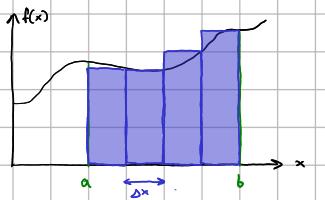


## Ciągła funkcja Riemanna

Dokonyuje się podziału przedziału  $[a, b]$



Nie ma znamionowania czy wybierze się prawy / lewy / środkowy punkt

Podział nie może być na różne przedziały

Suma Riemanna  $\sum_{x=a}^b f(x) \Delta x = \text{suma pól prostokątów} \approx \text{pole pod krzywą}$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x) \Delta x = \text{pole pod krzywą} \in \mathbb{R}$$

$\int_a^b f(x) dx$  istnieje  $\Leftrightarrow f$  jest całkowalna w sensie Riemanna na  $[a, b] \Leftrightarrow f \in R[a, b]$

a - dolna granica całkowalna

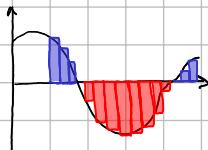
b - górna granica całkowalna

Warunek wystarczający

Jesli funkcja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ograniczona w  $[a, b]$  i jest ciągła w  $[a, b]$  z wyjątkiem skończonej liczby punktów

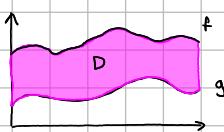
Interpretacja geometryczna

Pole nad osią x liczone jako dodatnie, a pod osią jako ujemne

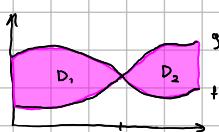


Pole między krzywą a osią x  $\int_a^b |f(x)| dx$

Pole między krzywymi



$$|D| = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \\ = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \\ = \int_a^c [f(x) - g(x)] dx + \int_c^b [g(x) - f(x)] dx$$

Ma znaczenie która funkcja jest wyżej

## Własności całek oznaczonych

1.  $f, g \in R[a, b]$   $f \leq g$  równe stąd tylko w skończonych liczbie punktów

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

2.  $f, g \in R[a, b]$   $f \leq g$  w  $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3.  $f \in R[a, b]$   $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4.  $a > b$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$5. \int_a^a f(x) dx = 0$$

6.  $f, g \in R[a, b]$   $k \in \mathbb{R} \Rightarrow f \pm g \in R[a, b]$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

7.  $f \in R[a, b]$   $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot f \in R[a, b]$

$$\int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

8.  $f, g \in R[a, b] \Rightarrow f \cdot g \in R[a, b]$

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$$

9. Jeżeli istnieje  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\alpha = \min(a, b, c)$ ,  $\beta = \max(a, b, c)$   
to niezależnie od kolejności położenia  $a, b, c$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

10.  $f \in R[a, b] \Rightarrow |f| \in R[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sup_{x \in [a, b]} (|f(x)|) \cdot |b - a|$$

nieskończoność trójkąta

Funkcja górną granicę całkowaczą

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

jeśli  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na  $[a,b]$  i  $a \in [a,b]$  to  $F$  jest ciągła na  $[a,b]$

jeśli  $f$  jest ciągła w  $x_0 \in [a,b]$  to  $F'(x_0) = f(x_0)$

$$\text{np. } F(x) = \int_{-1}^x e^{t^2} dt \Rightarrow F'(x) = e^{x^2}$$

Twierdzenie Newtona - Leibniz'a

jeśli  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła w  $[a,b]$  i  $a \in [a,b]$

$$1. F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ jest funkcją pierwotną do } f \text{ na } [a,b]$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$$

Przykłady

pole między prostymi  $y = \frac{1}{2}x$ ,  $y=0$ ,  $x=1$ ,  $x=4$

$$|D| = \int_1^4 \frac{1}{2}x dx = \frac{1}{4}x^2|_1^4 = \frac{15}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = -\ln|\cos(x)||_0^{\frac{\pi}{2}} = -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Calkowanie przez części

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) g'(x) dx &= f(x) g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx \\ \int_0^{\pi} x \sin(x) dx &= \left| \begin{array}{l} f = x \quad g = \sin(x) \\ f' = 1 \quad g' = -\cos(x) \end{array} \right| = -x \cos(x)|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x) dx = \pi + \sin(x)|_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

Zamiana zmiennej

$$a = \varphi(\alpha) \quad b = \varphi(\beta)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \\ x=a \Rightarrow t=\alpha \\ x=b \Rightarrow t=\beta \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Przykłady

$$\int_2^6 \sqrt{4x+1} dx = \left| \begin{array}{l} u = 4x+1 \\ du = 4dx \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int_9^{25} \sqrt{u} du$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin(t) \\ dx = 2\cos(t) dt \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2(t)} \cdot 2\cos(t) dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt$$

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1+3x} \\ x = \frac{t^2-1}{3} \\ dx = \frac{2}{3}t dt \end{array} \right| = \int_1^4 \frac{\frac{t^2-1}{3}}{t} \cdot \frac{2}{3}t dt = \frac{2}{9} \int_1^4 [t^2-1] dt = \frac{2}{9} \left( \frac{1}{3}t^3 - t \right)|_1^4 = 4$$

## Zastosowania geometryczne całki Riemanna

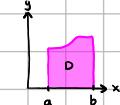
Pole figury między krzywymi  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$

$$|D| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

W układzie kartezjańskim pole dowolnej figury można obliczyć z trapezów leżącymi przy przylegających do osi  $x$  lub  $y$ .

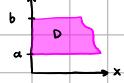
Pole trapezu przylegającego do osi  $x$  na  $[a, b]$

$$|D| = \int_a^b y dx$$



Pole trapezu przylegającego do osi  $y$  na  $[a, b]$

$$|D| = \int_a^b x dy$$

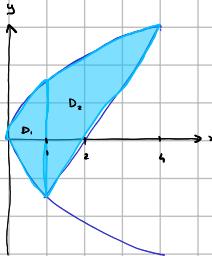


Pole kątowej figury w układzie biegunowym można obliczyć z pól wycinków kątowych

$$|D| = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\varphi$$

Pole między prostą i parabolą

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$



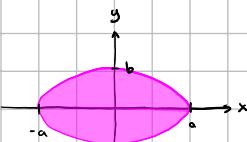
$$|D_1| = 2 \cdot \int_0^1 \sqrt{4x} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{x} dx = 4 \cdot \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} |D_2| &= \int_1^4 [\sqrt{4x} - (2x - 4)] dx = 2 \int_1^4 \sqrt{x} dx - 2 \int_1^4 [x - 2] dx \\ &= 2 \cdot \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_1^4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} x^2 - 2x\right) \Big|_1^4 = 2 \cdot \left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right) - 2 \left(0 + \frac{3}{2}\right) = \frac{28}{3} - 3 = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

$$|D| = |D_1| + |D_2| = \frac{8}{3} + \frac{19}{3} = 9$$

Pole elipsy

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

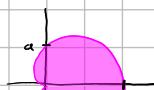


$$|D| = 4 \int_0^a y dx = \left| \begin{array}{l} x = a \cos(t) \\ dx = -a \sin(t) dt \\ x=0 \rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ x=a \rightarrow t=0 \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin(t) \cdot (-a \sin(t)) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2} dt \\ &= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos(2t)] dt = 2ab \cdot \left(t - \frac{1}{2} \sin(2t)\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2ab \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi ab \end{aligned}$$

Pole kardioidy

$$\begin{cases} r = a(1 + \cos(\varphi)) \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



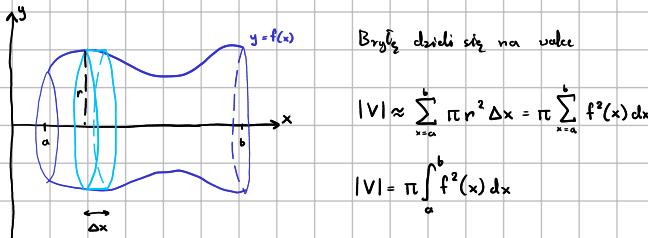
$$|D| = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi (1 + \cos(\varphi))^2 d\varphi$$

$$= a^2 \int_0^\pi [1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)] d\varphi = a^2 \int_0^\pi [1 + 2\cos(\varphi) + \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}] d\varphi$$

$$= a^2 \cdot \left[ \frac{3}{2}\varphi + 2\sin(\varphi) + \frac{1}{3}\sin(2\varphi) \right] \Big|_0^\pi = \frac{3}{2}\pi a^2$$

## Objętość bryły obrótnej

Bryła powstała przez obrót wokół osi



Objętość ścisłego stożka

$$V = \pi \int_0^b \left( \frac{b-a}{h} x + a \right)^2 dx = \pi \int_a^b \left( \frac{b-a}{h} x + a \right)^2 dx \quad \begin{cases} t = \frac{b-a}{h} x + a \\ dt = \frac{b-a}{h} dx \\ dx = \frac{h}{b-a} dt \end{cases}$$

$$= \frac{\pi h}{b-a} \int_a^b t^2 dt = \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{1}{3} t^3 \Big|_a^b = \frac{\pi h}{b-a} \cdot \frac{1}{3} (b-a)(b^2+ba+a^2) = \frac{\pi h}{3} (a^2+ab+b^2)$$

Tak zwięźlej

zadany funkcja  $y = f(x)$  lub parametrycznie  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ t \in [a, b] \end{cases}$

Otwarty lub zamknięty



Gładki - pochodne nie zerują się jednoznacznie

$$\forall t \in [a, b] \quad [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$$

Długość luku

szacującą się przez dлиność łamanej

Trójkątne Lagrange'a

$$f'(c) = \frac{f(c_2) - f(c_1)}{b - a}$$

$$f(a) - f(b) = f'(c)(b - a)$$

$$\text{Długość luku zadanego parametrycznie } |L| = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

$$\text{Długość luku zadanego funkcją } |L| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\text{Długość paraboli } y = \frac{1}{2}x^2 \quad x \in [0, a]$$

$$|L| = \int_0^a \sqrt{1 + x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \times \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + 1}| \right] \Big|_0^a = \frac{1}{2} \left[ a\sqrt{a^2 + 1} + \ln|a + \sqrt{a^2 + 1}| \right]$$

Pole powierzchni obrótowej

pole powstałe przez obrót wokół osi

przybliżone przez powierzchnię bocząg walca

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$|S| = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

