Całkowitoliczbowy model wyznaczania najtańszej ścieżki z wymogiem ciągłego przedziału wycinków

Zbiory i indeksy:

$$\begin{aligned} &N : \text{zbiór węzłów (wierzchołków).} \\ &E \subseteq N \times N : \text{zbiór skierowanych krawędzi (łuków).} \\ &K = \{0, 1, \ldots, 767\} : \text{zbiór indeksów wycinków (slices).} \end{aligned}$$

Parametry:

w_{ij}	koszt (waga) użycia krawędzi $(i, j) \in E$.
$s \in N$	wierzchołek źródłowy (source).
$t \in N$	wierzchołek docelowy (target).
$\text{Occupied}_{(i,j),k} \in \{0, 1\}$	parametr binarny wskazujący, czy wycinek k jest zajęty (1) czy wolny (0) na krawędzi (i, j).
$S \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	liczba *ciągłych* wycinków wymagana na każdej wybranej krawędzi.

Zmienne decyzyjne:

$x_{ij} \in \{0, 1\}$	równe 1, jeśli krawędź (i, j) jest użyta w ścieżce; 0 w p.p.
$y_k \in \{0, 1\}$	równe 1, jeśli wycinek k jest wybrany jako *początek* ciągłego przedziału; 0 w p.p.
$z_{(i,j),k} \in \{0, 1\}$	zmienna pomocnicza do powiązania x_{ij} i y_k.

Funkcja celu:

$$\min \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}\, x_{ij}.$$

Jej celem jest zminimalizowanie łącznego kosztu (wagi) wszystkich wybranych krawędzi.

Ograniczenia:

1. **Zachowanie przepływu (równowaga przepływów).**

$$\forall\, n \in N : \quad \sum_{(n,j)\in E} x_{nj} \;-\; \sum_{(i,n)\in E} x_{in} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } n = s, \\ -1 & \text{jeśli } n = t, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Zapewnia to, że ze źródła wypływa dokładnie 1 jednostka przepływu, do ujścia wpływa 1 jednostka, a pozostałe węzły mają bilans zerowy (co definiuje ścieżkę od s do t).

2. **Dostępność wolnych wycinków na każdej wybranej krawędzi.**

   Dla każdej krawędzi $(i,j) \in E$ musi istnieć co najmniej jeden indeks początkowy k, dla którego (1) wycinki od k do $k+S-1$ są wolne oraz (2) $y_k = 1$. W zapisie z uwzględnieniem iloczynu binarnych parametrów:

$$\forall\,(i,j) \in E: \quad \sum_{\substack{k \in K \\ k+S-1 \le \max(K)}} \left(y_k \times \prod_{r=k}^{k+S-1} \left[1 - \mathrm{Occupied}_{(i,j),r}\right] \right) \;\ge\; x_{ij}.$$

   Jeśli $x_{ij} = 1$, to co najmniej jeden blok S kolejnych wolnych wycinków (począwszy od pewnego k) musi być dostępny.

   Uwaga: W ściśle liniowej wersji modelu należy taką formułę zlinearyzować (np. *big-M* lub precomputing wartości produktu) bądź posłużyć się innymi sztuczkami MILP.

3. **Zgodność wybranego wycinka z istniejącym zajęciem (ang. occupancy).**

$$\forall\,(i,j) \in E,\ \forall\,k \in K: \quad \begin{array}{l} \text{jeśli } (k+S-1) > \max(K), \quad \text{pomijamy;} \\ \text{w przeciwnym razie } z_{(i,j),k} \;\le\; 1 - \mathrm{Occupied}_{(i,j),k}. \end{array}$$

   Jeżeli wycinek k jest zajęty na krawędzi (i,j), to zmienna $z_{(i,j),k}$ musi wynosić 0.

4. **Powiązanie zmiennych $z_{(i,j),k}$ z x_{ij} i y_k.**

$$\forall\,(i,j) \in E,\ \forall\,k \in K: \quad \begin{cases} z_{(i,j),k} \;\le\; y_k, \\ z_{(i,j),k} \;\le\; x_{ij}, \\ z_{(i,j),k} \;\ge\; y_k + x_{ij} - 1. \end{cases}$$

   Jest to standardowe *big-M*-stylowe odwzorowanie równości

$$z_{(i,j),k} = x_{ij} \cdot y_k.$$

5. **Wzajemna wyłączność wybranego wycinka początkowego.**

$$\sum_{\substack{k \in K \\ k+S-1 \le \max(K)}} y_k \;=\; 1.$$

   Dokładnie jeden wycinek k zostaje wybrany jako początek bloku długości S.