

1.

$$a) \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ xy \\ x-y \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

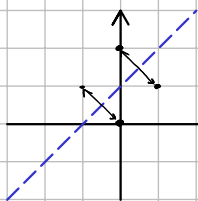
nie jest przekształceniem liniowym

$$b) \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-3 \\ 0 \\ y-2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nie jest przekształceniem liniowym

$$c) \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{symetria względem } y = x+1$$



$$\varphi\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq$$

nie jest przekształceniem liniowym

2.

$$a) \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2z \\ 3x \\ x-2z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2z=0 \\ 3x=0 \\ x-2z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y \in \mathbb{R} \\ z=0 \end{cases} \quad \text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

baza Ker φ

$$\text{Im } \varphi = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

baza Im φ

$$b) \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-2y \\ 0 \\ 4y-2x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

 $M_{E_4}^{E_2}(\varphi)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ x=2y \end{cases}$$

$$\text{rank}(\varphi) = 1 \quad \text{Im } \varphi = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

baza

$$\text{Ker } \varphi = \left\{ \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

baza

c) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ x+2z \\ x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} k_3 = 2k_1 + k_2 \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{u_2 - u_1, u_3 - u_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{u_1 + 2u_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z, t \in \mathbb{R} \quad \text{Ker } \varphi = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(\varphi)) = 2$$

$$\text{Im } \varphi = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) $\varphi: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$

$$(\varphi(u))(x) = (x-1)u'(x) - 2u(x) \quad \mathcal{E}_3 = (x^2, x, 1)$$

$$\begin{aligned} \varphi(ax^2 + bx + c) &= (x-1)(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + bx - 2ax - b - 2ax^2 - 2bx - 2c \\ &= (-2a - b)x + (-b - 2c)1 \end{aligned}$$

$$\varphi \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2a-b \\ -b-2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} k_2 = \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_3 \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{k_2 = \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ker } \varphi = \text{span} \{ (1, -2, 1) \} = \text{span} \{ x^2 - 2x + 1 \}$$

$$\text{rank}(\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(\varphi)) = 2$$

$$\text{Im } \varphi = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \{ x, 1 \}$$

3.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ x-y+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right) \quad B = \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$

$$M_{E_2}^{E_3}(\varphi) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M_{E_2}^A(\varphi) = M_{E_2}^{E_3}(\varphi) \cdot M_{E_3}^A(id) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$M_B^{E_3}(\varphi) = M_B^{E_2}(id) \cdot M_{E_2}^{E_3}(\varphi) = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 10 \\ 1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$M_B^A(\varphi) = M_B^{E_2}(id) \cdot M_{E_2}^{E_3}(\varphi) \cdot M_{E_3}^A(id) = M_B^{E_2}(id) \cdot M_{E_2}^A(\varphi) = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -31 & -16 & 34 \\ 19 & 9 & -21 \end{bmatrix}$$

4. $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \varphi \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$M_{E_3}^A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

det A = 4 ≠ 0 kolumny są bazą \mathbb{R}^3
zic istnieje dokładnie 1 przekształcenie spełniające warunki

$$M_{E_3}^A(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M_{E_3}^{E_3}(\varphi) = M_{E_3}^A(\varphi) \cdot M_A(E_3) = M_{E_3}^A(\varphi) \cdot [M_{E_3}^A(id)]^{-1}$$

można policzyć ranka (φ) od razu z $M_{E_3}^A(\varphi)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{u_2 + u_1, -3u_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}u_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{E_3}^{E_3}(\varphi) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(\varphi) = 1 \quad \text{Im} \varphi = \text{span} \{ (1, 0, -2) \}$$

baza Im φ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{x \quad r \quad t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ x & r & t & \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y, z \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ker} \varphi = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

baza Ker φ

5.

$$M_B^A(\varphi) = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$M_{E_2}^{E_1}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_A^{E_2}(id) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (M_{E_2}(A))^{-1}$$

$$M_{E_3}^B(id) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{E_2}^{E_3}(\varphi) = M_{E_3}^B(id) \cdot M_B^A(\varphi) \cdot M_A^{E_2}(id) =$$

$$M_{E_3}^{E_2}(\varphi) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 22 \\ -8 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 72 \\ -14 & -20 \\ -10 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 50 & 72 \\ -14 & -20 \\ -10 & -14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50x + 72y \\ -14x - 20y \\ -10x - 14y \end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 194 \\ -54 \\ -38 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin \ker \varphi$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} \varphi \Leftrightarrow \exists \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

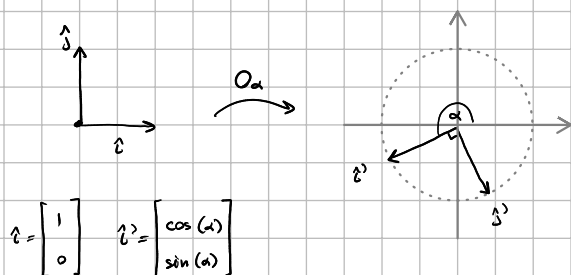
$$\begin{bmatrix} 50 & 72 & 1 \\ -14 & -20 & 0 \\ -10 & -14 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{u_1 + 5u_3} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ -10 & -14 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-5 \cdot u_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -7 \\ -10 & -14 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{uklad správný}$$

tedy $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \operatorname{Im} \varphi$

$$\frac{14 \cdot 7}{5} - 20 = \frac{98 - 100}{5}$$

6.

$O_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ obrát o α voko $(0,0)$ převede do vektorů zagona

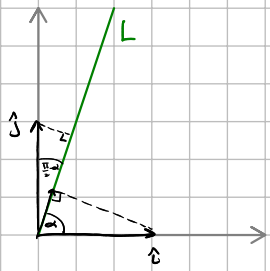


$$\hat{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{e}' = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad O_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$O_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \\ x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

7.

 $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rzut prostokątny na prostą $y=3x$ (L)


$$\tan(\alpha) = 3 \quad \alpha = \arctan(3)$$

$$\varphi(\hat{i}) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$|\varphi(\hat{i})| = |\hat{i}| \cos(\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\varphi(\hat{j}) = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$|\varphi(\hat{j})| = |\hat{j}| \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$M_{E_2}^{E_2}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1x + 0.3y \\ 0.3x + 0.9y \end{bmatrix}$$

$$\text{Im } \varphi = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} - \text{prosta } y=3x$$

$$\text{Ker } \varphi = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} - \text{prosta } y = -\frac{1}{3}x \text{ (prostopadła)}$$

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 0.1x + 0.3y = 0 \\ y = -\frac{1}{3}x \end{array}$$

$$B = (v_1, v_2) \quad v_1 \in L \quad v_2 \perp L$$

$$v_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad v_2 = b \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(v_1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ 3a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 3a \end{bmatrix} = v_1$$

$$\varphi(v_2) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3a \\ -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$M_B^B(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_B^B(\varphi) = M_{E_2}^{E_2}(\varphi) M_{E_2}^{E_2}(\varphi) M_{E_2}^{E_2}(\text{id})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{10} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & -0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$