
CHAPITRE.1

OUTILS MATHÉMATIQUES ET CALCUL OPÉRATIONNEL

.....

Ce qui est étonnant c'est que nous pouvons décrire de nombreux phénomènes naturels fascinants issus des systèmes physiques très différents par des « MATHÉMATIQUES »

Les mathématiques ne sont pas une création abstraite de l'imagination humaine, mais elles constituent également un instrument très puissant permettant de comprendre, d'étudier et de dominer les phénomènes naturels. ».

Sommaire

But du chapitre

I.1) Fonction temporelle

I.1.3 / Fonction périodique

I.1.4 / Fonction alternée

I.1.5 / Fonction paire

I.1.6/ Fonction impaire

I.1.7/ Valeur moyenne d'une fonction périodique

I.1.8 / Valeur efficace d'une fonction périodique

I.1.9 / Fonction sinusoïdale

I.1.10 / Fonction spéciales utilisées en physique des vibrations linéaires

a) Fonction de Gauss de demi-largeur

b) Fonction impulsion de Dirac

Exemples : Percussion mécanique et électrique

1) Percussion mécanique

2) Percussion électrique

c) Fonction échelon unité de Heaviside

d) Excitation impulsion rectangulaire

e) Fonction méandre

e) Fonction sinusoïdale redressée à une alternance et deux alternances

f) Fonction dents de scie

g) Fonction impulsion triangulaire

I.2/ Les Formalismes

I.2.1) Formalisme newtonien (Principe fondamental de la dynamique)

A) Cas mécanique

I.2.2) Formalisme de Kirchhoff (Cas électrique)

Lois de Kirchhoff : Nœuds et Mailles

I.2.3) Formalisme lagrangien (Principe de moindre action)

A) Cas d'un système à un seul degré de liberté

Principe de moindre action

B) Cas de N degrés de liberté pour un système non amorti et non forcé

I.2.4) Formalisme hamiltonien (Principe de Hamilton)

I.2.5) Exemples d'applications

- Cas des systèmes à un seul degré de liberté

A) Particule de masse m soumise à une force extérieure $F(t)$ en mouvement sur un axe

B) Pendule simple

C) Circuit électrique oscillant LC

I.2.6) Lagrangiens de certains systèmes physiques en petites oscillations.

- Cas des oscillations libres non amorties :

A) Masse - Ressort

B) Pendule de torsion

- Cas des oscillations forcées, amorties

A) Masse-Ressort-Amortisseur

B) Circuit électrique oscillant RLC

- Cas des systèmes mécanique à 2 degrés de liberté

- Cas d'un circuit électrique oscillant à 2 degrés de liberté

I.3/ Transformation de Carson-Laplace

I.3.1/ Définition

I.3.2/ Relation avec la transformée de Laplace

I.3.3/ Unités

I.3.4/ Transformée de Carson-Laplace inverse

Exemple

I.3.5/ Propriétés et règles de calcul

a) Linéarité

b) Transformée de Laplace des dérivées

* Dérivée première

** Dérivée seconde

c) Similitude

d) Intégration

e) Produit

f) Translation

g) Retard

h) Impulsion unité de Dirac

i) Echelon unité d Heaviside

I.3.6/ Théorème de Borel

Exemple d'application du théorème de Borel

I.3.7/ Table de certaines transformées de Carson-Laplace

I.4 / Série de Fourier d'une fonction périodique

I.4.1/ Définition

I.4.2/ Spectre de fréquence

=====

I.4.3/ Propriétés des coefficients de Fourier

Exemple

I.5/ Transformation de Fourier d'une fonction

I.5.1/ Définition

I.5.2/ Propriétés

I.5.3/ Spectre de fréquence de $F(t)$

Exemple

I.6/ Résolution des équations différentielles du second ordre par la technique de la transformation de Carson-Laplace et de Fourier

I.6.1/ Technique de la transformation de Carson - Laplace

Exemple

I.6.2/ Technique de la transformation de Fourier

BUT DU CHAPITRE

Ce chapitre introductif est consacré à des outils mathématiques et à des calculs opérationnels qui seront utilisés dans l'étude des vibrations linéaires à un ou à plusieurs degrés de liberté des systèmes physiques discrets et de la propagation des ondes matérielles unidimensionnelles.

Des rappels concernant les fonctions périodiques, les fonctions sinusoïdales, les fonctions spéciales, les formalismes newtonien, Kirchhoffien, lagrangien et hamiltonien, la transformation de Carson-Laplace, les séries de Fourier, sont exposés.

Les différentes fonctions permettent de représenter les réponses vibratoires ou des excitations extérieures, elles s'appliquent directement à la représentation de nombreux phénomènes vibratoires.

Les quatre formalismes sont utilisés pour déterminer les équations qui régissent les vibrations et les propagations d'ondes.

La transformation de Carson-Laplace est utilisée pour la résolution des équations qui régissent les vibrations des systèmes soumis à des excitations extérieures quelconques discontinues. Les séries (resp les transformées) de Fourier permettent de représenter les excitations extérieures périodiques (resp non périodiques).

I.1) Fonction temporelle - Définitions et exemples

I.1.1 / Définition

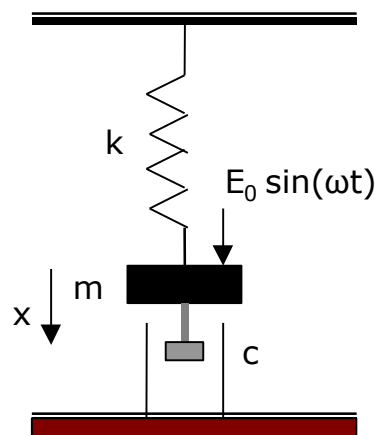
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(t) \quad , \quad t : \text{variable temps} \quad (I.1)$$

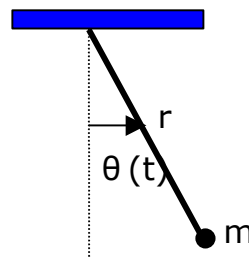
$f(t)$: définie (finie), continue, dérivable et intégrable sur son domaine de définition.

I.1.2 / Exemples

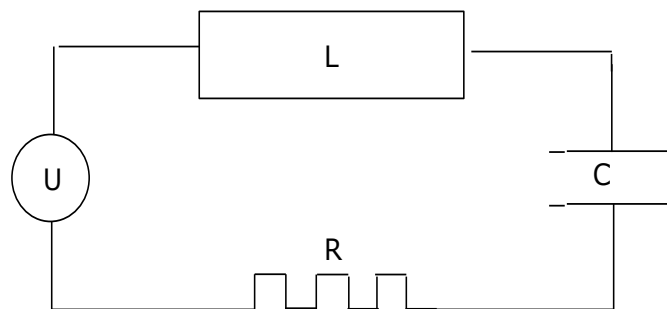
a) $f(t) = x(t)$: Déplacement de la masse m du système Masse-Ressort-Amortisseur



b) $f(t) = \theta(t)$: Angle de rotation d'un système pendulaire.



c) $f(t) = q(t)$: Charge électrique dans le condensateur C du circuit électrique oscillant RLC.



I.1.3 / Fonction périodique

Définition

Une fonction $f(t)$ est périodique de période T si :
 $f(t+T) = f(t+2T) = \dots = f(t)$, $\forall t$ (I.2)

Exemple

La fonction trigonométrique $f(t) = \cos \omega t$ ou $\sin \omega t$ est périodique de période
 $T = 2\pi / \omega$.

I.1.4 / Fonction alternée

La fonction f est dite alternée si
 $f(t+T/2) = -f(t)$ (I.3)

Exemple : $f(t) = \cos t$

I.1.5 / Fonction paire

La fonction f est paire si
 $f(-t) = f(t)$ (I.4)

Exemple : $f(t) = \cos t$

I.1.6/ Fonction impaire

La fonction f est impaire si
 $f(-t) = -f(t)$ (I.5)
Exemple : $f(t) = \sin t$

I.1.7/ Valeur moyenne d'une fonction périodique de période T

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (I.6)$$

I.1.8 / Valeur efficace d'une fonction périodique de période T

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt} \quad (I.7)$$

Exemple : $f(t) = f_{max} \sin t$

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_{max}^2 \sin^2(t) dt} = \frac{f_{max}}{\sqrt{2}} \quad (I.8)$$

I.1.9 / Fonction sinusoïdale

Elles servent à représenter plusieurs phénomènes vibratoires et interviennent dans l'analyse des fonctions périodiques :

$$f(t) = \begin{cases} A \cos(\omega t - \varphi) \\ \text{ou} \\ A \sin(\omega t - \varphi) \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

où t : est le temps, A : est l'amplitude (valeur maximale prise par la fonction sinusoïdale), ω : est la pulsation (en rad/s), φ : est la phase à l'origine (en rad) , et $(\omega t - \varphi)$ est la phase, avec $T = 2\pi/\omega$: est la période et $f_0 = 1/T = \omega / 2\pi$ est la fréquence (en Hz).

Exemple

$$f(t) = A \sin(\omega t)$$

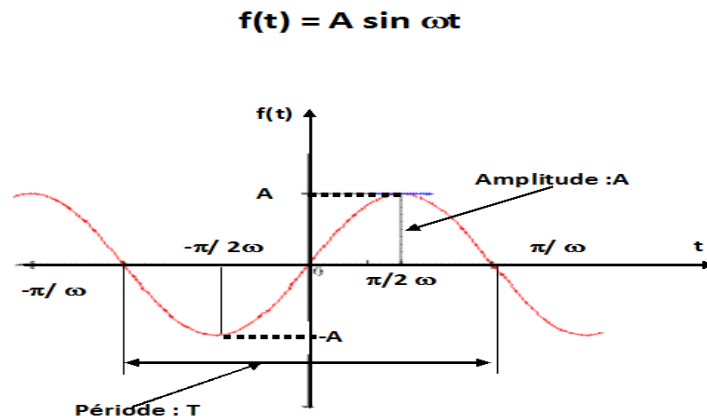


Figure .I.1 : Courbe de la fonction sinusoïdale $\sin(\omega t)$

Autre écriture de la fonction sinusoïdale (I.9)

$$f(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

Avec A_1 et A_2 des constantes qui sont reliées à l'amplitude A et à la phase φ par:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \text{Arctg}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) \quad (\text{I.10})$$

Exemple

Soit la fonction sinusoïdale $\theta(t)$ représentant l'angle des oscillations d'un pendule, définie par : $\theta(t) = 3.2 \sin t + \cos t$.

- L'amplitude maximale $\theta_0 = \theta_0 = \sqrt{(3.2)^2 + 1^2} = 3.352 \text{ rad}$
- La phase φ est : $\tan \varphi = 3.2/1 \Rightarrow \varphi = \text{Arctg}(3.2/1) = 1.168 \text{ rad} = 72.65^\circ$
- La pulsation $\omega = 1 \text{ rad/s}$
- La fréquence est : $f_0 = \omega/2\pi = 1/2\pi = 0.159 \text{ Hz}$

I.1.10 / Fonction spéciales utilisées en physique des vibrations linéaires

a) Fonction de Gauss de demi-largeur β

$$f(t) = f_0 e^{-\frac{t^2}{\beta^2}} \quad (\text{I.11})$$



* **Johann Carl Friedrich Gauss**
(1777-1855)
Mathématicien, Astronome et
Physicien allemand

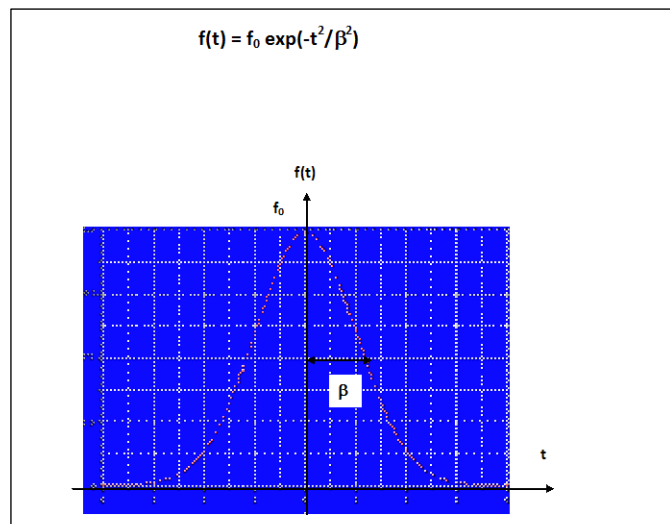


Figure.I.2 : Fonction de Gauss

b) Fonction impulsion de Dirac $\delta(t)$



*Paul Andrien Maurice Dirac
(1902-1984)
Physicien théoricien anglais.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

avec

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{I.13})$$

On peut la définir encore par :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } 0 < t < \varepsilon \\ 0 & \text{si } t > 0 \end{cases}, \quad \varepsilon \text{ petit} \rightarrow 0 \quad (\text{I.14})$$

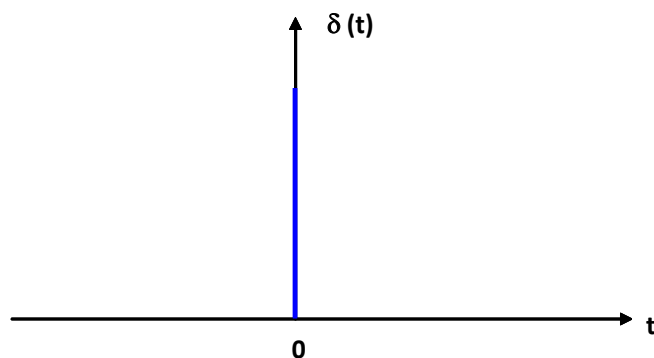


Figure.I.3 : Fonction de Dirac

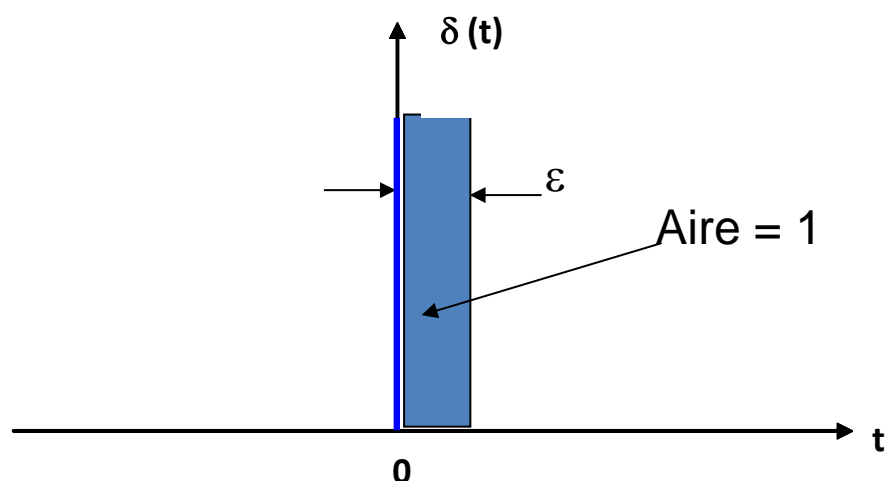
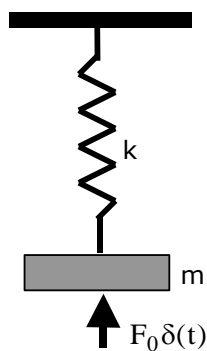


Figure.I.4 : Autre représentation de la fonction de Dirac

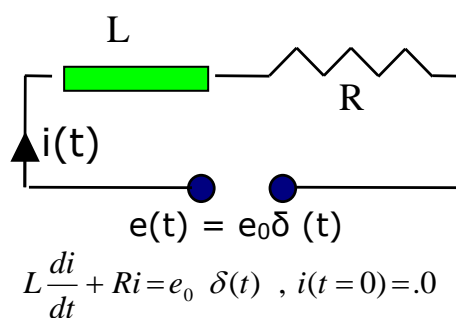
Exemples : Percussions mécanique et électrique

2) Percussion mécanique

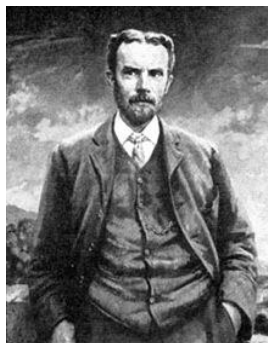


$$m \ddot{x} + k x = F_0 \delta(t) \quad , \quad x(t=0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

2) Percussion électrique



c) **Fonction échelon unité de Heaviside H(t)**



*Olivier Heaviside (1850 – 1925)
Physicien et mathématicien Anglais

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

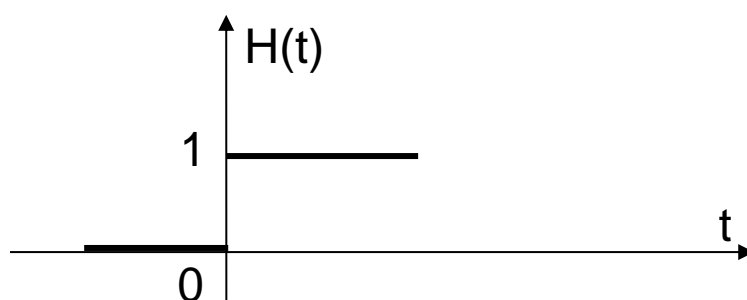
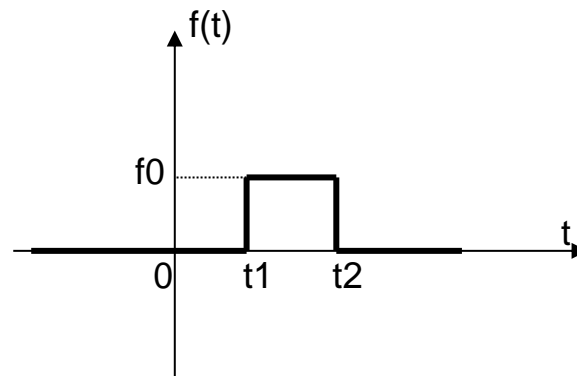


Figure.I.5 : Fonction de Heaviside

Exemple : Excitation brusque f_0 appliquée à $t = 0$ à un système oscillant que l'on maintient constante : $f(t) = f_0 H(t)$.

d) Excitation impulsion rectangulaire

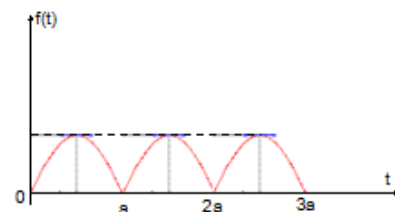
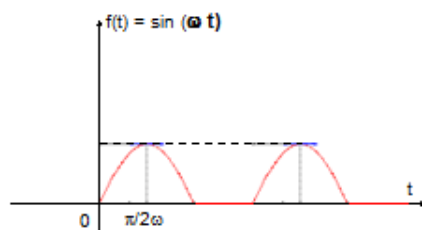
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ f_0 & \text{si } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{si } t > t_2 \end{cases} \quad (\text{I.16})$$



e) Fonction méandre

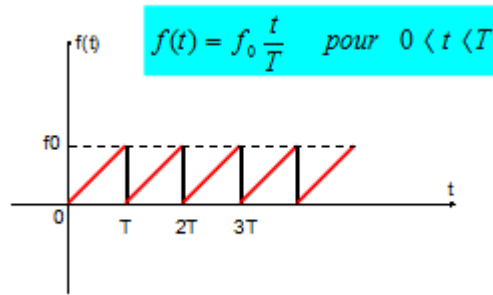
$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{si } 2na < t < (2n+1)a \\ -f_0 & \text{si } (2n+1)a < t < 2(n+1)a \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

f) Fonction sinusoïdale redressée à une alternance et deux alternances

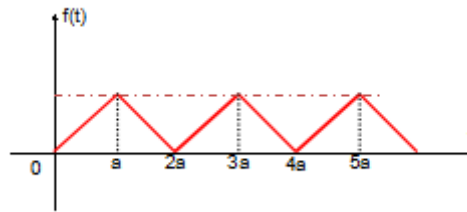


g) Fonction dents de scie

$$f(t) = f_0 \frac{t}{T} \quad \text{pour } 0 < t < T \quad (\text{I.18})$$



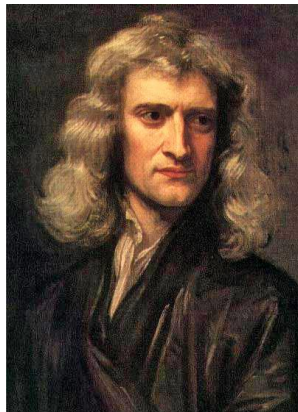
h) Fonction impulsion triangulaire



I.2/ Les Formalismes

I.2.1) Formalisme newtonien (Principe fondamental de la dynamique)

A) Cas mécanique



Isaac Newton (1643-1727)

Philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste et astronome anglais

Il s'appuie sur l'application du principe fondamental de la dynamique, dans un repère galiléen, au système oscillant mécanique étudié. Si le système, de masse m , est soumis à un ensemble de forces \vec{f}_i , ce principe s'écrit sous la forme d'une relation qui lie la cause (forces \vec{f}_i) et l'effet (mouvement (accélération)):

$$\sum_i \vec{f}_i = m \vec{\gamma} \quad (\text{I.19})$$

La projection de cette relation sur les axes du repère donne l'équation du mouvement.

I.2.2) Formalisme de Kirchhoff (Cas électrique)

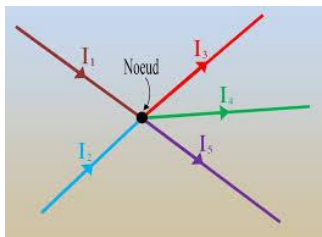
Lois de Kirchhoff : Nœuds et Mailles



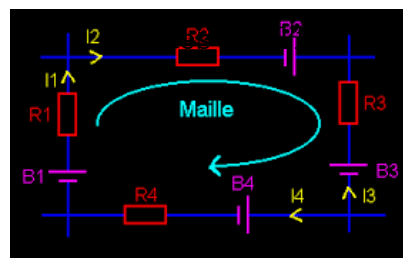
Gustav Robert Kirchhoff
(1824-1887)
Physicien Allemand

L'application des lois de Kirchhoff

Loi des nœuds



Loi des mailles

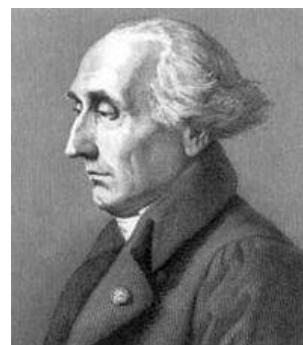


donnent l'équation de l'évolution temporelle des charges, des courants et des tensions

I.2.3) Formalisme lagrangien (Principe de moindre action)



Leonhard Euler
(1707-1783)
Mathématicien et Physicien Suisse.



Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)
Mathématicien italien

A) Cas d'un système à un seul degré de liberté

Soit un dispositif mécanique conservatif en mouvement ou un circuit électrique oscillant RLC . Le lagrangien L du système est défini par :

$$L = \begin{cases} T - U & \text{cas mécanique} \\ E_{\text{magnétique}} - E_{\text{électrique}} & \text{cas électrique} \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

Où : T est l'énergie cinétique et U est l'énergie potentielle dans le cas mécanique et $E_{\text{magnétique}}$ est l'énergie magnétique, $E_{\text{électrique}}$ est l'énergie électrique dans le cas électrique.

Principe de moindre action

L'évolution du système, entre les instants t_i et t_f , est réelle si l'action S est stationnaire (extrémale): $\delta S = 0$.

L'action S est donnée par l'intégrale:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(s, \dot{s}, t) dt \quad (\text{I.21})$$

Dans le cas d'absence d'amortissements pas de frottements), l'équation des oscillations du système oscillant est donnée par "l'équation d'Euler-Lagrange" suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0 \quad (\text{I.22})$$

où $s = s(t)$ est la coordonnée généralisée (qui peut être $x(t)$, $\theta(t)$, $q(t)$,...) et \dot{s} est la vitesse généralisée.

Dans le cas où il y a présence d'amortissement, l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} - \frac{\partial G}{\partial \dot{s}} = 0 \quad (\text{I.23})$$

où G est la fonction de dissipation donnée par :

$$G = -\frac{1}{2} r \dot{s}^2 \quad (\text{I.24})$$

avec r est le coefficient d'amortissement.

Le signe moins montre que la force de frottements agit dans le sens opposé à la vitesse. La quantité $2G$ représente la diminution de l'énergie totale.

B) Cas de N degrés de liberté ($q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_N(t)$) pour un système non amorti et non forcé

Le lagrangien L du système oscillant est:

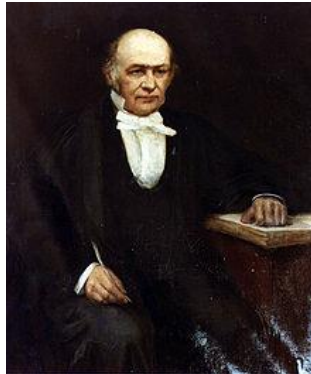
$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \left[m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - k_{ij} q_i q_j \right] \quad (\text{I.25})$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent dans ce cas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (I.26)$$

C'est un système à N équations, qui donnent les équations du mouvement.

I.2.4/ Formalisme hamiltonien (Principe de Hamilton)



William Rowan Hamilton
(1805-1865)

Mathématicien, physicien et astronome Irlandais

L'équation du mouvement est déterminée à partir des "équations canoniques de Hamilton", qui s'écrivent:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial s} \end{aligned} \quad (I.27)$$

Où $H = H(p, s, t)$ est l'hamiltonien du système supposé à un seul degré de liberté, dont l'état oscillatoire est caractérisé par la coordonnée généralisée s et l'impulsion généralisée p (ou moment conjugué), donné par:

$$H = p \dot{s} - L \quad (I.28)$$

Avec L est le lagrangien du système et p le moment conjugué défini par:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \quad (I.29)$$

Remarques

- 1) On passe du formalisme lagrangien au formalisme hamiltonien à l'aide de la transformation de Legendre.
- 2) Les trois formalismes sont équivalents.

I.2.5) Exemples d'applications

- Cas des systèmes à un seul degré de liberté

A) Particule de masse m soumise à une force extérieure $F(t)$ en mouvement sur un axe Ox :

2) Formalisme newtonien: $\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow F = m\ddot{x}(t)$, où $x(t)$ est l'abscisse de la particule : .

3) Formalisme lagrangien: Le lagrangien L de la particule de masse m , est ($s(t) = x(t)$):

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + x(t)F(t)$$

L'équation d'Euler - Lagrange (I.22) donne la relation fondamentale de la dynamique :

$$F = m\ddot{x} \text{ (Force = masse x accélération).}$$

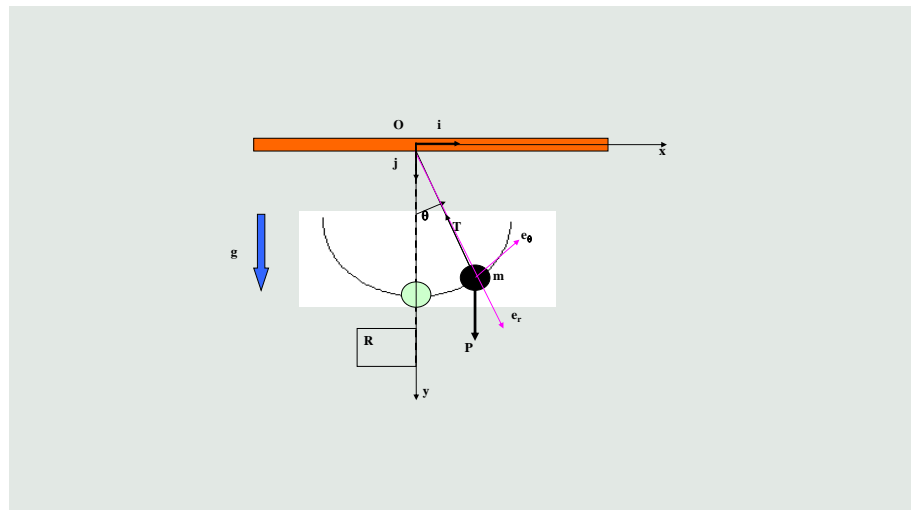
4) Formalisme hamiltonien : $H = p\dot{x} - L$ avec $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + x(t)F(t)$ et $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$.

On a $H = \frac{p^2}{2m} - x(t)F(t)$ et les équations canoniques de Hamilton (I.9) donnent:

$$F = m\ddot{x}.$$

B) Pendule simple

En utilisant les 3 formalismes, trouvons l'équation du mouvement du système (voir figure). Ici la coordonnée généralisée est l'angle de rotation : $s(t) = \theta(t)$



1) Formalisme newtonien

- Relation fondamentale de la dynamique : $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}(M/R)$

R (O, x, y) est un repère galiléen d'origine O et de base (\vec{i}, \vec{j}) .

Bilan des forces : Le poids \vec{P} de la petite boule de masse m et la tension \vec{T} du fil de longueur l et supposé sans masse, donnés par : $\vec{P} = mg\vec{j}$ et $\vec{T} = -T\vec{e}_r$

Avec $\vec{j} = \cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est la base polaire locale en M

Le rayon vecteur est : $\vec{OM} = l\vec{e}_r$

Le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/R)$ est : $\vec{\gamma} = \left. \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \right|_R = -l\dot{\theta}^2\vec{e}_r + l\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$

La relation $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}(M/R)$ donne l'équation du mouvement par projection sur \vec{e}_θ :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (I.30)$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

2) Formalisme lagrangien

L'équation d'Euler-Lagrange du pendule non amorti : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

Où L est le lagrangien du système pendulaire conservatif donné par : $L = T - U$

Donne l'équation du mouvement.

Les énergies cinétique T et potentielle U sont :

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 \left(\frac{M}{R} \right), \vec{V} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_R = l\dot{\theta}\vec{e}_\theta, T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = U(\vec{P}) + U(\vec{T}) = U(\vec{P}) \text{ car } U(\vec{T}) = 0 ; \text{ la tension } \vec{T} \text{ ne travaille pas.}$$

$$U = U(\vec{P}) = mgl(1 - \cos\theta)$$

Le lagrangien L est donc :

$$L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

L'équation d'Euler-Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, donne :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (I.31)$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

3) Formalisme hamiltonien

Les équations canoniques de Hamilton :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}$$

Où $H = H(\theta, p) = p\dot{\theta} - L$

avec L est le lagrangien du système et p le moment conjugué défini par : $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$

fournissent l'équation du mouvement.

Or d'après ce qui précède :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

Le moment conjugué est : $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p}{ml^2}$
et l'hamiltonien H s'exprime en fonction de p et θ par :

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos\theta)$$

Les équations canoniques de Hamilton : :

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{ml^2} \quad (a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \quad (b)$$

Les expressions (a) et (b) donnent :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad (I.32)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

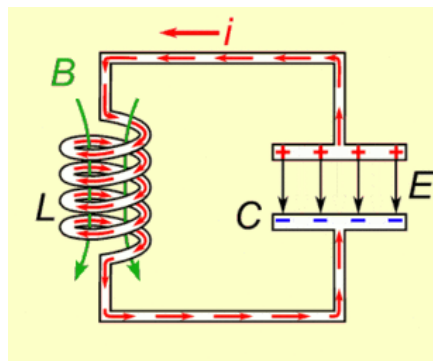
Remarque : Les trois formalismes donnent des équations de mouvement identiques.

C) Exemple électrique: Circuit oscillant LC

Considérons un circuit oscillant LC, composé d'un condensateur de capacité C en série avec une bobine d'inductance L .

On désigne par $q(t)$ la charge dans le condensateur.

Trouvons l'équation qui régit la variation de cette charge.



1) Formalisme de Kirchhoff

Appliquons la loi des mailles de Kirchhoff:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = 0$$

$$\text{or } i = -\frac{dq(t)}{dt}$$

$$\text{d'où } L\ddot{q}(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{q}(t) + \omega_0^2 q(t) = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{Formule de Thomson})$$

2) Formalisme lagrangien

Le lagrangien L est : $L = E_m - E_c$

$$E_m = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 \quad \text{est l'énergie magnétique}$$

$$E_c = \frac{1}{2C} q^2 \quad \text{est l'énergie potentielle}$$

$$\text{d'où } L = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2$$

$$\text{L'équation d'Euler-Lagrange } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{donne :}$$

$$L \ddot{q}(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{I.33})$$

I.2.6) Lagrangiens de certains systèmes physiques en petites oscillations.

- Cas des oscillations libres non amorties :

A) Masse - Ressort (m, k) :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{I.34})$$

B) Pendule de torsion (I, C) :

$$L = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} C \theta^2 \quad (\text{I.35})$$

- Cas des oscillations forcées, amorties

A) Masse-Ressort-Amortisseur (m, k, c) :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - \frac{1}{2} k x^2(t) + x(t)F(t), \quad G = -\frac{1}{2} c \dot{x}^2(t) \quad (\text{I.36})$$

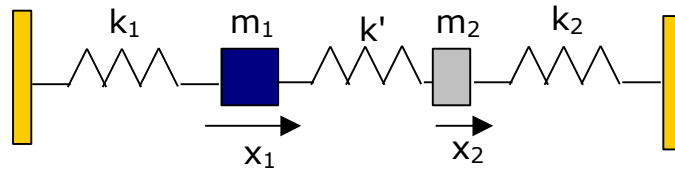
B) Circuit électrique oscillant RLC :

$$L = \frac{1}{2} L \dot{q}^2(t) - \frac{1}{2C} q^2(t) + q(t)e(t), \quad G = -\frac{1}{2} R \dot{q}^2(t) \quad (\text{I.37})$$

L'équation d'Euler-Lagrange (I.22) donne l'équation des oscillations.

-Cas des systèmes mécanique à 2 degrés de liberté

Deux masses m_1 et m_2 reliées par trois ressorts de raideurs respectives k_1 , k' et k_2 .



Le lagrangien L s'écrit:

$$L = T - U$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k' (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \quad (\text{I.38})$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent:

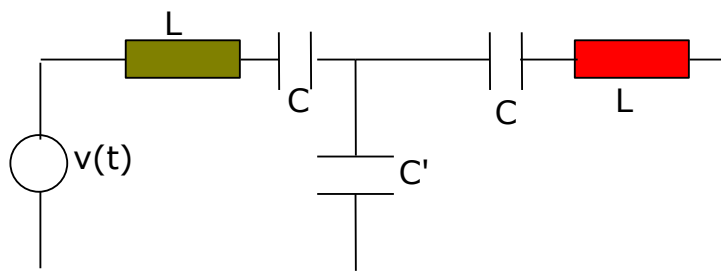
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

donnent les équations du mouvement:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k') x_1 - k' x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + k') x_2 - k' x_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

1) Circuit électrique oscillant à 2 degrés de liberté

Considérons le circuit comprenant deux bobines de même inductance L , trois condensateurs, un de capacité C' et deux de même capacité C et un générateur de f.é.m $v(t)$ montés selon le montage de la figure :



Les charges q_1 et q_2 dans les condensateurs de capacité commune C sont solutions du système différentiel couplé. Le lagrangien du système est:

$$L = E_m - E_e \quad (\text{I.41})$$

où

$$E_m = \frac{1}{2} \left(L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2 \right) \quad (\text{I.42})$$

est l'énergie magnétique due aux inductances propres, et

$$E_e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_1} q_1^2 + \frac{1}{C} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{C_2} q_2^2 \right) \quad (\text{I.43})$$

est l'énergie électrostatique contenue dans les condensateurs.

Le lagrangien L du système électrique oscillant est donc:

$$L = \frac{1}{2} \left(L_1 \dot{q}_1^2 + L_2 \dot{q}_2^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_1} q_1^2 + \frac{1}{C} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{C_2} q_2^2 \right) \quad (\text{I.44})$$

Les équations d'Euler-Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.45})$$

donnent les équations des oscillations du circuit électrique oscillant à deux degrés de liberté :

$$\begin{cases} L_1 \ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} \right) q_1 - \frac{1}{C} q_2 = 0 \\ L_2 \ddot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C} \right) q_2 - \frac{1}{C} q_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.46})$$

I.3/ Transformation de Carson-Laplace

La transformation de Carson-Laplace permet de transformer les équations différentielles en des équations algébriques faciles à résoudre. C'est une procédure commode et élégante permettant le calcul des solutions des équations différentielles qui régissent l'évolution temporelle des phénomènes physiques en particulier celui des vibrations.



* John Renshaw Carson
(1886-1940)
Théoricien américain, pionnier
des télécommunications.

** Pierre Simon Laplace
(1749-1827)
Mathématicien et astronome français

I.3.1/ Définition

Soit $F(t)$ une fonction réelle de la variable temporelle t , intégrable au sens de Lebesgue sur tout intervalle $]0, A[$ et p un nombre complexe dont la partie réelle est positive. La transformée de Carson-Laplace de $F(t)$, notée $CL[F(t)]$ ou $F(p)$, appelée image de $F(t)$ est définie par:

$$CL[F(t)] = F(p) = p \int_0^{+\infty} F(t) e^{-pt} dt \quad (I.47)$$

Inversement, $F(t)$, originale de $F(p)$, est la transformée de Carson-Laplace inverse de $F(p)$.

I.3.2/ Relation avec la transformée de Laplace

La transformée de Laplace de $F(t)$, notée $\bar{F}(p)$, est définie par:

$$\bar{F}(p) = \int_0^{+\infty} F(t) e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p} \quad (I.48)$$

où $F(p)$ est la transformée de Carson-Laplace de $F(t)$.

Remarque

On a choisi d'appliquer, dans ce cours, la transformée de Carson-Laplace au lieu de la transformée de Laplace car:

- i) La transformée de Carson-Laplace d'une constante est une constante.
- ii) Les équations aux dimensions (donc l'homogénéité) sont conservées dans la transformation.

I.3.3/ Unités

- L'unité du temps t est la seconde (s).
- L'unité du nombre p est s^{-1} .

I.3.4/ Transformée de Carson-Laplace inverse

On utilisera la notation :

$$F(t) = CL^{-1}[F(p)] \quad (I.49)$$

Exemple

Calculons la transformée de Carson-Laplace de $F(t) = te^{-at}$, où a est une constante.

$$CL[F(t)] = F(p) = p \int_0^{+\infty} F(t) e^{-pt} dt = p \int_0^{+\infty} te^{-(p+a)t} dt = \frac{p}{(p+a)^2}$$

I.3.5/ Propriétés et règles de calcul

a) Linéarité

$$L[\sum_k c_k F_k(t)] = \sum_k c_k L[F_k(t)] = \sum_k c_k F_k(p) \quad (I.50)$$

avec c_k des constantes.

b) Transformée de Laplace des dérivées

$$CL\left[\frac{d^n F(t)}{dt^n}\right] = p^n F(p) - p^n F(t=0) - \dots - p^2 \frac{d^{n-2} F(t)}{dt^{n-2}} \Big|_{t=0} - p \frac{d^{n-1} F(t)}{dt^{n-1}} \Big|_{t=0} \quad (I.51)$$

*Dérivée première: $n=1$

$$CL[F'(t)] = pF(p) - pF(t=0) \quad (I.52)$$

**Dérivée seconde: $n=2$

$$CL[F''(t)] = p^2 F(p) - p^2 F(t=0) - p \frac{dF(t)}{dt} \Big|_{t=0} \quad (I.53)$$

c) Similitude

$$CL\left[F\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = F(\alpha p) \quad (I.54)$$

où α est une constante.

d) Intégration

$$CL\left[\int_0^t F(u) du\right] = \frac{F(p)}{p} \quad (I.55)$$

e) Produit

$$CL\left[\int_0^t F_1(t-\tau) F_2(\tau) d\tau\right] = F_1(p) F_2(p) \quad (I.56)$$

f) Translation de p

$$CL[e^{at} F(t)] = \frac{p}{p-a} F(p-a) \quad (I.57)$$

où a est une constante.

g) Retard

Si $F(t-t')$, est nulle pour $t \leq t'$, où $t' > 0$, on a:

$$CL[F(t-t')] = F(p) e^{-pt'} \quad (I.58)$$

g) Impulsion unité, $\delta(t)$ est la fonction de Dirac

$$CL[\delta(t)] = p \quad (I.59)$$

h) Echelon unité

Soit $H(t)$ la fonction de Heaviside: $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t < 0$, alors:
 $CL[H(t)] = 1$

(I.60)

I.3.6/ Théorème de Borel

Enoncé

Si $F(p)$ et $G(p)$ sont respectivement les transformées de Carson-Laplace des fonctions $F(t)$ et $G(t)$:

$$CL^{-1}\left(\frac{F(p)G(p)}{p}\right) = \int_0^t F(\tau) \cdot G(t-\tau) d\tau = \int_0^t F(t-\tau) \cdot G(\tau) d\tau \quad (I.61)$$

Exemple d'application du théorème de Borel

Calculons $CL^{-1}[p^3 / (p^2 + \omega^2)^2]$

$F(p) = G(p) = p^2 / (p^2 + \omega^2)$

$F(t) = G(t) = CL^{-1}[F(p)] = \cos \omega t$ (voir table ci-dessous), d'où :

$$CL^{-1}\left[\frac{p^3}{(p^2 + \omega^2)^2}\right] = \int_0^t \cos \omega \tau \cos \omega(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$$

I.3.7/ Table de certaines transformées de Carson-Laplace

$CL[F(t)]=F(p)$	$CL^{-1}[F(p)]=F(t)$
$A=Cte$	$A=Cte$
$1/p$	t
$1/p^n$	$t^n/n!$
p	$\delta(t)$, δ fonction de Dirac
p^n	$t^n / \Gamma(1-n)$, Γ fonction eulérienne
$a/p \pm a$	$\exp(\pm at)$
\sqrt{p}	$1/\sqrt{\pi t}$
$1/\sqrt{p}$	$2\sqrt{t/\pi}$
$p/(p+a)$	$\exp(-at)$
$1/(p+a)$	$(1-\exp(-at))/a$
$p/(p^2 + a^2)$	$\sin(a t)/a$
$p^2/(p^2 + a^2)$	$\cos(a t)$
$p/(p^2 - a^2)$	$sh(a t)/a$
$p^2/(p^2 - a^2)$	$ch(a t)$
$1/(p^2 + a^2)$	$(1-\cos(a t))/a^2$
$1/(p^2 - a^2)$	$(ch(a t)-1)/a^2$
$1/p(p+a)$	$t/a + e^{-at}/a^2 - 1/a^2$

$1/(p+a)(p+b)$	$\frac{1}{ab} \left[1 + (be^{-at} - ae^{-bt})/(a-b) \right]$
$p/(p+a)(p+b)$	$(e^{-bt} - e^{-at})/(a-b)$
$p^2/(p+a)(p+b)$	$(ae^{-at} - be^{-bt})/a-b$
$p(p+b)/[(p+b)^2 + a^2]$	$\exp(-bt)\cos(at)$
$pa/[(p+b)^2 + a^2]$	$\exp(-bt)\sin(at)$
$1/(p+a)^2$	$a^{-2} [1 - (1+at)\exp(-at)]$
$p/(p+a)^2$	$t\exp(-at)$
$p^2/(p+a)^2$	$(1-at)\exp(-at)$
$1/(p^2 + 2ap + \omega_0^2), \text{ avec } \omega_0^2 > a^2$	$\omega_0^{-2} \left[1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t + \phi) \right]$ où $\omega^2 = \omega_0^2 - a^2$, $\text{tg}\phi = \omega/a$
$1/(p^2 + 2ap + \omega_0^2), \text{ avec } \omega_0^2 < a^2$	$\omega_0^{-2} \left[1 - \frac{\omega_0^2}{n-m} \left(\frac{e^{-mt}}{m} - \frac{e^{-nt}}{n} \right) \right]$ où $(-m)$ et $(-n)$ sont les racines de $p^2 + 2ap + \omega_0^2 = 0$
$p/(p^2 + 2ap + \omega_0^2),$ avec $\omega_0^2 > a^2$	$e^{-at} / \omega \sin(\omega t)$ où $\omega^2 = \omega_0^2 - a^2$
$p/(p^2 + 2ap + \omega_0^2),$ avec $\omega_0^2 < a^2$	$\frac{1}{n-m} (e^{-mt} - e^{-nt})$ où $(-m)$ et $(-n)$ sont les racines de $p^2 + 2ap + \omega_0^2 = 0$
$p^2/(p^2 + 2ap + \omega_0^2), \text{ avec } \omega_0^2 > a^2$	$-\frac{\omega_0}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t - \psi)$ où $\omega^2 = \omega_0^2 - a^2$, $\text{tg}\psi = \omega/a$
$p^2/(p^2 + 2ap + \omega_0^2), \text{ avec } \omega_0^2 < a^2$	$\frac{1}{n-m} (ne^{-nt} - me^{-mt})$ où $(-m)$ et $(-n)$ sont les racines de $p^2 + 2ap + \omega_0^2 = 0$

I.4 / Série de Fourier d'une fonction périodique



***Jean Baptiste Joseph Fourier
(1768-1830)**

Mathématicien, physicien et historien Français.

I.4.1) Définition

Toute fonction $F(t)$ périodique non sinusoïdale de période T : $F(t) = F(t + kT)$, où $k=0, 1, 2, 3, \dots$, peut être développée en "série de Fourier" sous la forme:

$$F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)] \quad (\text{I.62})$$

où

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad \text{où } T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{I.63})$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Cette série s'appelle série trigonométrique de Fourier (ou développement de Fourier de $F(t)$), les nombres A_0, A_n et B_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $F(t)$.

Compte tenu de l'identité d'Euler:

$$e^{in\omega t} = \cos n\omega t + i \sin n\omega t \quad (\text{I.64})$$

on peut écrire la série (I.62) sous la forme complexe:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (\text{I.65})$$

où

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{I.66})$$

I.4.2) Spectre de fréquence

L'ensemble des valeurs des coefficients de Fourier A_0, A_n, B_n ou c_n forme le spectre de fréquence de $F(t)$.

I.4.3) Propriétés des coefficients de Fourier

* Si $F(t)$ est une fonction paire sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$: i.e. $F(-t)=F(t)$ alors les formules (I.63) se réduisent à:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(t) \cos(n\omega t) \quad , \quad B_n = 0 \quad (\text{I.67})$$

** Si $F(t)$ est une fonction impaire sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$: i.e. $F(-t)=-F(t)$, alors les formules (I.60) se réduisent à:

$$A_n = 0 \quad , \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(t) \sin(n\omega t) \quad (\text{I.68})$$

Exemple

Calculons le développement en série de Fourier de $F(t) = \cos(\pi t/T)$ pour $-T/2 \leq t \leq T/2$.

Réponses : $F(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$

$$\text{Où } A_0 = 2/\pi, \quad A_n = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)}, \quad B_n = 0$$

$$\text{D'où : } F(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)(2n-1)} \cos n\omega t$$

I.5/ Transformation de Fourier d'une fonction

On peut étendre le développement en série de Fourier à des fonctions non périodiques (cas d'une excitation non périodique appliquée à un système vibrant).

I.5.1) Définition

La transformée de Fourier ou intégrale de Fourier d'une fonction $F(t)$ est définie par :

$$TF [F(t)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{I.69})$$

La transformée de Fourier inverse de $F(\omega)$ donne $f(t)$:

$$TF^{-1} [F(\omega)] = F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{I.70})$$

I.5.2) Propriétés

a) La Transformée de Fourier d'une fonction paire est réelle et paire.

- b) La Transformée de Fourier d'une fonction impaire est purement imaginaire et impaire.
c) Si $F(t)$ est paire, alors

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \cos \omega t dt \quad \text{et} \quad F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (\text{I.71})$$

- d) Si $F(t)$ est impaire alors :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \sin \omega t dt \quad \text{et} \quad F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \sin \omega t d\omega$$

(I.72)

I.5.3) Spectre de fréquence de $F(t)$

La fonction $F(\omega)$ mesure la densité spectrale (ou spectre de fréquence de $F(t)$).

Remarque

Les spectres de fréquence des fonctions non périodiques sont des spectres continus.

Exemple

Calculons la transformée de Fourier de la fonction en triangle:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < -\tau \text{ et } t > \tau \\ f_0(1 + \frac{t}{\tau}) & \text{pour } -\tau < t < 0 \\ f_0(1 - \frac{t}{\tau}) & \text{pour } 0 < t < \tau \end{cases} \quad (\text{I.73})$$

$$TF [F(t)] = F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$$

Tout calcul fait plus une intégration par partie et en tenant compte de la formule :

$1 - \cos \omega\tau = 2 \sin^2(\omega\tau/2)$, on trouve :

$$F(\omega) = \frac{f_0\tau}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)} \right)^2$$

I.6/ Résolution des équations différentielles du second ordre par la technique de la transformation de Carson-Laplace et de Fourier

I.6.1) Technique de la transformation de Carson - Laplace

L'équation réduite des oscillations, de faibles amplitudes, dans un milieu homogène en présence de frottements visqueux, de coefficient d'amortissement r , d'un système à un seul degré de liberté $s(t)$, soumis à un champ de force extérieur $F(t)$ (excitation) est:

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + r \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = F(t) \quad (\text{I.74})$$

où $s(t)$ est la réponse du système (déplacement, angle, charge électrique, etc... c'est l'inconnue), ω_0 est une constante qui dépend des caractéristiques du système.

L'équation (I.74) est une équation différentielle, en $s(t)$, du second ordre à coefficients constants inhomogène (avec second membre), complétée par les conditions initiales suivantes:

$$s(t=0) = s_0, \quad \dot{s}(t=0) = \dot{s}_0 \quad (\text{I.75})$$

Le principe de cette méthode de résolution de l'équation (I.71) complétée par les conditions initiales (I.72) consiste à chercher la transformée de Carson-Laplace de l'équation (I.71), et en déduire sa solution $s(t)$ par le biais de la transformée de Carson-Laplace inverse

La transformée de Carson-Laplace, de la réponse $s(t)$, notée $CL[s(t)]$ ou $s(p)$, est définie par:

$$CL[s(t)] = s(p) = p \int_0^\infty s(t) e^{-pt} dt \quad (\text{I.76})$$

celle de l'excitation $F(t)$ est :

$$CL[F(t)] = F(p) = p \int_0^\infty F(t) e^{-pt} dt \quad (\text{I.77})$$

Les transformées de Carson-Laplace des dérivées de $s(t)$ sont:

$$CL\left[\dot{s}(t)\right] = ps(p) - ps(t=0) = ps(p) - ps_0 \quad (\text{I.78})$$

$$\begin{aligned} CL\left[\ddot{s}(t)\right] &= p^2s(p) - p^2s(t=0) - p\dot{s}(t=0) = \\ &= p^2s(p) - p^2s_0 - p\dot{s}_0 \end{aligned} \quad (\text{I.79})$$

Prenons la transformée de Carson-Laplace de l'équation (I.74):

$$CL\left[\ddot{s}(t) + r\dot{s}(t) + \omega_0^2s(t)\right] = CL[F(t)] \quad (\text{I.80})$$

En tenant compte de la linéarité de la transformée de Carson-Laplace et des expressions (I.76), (I.77), (I.78), (I.79) et de (I.75), l'équation (I.80) devient:

$$(p^2 + rp + \omega_0^2)s(p) - (p^2s_0 + rps_0 + p\dot{s}_0) = F(p) \quad (\text{I.81})$$

d'où

$$\begin{aligned} s(p) &= \frac{p^2s_0}{p^2 + rp + \omega_0^2} + \frac{p(s_0 + rs_0)}{p^2 + rp + \omega_0^2} + \frac{F(p)}{p^2 + rp + \omega_0^2} \\ &= s_1(p) + s_2(p) + s_3(p) \end{aligned} \quad (\text{I.82})$$

avec

$$s_1(p) = \frac{p^2 s_0}{p^2 + rp + \omega_0^2}, \quad s_2(p) = \frac{p(\dot{s}_0 + rs_0)}{p^2 + rp + \omega_0^2}, \quad s_3(p) = \frac{F(p)}{p^2 + rp + \omega_0^2} \quad (\text{I.83})$$

La solution $s(t)$ de (I.74) est obtenue en calculant la transformée de Carson-Laplace inverse de $s(p)$, soit:

$$s(t) = L^{-1}[s(p)] = L^{-1}[s_1(p)] + L^{-1}[s_2(p)] + L^{-1}[s_3(p)] \quad (\text{I.84})$$

Pour calculer les deux premières transformées de Carson-Laplace inverses dans l'expression (I.84), on utilise la table des transformées de Carson-Laplace inverses donnée dans le paragraphe I.3.7 : ci-haut.:

$$L^{-1}[s_1(p)] = \begin{cases} -\frac{s_0 \omega_0}{\omega} \sin(\omega t - \psi) & \text{pour } \omega_0^2 > \frac{r^2}{4} \\ \frac{s_0}{n-m} (ne^{-nt} - me^{-mt}) & \text{pour } \omega_0^2 < \frac{r^2}{4} \end{cases} \quad (\text{I.85})$$

Avec

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{r^2}{4}, \quad \text{tg} \psi = \frac{2\omega}{r} \quad \text{et } (-m), (-n) \text{ sont les racines de : } p^2 + rp + \omega_0^2 = 0.$$

$$L^{-1}[s_2(p)] = \begin{cases} \frac{\dot{s}_0 + rs_0}{\omega} e^{-\frac{r}{2}t} \sin(\omega t) & \text{pour } \omega_0^2 > \frac{r^2}{4} \\ \frac{\dot{s}_0 + rs_0}{n-m} (e^{-nt} - e^{-mt}) & \text{pour } \omega_0^2 < \frac{r^2}{4} \end{cases} \quad (\text{I.86})$$

La dernière transformée de Carson-Laplace inverse qui figure dans (I.84), se calcule en appliquant le théorème de Borel:

$$\text{On se propose de calculer } L^{-1}[s_3(p)] = L^{-1}\left[\frac{F(p)}{p^2 + rp + \omega_0^2}\right]$$

$$L^{-1}\left[\frac{F(p)}{p^2 + rp + \omega_a^2}\right] = L^{-1}\left[\frac{F_1(p)F_2(p)}{p}\right] = \int_0^t F_1(u)F_2(t-u)du \quad (\text{I.87})$$

où

$$F_1(p) = F(p), \quad F_2(p) = \frac{p}{p^2 + rp + \omega_0^2} \quad (\text{I.88})$$

La table des transformées de Carson-Laplace inverses (voir I.3.7/) permet d'obtenir $F_2(t)$:

$$F_2(t) = L^{-1}[s_3(p)] = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{r}{2}t}}{\omega} \sin(\omega t) & \text{pour } \omega_0^2 > \frac{r^2}{4} \\ \left[\frac{1}{n-m} (e^{-nt} - e^{-mt}) \right] & \text{pour } \omega_0^2 < \frac{r^2}{4} \end{cases} \quad (\text{I.89})$$

avec $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{r^2}{4}$ et $(-m)$, $(-n)$ sont les racines de $p^2 + rp + \omega_0^2 = 0$.

Exemple

L'équation différentielle des oscillations non amorties ($r=0$), forcées d'un système mécanique unidimensionnel (Masse-Ressort (m, k)) soumis à une excitation extérieure $F(t) = m.a.t$, où a est une constante, s'écrit :

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = at \quad \text{avec} \quad x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$$

En appliquant la transformée de Carson-Laplace à cette équation, on obtient :

$$(p^2 + \omega_0^2)x(p) = \frac{a}{p} \quad \Rightarrow \quad x(p) = \frac{a}{p(p^2 + \omega_0^2)} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega_0^2} \right)$$

d'où : $x(t) = \text{CL}^{-1}[x(p)]$, en utilisant la table I.3.7 des transformées de Carson-Laplace inverses, on trouve :

$$x(t) = \frac{a}{\omega_0^3} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t)$$

I.6.2) Technique de la transformation de Fourier

On écrit la transformée de Fourier de la réponse $s(t)$ et celle de l'excitation extérieure $F(t)$:

$$\bar{s}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{et} \quad \bar{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{I.90})$$

de transformées de Fourier inverses:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{et} \quad F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{I.91})$$

En prenant la transformée de Fourier de l'équation (I.74) et en tenant compte de $s(\pm\infty) = \dot{s}(\pm\infty) = 0$, on trouve:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + ir\omega)\bar{s}(\omega) = \bar{F}(\omega) \quad (\text{I.92})$$

La transformée de Fourier de la réponse est donc:

$$\bar{s}(\omega) = \bar{F}(\omega) / (\omega_0^2 - \omega^2 + ir\omega) \quad (\text{I.93})$$

la solution de l'équation (I.74) est obtenue en calculant la transformée de Fourier inverse de (I.90):

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{F}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + ir\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{I.94})$$

Le calcul de $\bar{F}(\omega)$ et celui de l'intégrale donne l'expression de $s(t)$. En pratique, ce calcul est lourd, car l'intégrale n'est généralement pas exprimable à l'aide de fonctions élémentaires.