

Chapitre 2 : Filtres passifs

2.1 Notion de quadripôle linéaire

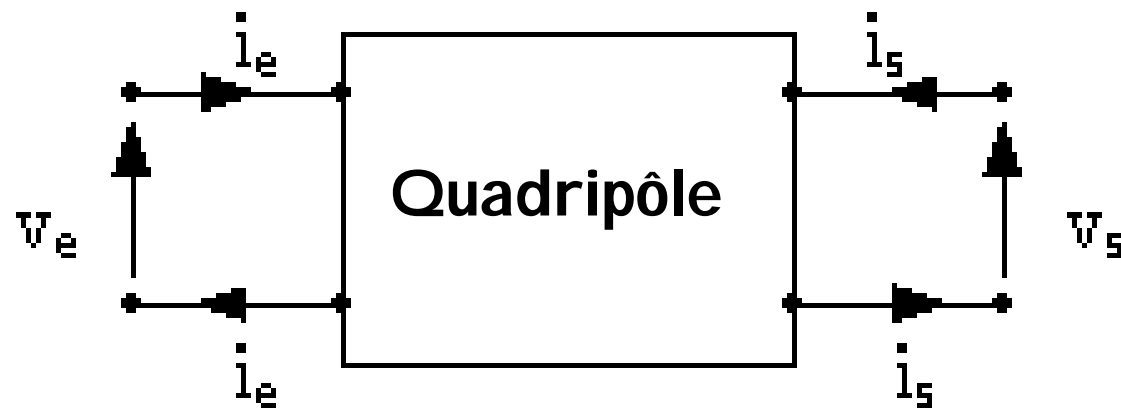
1. Définitions

Un **quadripôle** est un système électrique possédant **deux bornes d'entrée** et **deux bornes de sortie**.

Les grandeurs d'entrée et de sortie sont des tensions et des courants.

Il existe **plusieurs conventions** d'orientation des tensions et des courants.

Nous utilisons la suivante :



□ Un quadripôle est **passif** s'il ne comporte que des dipôles passifs.

□ Il est **actif** s'il comporte, outre les dipôles passifs, des sources.

□ Il est **linéaire** si tous les éléments qui le constituent sont linéaires.

2. Conséquence de la linéarité du quadripôle

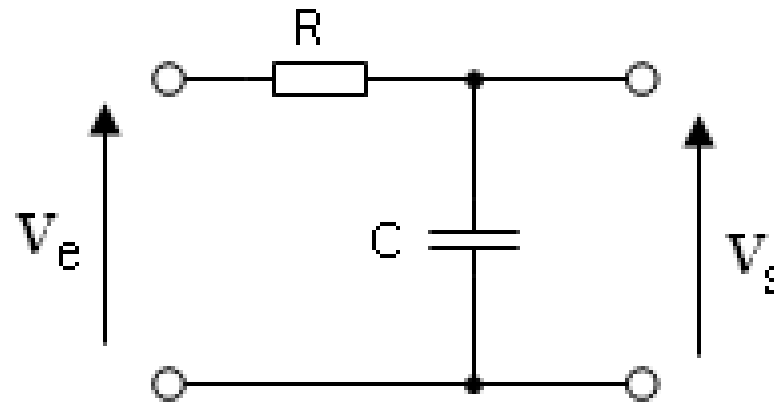
- Si on connaît la réponse du quadripôle à un signal sinusoïdal pur, on pourra connaître la réponse à tout signal périodique, celui-ci étant décomposable en **série de Fourier**.
- Les tensions v_e et v_s sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

□ Les tensions v_e et v_s sont reliées par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du type :

$$D_n \frac{d^n v_s}{dt^n} + \dots + D_1 \frac{dv_s}{dt} + D_0 v_s = N_m \frac{d^m v_e}{dt^m} + \dots + N_1 \frac{dv_e}{dt} + N_0 v_e$$

Exemple :

Exemple :



$$v_e - v_s = Ri \quad \text{avec} \quad i = C \frac{dv_s}{dt}$$

$$\frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{RC} v_s = \frac{1}{RC} v_e$$

Ce circuit est du premier ordre.

3. Équations caractéristiques

Un quadripôle est défini par **deux équations caractéristiques** qui décrivent complètement son fonctionnement :

$$f_1 (i_e, i_s, v_e, v_s) = 0$$

$$f_2 (i_e, i_s, v_e, v_s) = 0$$

En général, il y a **quatre types d'équations caractéristiques**:

a-Paramètres impédances z_{ij}

On exprime les tensions en fonction des

courants:
$$\begin{cases} V_e = Z_{11} \cdot i_e + Z_{12} \cdot i_s \\ V_s = Z_{21} \cdot i_e + Z_{22} \cdot i_s \end{cases}$$

Sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} V_e \\ V_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_e \\ i_s \end{pmatrix}$$

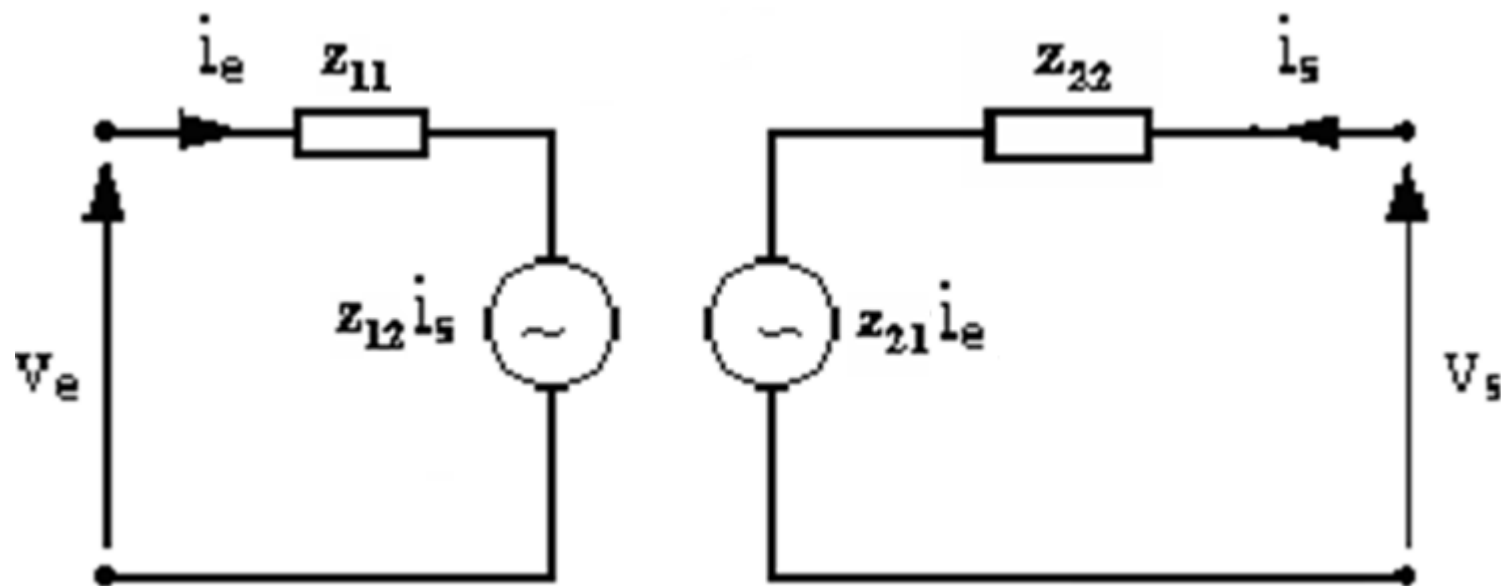
Les paramètres Z se définissent comme suit:

Les paramètres Z se définissent comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{11} = \frac{V_e}{i_e} \text{ (} i_s = 0 \text{): impédance d'entrée à sortie ouverte } (\Omega) \\ Z_{21} = \frac{V_s}{i_e} \text{ (} i_s = 0 \text{): impédance de transfert direct à sortie ouverte } (\Omega) \\ Z_{12} = \frac{V_e}{i_s} \text{ (} i_e = 0 \text{): impédance de transfert inverse à entrée ouverte } (\Omega) \\ Z_{22} = \frac{V_s}{i_s} \text{ (} i_e = 0 \text{): impédance de sortie à entrée ouverte } (\Omega) \end{array} \right.$$

Schéma équivalent en z :

Des deux équations caractéristiques du quadripôle à impédances z_{ij} , on en déduit le schéma équivalent du quadripôle en z :



b-Paramètres admittance y_{ij}

On exprime les courants en fonction des tensions:

$$\begin{cases} i_e = y_{11} \cdot V_e + y_{12} \cdot V_s \\ i_s = y_{21} \cdot V_e + y_{22} \cdot V_s \end{cases}$$

Sous forme matricielle:<<

$$\begin{pmatrix} i_e \\ i_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_e \\ V_s \end{pmatrix}$$

(y) est la matrice admittance du quadripôle.

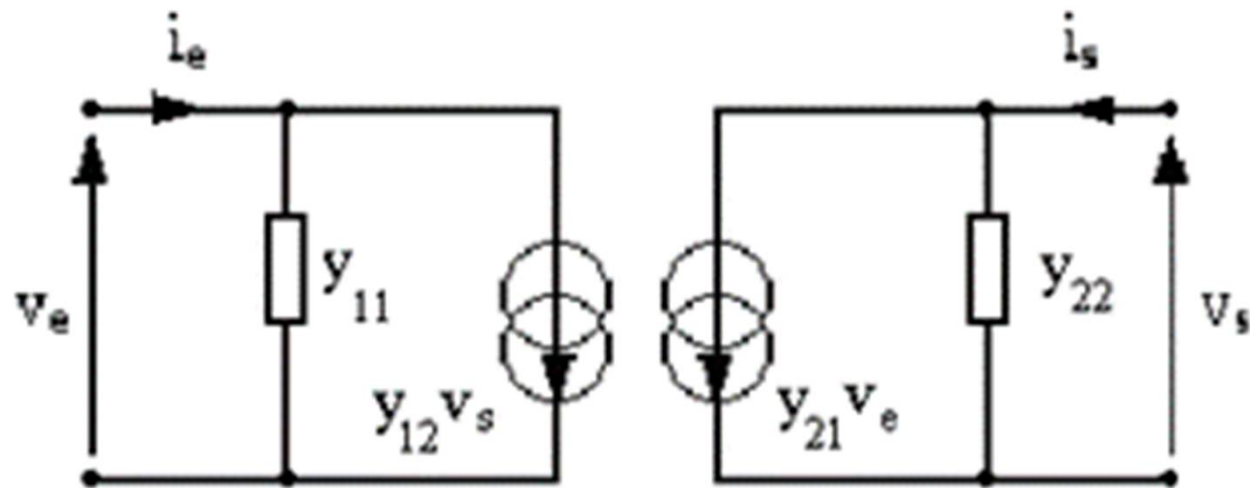
Les paramètres Y se définissent comme suit:

On en déduit immédiatement les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{11} = \frac{i_e}{v_e} (v_s = 0) : \text{admittance d'entrée à sortie court-circuitée } (\Omega^{-1}) \\ y_{21} = \frac{i_s}{v_e} (v_s = 0) : \text{admittance de transfert direct à sortie court-circuitée } (\Omega^{-1}) \\ y_{12} = \frac{i_e}{v_s} (v_e = 0) : \text{admittance de transfert inverse à entrée court-circuitée } (\Omega^{-1}) \\ y_{22} = \frac{i_s}{v_s} (v_e = 0) : \text{admittance de sortie à entrée court-circuitée } (\Omega^{-1}) \end{array} \right.$$

Schéma équivalent en y :

Des deux équations caractéristiques du quadripôle à admittances Y_{ij} , on en déduit le schéma équivalent du quadripôle en z :



c- Paramètres hybrides (h_{ij})

On démontre que l'on peut écrire :

$$\begin{cases} v_e = h_{11} i_e + h_{12} v_s \\ i_s = h_{21} i_e + h_{22} v_s \end{cases}$$

Sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} v_e \\ i_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_e \\ v_s \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert est appelée matrice hybride du quadripôle.

Signification des paramètres:

$$h_{11} = \left(\frac{V_e}{i_e} \right)_{v_s=0}$$

h_{11} : impédance d'entrée du quadripôle avec la sortie en court-circuit.

$$h_{12} = \left(\frac{V_e}{V_s} \right)_{i_e=0}$$

h_{12} : gain en tension inverse lorsque l'entrée est ouverte.

Signification des paramètres:

$$h_{21} = \left(\frac{i_s}{i_e} \right)_{v_s=0}$$

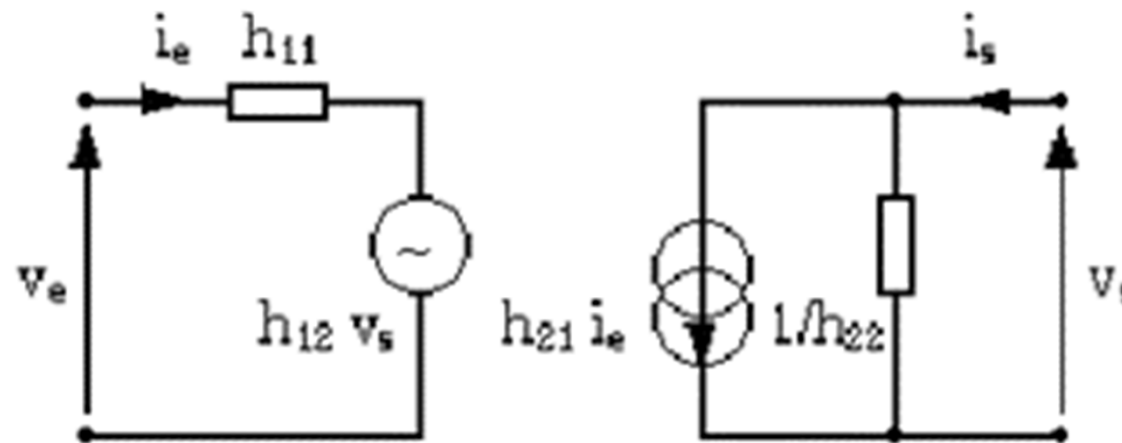
h_{21} : gain en courant avec sortie en court-circuit.

$$h_{22} = \left(\frac{i_s}{v_s} \right)_{i_e=0}$$

h_{22} : admittance de sortie lorsque l'entrée est ouverte.

Schéma équivalent en h:

Des deux équations caractéristiques du quadripôle à admittances h_{ij} , on en déduit le schéma équivalent du quadripôle:



Les matrices hybrides sont utilisées en particulier dans l'étude des transistors.

4. Fonction de transfert d'un quadripôle

La fonction de transfert d'un quadripôle est le rapport (complexe) de la tension de sortie sur la tension d'entrée :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s(j\omega)}{\underline{V}_e(j\omega)}$$

- ✓ Le **module** donne le **gain** du quadripôle,
- ✓ l'**argument** représente le **déphasage** entre la tension d'entrée et la tension de sortie.

2.2 Filtres linéaires

1.Définition

Un filtre linéaire est un quadripôle linéaire qui laisse passer des signaux à certaines fréquences et bloquera des signaux à d'autres fréquences.

Un filtre est donc un circuit dont le comportement dépend de la fréquence.

✓ Les domaines de fréquences transmises constituent la **bande passante** du filtre.

✓ Les autres domaines de fréquences sont appelés **bandes rejetées** ou **bandes coupées**.

Nous nous intéresserons particulièrement aux filtres linéaires à une entrée et une sortie:



2. Filtre passif et filtre actif

Un filtre est **passif** s'il n'est constitué que de composants passifs: résistances, bobines et condensateurs.

Un filtre est **actif** s'il est constitué de Composants passifs et de composants actifs: alimentations, transistors, amplificateurs opérationnels. **Dans ce cours nous étudions uniquement les filtres passifs.**

3. Etude du filtre linéaire en régime harmonique

- Pour un filtre linéaire, si la tension d'entrée est sinusoïdale alors la tension de sortie est sinusoïdale de même fréquence.
- La réponse d'un filtre linéaire en régime harmonique est une fonction de la fréquence de l'excitation.

- Pour étudier les caractéristiques d'un filtre, on réalise une **étude fréquentielle** pour obtenir sa **réponse en fréquence**.

Cette réponse est donné par :

- **Une courbe de gain :**

$$G(j\omega) = \frac{\text{Amplitude du signal de sortie}}{\text{Amplitude du signal d'entrée}} = |\underline{H}(j\omega)|$$

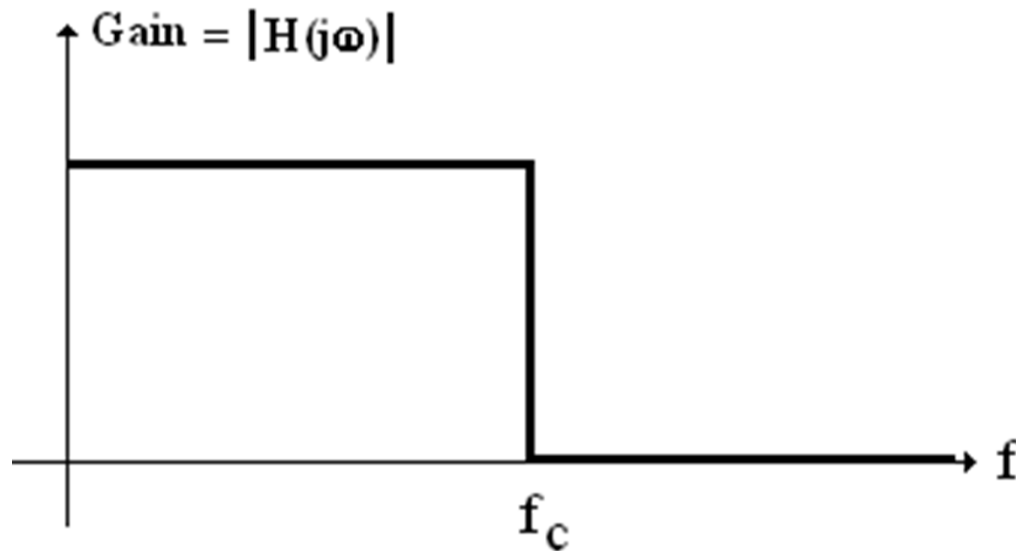
- **Une courbe de phase :**

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$$

La réponse fréquentielle des circuits linéaires s'effectuera à l'aide de deux outils :
l'un **analytique** et l'autre **graphique**, qui sont respectivement la **fonction de transfert** et le **diagramme de Bode**.

4. Principaux types de filtres (idéaux)

a- Filtre passe-bas

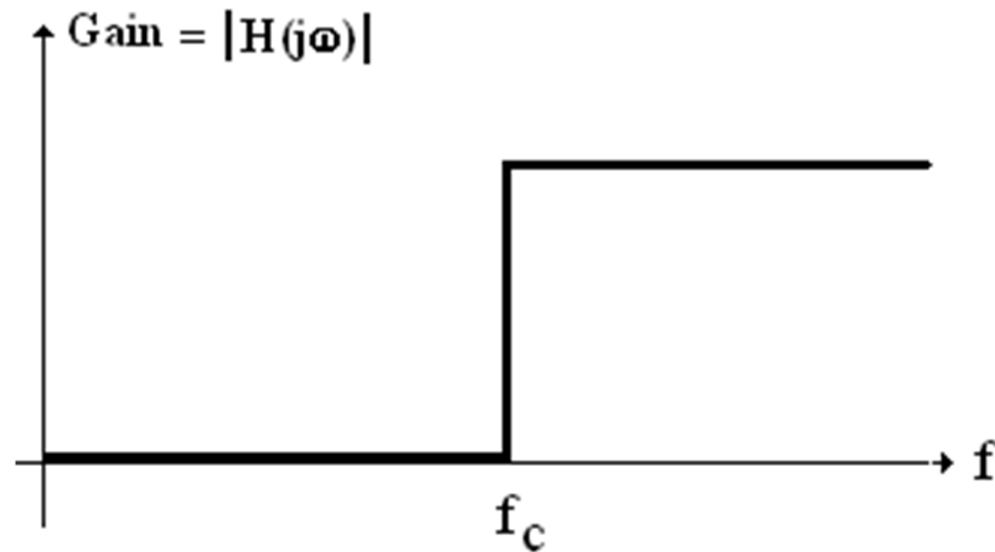


Ce filtre laisse passer les basses fréquences (BF) et bloque les hautes fréquences (HF).

La limite qui sépare les BF et HF est appelée **fréquence de coupure** f_c .

La **bande passante** est la gamme de fréquence non bloquées par le filtre : **Bande passante** = $[0, f_c]$

b- Filtre passe-haut

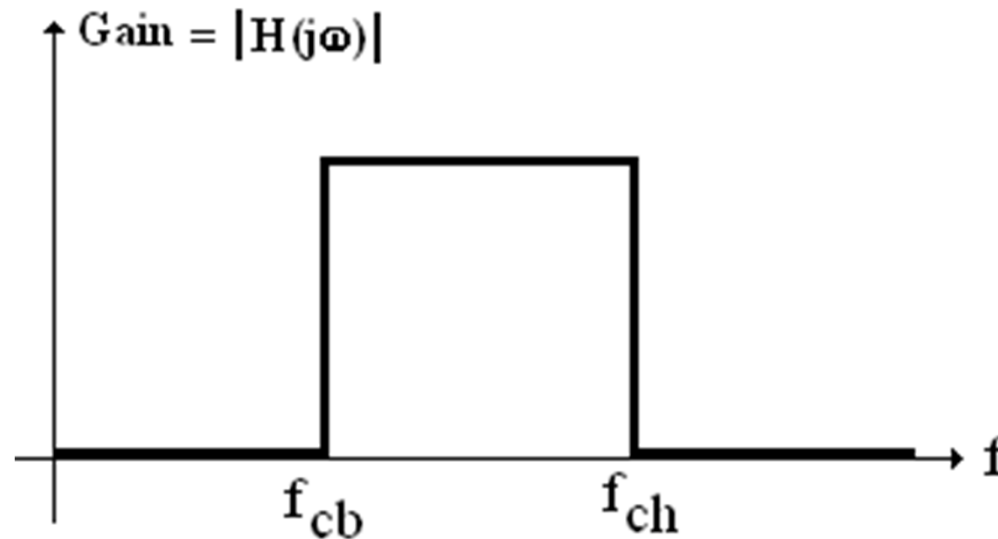


Ce filtre laisse passer les hautes fréquences.

Les basses fréquences sont donc bloquées.

Bande passante : $[f_c, +\infty[$

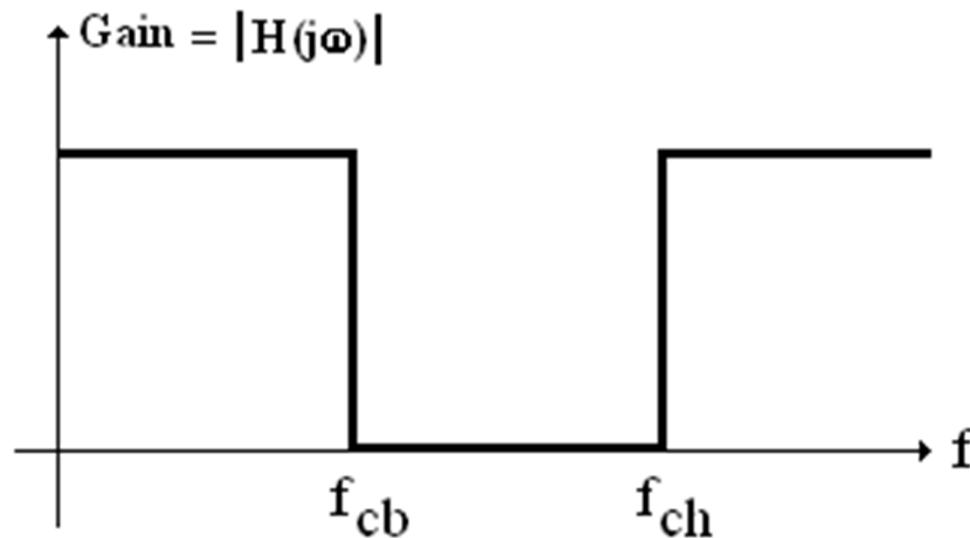
c- Filtre passe-bande



Ce filtre laisse passer une bande de fréquences située entre 2 fréquences de coupure: f_{cb} et f_{ch} .

Bande passante : $[f_{cb}, f_{ch}]$

d- Filtre coupe bande (réjecteur de bande)



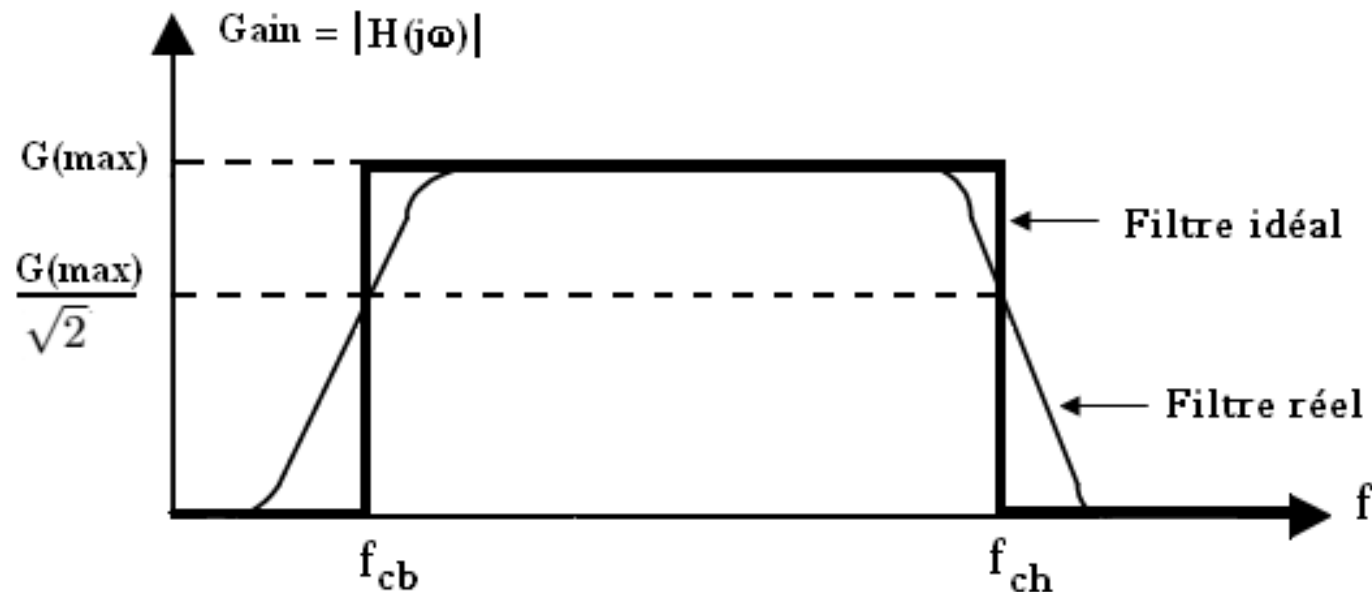
Ce filtre bloque une bande de fréquence, mais laisse passer toutes les fréquences en bas et au-delà de cette bande.

Bande passante : $[0, f_{cb}]$ et $[f_{ch}, +\infty[$

5. Filtres réels

La caractéristique du gain en fonction de la fréquence n'est pas réellement abrupte à la fréquence de coupure.

Exemple: cas d'un filtre passe-bande



6. Fréquence de coupure

C'est la fréquence qui correspond au gain maximal divisé par $\sqrt{2}$:

$$Gain(f_C) = \frac{Gain_{max}}{\sqrt{2}}$$

Soit :

$$20\log_{10}(Gain(f_C)) = 20\log_{10}(Gain_{max}) - 20\log_{10}(\sqrt{2})$$

$$G_{dB}(f_C) = G_{dB}(max) - 3dB$$

7. Fonction de transfert d'un filtre:

Signal d'entrée: $v_e(t) = V_{em} \cos(\omega t)$

En notation complexe, on a : $\underline{v}_e(t) = V_{em} e^{j\omega t}$

La réponse à l'excitation \underline{v}_e est sinusoïdale:

$$\underline{v}_s(t) = V_{sm} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

Fonction de transfert du filtre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{V_{sm} e^{j(\omega t + \varphi)}}{V_{em} e^{j\omega t}} = \frac{V_{sm}}{V_{em}} e^{j\varphi}$$

$\underline{H}(j\omega)$ est **complexe**, caractérisée par son **module** et son **argument** :

- ✓ **Le module correspond au gain en tension :**

$$|\underline{H}(j\omega)| = G(\omega) = \frac{V_{s,\max}}{V_{e,\max}}$$

$$H_{\text{dB}} = 20\log_{10}(|\underline{H}(j\omega)|) = 20\log_{10}(G(\omega)) = 20\log_{10}\left(\frac{V_{s,\max}}{V_{e,\max}}\right)$$

- ✓ **L'argument correspond au déphasage entre le signal de sortie et le signal d'entrée :**

$$\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg(\underline{V}_s) - \arg(\underline{V}_e)$$

8. Diagramme de Bode

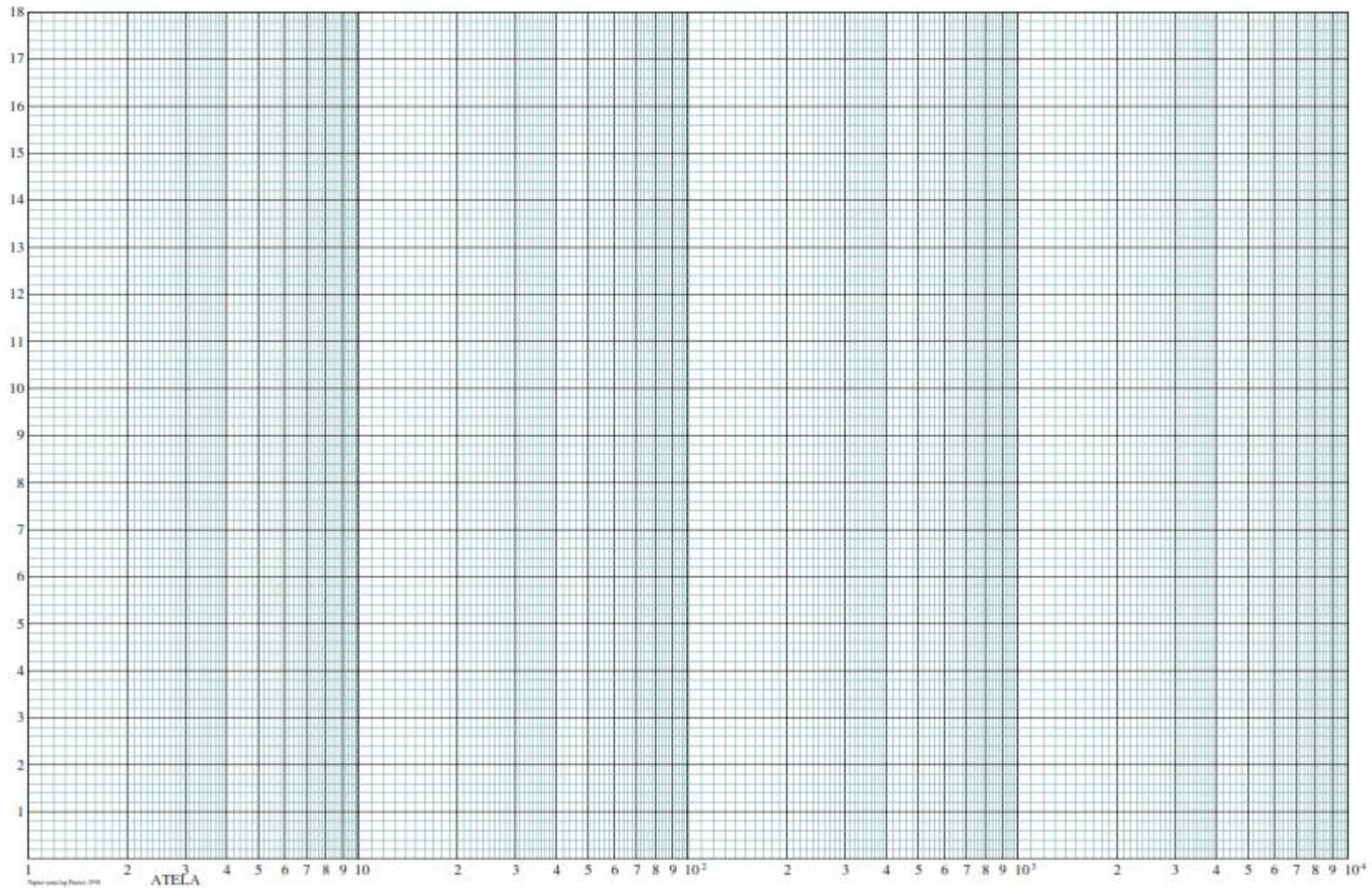
Un diagramme de Bode est la représentation graphique d'une fonction de transfert à l'aide de deux courbes:

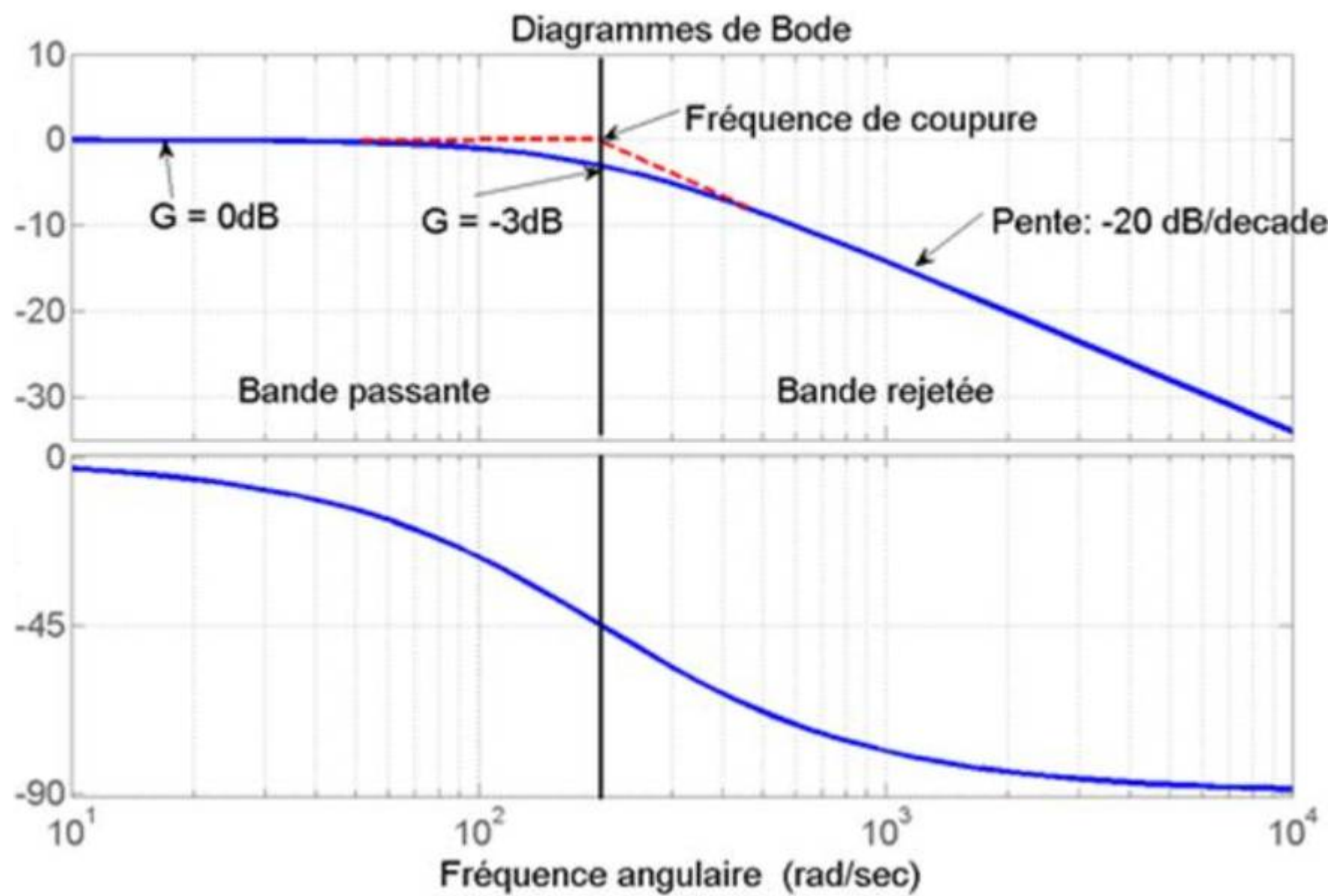
- **Courbe de réponse en gain** donnant les variations du gain en fonction de la fréquence ou de la pulsation exprimée dans une échelle logarithmique $X = \text{Log}(f)$ ou $X = \text{Log}(\omega)$,
- **Courbe de réponse en phase** donnant la variation de la phase en fonction de la même variable X .

Remarque:

En électronique, l'intervalle de fréquences utilisé est un intervalle très étendu qui nécessite l'utilisation d'une **échelle logarithmique** pour conserver une lisibilité sur tout l'intervalle d'où l'usage du **papier logarithmique** pour les tracés des courbes en fonction de la fréquence.

Papier semilogarithmique:





Décades et octaves

Par définition, une **décade** est un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ ou de pulsation $[\omega_1, \omega_2]$ tel que:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$$

et un **octave** est un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ ou de pulsation $[\omega_1, \omega_2]$ tel que :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$$

Diagrammes asymptotiques (ou idéalisés) de Bode:

Avant de tracer le gain réel et la phase réelle en fonction de la pulsation, il est utile de tracer les **diagrammes asymptotiques**: allures de ces fonctions loin des pulsations de coupure.

Exemple:

Exemple:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Pour laquelle on a: $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$ et $\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

Si $\omega \rightarrow 0$ ($\omega \ll \omega_c$): $|\underline{H}(j\omega)| = 1 \Rightarrow H_{dB} = 0dB$; $\varphi = 0$

L'asymptotique basse fréquence est donc une droite horizontale égale à 0dB pour le gain et pour la phase une droite correspondant à une phase nulle.

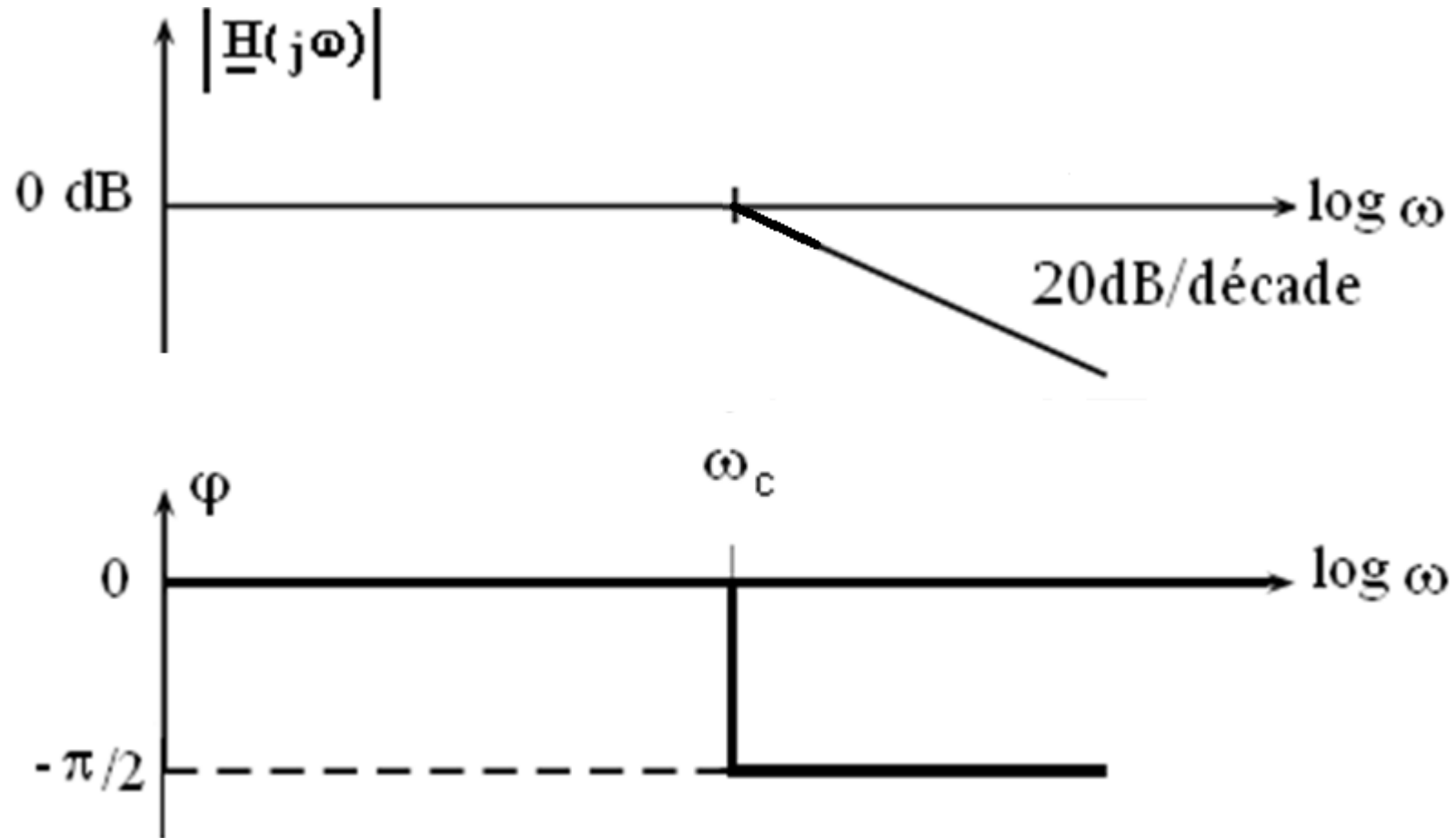
Si $\omega \rightarrow \infty$ ($\omega \gg \omega_c$):

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\omega} \Rightarrow H_{dB} = -20 \log(\omega) + 20 \log(\omega_c) \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

L'asymptotique haute fréquence est donc une droite de pente négative (-20 dB/décade) pour le gain et pour la phase c'est l'horizontale $\varphi = -\pi/2$.

D'où l'allure suivante du diagramme asymptotique :

Diagrammes asymptotiques :



Pour tracer le diagramme réel, on approche la courbe des asymptotes loin des pulsations de coupure et on complète par quelques points bien choisis au voisinage de ces pulsations.

$$\text{Pour } \omega = \omega_c : |H(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\text{dB}$$

$$\varphi(\omega_c) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

9. Fonctions de transfert élémentaires

9.1 Le gain pur: $H(j\omega) = H$

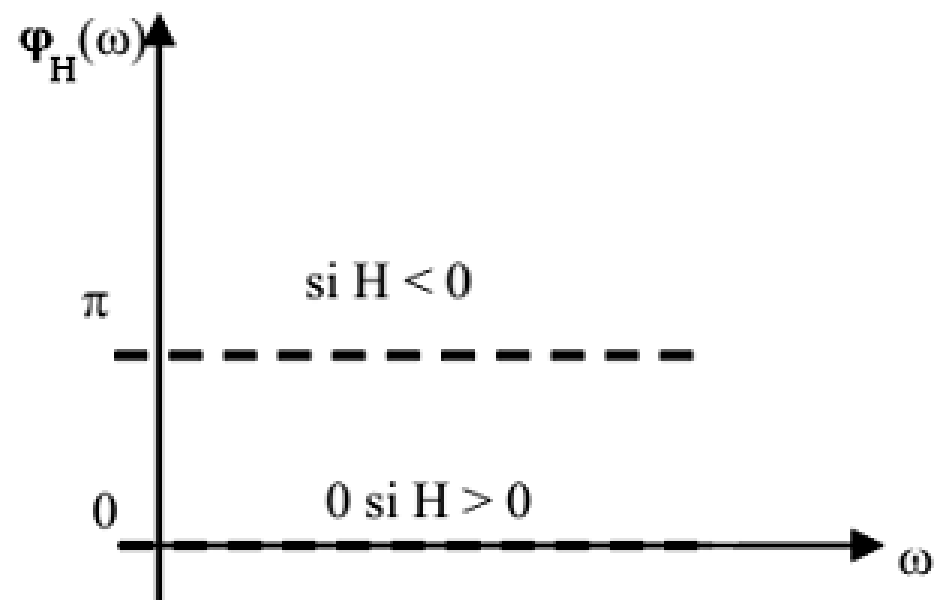
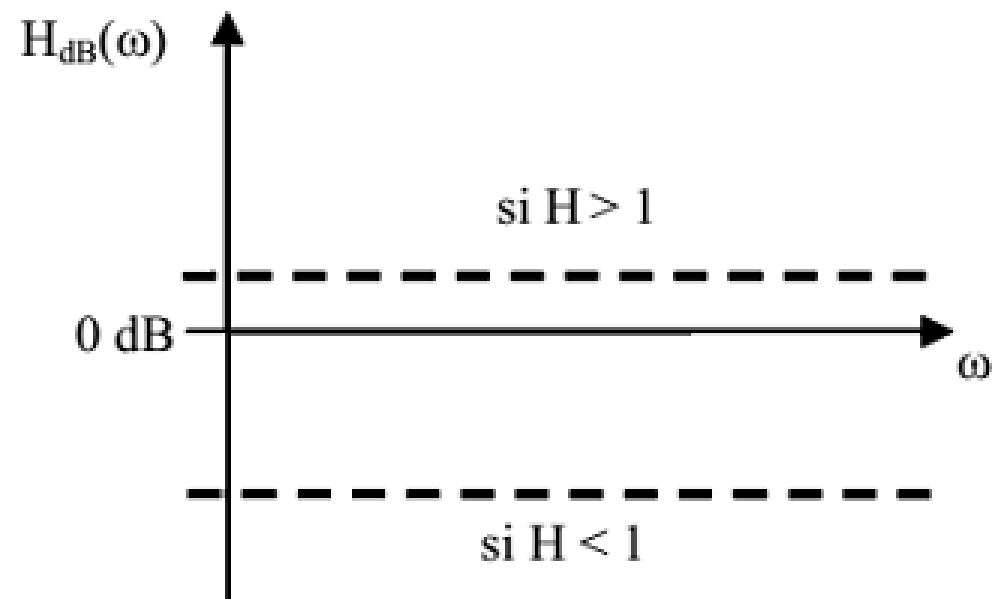
- **Module :** $H_{dB}(\omega) = 20\log|H(j\omega)|$

si $H > 1$ alors $H_{dB} > 0$ dB

si $H < 1$ alors $H_{dB} < 0$ dB

- **Phase:** $\varphi_H = 0$ **si $H > 0$**

$\varphi_H = \pi \text{ (modulo } 2\pi) \text{ si } H < 0$



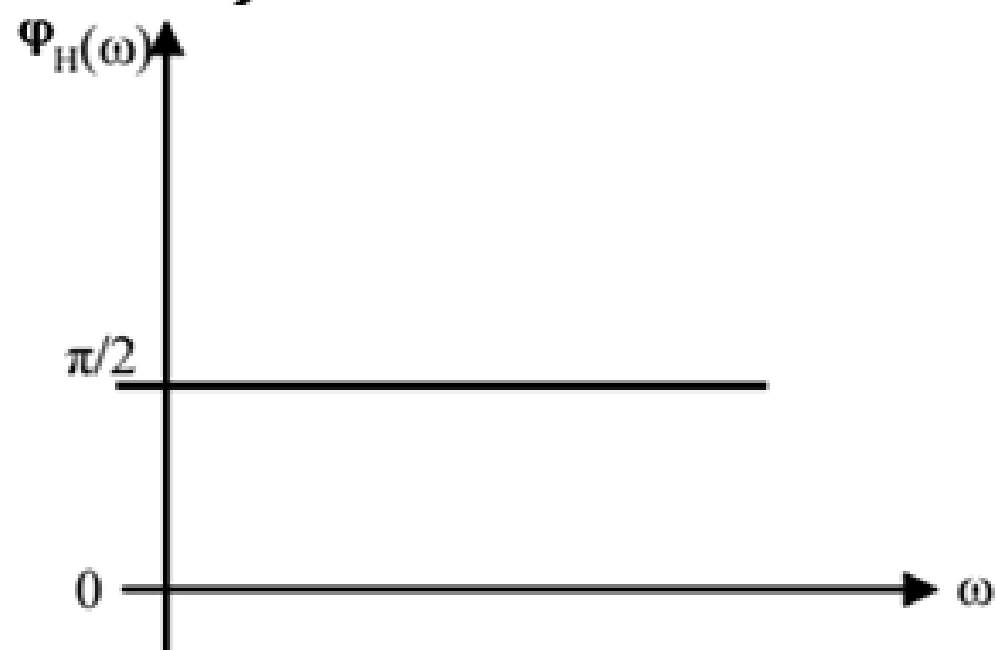
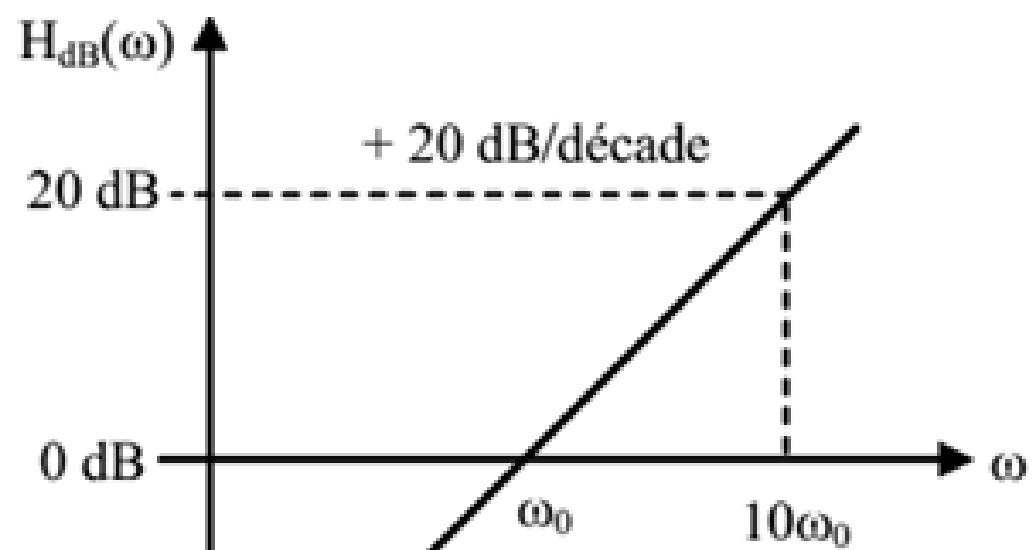
9.2 Le dérivateur: $\underline{H}(j\omega) = j \frac{\omega}{\omega_0} = j\omega\tau$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

✓ **Module:** $H_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$

On remarque que :

- $H_{dB}(\omega) = 0 \text{ dB}$ si $\omega = \omega_0$
- H_{dB} augmente avec ω
- $H_{dB}(\omega) = +20\text{dB}$ si $\omega = 10\omega_0$
- $H_{dB}(\omega) = -20\text{dB}$ si $\omega = \omega_0/10$

✓ **Phase:** $\varphi_H = \arg(j\omega\tau) = +\frac{\pi}{2}$



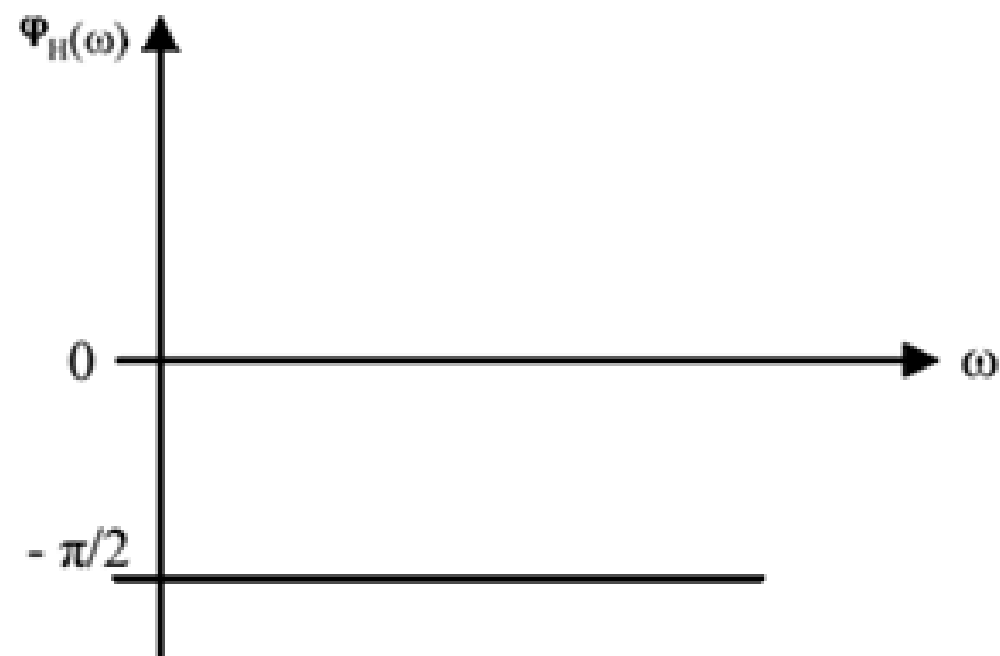
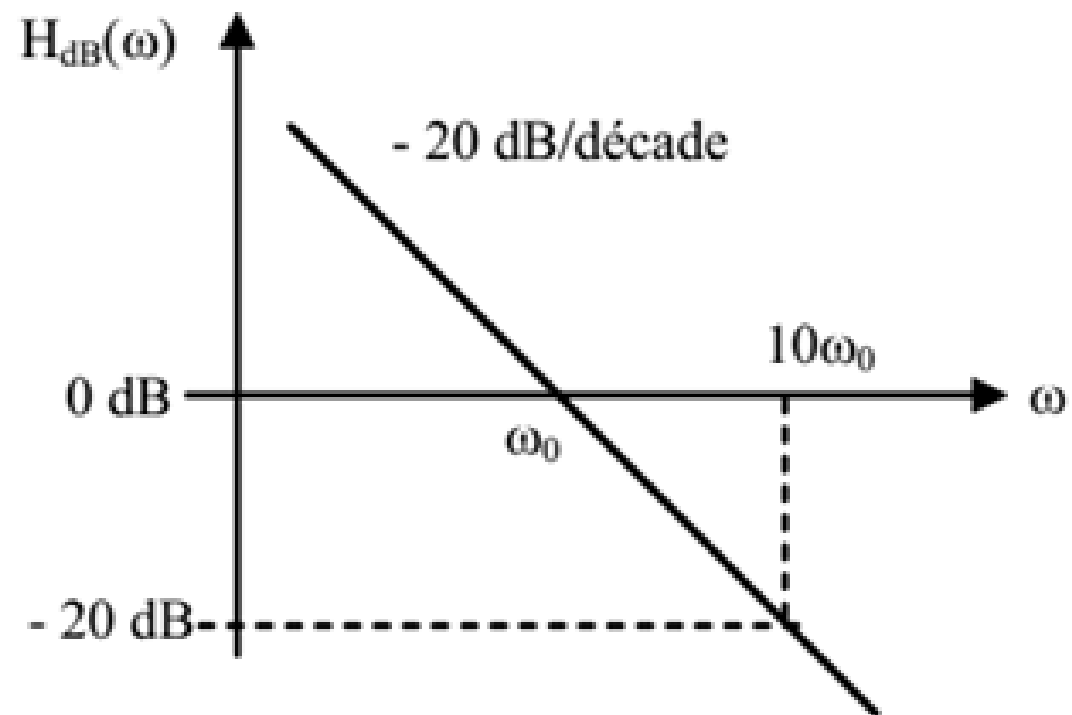
9.3 L'intégrateur: $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{j\omega\tau}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

✓ **Module:** $H_{dB}(\omega) = 20\log|\underline{H}(j\omega)| = -20\log\frac{\omega}{\omega_0}$

On remarque :

- $H_{dB}(\omega) = 0 \text{ dB}$ si $\omega = \omega_0$
- $H_{dB}(\omega)$ diminue avec ω
- $H_{dB}(\omega) = -20 \text{ dB}$ si $\omega = 10\omega_0$
- $H_{dB}(\omega) = +20 \text{ dB}$ si $\omega = \omega_0/10$

✓ **Phase:** $\varphi_H(\omega) = \arg(-j\omega\tau) = -\frac{\pi}{2}$



9.4 Le pseudo dérivateur:

$$\underline{H}(j\omega) = 1 + j \frac{\omega}{\omega_0} = 1 + j\omega\tau \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

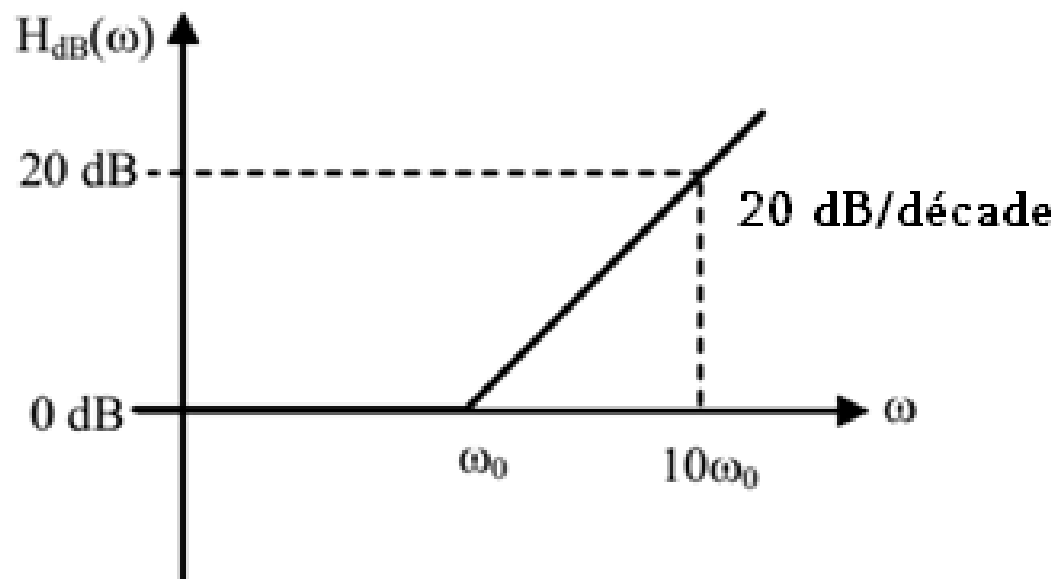
✓ **Module:** $H_{dB}(\omega) = 20\log|\underline{H}(j\omega)| = 20\log\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$

On remarque :

$$H_{dB}(\omega) = 20\log\sqrt{2} = 3 \text{ dB} \quad \text{si } \omega = \omega_0 : \text{ pulsation de coupure}$$

$$H_{dB}(\omega) \rightarrow 0 \text{ dB} \quad \text{quand } \omega \rightarrow 0 : \text{ asymptote } H_{dB} = 0 \text{ dB}$$

$$H_{dB}(\omega) \rightarrow +\infty \text{ dB} \quad \text{quand } \omega \rightarrow +\infty : \text{ asymptote de pente } +20\text{dB/décade}.$$

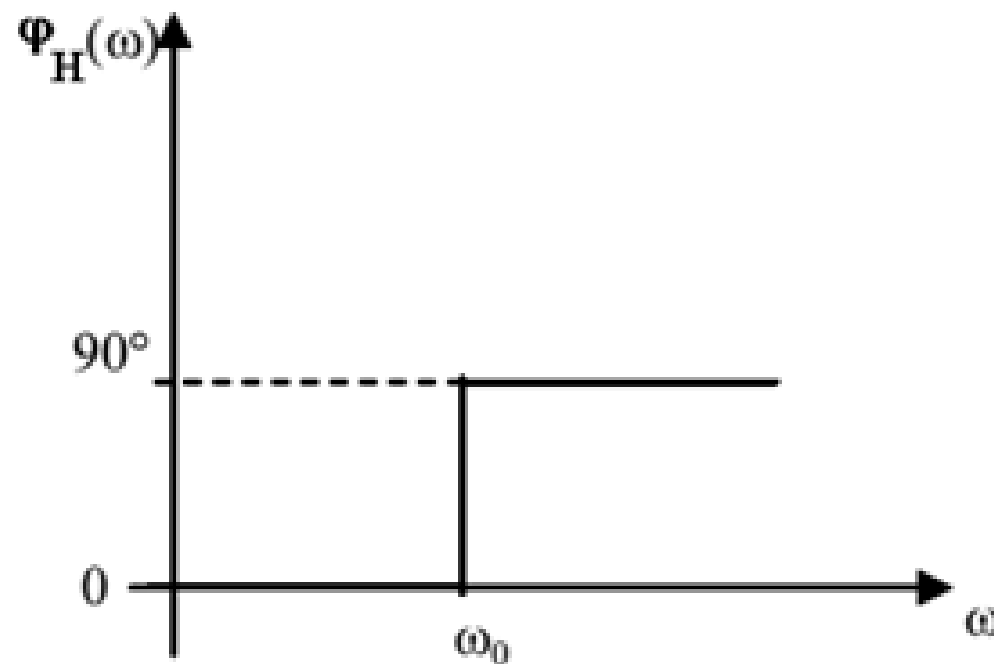


✓ Phase : $\varphi_H(\omega) = \arctan(\omega\tau)$

$\varphi_H(\omega) \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow 0$: on y associe l'asymptote $\varphi_0 = 0$ rad

$\varphi_H(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ si $\omega \rightarrow \infty$: on y associe l'asymptote $\varphi_\infty = +\frac{\pi}{2}$ rad

$\varphi_H(\omega) = +\frac{\pi}{4}$ si $\omega = \omega_0$



10. Produits de formes canoniques:

$$\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1(j\omega) \times \underline{H}_2(j\omega) \times \underline{H}_3(j\omega) \times \dots \times \underline{H}_n(j\omega)$$

où les $\underline{H}_k(j\omega)$ sont des fonctions de transfert de formes canoniques du premier ordre ou du second ordre.

Grâce au logarithme, le diagramme en gain se transforme alors en une somme de fonctions :

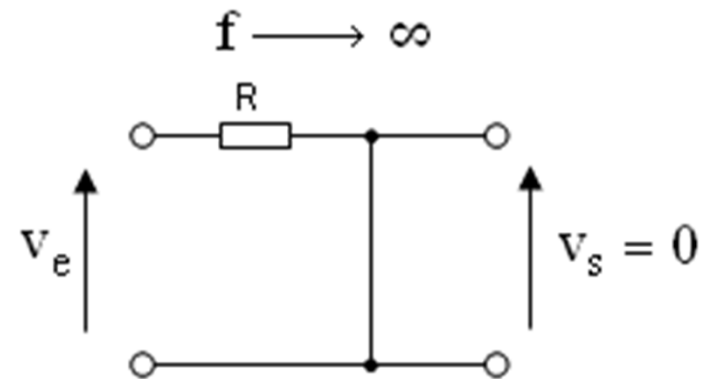
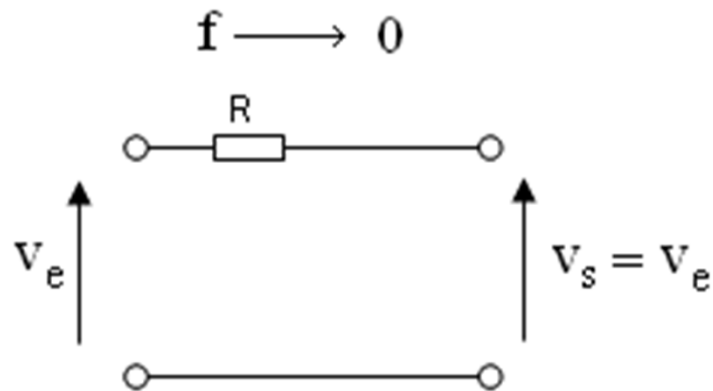
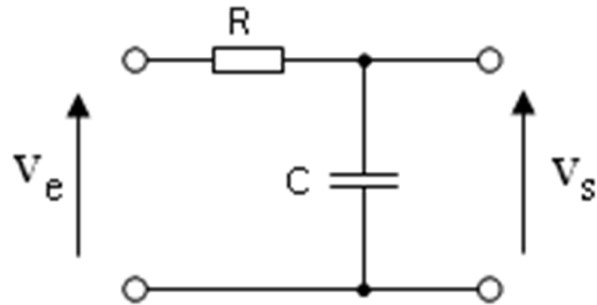
$$H_{dB}(j\omega) = H_{1dB}(j\omega) + H_{2dB}(j\omega) + H_{3dB}(j\omega) + \dots + H_{ndB}(j\omega)$$

De même pour la phase :

$$\varphi_H(j\omega) = \varphi_{H1}(j\omega) + \varphi_{H2}(j\omega) + \varphi_{H3}(j\omega) + \dots + \varphi_{Hn}(j\omega)$$

11. Etude de certains filtres passifs

a- Filtre passe bas



Ce filtre ne laisse passer que les basses fréquences, c'est un **filtre passe bas**.

Fonction de transfert:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{Z_c}{Z_c + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- **Gain linéaire :** $|\underline{H}(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$

- **Gain en décibels :**

$$20\log|\underline{H}(j\omega)| = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\right) = -20\log(\sqrt{1 + (RC\omega)^2})$$

- **Phase:**

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 + jRC\omega}\right) = -\arctan(RC\omega)$$

- **Fréquence de coupure :**

La pulsation de coupure est définie par:

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{|\underline{H}(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad |\underline{H}(j\omega)|_{\max} = 1$$

On a alors:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d'où la pulsation de coupure: $\omega_c = \frac{1}{RC}$

ou la fréquence de coupure: $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

A la fréquence de coupure :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad 20\log|\underline{H}(j\omega_c)| = -3\text{dB}$$

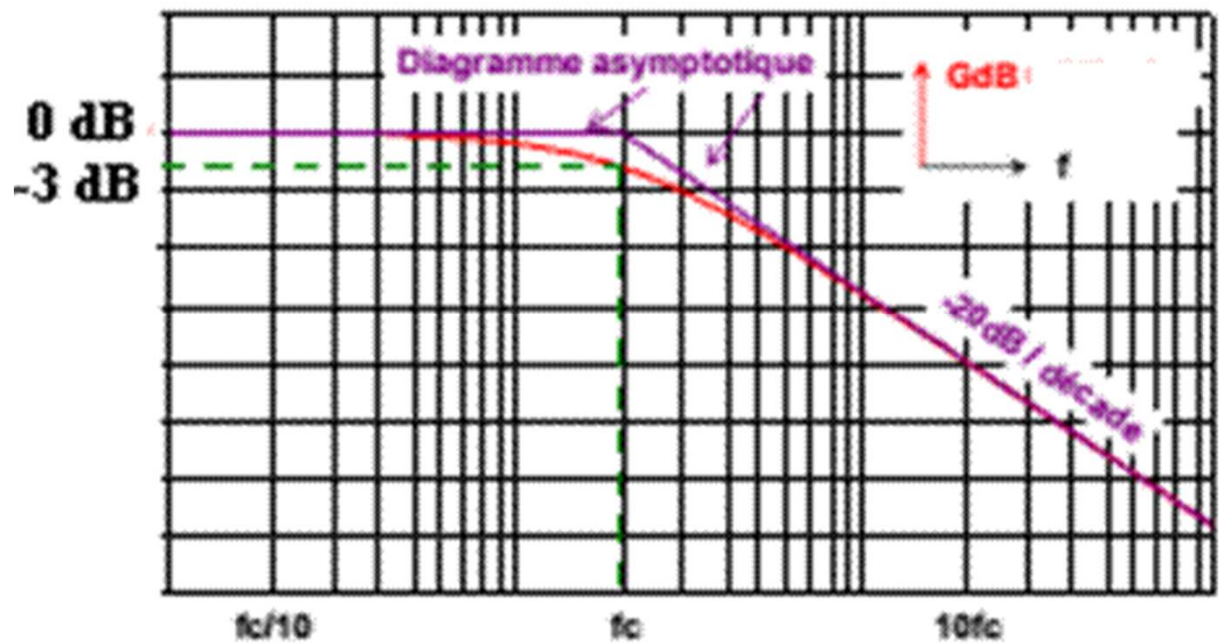
$$\varphi(j\omega_c) = \arctan\left(RC \cdot \frac{1}{RC}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

**: Forme canonique du filtre
passe bas du premier ordre**

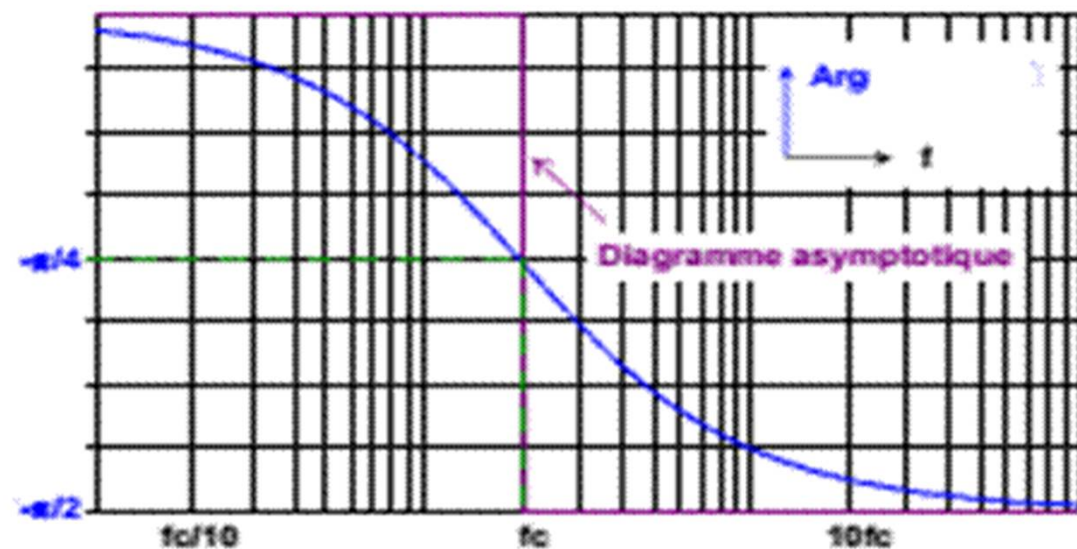
- Diagrammes de Bode:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20\log|H(j\omega)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20\log|H(j\omega)| = -\infty$$

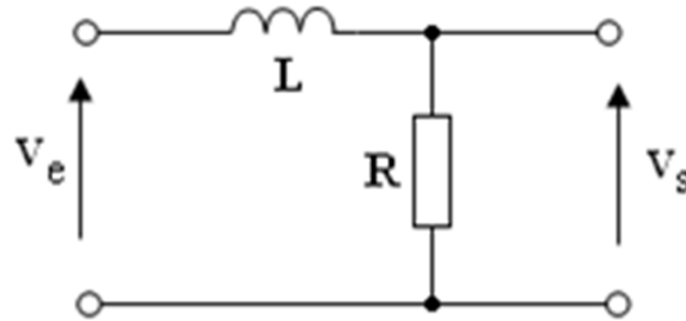


$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg(\underline{H}(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \{-\arctan(RC\omega)\} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(\underline{H}(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \{-\arctan(RC\omega)\} = -\frac{\pi}{2}$$

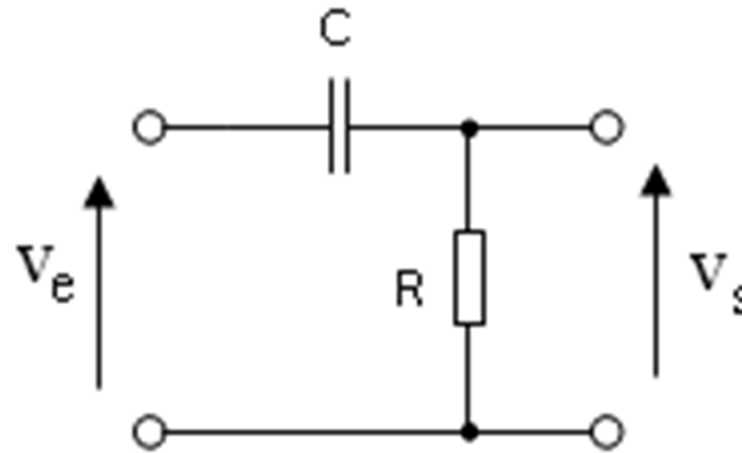


Remarque : Autre structure du filtre passe-bas



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{R}{L}$$

b- Filtre passe haut



En BF, C se comporte comme un circuit ouvert,
donc $v_s = 0$.

En HF, C se comporte comme un court-circuit,
donc $v_s = v_e$.

Ce filtre ne laisse passer que les HF, c'est un
filtre passe haut.

Fonction de transfert:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{R}{R + Z_c} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega))}$$

✓ Gain linéaire:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \left| \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

✓ Gain en dB:

$$20\log|\underline{H}(j\omega)| = 20\log\left(\frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}\right) = 20\log(RC\omega) - 20\log(\sqrt{1 + (RC\omega)^2})$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{20 \log |\underline{H}(j\omega)|\} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \{20 \log |\underline{H}(j\omega)|\} = 0$$

✓ **Phase:**

$$\varphi = \arg(\underline{H}(j\omega)) = \arg\left(\frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}\right) = \arg(jRC\omega) - \arg(1 + jRC\omega)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \{\arg |\underline{H}(j\omega)|\} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \{\arg |\underline{H}(j\omega)|\} = 0$$

✓ Fréquence de coupure:

A la pulsation de coupure, on a

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{|\underline{H}(j\omega)|_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{avec} \quad |\underline{H}(j\omega)|_{\max} = 1$$

$$\frac{RC\omega}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} RC\omega_c = \sqrt{1 + (RC\omega_c)^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

d'où la fréquence de coupure: $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

Forme canonique de la fonction de transfert:

La fonction de transfert peut s'écrire :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Diagramme de gain:

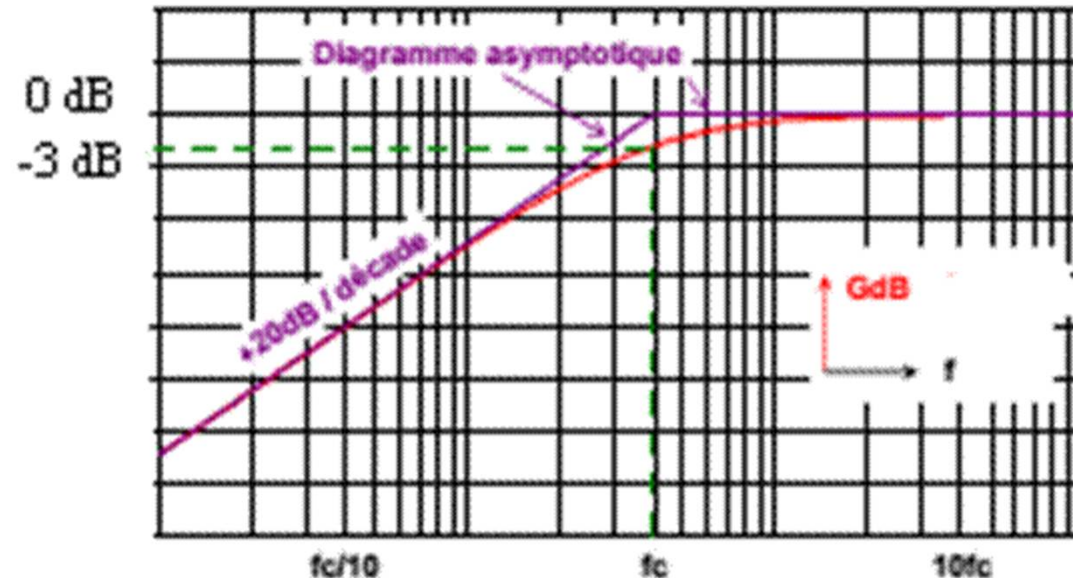
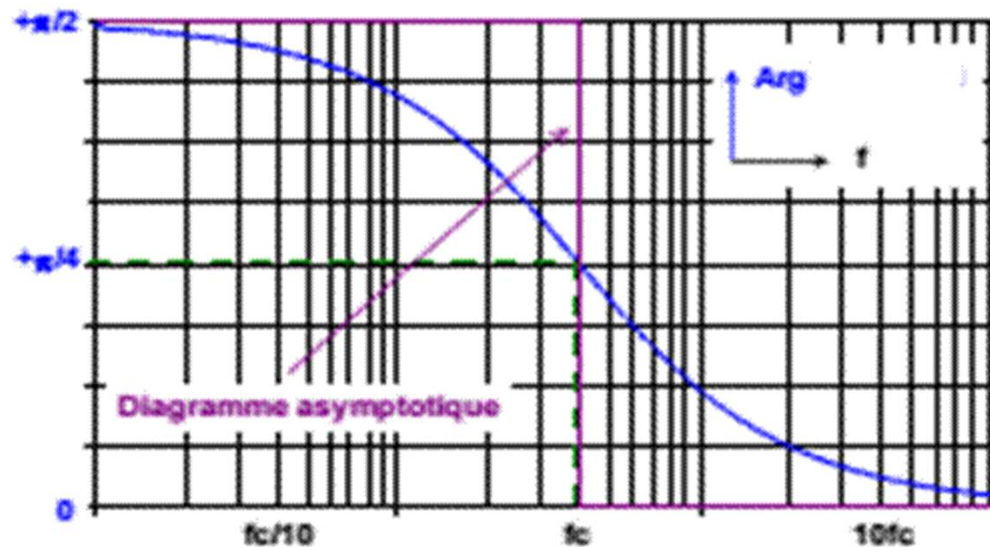
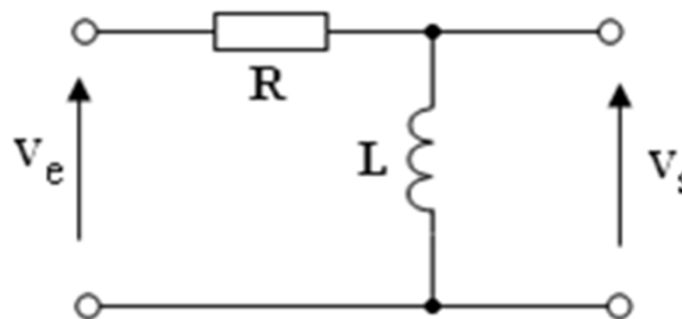


Diagramme de phase:



Remarque : Autre structure du filtre passe-haut



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_c}{\omega}} \quad \text{avec } \omega_c = \frac{R}{L}$$

12. Filtres du deuxième ordre

L'ordre du filtre est égal à 2 donc le dénominateur de la fonction de transfert est polynôme d'ordre 2.

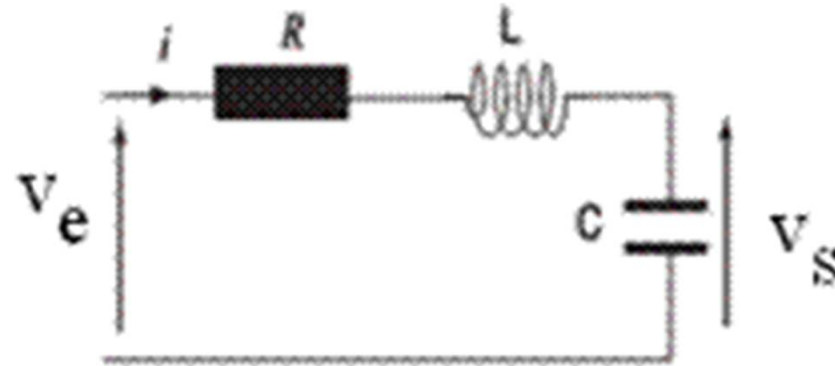
- Filtre passe-bas

La fonction de transfert d'un filtre passe bas d'ordre 2 est:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Exemple :

Exemple :



En haute fréquence: $x \rightarrow \infty \Rightarrow Z_C \rightarrow 0$ donc $v_s \rightarrow 0$

En basse fréquence: $x \rightarrow 0 \Rightarrow Z_C \rightarrow \infty$ donc $v_s \rightarrow v_e$

Donc : c'est un filtre passe bas.

L'expression de la fonction de transfert s'écrit:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Avec: La pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$H_0 = 1$$

Le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Diagramme de Bode pour le gain

On a:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \Rightarrow H = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Comportement asymptotique :

$$\text{En basse fréquence: } x \rightarrow 0 \Rightarrow G_{dB} = G_0 = 20\log|H_0|$$

$$\text{En haute fréquence: } x \rightarrow \infty \Rightarrow G_{dB} \approx 20\log(|H_0|\omega_0^2) - 40\log\omega$$

: C'est une droite de pente -40dB/décade,
caractéristique de filtre du deuxième ordre.

La fonction $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$ présente un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Donc si :

$Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: G_{dB} ne présente pas de maximum
(courbe décroissante)

$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: G_{dB} présente un maximum en $x_R = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

ainsi $H(x_R) = |H_0| \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$

Diagramme de Bode pour le gain:

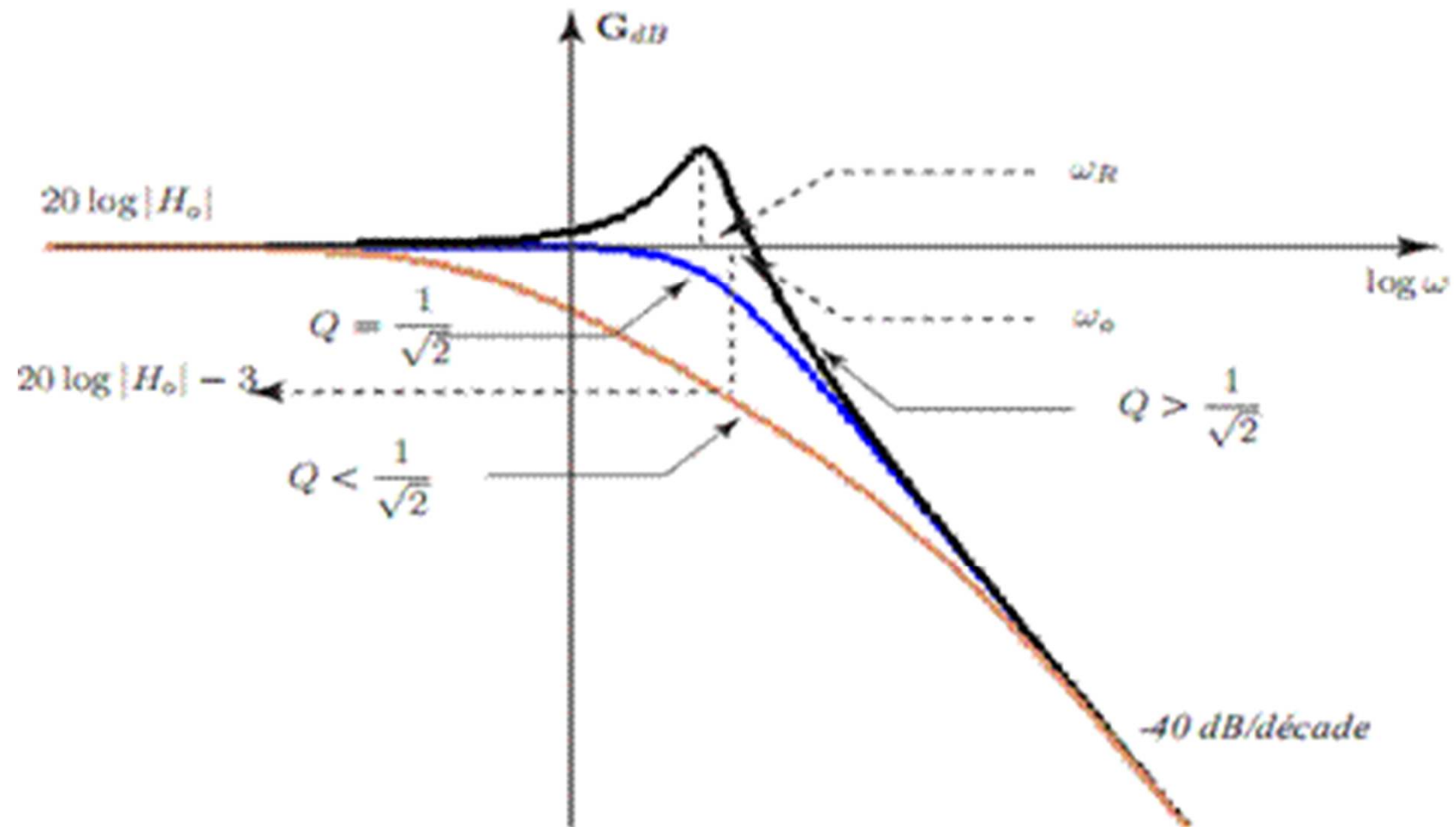
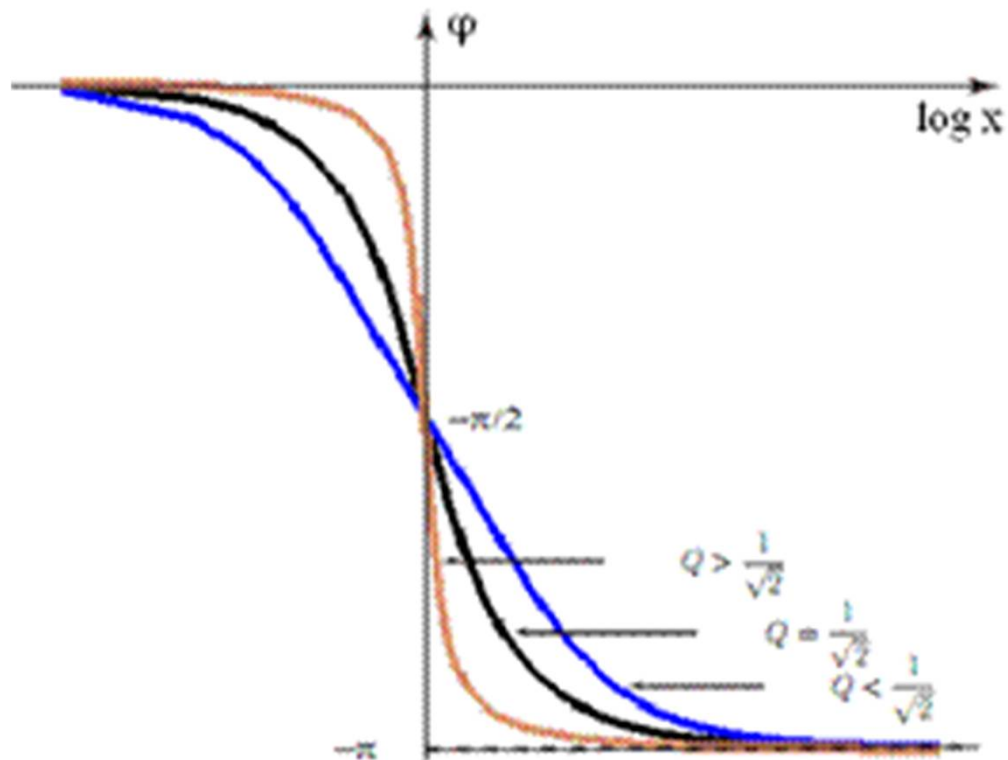


Diagramme de Bode pour la phase

On a :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \Rightarrow \varphi = -\arg\left(1 - x^2 + j\frac{x}{Q}\right) \Rightarrow \tan \varphi = -\frac{x}{Q(1 - x^2)}$$

Représentation de la phase pour quelques valeurs de Q :

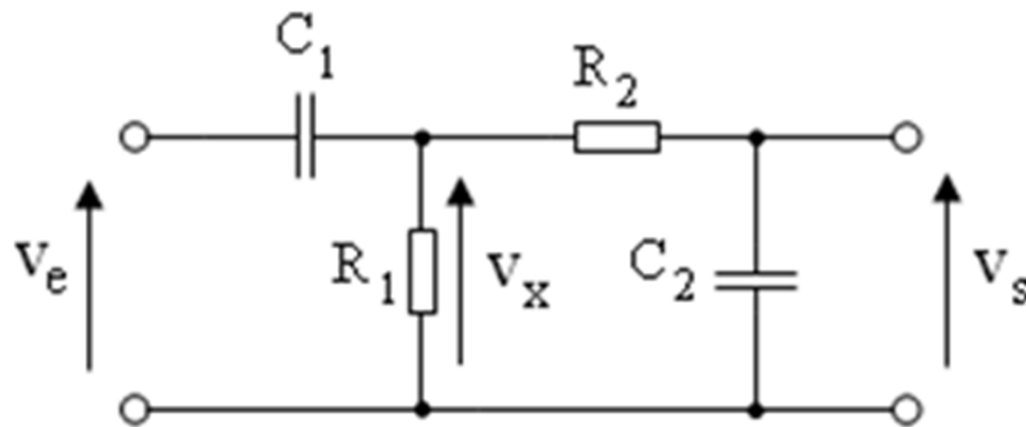


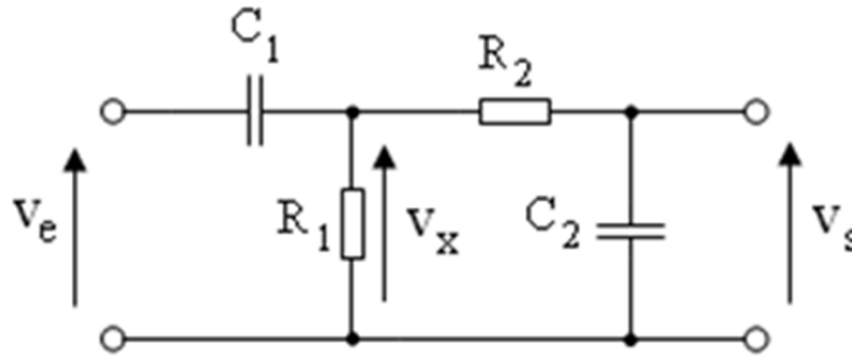
- **Filtre passe bande**

La fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 est:

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{jx/Q}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Exemple :





Fonction de transfert:

$$\underline{V}_s = \frac{\underline{Z}_{c2}}{R_2 + \underline{Z}_{c2}} \times \underline{V}_x = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega} \times \underline{V}_x$$

$$\underline{V}_x = \frac{\underline{Z}_{\acute{e}q}}{\underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_{\acute{e}q}} \times \underline{V}_e \quad \text{avec } \underline{Z}_{\acute{e}q} = R_1 // \left(R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}\right) = \frac{R_1(1 + jR_2C_2\omega)}{1 + j(R_1 + R_2)C_2\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{V}_x = \frac{jR_1C_1\omega(1 + jR_2C_2\omega)}{jR_1C_1\omega(1 + jR_2C_2\omega) + 1 + j(R_1 + R_2)C_2\omega} \times \underline{V}_e$$

$$\underline{V}_s = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega} \times \frac{jR_1C_1\omega(1 + jR_2C_2\omega)}{jR_1C_1\omega(1 + jR_2C_2\omega) + 1 + j(R_1 + R_2)C_2\omega} \times \underline{V}_e$$

$$\underline{V}_s = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega(1 + jR_2C_2\omega) + j(R_1 + R_2)C_2\omega} \times \underline{V}_e$$

Cas particulier : $R_1=R_2=R$ et $C_1=C_2=C$

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} &= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega(1 + jRC\omega) + j2RC\omega} = \frac{jRC\omega}{1 - (RC\omega)^2 + j3RC\omega} \\ &= \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} \end{aligned}$$

✓ **Gain linéaire:**

$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$$

Changement de variable : posons $x = RC\omega$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \Rightarrow \frac{dG(jx)}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{x} - x\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\left\{9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

$$\frac{dG(jx)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = x \Rightarrow x = 1$$

Le gain maximal correspond à $x = 1$:

$$G(\max) = \frac{1}{\sqrt{9 + (1 - 1)^2}} = \frac{1}{3}$$

Fréquences de coupure :

$$G(x_c) = \frac{G(\max)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{18}}$$
$$G(x_c) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \Rightarrow \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm 3$$

$$x_c - \frac{1}{x_c} = -3 \Rightarrow \begin{cases} x_{c1} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} > 0 & \text{à retenir} \\ x_{c2} = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} < 0 & \text{à rejeter} \end{cases}$$

$$x_c - \frac{1}{x_c} = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_{c3} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} > 0 & \text{à retenir} \\ x_{c4} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < 0 & \text{à rejeter} \end{cases}$$

Les pulsations de coupure sont donc :

$$RC\omega_{cb} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_{cb} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2RC}$$

$$\omega_{ch} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2RC} \quad \Rightarrow \quad \omega_{ch} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2RC}$$