1.

a) $xRy \iff (x|y \vee y|x) \quad R \subseteq \mathbb{N}^2$

✓ zwrotna $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ x|x$

✓ symetryczna $xRy \iff (x|y \vee y|x) \iff (y|x \vee x|y) \iff yRx$

✗ antysymetryczna np dla 2 i 4 $\quad v(2R4 \wedge 4R2) = 1 \wedge v(2=4) = 0$

✗ spójna np dla 2 i 3 $\quad 2 \not R 3 \wedge 3 \not R 2 \wedge 3 \neq 2$

✗ przechodnia dla $2, 5, 10$

$$2R10 \wedge 10R5 \implies 2R5$$

$$\underbrace{(2|10 \vee 10|2) \wedge (10|5 \vee 5|10)}_{1} \implies \underbrace{(2|5 \vee 5|2)}_{0}$$

b) $xRy \iff (x|y \wedge y \neq x) \quad R \subseteq \mathbb{N}^2$

✗ zwrotna $\forall_{x \in \mathbb{N}}\ \sim(x \neq x)$

✗ symetryczna
$xRy \implies x = an \wedge y = bn \wedge a < b$
$yRx \implies x = an \wedge y = bn \wedge a > b$
$xRy \wedge yRx \implies a < b \wedge a > b$ sprzeczność

✓ antysymetryczna $\forall_{x,y \in \mathbb{N}}\ \sim(xRy \wedge yRx)$ $\quad 0 \implies 1$, $\ 0 \implies 0$

✗ spójna dla 2 i 3 $\quad 2 \not R 3 \wedge 3 \not R 2 \wedge 2 \neq 3$

✓ przechodnia
$xRy \implies x = an \wedge y = bn \wedge a < b$
$yRz \implies y = bn \wedge z = cn \wedge b < c$
$x = an \wedge z = cn \wedge a < c \iff xRz$

c) $xRy \iff x^2 \neq y^2 \quad R \subseteq \mathbb{R}^2$

✗ zwrotna $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ \sim(x^2 \neq x^2)$

✓ symetryczna $xRy \iff x^2 \neq y^2 \iff y^2 \neq x^2 \iff yRx$

✗ antysymetryczna $2R3 \wedge 3R2 \wedge 2 \neq 3$

✗ spójna $2 \not R -2 \wedge -2 \not R 2 \wedge 2 \neq -2$

✗ przechodnia $2R3 \wedge 3R-2 \wedge 2 \not R -2$

d) $xRy \iff |x| + |y| = 3 \quad R \subseteq \mathbb{Z}$

✗ zwrotna $1 \not R 1$

✓ symetryczna $xRy \iff |x| + |y| = 3 \iff |y| + |x| = 3 \iff yRx$

✗ antysymetryczna $1R2 \wedge 2R1 \wedge 1 \neq 2$

✗ spójna $1 \not R 3 \wedge 3 \not R 1 \wedge 1 \neq 3$

✗ przechodnia $1R2 \wedge 2R-1 \wedge 1 \not R -1$

e) $xRy \iff \operatorname{Re} x \leq \operatorname{Re} y \quad R \subseteq \mathbb{C}^2$

✓ zwrotna $\forall_{x \in \mathbb{C}}\ \operatorname{Re} x \leq \operatorname{Re} x$

✗ symetryczna $1+j\ R\ 2+j \wedge 2+j \not R 1+j$

✗ antysymetryczna $1+2j\ R\ 1+j \wedge 1+j\ R\ 1+2j \wedge 1+j \neq 1+2j$

✓ spójna $\forall_{x,y \in \mathbb{C}}\ \operatorname{Re} x \leq \operatorname{Re} y \vee \operatorname{Re} x > \operatorname{Re} y$

✓ przechodnia $\operatorname{Re} x \leq \operatorname{Re} y \wedge \operatorname{Re} y \leq \operatorname{Re} z \implies \operatorname{Re} x \leq \operatorname{Re} z \iff xRz$

2.

a) $m \varrho n \iff m^2 \le n^2 \qquad X = \mathbb{Z}$

✓ zwrotna $\forall_{m\in\mathbb{Z}}\ m^2 \le m^2$

✗ symetryczna dla 1 i 2 $\quad 1^2 \le 2^2 \wedge \sim(2^2 \le 1^2)$

nie jest relacją równoważności

b) $m \varrho n \iff \max\{3, m\} = \max\{3, n\} \qquad X = \mathbb{Z}$

✓ zwrotna $\max\{3, m\} = \max\{3, m\}$

✓ symetryczna $\max\{3, m\} = \max\{3, n\} \iff \max\{3, n\} = \max\{3, m\}$

✓ przechodnia $\max\{3, m\} = \max\{3, n\} \wedge \max\{3, n\} = \max\{3, k\}$

$\iff \max\{3, m\} = \max\{3, k\} \iff m \varrho k$

$[3]_\varrho = \{3, -2, -9999, 0, \dots\} = \{k\in\mathbb{Z},\ k \le 3\}$

$[4]_\varrho = \{4\}$

c) $k \varrho m \iff 3 | km \qquad X = \mathbb{Z}$

✗ zwrotna dla 1 $\quad 3 \nmid 1\cdot 1$

nie jest relacją równoważności

d) $k \varrho m \iff 4 | (k^3 - m^3) \qquad X = \mathbb{Z}$

✓ zwrotna $4 | 0$

✓ symetryczna $4 | (k^3 - m^3)$

$\iff k^3 - m^3 = 4n$

$\iff m^3 - k^3 = 4\cdot(-n) \qquad -n \in \mathbb{Z}$

$\iff m \varrho k$

✓ przechodnia $k \varrho m \iff k^3 = 4a + m^3$

$m \varrho n \iff m^3 = 4b + n^3$

$k^3 = 4\underset{\in\mathbb{Z}}{(a+b)} + n^3 \qquad a, b \in \mathbb{Z}$

jest relacją równoważności

$[1]_\varrho = \{1, 5, \dots\} = \{k\in\mathbb{Z} : k^3 \bmod 4 = 1\}$

$[0]_\varrho = \{0, 2, -2, 4, \dots\} = \{k\in\mathbb{Z} : k^3 \bmod 4 = 0\}$

e) $A \varrho B \iff A \cap B \neq \emptyset \qquad X = 2^{\mathbb{N}} \setminus \{\emptyset\}$

✓ zwrotna $\forall_{A\in X}\ A\cap A = A \neq \emptyset$

✓ symetryczna $A \varrho B \iff A\cap B \neq \emptyset \iff B\cap A \neq \emptyset \iff B \varrho A$

✗ przechodnia $\{1,2,3\} \cap \{3,4,5\} = \{3\} \neq \emptyset$

$\{3,4,5\} \cap \{5,6,7\} = \{5\} \neq \emptyset$

$\{1,2,3\} \cap \{5,6,7\} = \emptyset$

nie jest relacją równoważności

f) $A \varrho B \iff A \subseteq B \vee B \subseteq A \qquad X = 2^Y$, Y ma conajmniej 2 elementy

✓ zwrotna $A \subseteq A$

✓ symetryczna $A \varrho B \iff A \subseteq B \vee B \subseteq A \iff B \subseteq A \vee A \subseteq B \iff B \varrho A$

✗ przechodnia $\{1,2\} \varrho \{2\} \qquad \{2\} \subseteq \{1,2\}$

$\{2\} \varrho \{2,3\} \qquad \{2\} \subseteq \{2,3\}$

$\{1,2\} \not\varrho \{2,3\} \qquad \{1,2\} \not\subseteq \{2,3\} \wedge \{2,3\} \not\subseteq \{1,2\}$

nie jest relacją równoważności

g) $x \rho y \iff x-y \in \mathbb{Q}$ $\quad X=\mathbb{R}$

✓ zwrotna $\quad x-x=0 \in \mathbb{Q}$

✓ symetryczna $\quad a \in \mathbb{Q} \iff -a \in \mathbb{Q}$

$x \rho y \iff x-y \in \mathbb{Q} \iff y-x \in \mathbb{Q} \iff y \rho x$

✓ przechodnia

$x \rho y \iff x-y = \frac{a}{b} \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z} \quad b,d \neq 0$

$y \rho z \iff y-z = \frac{c}{d} \quad z = y - \frac{c}{d}$

$x-z = x-y+\frac{c}{d} = \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$

jest relacją równoważności

$[\pi]_\rho = \{\pi, \pi+1, \pi+\frac{2}{3}, \ldots\}$

$[\sqrt{2}]_\rho = \{\sqrt{2}, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}+\frac{2}{3}, \ldots\}$

h) $x \rho y \iff x-y = \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ $\quad X=\mathbb{R}$

✓ zwrotna $\quad x-x=0=\lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor$

✓ symetryczna $\quad x \rho y \iff x-\lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$

$\iff y-\lfloor y \rfloor = x-\lfloor x \rfloor \iff y \rho x$

✓ przechodnia $\quad x \rho y \iff x-\lfloor x \rfloor = y-\lfloor y \rfloor$

$y \rho z \iff y-\lfloor y \rfloor = z-\lfloor z \rfloor$

$x-\lfloor x \rfloor = z-\lfloor z \rfloor \iff x \rho z$

i) $x \rho y \iff \operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y$ $\quad X=\mathbb{C}$

✓ zwrotna $\quad \operatorname{Re} x = \operatorname{Re} x$

✓ symetryczna $\quad x \rho y \iff \operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y \iff \operatorname{Re} y = \operatorname{Re} x \iff y \rho x$

✓ przechodnia $\quad x \rho y \iff \operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y$

$y \rho z \iff \operatorname{Re} y = \operatorname{Re} z$

$\operatorname{Re} x = \operatorname{Re} z \iff x \rho z$

$[1]_\rho = \{1, 1+j, 1+\sqrt{3}j, 1-999j, \ldots\} = \{1+bj \in \mathbb{C} : b \in \mathbb{R}\}$

$[-5]_\rho = \{-5, -5+j, -5+\sqrt{3}j, \ldots\} = \{-5+bj \in \mathbb{C} : b \in \mathbb{R}\}$

j) $x \rho y \iff x-y \in \mathbb{Z}$ $\quad X=\mathbb{C}$

✓ zwrotna $\quad x-x=0 \in \mathbb{Z}$

✓ symetryczna $\quad x-y \in \mathbb{Z} \iff y-x \in \mathbb{Z} \iff y \rho x$

✓ przechodnia $\quad x \rho y \iff x-y \in \mathbb{Z} \quad x = y+a \quad a,b \in \mathbb{Z}$

$y \rho z \iff y-z \in \mathbb{Z} \quad z = y+b$

$x-z = y+a-y-b = a-b \in \mathbb{Z} \iff x \rho z$

$[\sqrt{2}+j]_\rho = \{\sqrt{2}+j, \sqrt{2}+3j, 2+\sqrt{2}+j, \ldots\} = \{a+bj \in \mathbb{C} : a-\sqrt{2} \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{R}\}$

$[j]_\rho = \{j, 1+j, 1, 5+5j, \ldots\} = \{a+bj \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{R}\}$

k) $x \rho y \iff x^4 = y^4$ $\quad X=\mathbb{C}$

✓ zwrotna $\quad x^4 = x^4$

✓ symetryczna $\quad x^4 = y^4 \iff y^4 = x^4$

✓ przechodnia $\quad x^4 = y^4 \wedge y^4 = z^4 \iff x^4 = z^4$

jest relacją równoważności

$[1]_\rho = \{1, j, -1, -j\} = \sqrt[4]{1}$

$[16]_\rho = \{2, 2j, -2, -2j\} = \sqrt[4]{16}$

3.

$X = [-5, 5]$ $\quad \rho: \; x \rho y \Leftrightarrow |x+2| = |y+2| \quad \rho \in X^2$

✓ zwrotna $\quad |x+2| = |x+2|$

✓ symetryczna $\quad x \rho y \Leftrightarrow |x+2| = |y+2| \Leftrightarrow |y+2| = |x+2| \Leftrightarrow y \rho x$

✓ przechodnia $\quad x \rho y \Leftrightarrow |x+2| = |y+2|$

$x+2 = y+2 \;\vee\; x+2 = -y-2$

$x = y \;\vee\; x = -y-4$

$y \rho z \Leftrightarrow \quad y = z \;\vee\; y = -z-4$

$x \rho y \wedge y \rho z \Leftrightarrow \quad x = z \;\vee\; x = -(-z-4)-4$

$x = z \;\vee\; x = z \quad \Rightarrow x \rho z$

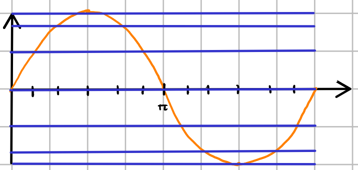
$[1]_\rho = \{1, -5\}$ $\qquad [0]_\rho = \{0, -4\}$

$[2]_\rho = \{2\}$ $\qquad [3]_\rho = \{3\}$

4.

$A = \{k \in \mathbb{Z} : -44 \le k \le 44\}$

$m R n \Leftrightarrow \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \qquad R \subseteq A^2$



7 klas abstrakcji $\quad \left[\frac{n\pi}{6}\right]_R = \left[\pi - \frac{n\pi}{6}\right]_R = \left[\frac{n\pi}{6} + 2k\pi\right]_R$

$\left[\frac{\pi}{6}\right]_R \; \left[\frac{\pi}{3}\right]_R \; \left[\frac{\pi}{2}\right]_R \; [\pi]_R \; \left[\frac{7\pi}{6}\right]_R \; \left[\frac{4\pi}{3}\right]_R \; \left[\frac{3\pi}{2}\right]_R$

✓ zwrotna $\quad \forall_{n \in A} \; \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

✓ symetryczna $\quad \forall_{n,m \in A} \; \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$

✓ przechodnia $\quad \forall_{n,m,k \in A} \; \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) \wedge \sin\left(\frac{m\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{6}\right)$