Funkcje wielu zmiennych

Pojęcia

Odległość między punktami w $\mathbb{R}^n$ $\quad d(A,B)$

$$d(A,B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}$$

Otoczenie punktu A o promieniu r $\quad Q(A,r)$

(koło bez brzegu w $\mathbb{R}^2$)

$$Q(A,r)=\{P\in\mathbb{R}^n : d(P,A)<r\}$$

Sąsiedztwo punktu A o promieniu r $\quad S(A,r)$

(koło bez brzegu i środka w $\mathbb{R}^2$)

$$S(A,r)=\{P\in\mathbb{R}^n : 0<d(P,A)<r\}=Q(A,r)\setminus\{A\}$$

Brzeg zbioru Z $\quad \partial Z$

Punkty, w których każdym otoczeniu są punkty ze zbioru i spoza zbioru.

Punkt brzegowy może należeć lub nie należeć do zbioru.

Wnętrze zbioru Z $\quad \operatorname{Int} Z$

Punkty należące do zbioru razem ze swoim otoczeniem

$$A\in \operatorname{Int} Z \iff \exists_{r>0}\ Q(A,r)\subset Z$$

Zbiór otwarty $\quad Z=\operatorname{Int} Z$

Zbiór ograniczony $\quad \exists_{r>0}\ Z\subset Q(0,r)$

Zbiór nieograniczony $\quad \forall_{r>0}\ \sim(Z\subset Q(0,r))$

Zbiór skończony – składa się z $n\in\mathbb{N}$ punktów

Zbiór nieskończony – ani skończony ani pusty

Łuk zwykły w $\mathbb{R}^n$

$$L=\{(x_1,\ldots x_n)\in\mathbb{R}^n : x_1=x_1(t),\ \ldots\ x_n=x_n(t)\ \wedge\ t\in[\alpha,\beta]\}$$

$x_i(t)$ – ciągłe w $[\alpha,\beta]$, różnowartościowe w (α,β)

(bez samoprzecięć)

Łuk otwarty $\quad (x_1(\alpha),\ldots x_n(\alpha))\neq(x_1(\beta),\ldots x_n(\beta))$

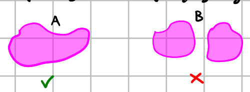
Łuk zamknięty $\quad (x_1(\alpha),\ldots x_n(\alpha))=(x_1(\beta),\ldots x_n(\beta))$

Łuk gładki (regularny) – $x_i(t)$ mają ciągłe pochodne i nie zerują się jednocześnie

$$\forall_{t\in[\alpha,\beta]}\ [x_1'(t)]^2+\ldots[x_n'(t)]^2>0$$

Zbiór spójny

Każde 2 punkty można połączyć gładkim łukiem zawartym w zbiorze



Ciąg w $\mathbb{R}^n$

$(x_1^k,\ldots x_n^k)\in\mathbb{R}^n$ $\quad$ k-ty wyraz ciągu $\quad k\in\mathbb{N}$

$$P_k\to P_0 \iff \lim_{k\to\infty}P_k=P_0 \iff \lim_{k\to\infty} d(P_k,P_0)=0$$

$$\iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{k_\varepsilon}\ \forall_{k>k_\varepsilon}\ d(P_k,P_0)<\varepsilon$$

$$\iff \forall_{i=1,\ldots n}\ \lim_{k\to\infty}x_i^k=x_i^0$$

Punkt skupienia zbioru Z

ma jakiś punkt Z w każdym sąsiedztwie

P_0 jest punktem skupienia $\iff \exists (P_k) \subset Z \quad P_k \neq P_0 \wedge P_k \to P_0$

Punkt izolowany Z - należy do Z i nie jest punktem skupienia

Zbiór domknięty - zawiera swoje wszystkie punkty skupienia

(wnętrze i brzeg)

$\overline{D} = \mathrm{Int}\, D \cup \partial D$

Obszar - zbiór otwarty i spójny

Obszar domknięty $\overline{D}$ - obszar razem z brzegiem

Funkcja 2 zmiennych

$z = f(x,y)$ powierzchnia w $\mathbb{R}^3$

Dziedzina - zbiór punktów dla których przyjmuje wartość rzeczywistą

Granica funkcji wielu zmiennych $f: D \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{P \to P_0} (P) = g \in \mathbb{R} \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{P \in D} \quad 0 < d(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - g| < \varepsilon$ (Cauchy'ego)

$\lim\limits_{P \to P_0} (P) = g \in \mathbb{R} \iff \forall (P_k) \subset D, P_k \neq P_0 \quad \lim\limits_{k \to \infty} P_k = P_0 \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(P_k) = g$ (Heinego)

Granica oznacza zbliżanie się do punktu granicznego z każdego kierunku
(nie definiuje się granic jednostronnych)

W przypadku symbolu nieoznaczonego, to że wartość jest granicą wykazuje się z definicji

Najłatwiej wykazać, że granica nie istnieje z definicji Heinego - znaleźć 2 ciągi o różnych granicach

Granica podwójna $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$

Ciągłość funkcji wielu zmiennych $f: D \to \mathbb{R}$

f jest ciągła w $P_0 \in D \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{P \in D} \quad d(P, P_0) < \delta \implies |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$ (Cauchy'ego)

f jest ciągła w $P_0 \in D \iff \forall (P_k) \subset D \quad \lim\limits_{k \to \infty} P_k = P_0 \implies \lim\limits_{k \to \infty} f(P_k) = f(P_0)$ (Heinego)

Funkcja jest ciągła w zbiorze - jest ciągła w każdym jego punkcie

- P_0 jest punktem skupienia dziedziny $\to$ f jest ciągła w $P_0 \iff \lim\limits_{P \to P_0} f(P) = P_0$
- P_0 jest punktem izolowanym dziedziny $\to$ f jest ciągła w P_0
- $P_0 \notin D \to f$ jest nieciągła w P_0

Własności funkcji wielu zmiennych

Lokalne zachowanie znaku

f jest ciągła w P_0 $\wedge$ $f(P_0) \neq 0 \Rightarrow \exists_{r>0} \forall_{P \in D \cap Q(P_0, r)} \quad sgn(f(P)) = sgn(f(P_0))$

Twierdzenie Weierstrassa

jeśli funkcja jest ciągła w zbiorze ograniczonym i domkniętym
to jest w nim ograniczona i przyjmuje w nim swoje kresy

$\exists_{P \in \bar{A} \subset D} \quad f(P) = \inf\limits_{P \in \bar{A}} f(P)$ $\qquad$ $\exists_{P \in \bar{A} \subset D} \quad f(P) = \sup\limits_{P \in \bar{A}} f(P)$

wykres funkcji jest ograniczony z góry i z dołu przez płaszczyzny

Twierdzenie Darboux

jeśli f jest ciągła, $f(P_1) < \mu < f(P_2)$ i istnieje łuk zwykły o końcach P_1, P_2
to na łuku istnieje punkt P_μ taki, że $f(P_\mu) = \mu$

funkcja ciągła przyjmuje wartości pośrednie