t^2 - 8(5-t) + 12(-2-t)$$

$$= -t(-10-5t+2t+t^2) + 60 - 6t - 40 + 8t - 24 - 12t$$

$$= 10t + 3t^2 - t^3 - 4 - 10t$$

$$= -t^3 + 3t^2 - 4$$

$$= (t+1)(-t^2+4t-4)$$

$$= -(t+1)(t-2)^2$$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 3 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & 4 & \\ & -1 & 4 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[+4u_3]{+6u_3} \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{-1} = \text{span}([-1, 0, 1])$$

$$\lambda = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[+4u_3]{+3u_3} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & -12 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \text{span}([0, 2, 1])$$

$$e) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-t & -3 & 3 \\ 3 & -5-t & 3 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix} = (1-t)(-5-t)(4-t) - 54 - 54 - 18(-5-t) + 18(1-t) + 3(4-t) \\ = (-5-t+5t+t^2)(4-t) - 108 + 90 + 18t - 18 + 18t + 36 - 3t \\ = -20 + 16t + 4t^2 + 5t - 4t^2 - t^3 + 36 - 3t \\ = -t^3 + 12t + 16 \\ = -(t-4)(t+2)^2$$

$$\lambda = 4 \\ \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-v_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-v_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\uparrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_4 = \text{span}([1, 1, 2])$$

$$\lambda = -2 \\ \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ & \uparrow & \uparrow \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V_{-2} = \text{span}([1, 1, 0], [-1, 0, 1])$$

3.

$$A \in M$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$\chi_{3A}(\lambda) = \det(3A - \lambda I) = \det(3A - \lambda I)$$

$$\chi_A(t) = 0 \Rightarrow \det(A - tI) = 0$$

$$1) \quad \chi_{3A}(3t) = \det(3IA - 3tI) = \det(3(A - tI)) = \det(3I \cdot (A - tI)) \\ = \det(3I) \cdot \det(A - tI) = \det(3I) \cdot 0 = 0$$

$$\chi_{3A}(3t) = 0 \Rightarrow 3t \text{ jest wartościem własną } 3A$$

$$2) \quad \chi_{A-I}(\lambda) = \det(A - I - \lambda I) = \det(A - (\lambda+1)I)$$

$$\chi_{A-I}(t-1) = \det(A - (t-1+1)I) = \det(A - tI) = 0$$

$$\chi_{A-I}(t-1) = 0 \Rightarrow t-1 \text{ jest wartością własną } A - I$$

$$3) \quad \chi_{A^2}(\lambda) = \det(A^2 - \lambda I)$$

$$\chi_{A^2}(t^2) = \det(A^2 - t^2 I)$$

$$Av = \lambda v \quad | \cdot A$$

$$A \cdot Av = A(\lambda v)$$

$$A^2 v = \lambda(Av)$$

$$A^2 v = \lambda(\lambda v)$$

$$A^2 v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda^2 \text{ jest wartością własną } A^2$$

4.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(3-\lambda) - 16 = -9 + \lambda^2 - 16$$

$$= (\lambda-5)(\lambda+5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(8-\lambda) - 16 = 16 - 2\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 16$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda-10)$$

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \chi_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(2-\lambda) - 16$$

$$= \lambda(\lambda-10)$$

A) $\lambda = 5$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \uparrow & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_5^A = \text{span}([1, 2])$$

 $\lambda = -5$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \uparrow & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_{-5}^A = \text{span}([-2, 1])$$

B)

 $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \dots V_0^B = V_{-5}^A$$

 $\lambda = 10$

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \dots V_{10}^B = A_5^A$$

C) $\lambda = 0$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \uparrow & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_0^C = \text{span}([-1, 2])$$

 $\lambda = 10$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \uparrow & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad V_{10}^C = \text{span}([2, 1])$$

transponowana

zamienione współrzędne
względem V_λ^B

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad 1^\circ \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} -a + 2b &= -6 \\ -c + 2d &= 12 \end{aligned}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2a + b &= -8 \\ 2c + d &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -a + 2b &= -6 \\ 2a + b &= -8 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 & 12 \\ 2 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{+2v_1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -6 & 12 \\ 0 & 5 & -20 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & -12 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{+2v_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -c + 2d &= 12 \\ 2c + d &= -4 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2^\circ \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 1 & 12 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} +(-1) \\ +2v_1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 5 & 20 & -10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \det(A_1) \cdot A_1^{-1} \quad ?$$

alternatywny sposób

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Macierz przekształcenia można wyrazić jako iloczyn 3 macierzy

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{V_1 \ V_2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\lambda_1 \ \lambda_2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{V_1 \ V_2}$

macierz
diagonalizowalna

macierz diagonalna
wartości własne

macierz przekształcenia
w bazie własnej

Własności

$$Av = \lambda v \quad Bv = \lambda' v$$

$$\bullet A^n v = \lambda^n v$$

$$\bullet (aA)v = (a\lambda)v$$

$$\bullet (A+B)v = (\lambda + \lambda')v$$

$$\text{rot}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{macierz rotacji}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha) & \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} &\text{nie ma wektorów własnych} \\ &\text{bo żaden nie zostaje przekształcony} \\ &(\text{dla } \alpha \neq k\pi) \end{aligned}$$

taki sam dla zwrócenia do przodu
z jednostajnością