ZAD 1. (2 pkt.) Wyznaczyć granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} a_n$, jeśli istnieje lub udowodnić, że nie istnieje:

$$a_n = \frac{2(-1)^n \cdot n^2 - n + 3}{n^2 - 1}$$

$$a'_n = 2n \qquad \lim_{n\to\infty} a'_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2(-1)^{2n} \cdot (2n)^2 - 2n + 3}{(2n)^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 - 2n + 3}{4n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left[8 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right]}{n^2\left[4 - \frac{1}{n^2}\right]} = \frac{8}{4} = 2$$

$$a''_n = 2n+1 \qquad \lim_{n\to\infty} a''_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2(-1)^{2n+1} \cdot (2n+1)^2 - (2n+1) + 3}{(2n+1)^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2(4n^2+4n+1) - 2n + 2}{4n^2+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-8n^2 - 10n}{4n^2+4n} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$\lim_{n\to\infty} a'_n \neq \lim_{n\to\infty} a''_n \implies \lim_{n\to\infty} a_n \text{ nie istnieje}$$

a'_n, a''_n – podciągi a_n

ZAD 2. (4 pkt) Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\arcsin(x))^{\tan(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\arcsin(x)^{\tan(x)}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\tan(x)\ln(\arcsin(x))} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \overset{0}{\tan(x)}\, \overset{-\infty}{\ln(\arcsin(x))} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\arcsin(x))}{\cot(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\arcsin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2(x)}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sin^2(x)}{\arcsin(x)} = -1 \cdot 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(x)}{\arcsin(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{1} = 0$$

ZAD 3. (4 pkt) Wykazać, że

$$\ln\frac{1-x}{1+x} \leqslant -2x \quad \text{dla} \quad x \in [0,1)$$

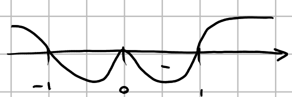
$$\forall_{x\in[0,1)} \quad \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \leq -2x$$

$$\forall_{x\in[0,1)} \quad \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2x \leq 0$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2x \qquad D_f = [0,1)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} + 2 = \frac{\cancel{1+x}}{1-x} \cdot \frac{-1 \cancel{-x} - 1 \cancel{+x}}{(1+x)^{\cancel{2}}} + 2 = \frac{-2}{(1-x)(1+x)} + 2$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-2 + 2(1-x^2)}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2x^2}{(1-x)(1+x)}$$



$$\frac{df}{dx} > 0 \iff -2x^2(1-x)(1+x) > 0$$

f nie ma ekstremów lokalnych w $(0,1)$ $\quad \forall_{x\in(0,1)} \frac{df}{dx} < 0$

$$f(0) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{1+x} = 0$$

$$\forall_{x\in[0,1)} f(x) \leq 0 \iff \forall_{x\in[0,1)} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \leq -2x$$

ZAD 1. (2 pkt.) Wyznaczyć granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} a_n$, jeśli istnieje lub udowodnić, że nie istnieje:

$$a_n = 2 + \frac{n+1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}$$

$$a_n' = a_{2n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n' = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{2n+1}{2n}\cdot\sin(\pi n) = 2 + 1\cdot 0 = 2$$

$$a_n'' = a_{4n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n'' = \lim_{n\to\infty} 2 + \frac{4n+2}{4n+1}\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1\cdot 1 = 3$$

$\lim_{n\to\infty} a_n' \neq \lim_{n\to\infty} a_n'' \implies \lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje $\quad a_n', a_n''$ - podciągi a_n

ZAD 2. (4 pkt) Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\tan(x)\ln(\arccos(x) - \frac{\pi}{2})} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \overset{0}{\tan(x)}\, \overset{-\infty}{\ln\left(\arccos(x) - \frac{\pi}{2}\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln\left(\arccos(x) - \frac{\pi}{2}\right)}{\cot(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(x)}{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(x)}{\arccos(x) - \frac{\pi}{2}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{-1} = 0$$

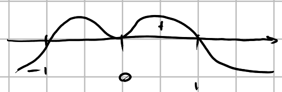
ZAD 3. (4 pkt) Wykazać, że

$$2x \leqslant \ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{dla} \qquad x \in [0,1)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 2x \qquad \forall_{x\in[0,1)}\ f(x) \geq 0 \quad ?$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1\cdot(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} - 2 = \frac{\cancel{1-x}}{1+x}\cdot\frac{1\cancel{-x}+1\cancel{+x}}{(1-x)^{\cancel{2}}} - 2 = \frac{2}{1-x^2} - 2 = \frac{2-2+2x^2}{1-x^2} = \frac{2x^2}{1-x^2}$$

$$\frac{df}{dx} > 0 \iff 2x^2(1-x)(1+x) \geq 0 \iff -2x^2(x-1)(x+1) \geq 0$$



$f \nearrow$ w $[0,1)$ → nie ma ekstremów lokalnych

$f(0) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

$$\forall_{x\in[0,1)}\ f(x) \geq 0 \iff \forall_{x\in[0,1)}\ 2x \leq \ln\frac{1+x}{1-x}$$

1. (3p) Wyznacz granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(2-n)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\cdot\left(2+\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)}$ lub wykaż, że nie istnieje.

$$a_n' = a_{8n} = \frac{(2-8n)\sin(2\pi n)}{8n\,(2+\cos(2\pi n))} = \frac{(2-8n)\cdot 0}{8n(2+1)} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n' = 0$$

$$a_n'' = a_{8n+2} = \frac{(2-8n-2)\sin(2\pi n+\frac{\pi}{2})}{(8n+2)(2+\cos(2\pi n+\frac{\pi}{2}))} = \frac{-8n\cdot 1}{(8n+2)(2+0)} = \frac{-8n}{16n+4} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n'' = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n' \neq \lim_{n\to\infty} a_n'' \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \text{ nie istnieje}$$

2. (3p) Oblicz granicę funkcji $\lim\limits_{x\to\infty}(\text{arcctg}x)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(\text{arccot}(x))} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(\text{arccot}(x))}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\text{arccot}(x)}\cdot\frac{-1}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to\infty}\overset{\to 0}{\frac{-1}{1+x^2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\text{arccot}(x)}}_{\text{ograniczona}} = 0$$

3. (4p) Czy istnieje taka wartość rzeczywistego parametru a, dla której funkcja

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{dla } x \le 0 \\ \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

jest ciągła i różniczkowalna w swojej dziedzinie? Odpowiedź uzasadnij.

f jest ciągła w $0 \iff f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$\forall_{a\in\mathbb{R}}\ f(0) = 0\cdot a = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-\sin(x)}{1} = 0$

f jest ciągła w $(-\infty,0) \to ax$ - funkcja elementarna

f jest ciągła w $(0,+\infty) \to \frac{\cos(x)-1}{x}$ funkcja elementarna

$\forall_{a\in\mathbb{R}}$ f jest ciągła w $\mathbb{R}$

f jest różniczkowalna w $(-\infty,0)$ i $(0,+\infty)$ $\to$ funkcje elementarne

f jest różniczkowalna w $0 \iff f_-'(0) = f_+'(0)$ i te pochodne istnieją

$f_-'(0) = a$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos(x)-1}{x}-ax}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos(x)-1-ax^2}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(x)-1-ax^2}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin(x)-2ax}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{-\cos(x)-2a}{2} = \frac{-1-2a}{2}$$

$$f_-'(0) = f_+'(0) \iff a = \frac{-1-2a}{2} \iff 2a = -1-2a \iff a = -\frac{1}{4}$$

f jest ciągła i różniczkowalna w $\mathbb{R}$ dla $a = -\frac{1}{4}$

4. (4p) Dla funkcji $f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$ wyznacz

- asymptoty,
- przedziały monotoniczności,
- ekstrema lokalne.

$1+\ln(x)=0 \iff \ln(x)=-1 \iff x=e^{-1}$

$D=(0,\frac{1}{e})\cup(\frac{1}{e},+\infty)$

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}^-} f(x) = \left\{\frac{e^{-1}}{1+(-1)^-} = \frac{e^{-1}}{0^-}\right\} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{e}^+} f(x) = \left\{\frac{e^{-1}}{1+(-1)^+} = \frac{e^{-1}}{0^+}\right\} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \left\{\frac{0^+}{1-\infty}\right\} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\ln(x)} = \left\{\frac{1}{1+\infty}\right\} = 0$$

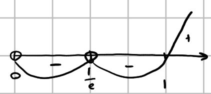
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{x}{1+\ln(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$$

$x=\frac{1}{e}$ asymptota pionowa dwustronna

bez asymptot ukośnych i poziomych

$$\frac{df}{dx} = \frac{1\cdot(1+\ln(x)) - x\cdot\frac{1}{x}}{(1+\ln(x))^2} = \frac{1+\ln(x)-1}{[1+\ln(x)]^2} = \frac{\ln(x)}{[1+\ln(x)]^2}$$

$\frac{df}{dx}>0 \iff \ln(x)[1+\ln(x)]^2>0$



$f \searrow$ w $(0,\frac{1}{e})$, $(\frac{1}{e},1]$

$f \nearrow$ w $[1,+\infty)$

minimum lokalne w $x=1$ $f(1)=\frac{1}{1+\ln(1)}=1$

Zadanie 2

Oblicz granicę ciągu (a_n), $n\geq 2$ dla $n\to\infty$:

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{2^n+n^2}{3n+2}}$$

$$a_n=\sqrt[n]{\frac{2^n+n^2}{3n+2}}=\sqrt[n]{\frac{1}{3n+2}2^n+\frac{n^2}{3n+2}}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{3n+2}2^n}}_{b_n}\leq\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{3n+2}2^n+\frac{n^2}{3n+2}}}_{a_n}\leq\underbrace{\sqrt[n]{\frac{n^2}{3n+2}2^n+\frac{n^2}{3n+2}2^n}}_{c_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3n+2}}\cdot\sqrt[n]{2^n}=1\cdot 2=2$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2n^2}{3n+2}}\cdot\sqrt[n]{2^n}=1\cdot 2=2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

z twierdzenia o 3 ciągach

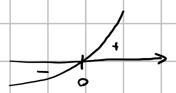
Zadanie 3

Udowodnij, że dla $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność:

$$e^x \geq x + 1$$

$f(x) = e^x - x - 1 \qquad \forall_{x \in \mathbb{R}}\ f(x) \geq 0\ ?$

$\frac{df}{dx} = e^x - 1 \qquad \frac{df}{dx} > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$



$f \searrow$ w $(-\infty, 0]$

$f \nearrow$ w $[0, +\infty)$

minimum lokalne w $x = 0 \qquad f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

f jest ciągła w $\mathbb{R}$

$\forall_{x \in \mathbb{R}}\ f(x) \geq 0 \iff \forall_{x \in \mathbb{R}}\ e^x \geq x + 1$

Zadanie 4

Sprawdź, czy funkcja:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{ctg}(|x|) & \text{dla } x \in (-\pi/2, \pi/2),\ x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} x \cot(|x|) = \lim_{x \to 0^-} x \cot(-x)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\cot(-x)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-1}{\sin^2(-x)} \cdot (-1)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x^2}{\sin^2(-x)} = \lim_{x \to 0^-} -\left(\frac{-x}{\sin(-x)}\right)^2 = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} x \cot(|x|) = \lim_{x \to 0^+} x \cot(x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\tan(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \cos^2(x) = 1$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0) \implies f'(0)$ nie istnieje $\implies f$ nie jest różniczkowalna w 0

Zadanie 1. [3p] Powołując się na odpowiednie twierdzenia (proszę je sformułować) znajdź i precyzyjnie uzasadnij ile wynosi granica

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^{2019} \cdot 3^n + (2^n)^2 + n}.$$

$$a_n = \sqrt[n]{n^{2019} \cdot 3^n + (2^n)^2 + n} = \sqrt[n]{n^{2019} \cdot 3^n + 4^n + n}$$

$$b_n = \sqrt[n]{4^n} \qquad c_n = \sqrt[n]{n^{2019} \cdot 4^n + n^{2019} \cdot 4^n + n^{2019} \cdot 4^n} = \sqrt[n]{3n^{2019} \cdot 4^n}$$

$$\left.\begin{aligned} &\forall_{n \in \mathbb{N}}\ b_n \leq a_n \leq c_n \\ &\lim_{n \to \infty} b_n = 4 \\ &\lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{3n^{2019}} \cdot \sqrt[n]{4^n} = 1 \cdot 4 = 4 \end{aligned}\right\} \implies \lim_{n \to \infty} a_n = 4$$

na podstawie tw. o 3 ciągach

Zadanie 2. [3p] Powołując się na odpowiednie twierdzenia precyzyjnie zbadaj ciągłość funkcji f w każdym punkcie dziedziny, w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$, jeśli

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ a \cdot \operatorname{arctg}(x + 1) & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}.$$

f jest ciągła w $(0, +\infty)$, bo $\frac{e^{3x} - 1}{x}$ jest funkcją elementarną

f jest ciągła w $(-\infty, 0)$, bo $\forall_{a \in \mathbb{R}}\ a \cdot \arctan(x+1)$ jest funkcją elementarną

i $\arctan(x)$ jest ciągła w $\mathbb{R}$

f jest ciągła w $0 \iff f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \iff \frac{\pi}{4} a = 3 \iff a = \frac{12}{\pi}$

$f(0) = a \cdot \arctan(1) = \frac{\pi}{4} a$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{3x} - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x \to 0^-} \frac{3e^{3x}}{1} = 3$$

ZADANIE 3. [4p] Znajdź asymptoty funkcji $f(x)=\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$.

$$D=(0,1)\cup(1,+\infty)$$

$$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}=\frac{x\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}-\frac{x-1}{(x-1)\ln(x)}=\frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to1}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right]=\lim_{x\to1}\frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\overset{\frac00}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to1}\frac{x\cdot\frac1x+1\cdot\ln(x)-1+0}{(x-1)\cdot\frac1x+1\cdot\ln(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\ln(x)}{\frac{x-1}{x}+\ln(x)}\overset{\frac00}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to1}\frac{\frac1x}{\frac{1\cdot x-(x-1)\cdot1}{x^2}+\frac1x}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac1x}{\frac{x-x+1}{x^2}+\frac1x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac1x}{\frac1{x^2}+\frac1x}=\lim_{x\to1}\frac{\frac1x}{\frac1{x^2}+\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac1x}{\frac{1+x}{x^2}}=\lim_{x\to1}\frac1x\cdot\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac12$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\left|\frac{0}{-1}-\frac{1}{-\infty}=0-0\right|=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x\ln(x)}\right]=\left|\frac1\infty-\frac1\infty=0-0\right|=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right]=\left|1-\frac1\infty\right|=1$$

asymptota pozioma prawostronna $y=1$

ZADANIE 4. [4p] Znajdź ekstrema funkcji $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x^{2x}}\right)$ na zbiorze $\left[\frac12,2\right]$.

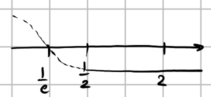
$$\frac{d}{dt}t^{-1}=-1t^{-2}$$

$$\ln\left(\frac{1}{x^{2x}}\right)=\ln(x^{-2x})=-2x\ln(x)$$

$$\frac{d}{dx}x^{2x}=\frac{d}{dx}e^{2x\ln(x)}=e^{2x\ln(x)}\frac{d}{dx}[2x\ln(x)]=2e^{2x\ln(x)}\cdot\left(x\cdot\frac1x+1\cdot\ln(x)\right)=2x^{2x}(1+\ln(x))$$

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{\frac{1}{x^{2x}}}\cdot\left(-(x^{2x})^{-2}\right)\cdot2x^{2x}(1+\ln(x))=\cancel{x^{2x}}\cdot(-1)\cdot\cancel{\frac{1}{x^{4x}}}\cdot2\cdot\cancel{x^{2x}}(1+\ln(x))=-2(1+\ln(x))$$

$$\frac{df}{dx}>0\iff-2(1+\ln(x))>0\iff1+\ln(x)<0\iff\ln(x)<-1\iff x<\frac1e$$



nie ma ekstremów lokalnych w $[\frac12,2]$

$f\searrow$ w $[\frac12,2]$

$$f\left(\tfrac12\right)=\ln\left(\frac{1}{(\frac12)^1}\right)=\ln(2)\qquad f(2)=\ln\left(\frac{1}{2^8}\right)=\ln(2^{-8})=-8\ln(2)$$

maximum $\ln(2)$

minimum $-8\ln(2)$

ZAD 1. (2 pkt.) Wyznaczyć granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} a_n$, jeśli istnieje lub udowodnić, że nie istnieje:

$$a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2 + n - 5}{2n^2+1}$$

$$a_n' = a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}\cdot(2n)^2 + 2n - 5}{2(2n)^2+1} = \frac{4n^2+2n-5}{8n^2+1} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n' = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$a_n'' = a_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}\cdot(2n+1)^2 + 2n+1-5}{2(2n+1)^2+1} = \frac{-4n^2-4n-1+2n+1-5}{8n^2+8n+2+1} = \frac{-4n^2-2n-5}{8n^2+8n+3} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n'' = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n' \neq \lim_{n\to\infty} a_n'' \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \text{ nie istnieje}$$

ZAD 2. (4 pkt) Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{arctg} x)^{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan(x))^{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin(x)\ln(\arctan(x))} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(\arctan(x)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\arctan(x))}{\frac{1}{\sin(x)}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\arctan(x)}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin^2(x)}{(1+x^2)\arctan(x)\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+x^2}\cdot\tan(x)\cdot\frac{\sin(x)}{\arctan(x)} = -1\cdot 0\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\arctan(x)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

ZAD 3. (4 pkt) Wykazać, że

$$\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} \quad \text{dla} \quad x \in (-1, +\infty)$$

$$\forall x \in (-1,+\infty) \quad \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4} \quad ?$$

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \arctan(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\frac{1-2x+x^2}{1+2x+x^2}+\frac{1+2x+x^2}{1+2x+x^2}}\cdot\frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\cancel{(1+x)^2}}{\cancel{2}(1+x^2)}\cdot\frac{-\cancel{2}}{\cancel{(1+x)^2}} + \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

f jest stała na przedziale $(-1, +\infty)$ i przyjmuje wartość $\frac{\pi}{4}$

7. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x)$ oraz podaj dziedzinę i zbiór wartości każdej z nich, jeśli:
   (a) $f(x) = \frac{1}{2^x+4}$,
   (b) $f(x) = \frac{3\cdot 2^x+2}{2^x+1}$,
   (c) $f(x) = \sin x, \quad x \in \left[2\pi; \frac{5}{2}\pi\right]$,
   (d) $f(x) = \cos x, \quad x \in [-3\pi; -2\pi]$.

b)

$$y = \frac{3\cdot 2^x + 2}{2^x+1} \qquad y: \mathbb{R} \to (2,3)$$

$$y2^x + y = 3\cdot 2^x + 2$$

$$\frac{-y+2}{y-3} = \frac{-y+3-1}{y-3} = -1 + \frac{-1}{y-3} \in (0,+\infty)$$

$$2^x = \frac{2-y}{y-3}$$

$$x = \log_2\left(\frac{2-y}{y-3}\right) \qquad x: (2,3) \to \mathbb{R}$$

d)

$$y = \cos(x) \qquad y: [-3\pi, -2\pi] \to [-1,1]$$

$$\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$$

$$x + 3\pi \in [0,\pi]$$

$$x = \arccos(y) - 3\pi$$

$$x: [-1,1] \to [-3\pi, -2\pi]$$

2.1

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}} = \left| e^{\infty} \right| = +\infty$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{2n^2+2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2+2n-1}{2n^2+2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{2n-1}{2n^2+1}\right)^{n+1}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+1}{2n-1}}\right)^{\frac{2n^2+1}{2n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n^2+1}\cdot(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+1}{2n-1}}\right)^{\frac{2n^2+1}{2n-1}}\right]^{\frac{2n^2+n-1}{2n^2+1}} = e^{1} = e$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2019} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2019} = 1^{2019} = 1$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left[\ln(n+3)-\ln(n)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+3}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{3}\right) = \ln(e^{3}) = 3$

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{3}}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{3}$$

2.3

c) $\lim\limits_{x\to0} (1-\sin(x))^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{x}\ln(1-\sin(x))} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1-\sin(x))}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to0} \frac{\frac{1}{1-\sin(x)}\cdot(-\cos(x))}{1} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos(x)}{\sin(x)-1} = \frac{1}{-1} = -1$

3.8

a) $\frac{d}{dx} x^{\cos(2x)} = \frac{d}{dx} e^{\cos(2x)\ln(x)} = e^{\cos(2x)\ln(x)} \frac{d}{dx}\cos(2x)\ln(x) = x^{\cos(2x)}\left(\frac{\cos(2x)}{x} - 2\sin(2x)\ln(x)\right)$

b) $\frac{d}{dx} \log_x(\arctan(x)) = \frac{d}{dx} \frac{\ln(\arctan(x))}{\ln(x)} = \frac{\frac{1}{\arctan(x)}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x) - \ln(\arctan(x))\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

4.1

o) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)} = e^{0} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x^2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x\ln(x)} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$