

Funkcje, granice funkcji

Granice umożliwiające badanie zachowania funkcji poza dziedziny i w niekonieczności, badanie asymptot pionowych, poziomych i ukośnych

Nieciągłość pierwotnego rodzaju - skokowa

Nieciągłość drugiego rodzaju - co najmniej z 1 stroną granicy niewłaściwa

Punkty skupienia, punkty izolowane

$$D_f = \underline{[a, b]} \cup \underline{\{c\}}$$

Granica definiuje się tylko dla punktów skupienia

Definicja Cauchy'ego

Granica właściwa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Granica niewłaściwa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}, \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < m$$

Granica właściwa w niekonieczności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \in \mathbb{R}, \ \forall x \in D \quad x > K \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$$

Granica niewłaściwa w niekonieczności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}, \ \exists K \in \mathbb{R}, \ \forall x \in D \quad x > K \Rightarrow f(x) < m$$

Definicja Heinego

Granica właściwa w punkcie

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R} \iff \forall (x_n) \subset D, x_n \neq x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Granica niewłaściwa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n) \subset D, x_n \neq x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall (x_n) \subset D, x_n \neq x_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$$

Granica właściwa w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g \iff \forall (x_n) \subset D \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Granica niewłaściwa w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall (x_n) \subset D \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$$

Granica funkcji w punkcie nie istnieje, gdy (\Rightarrow definicja Heinego)

$$\exists (x_n^1)(x_n^2), x_n^1 \neq x_0 \neq x_n^2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = x_0 \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^1) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n^2)$$

$$\text{np. dla } x_n^1 = \frac{1}{n} \quad i \quad x_n^2 = -\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^1} = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2} = -\infty$$

więc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje

Dowód z definicji Cauchy'ego, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

→ trzeba wyznaczyć wzór na δ tak, żeby doprowadzić do tautologii i stwierdzenia

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$$

prekwestatkiem następuje:

$$\frac{1}{x^2} > M \rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{M}} \rightarrow \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Dowód z definicji Heinego, że $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$

$$\text{więc } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x_n+1}{5x_n+4} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{5 \cdot 2 + 4} = \frac{1}{2}$$

Dowód z definicji Cauchy'ego, że $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2(x-1)} = 1$

$$\text{zapisując } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D \quad 0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2-1}{2(x-1)} - 1 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2}(x+1) - 1 \right| = \frac{1}{2} |x+1 - 2| = \frac{1}{2} |x-1|$$

$$\frac{1}{2} |x-1| < \epsilon \rightarrow |x-1| < 2\epsilon \rightarrow \text{przyjmując } \delta = 2\epsilon$$

Dowód z definicji Heinego, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ nie istnieje

$$x_n^1 = \pi n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n^1) = 0$$

$$x_n^2 = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n^2) = 1$$

granicę nie są równe więc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ nie istnieje

Turowczenia

1) z wartością bezwzględną

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \implies \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |g|$$

2) o trzech funkcjach (o ścisleniu)

$$\forall x \in S(x_0) \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = K$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = K$$

3) z funkcją ograniczoną

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \wedge \quad \exists M > 0 \quad \forall x \in S(x_0) \quad |g(x)| \leq M$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$$

Turowczenia o działańach arytmetycznych

więc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \pm b$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = a \cdot b$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} \quad , \text{ dla } g(x) \neq 0, b \neq 0$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Funkcja zredukowana $f|_A$

dla $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\emptyset \neq A \subset D \subset \mathbb{R}$

to $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ takiż, że $\forall x \in A f(x) = g(x)$

g jest funkcją zredukowaną $g = f|_A$

Granice jednostronne

lewostronna $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f|_{D \cap (-\infty, x_0)})(x)$

prawostonna $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f|_{D \cap (x_0, +\infty)})(x)$

Triczcenice (przy istnieniu obu granic jednostronnych)

granica funkcji istnieje gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

np. mi istnieje $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1 \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

Podstawowe granice

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$2) \forall a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$$

$$3) \forall r \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$[1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} \rightarrow e \text{ dla } f(x) \rightarrow 0$$

i analogiczne dla pozostałych

$$f(x) = e^{\ln(f(x))} = \ln(e^{f(x)})$$

Przykłady symboli nieznaczonych

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\frac{(1+\frac{x}{16})^{\frac{1}{4}} - 1}{\frac{x}{16}} \cdot \frac{1}{16}}{x} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{\sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x^2} - 1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin(x)}\right)^2 = \ln(3) - 1 = \ln(3)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) \sin(\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x} \cdot \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(x)\cos(x)}{x^3 \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} \cdot \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{\arctan(x+2)}$$

$y = \arctan(x+2)$ $x+2 = \tan(y)$ $x \rightarrow -2 \Rightarrow y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\tan(y) - 2)^2 - 4}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan(y)[\tan(y) - 4]}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} \cdot \frac{\tan(y) - 4}{\cos(y)} = 1 \cdot (-4) = -4$$

Ciągłość funkcji

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$

\iff

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D$

\iff

$$\forall (x_n) \subset D \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Funkcja jest ciągła w zbiorze $A \subset D$ jeśli jest ciągła w każdym jej punkcie

1) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem skupienia D , to f jest ciągła w x_0

\iff

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2) Jeśli $x_0 \in D$ jest punktem izolowanym D , to f jest ciągła w x_0

3) Jeśli $x_0 \notin D$ to f jest nieciągła w x_0

Twierdzenie o lokalnym zachowaniu znaku funkcji ciągłej

jeśli funkcja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $x_0 \in D$ i $f(x_0) \neq 0$

to istnieje takie otoczenie $Q(x_0, r)$, że funkcja ma

w zbiorze $D \cap Q(x_0, r)$ taki sam znak jak $f(x_0)$

Twierdzenie o działańach arytmetycznych na funkcjach ciągłych

jeśli f i g są ciągłe w x_0 , to
 $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ gdy $g(x_0) \neq 0$
są ciągłe w x_0

Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej

Jeśli f jest ciągła i rosnąca na przedziale $A \subset \mathbb{R}$
to f^{-1} też jest ciągła i rosnąca na przedziale $f(A)$

Twierdzenie o ciągłości funkcji złożonej

Jeśli $u = f(x)$ jest ciągła w x_0 i $h(u)$ jest ciągła w $u_0 = f(x_0)$
to $(h \circ f)(x) = h(f(x))$ też jest ciągła

Twierdzenie o wprowadzaniu granicy do argumentu funkcji ciągłyj

Jesli istnieje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \in \mathbb{R}$ i $h(u)$ jest ciągła w $u_0 = g$

$$\text{to } \lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = h(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) = h(g)$$

Wszystkie funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach

- 1) jednomian
- 2) funkcja wykładnicza
- 3) funkcje trygonometryczne
- 4) wszystkie funkcje odwrotne, złożenia i
otrzymywane przez operacje arytmetyczne

Twierdzenie Darboux

Jesli f jest ciągła w $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ i d jest dowolna
między $f(a)$ i $f(b)$ to istnieje taki $c \in [a, b]$, że $f(c) = d$

Funkcja ciągła przyjmuje wszystkie wartości pośrednie

Jesli f jest rosnąca to istnieje dokładnie 1 taki c

→ wyznaczanie pierwiastków metodą bisekcji

Supremum - kres górny - największe ograniczenie górne
infimum - kres dolny - najmniejsze ograniczenie dolne

Twierdzenie Weierstrassa

Jesli f jest ciągła w $[a, b]$, to jest w tym przedziale
ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy (sup i inf)
(maksimum jest równe supremum, minimum jest równe infimum)

Punkty nieciągłości

Punkt x_0 , w którym f nie jest ciągła ale jest ciągła w
jego sąsiedztwie jest punktem nieciągłości

I-go rodzaju → istnieją granice właściwe, jednostronne w x_0

II-go rodzaju → w każdym pozostałym przypadku