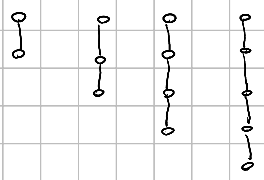
1.

Drzewa o wierzchołkach $\{1, 2, 3, \dots n\}$

a) $\forall v \in V \quad deg(v) \in \{1, 2\}$

Kod Pruefera → różne elementy → $(n-2)! \cdot \binom{n}{2}$

n = 2 n = 3 n = 4



1 3 12 60 ...

$\binom{n}{2}$ $(n-2)!$

↑ 2 skrajne ↑ środkowe

1					
2	3				
3	2				
4					

1					
2	2	3	3	4	4
3	4	2	4	2	3
4	3	4	2	3	2
5					

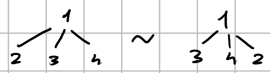
Każde takie drzewo jest grafem liniowym P_n

$$\binom{n}{2}(n-2)! = \frac{n(n-1)}{2} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2}$$

b) $\exists v \in V \quad deg(v) = n-1$

n = 4 n = 5

$\binom{n}{1}$ wybór korzenia



Wierzchołek o stopniu $n-1$ jest korzeniem, pozostałe wierzchołki to liście

Korzeń jest połączony z każdym liściem

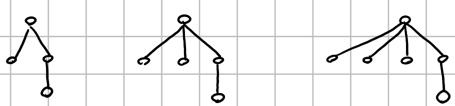
Dodanie dowolnej krawędzi utworzyłoby cykl

Korzeń należy do wszystkich krawędzi drzewa

c) $\exists v \in V \quad deg(v) = n-2$

$$(\underbrace{x, x, \dots x}_{n-3}, y) \rightarrow \binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{1} \cdot \binom{n-2}{1}$$

n = 4 n = 5 n = 6



$$\binom{n}{1, 1, 1, n-3} = \binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{1}\binom{n-3}{n-3} = n(n-1)(n-2)$$

korzeń

wierzchołek stopnia 2

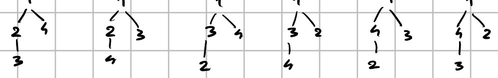
liść niesąsiadujący z korzeniem

reszta

Wierzchołek o stopniu $n-2$ to korzeń

Jest 1 wierzchołek niesąsiadujący z korzeniem

Jest 1 wierzchołek stopnia 2 sąsiadujący z tym



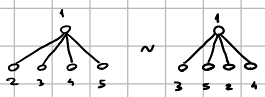
$T(n, k)$ – liczba drzew o zbiorze wierzchołków $\{1, 2, \ldots n\}$, w których stopień wierzchołka nr 1 wynosi k

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1} \cdot (n-1)^{n-k-1} \quad \text{dla } 1 \le k \le n-1$$

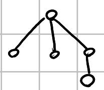
2.

$T(5,5) = 0$

$T(5,4) = 1$

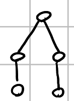


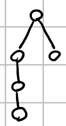
$T(5,3) = \binom{4}{1,1,2} = 4 \cdot 3 = 12$

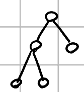


$$T(5,2) = \underbrace{\binom{4}{2,2} \cdot \underbrace{2! \cdot 2!}_{\text{uporządkowanie odnóg}} \cdot \frac{1}{2}}_{} + \underbrace{\binom{4}{3,1} \cdot 3!}_{} + \underbrace{\binom{4}{1,1,2}}_{} = 48$$

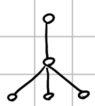
odnogi, odbicie, odnogi, dłuższa

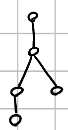


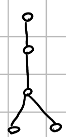


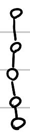


$T(5,1) = \binom{4}{1,3} + \binom{4}{1,1,1,1} + \binom{4}{1,1,1,1} + \binom{4}{1,1,2} = 4 + 4! + 4! + 4 \cdot 3 = 64$









3.

a)

$T(5,4) = \binom{3}{3} \cdot 4^0 = 1$

$T(5,3) = \binom{3}{2} \cdot 4^1 = 12$

$T(5,2) = \binom{3}{1} \cdot 4^2 = 48$

$T(5,1) = \binom{3}{0} \cdot 4^3 = 64$

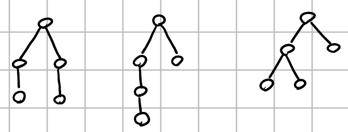
b) $T(n, n-1) = 1$

Jak w zadaniu 1.b, wierzchołek stopnia n-1 sąsiaduje ze wszystkimi pozostałymi oraz jest ustalony więc jest dokładnie 1 możliwość

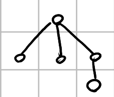
c)

$$\frac{T(n,k)}{T(n,k+1)} \stackrel{?}{=} \frac{(n-1)\cdot k}{n-k-1}$$

$T(\overset{n}{5}, \overset{k}{2})$



$T(\overset{n}{5}, \overset{k+1}{3})$



Wybieram wierzchołek inny niż korzeń i sąsiadujące z korzeniem $(n-k-1)$
i dołączam poddrzewo do korzenia (jednoznaczne)
→ dla każdego wariantu $(n-k-1)$ możliwości

Dla każdego poddrzewa korzenia
usuwam krawędź łączącą korzeń z poddrzewem
dodaję krawędź łączącą odłączone poddrzewo
z jednym z wierzchołków innego poddrzewa

$$(n-1-n_1) + (n-1-n_2) + \dots + (n-1-n_{k+1}) = (n-1)\cdot(k+1) - \underbrace{(n_1+n_2+\dots+n_{k+1})}_{\text{liczba wierzchołków we wszystkich poddrzewach}}$$
$$= (n-1)\cdot(k+1) - (n-1) = (n-1)\cdot k$$

$$T(n,k)\cdot(n-k-1) = T(n,k+1)\cdot(n-1)k$$

$$\frac{T(n,k)}{T(n,k+1)} = \frac{(n-1)k}{n-k-1} \qquad T(n,k) = \frac{(n-1)k}{n-k-1}\cdot T(n,k+1)$$

d)

$$T(n, n-1) = 1$$

$$T(n, n-2) = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{n-(n-2)-1} \cdot 1 = (n-1)(n-2)$$

$$T(n, n-3) = \frac{(n-1)\cdot(n-3)}{n-(n-3)-1} \cdot (n-1)(n-2) = \frac{(n-1)(n-3)}{2} \cdot (n-1)(n-2) = \binom{n-2}{2} \cdot (n-1)^2$$

$$T(n, n-4) = \frac{(n-1)\cdot(n-4)}{n-(n-4)-1} \cdot \binom{n-2}{2} \cdot (n-1)^2 = (n-1)^3 \cdot \frac{(n-4)}{3} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{(n-2)!}{3! \cdot (n-2-3)!} \cdot (n-1)^3 = \binom{n-2}{3}(n-1)^3$$

$$T(n, n-5) = \frac{(n-1)(n-5)}{n-(n-5)-1} \cdot \binom{n-2}{3}(n-1)^3 = \frac{n-5}{4} \cdot \frac{(n-2)!}{3! \cdot (n-5)!} \cdot (n-1)^4 = \frac{(n-2)!}{4!\,(n-6)!} \cdot (n-1)^4 = \binom{n-2}{4}(n-1)^4$$

$$T(n, n-5) = \binom{n-2}{4}(n-1)^4$$
$$\binom{n-2}{n-2-4}(n-1)^4$$
$$\binom{n-2}{(n-5)-1}(n-1)^{(n-2)-(n-5)+1}$$
$$\binom{n-2}{(n-5)-1}(n-1)^{n-(n-5)-1}$$

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

$$\begin{cases} T(n, n-1) = 1 \\ T(n,k) = \dfrac{(n-1)k}{n-k-1} \cdot T(n,k+1) \end{cases}$$

1° przypadek bazowy

$$\binom{n-2}{n-2} \cdot (n-1)^{n-(n-1)-1} = 1 \cdot (n-1)^0 = 1$$

2°

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

$$\Rightarrow T(n,k+1) = \frac{n-k-1}{(n-1)k} \cdot \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

$$= \frac{n-k-1}{(n-1)k} \cdot \frac{(n-2)!}{(k-1)! \cdot (n-2-(k-1))!} \cdot (n-1)^{n-k-1}$$

$$= (n-k-1) \cdot \frac{(n-2)!}{k! \cdot (n-k-1)!} \cdot (n-1)^{n-(k+1)-1}$$

$$= \frac{(n-2)!}{k! \cdot (n-2-k)!} \cdot (n-1)^{n-(k+1)-1} = \binom{n-2}{(k+1)-1}(n-1)^{n-(k+1)-1}$$

Z zasady indukcji wzór zachodzi

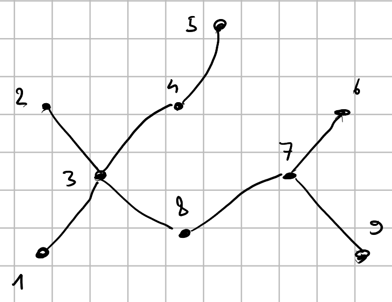
e) Wszystkich drzew o n wierzchołkach jest $T(n,1) + T(n,2) + \dots + T(n,n-1)$

$$\sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} = \binom{n-2}{k-1} \cdot (n-1)^{(n-2)-(k-1)} \cdot 1^{(k-1)}$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \cdot (n-1)^{(n-2)-k} \cdot 1^{k} = (n-1+1)^{n-2} = n^{n-2}$$

Kod Pruefera



Składa się z n-2 elementów
→ numery nie-liści

(3, 3, 4, 3, 8, 7, 7)

3x '3'
1x '4'
1x '8'
2x '7'

liczba wystąpień w kodzie → deg(v) − 1

Drzewo jednoznacznie oznacza kod i kod jednoznacznie wyznacza drzewo

(3 3 4 3 8 7 7)

1 2 3 4 5 6 7 8 9

kod składa się z n-2 liczb naturalnych z {1, ... n}

wszystkich możliwości jest n^{n-2} (tw. Caleya)

Budowanie grafu na podstawie kodu ...

4.

Ile w sumie liści mają wszystkie drzewa o wierzchołkach {1 ... n}

$$T(n, 1) = \binom{n-2}{0}(n-1)^{n-1-1} = (n-1)^{n-2}$$

liczba drzew gdzie $\deg(v_1) = 1$

analogicznie dla każdego v_i

dla n wierzchołków w sumie będzie $n \cdot (n-1)^{n-2}$