Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences Ben M'Sik
Département de Physique
Casablanca-Maroc

Filière : *Science de la Matière Physique* **(SMP)**
Module: *Mécanique Analytique et vibrations*
Elément : **Vibrations**
Semestre.5/ *Année Universitaire:* **2020-2021**

Exercices d'applications du chapitre.I
Outils Mathématiques et Calcul Opérationnel
Session d'Automne : 2020- 2021

Exercice.1 (Fonction sinusoidale): / Calculer l'amplitude f_0 et la phase φ de la function sinusoïdale f(t) donnée par : f(t)=7cos(t-8°)+112sin(t+53°).

Exercice.2(Etablissement de l'équation d'Euler-Lagrange) : / Soit un système conservatif non dissipatif à un seul degré de liberté s(t) de lagrangien $L = L(s(t), \dot{s}(t))$ où s(t) est la coordonnée généralisée et $\dot{s}(t))$ est la vitesse généralisée.

1) Enoncer le principe de moindre action. 2) En appliquant ce principe, démontrer l'équation d'Euler-Lagrange :
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$
.

Exercice.3 : (Etablissement des équations canoniques de Hamilton)/ Soit $H(s,p)$ l'hamiltonien d'un système avec s(t) est la coordonnée généralisée et p est le moment conjugué. Démontrer les équations canoniques de Hamilton suivantes:
$$\begin{cases} \dot{s} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial s} \end{cases}$$

Exercice.4 : (Application des formalismes)/ 1) En appliquant les trois formalismes newtonien lagrangien et hamiltonien, trouver l'équation du mouvement d'un corps de masse m attaché à un ressort élastique de raideur k en mouvement horizontal forcé sans frottements sur un axe Ox sous l'effet d'une force extérieure f(t).

2) Déterminer, moyennant les formalismes Kirchhoffien, lagrangien et hamiltonien , l'équation d'évolution de la charge électrique q(t) dans un condensateur de capacité C monté en série avec une bobine d'inductance L d'un circuit oscillant série LC soumis à une force électromotrice f.e.m :e(t)

Exercice.5 : (Transformation de Carson-Laplace)/ 1) Calculer les transformées de Carson-Laplace de : a) $f_1(t) = \cos(at) \ pour \ t > 0\,, \quad f_1(t) = 0 \ pour \ t < 0$ où a est une constante réélle. b) $f_2(t) = \sin(mt) \ pour \ t > 0\,, \quad f_2(t) = 0 \ pour \ t < 0$ où m est une constante réélle. c) la function impulsion de Dirac, d) la function echelon unité de Heaviside, e) la function dents de scie.

3) Démontrer les deux formules suivantes :

$$1)\ CL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pf(p) - pf(t=0)$$
$$2)\ CL\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2f(p) - p^2f(t=0) - p\left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

Où f(t) est une function temporelle et f(p)=CL[f(t)] est sa transformée de Carson-Laplace.

Exercice.6 : (Série de Fourier)/ Calculer les séries de Fourier des fonctions périodiques suivantes :

$$a)\ f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & pour\ 0 \le t \le 1 \\ -\frac{\pi}{4} & pour\ 1 \le t \le 2 \end{cases} \qquad b)\ f(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ t \le 1 \\ (2-t) & si\ \ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

Exercice.7 : (Résolution des équations différentielles par les méthodes basées sur la transformation de Carson-Laplace et sur la série de Fourier)/

1) En appliquant la technique de la transformation de Carson-Laplace et les series de Fourier, résoudre l'équation différentielle obtenue dans l'exercice 4 , 1) pour les forces extérieures suivantes:

$$a)\ f(t) = f_0 \sin(\omega\, t)$$

$$b)\ f(t) = \begin{cases} 0 & pour\ \ t < 0 \\ \frac{f_0 t}{T} & pour\ 0 < t < T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\ f_0 & pour\ t \ge T \end{cases}$$

$c)\ f(t) = f_0\delta(t)$, où δ(t) est la function de Dirac

$$d)\ f(t) = \begin{cases} 1 & si\ \ t \le 1 \\ (2-t) & si\ \ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

On suppose que les conditions initials sont nulles.

2) En appliquant la technique de la transformation de Carson-Laplace, résoudre l'équation différentielle obtenue dans l'exercice 4 , 2) pour une f.é.m e(t) exprimée par:

$$e(t) = \begin{cases} 0 & pour\ \ 0 < t < t_1 \\ E & pour\ t_1 < t < t_2 \\ 0 & pour\ t \ge t_2 \end{cases}$$

et en considérant des conditions initials nulls.

On donne : $CL[e(t)] = E(e^{-pt_1} - e^{-pt_2})$

Indication : Utiliser le théorème du retard.

****

Session d'Automne- Octobre 2020

Bon Courage