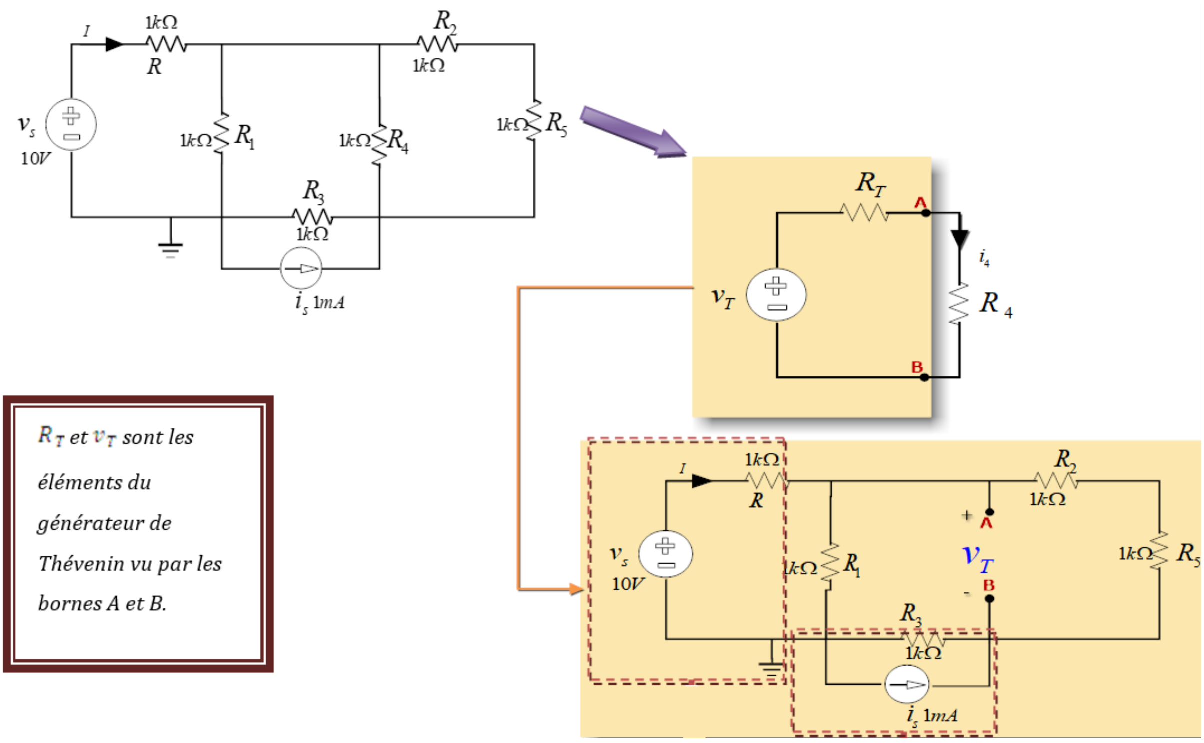
Série 1 **SMP4 : Electronique Sections A/B**

Méthodes d'analyse des circuits

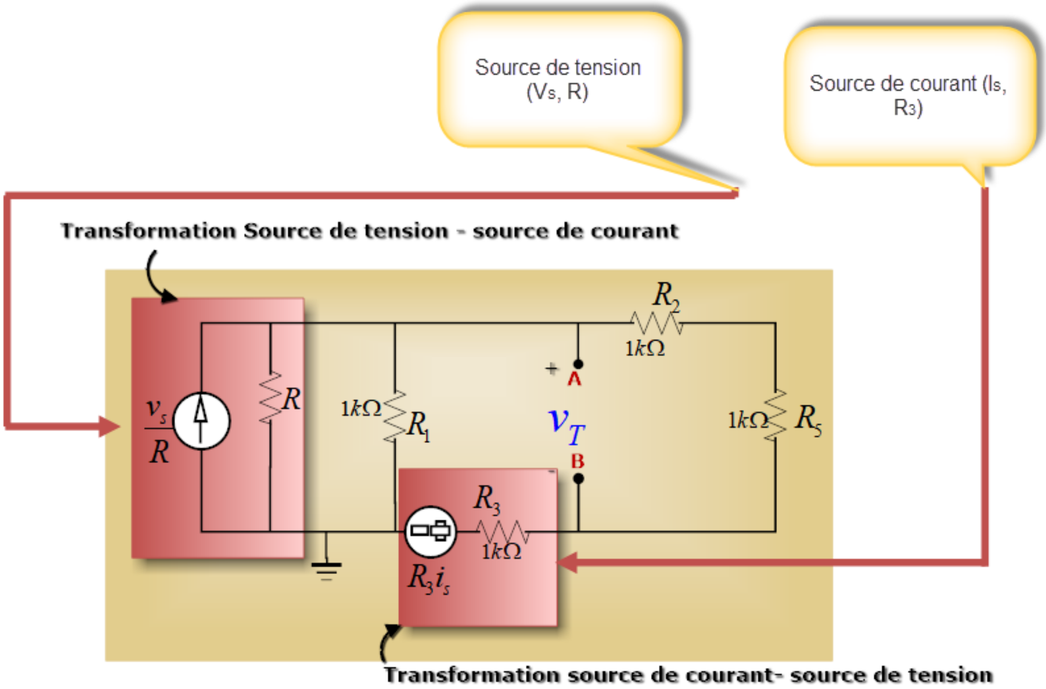
Exercice 1 :

1. Compte tenu du théorème de Thévenin, on peut représenter le schéma de la figure 1 sous la forme équivalente suivante :



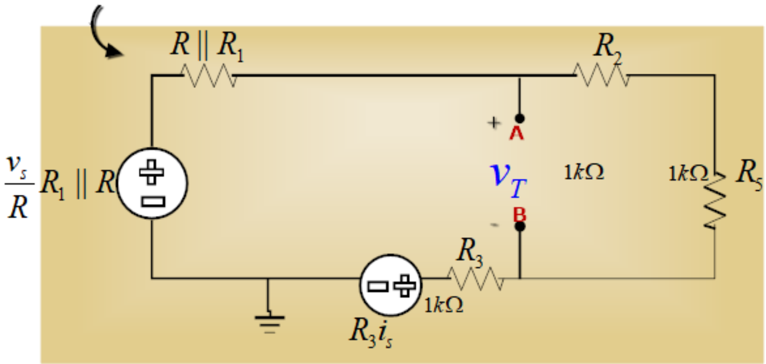
Calcul de v_T

La tension de Thévenin est la tension aux bornes A B.

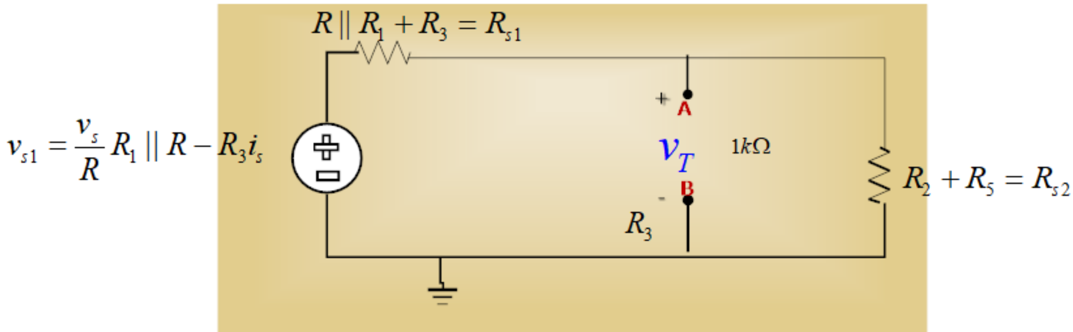


La transformation de la source de courant formée par la paire $(\frac{v_s}{R},\ R \parallel R_1)$ conduit circuit suivant :

Transformation Source de courant - source de tension



La somme des sources de tensions idéales $R_3 i_s$ et $\frac{v_s}{R} R_1 \parallel R = \frac{v_s R_1}{R_1 + R}$ et la mise en série des résistances entraîne le schéma équivalent ci-dessous :



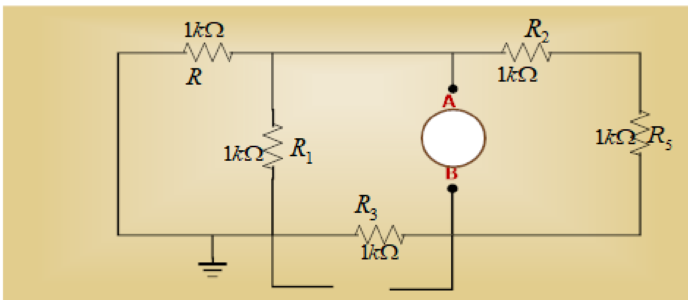
La loi 'Diviseur de tension' nous permet finalement d'obtenir la tension v_T :

$$\begin{aligned} v_T &= \frac{R_{s2}}{R_{s1}+R_{s2}} v_{s1} \\ &= \frac{R_2 + R_5}{R_2 + R_5 + R_3 + R \parallel R_1} \left(\frac{R_1}{R + R_1} v_s - R_3 i_s \right) \\ &= \frac{2}{3 + \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} 10 - 1 \right) V \simeq 2.286V \end{aligned}$$

Calcul de R_T

On éteint les sources indépendantes et on calcule la résistance équivalente vue par AB :

$$\begin{aligned} R_T &= (R \parallel R_1 + R_3) \parallel (R_2 + R_5) \\ &= (0.5 + 1) \parallel 2k\Omega \\ &= \left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{2} \right)^{-1} k\Omega \simeq 0.86k\Omega \end{aligned}$$



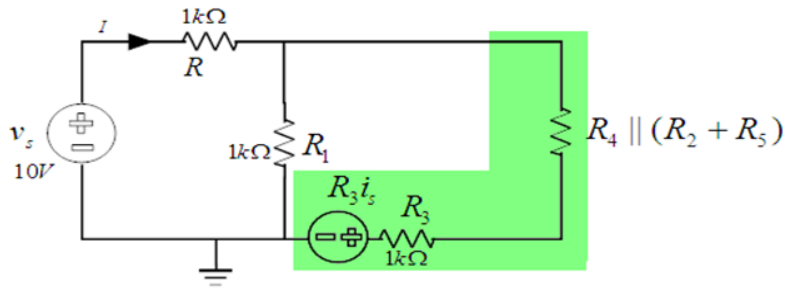
Tension aux bornes de la résistance R_4

La tension aux bornes de la résistance R_4 est donnée par :

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{R_4}{R_4 + R_T} v_T \\ &= \frac{1}{1 + 0.86} \times 2.286V \simeq 1.23V \end{aligned}$$

2. Courant dans la résistance R_1

- La transformation de la source de courant (i_s, R_3) nous permet de représenter le circuit de la fig. 1 sous la forme équivalente ci-dessous.



- La transformation cette fois de la source de tension colorée en vert peut être transformée en source de courant comme illustré à la figure suivante

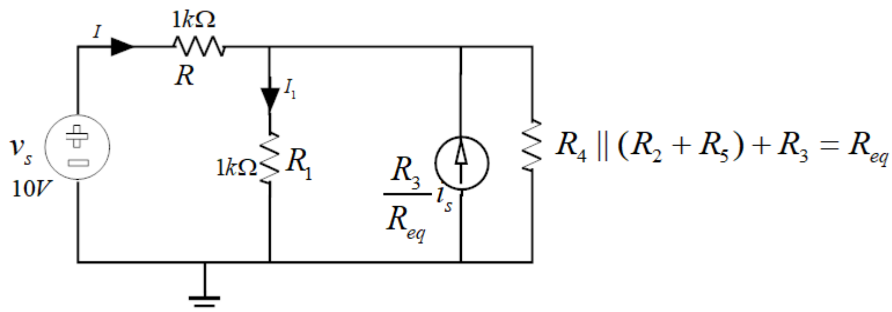
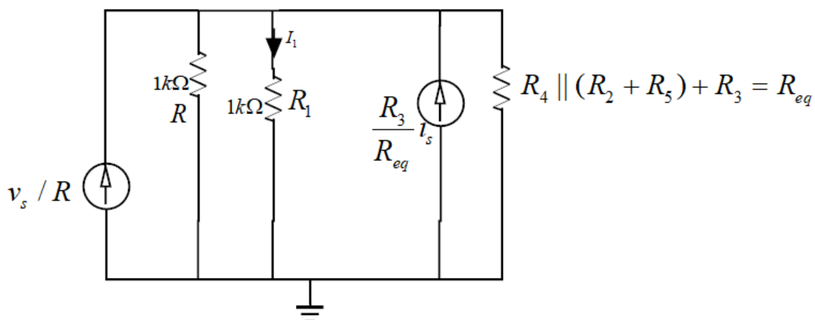


Fig. A

- La transformation de la source de tension $(v_s,\ R)$ en source de courant conduit au circuit ci-dessous:



Avec :

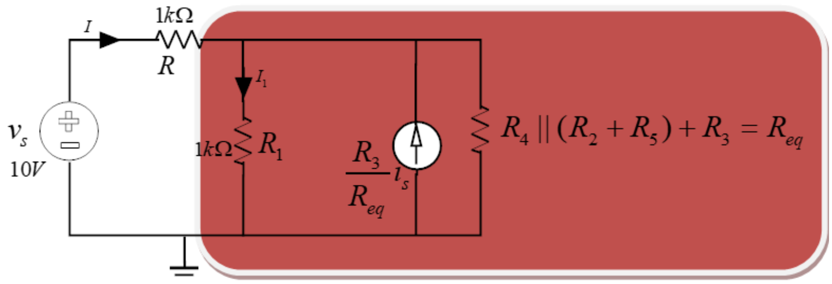
$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_4 \parallel (R_2 + R_5) + R_3 \\ &= \frac{5}{3}\ k\Omega \end{aligned}$$

Maintenant, on peut appliquer la loi *diviseur de courant* pour calculer le courant dans la résistance R_1 ainsi :

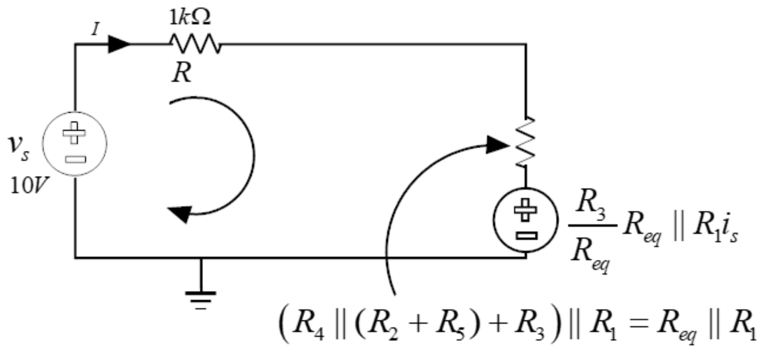
$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\frac{v_s}{R}+\frac{R_3}{R_{eq}}i_s\right)\frac{R \parallel R_1 \parallel R_{eq}}{R_1} \\
&= \left(\frac{v_s}{R}+\frac{R_3}{R_{eq}}i_s\right)\frac{\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{eq}}\right)^{-1}}{R_1} \\
&= \left(\frac{10}{1}+\frac{1}{\frac{5}{3}}\times 1\right)\frac{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{\frac{5}{3}}\right)^{-1}}{1} mA \simeq 4.077 mA
\end{aligned}$$

3. **Détermination du courant I dans la résistance R**

On utilise les transformations sources de courant- sources de tension de la question 2 jusqu'à ce que l'on aboutisse au circuit de la figure A :



La partie du circuit encadrée et colorée peut être transformée en une source de tension, pour aboutir au circuit à une seule maille de la figure suivante :



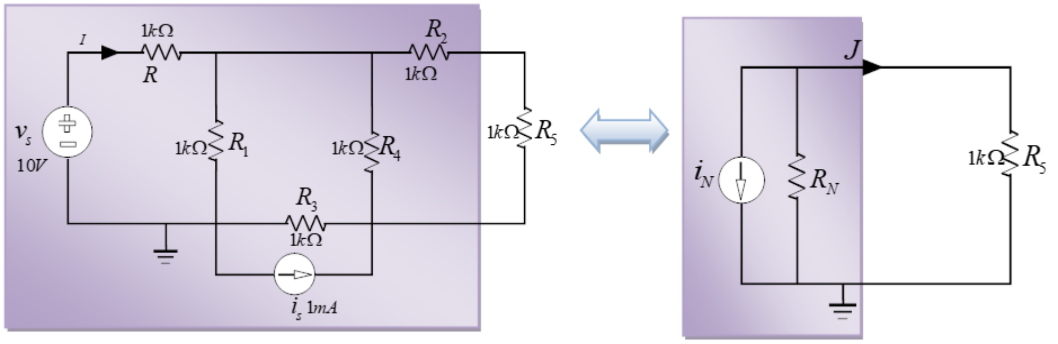
La loi des mailles appliquée au circuit ci-dessus entraîne :

$$-v_s + RI + (R_{eq} \parallel R_1)\, I + \frac{R_3}{R_{eq}}(R_{eq} \parallel R_1)\, i_s = 0$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{v_s - \frac{R_3}{R_{eq}}(R_{eq} \parallel R_1)\, i_s}{(R_{eq} \parallel R_1) + R} \\
&= \frac{v_s - \frac{R_3}{R_{eq}}\left(\frac{1}{R_{eq}}+\frac{1}{R_1}\right)^{-1} i_s}{\left(\frac{1}{R_{eq}}+\frac{1}{R_1}\right)^{-1}+R} \\
&= \frac{10 - \frac{1}{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{\frac{5}{3}}+\frac{1}{1.}\right)^{-1}\times 1}{\left(\frac{1}{\frac{5}{3}}+\frac{1}{1}\right)^{-1}+1} mA \simeq 5.923 mA
\end{aligned}$$

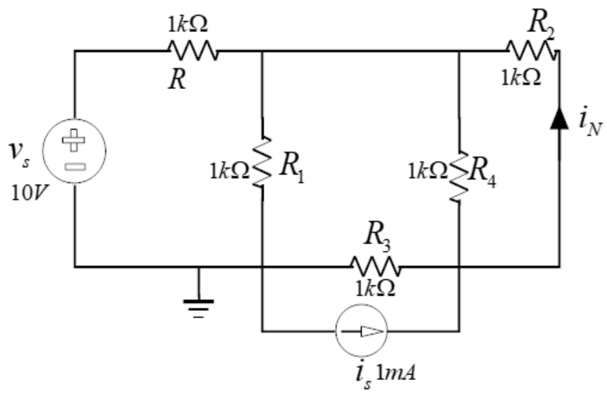
4. Courant dans R_5 par application du Théorème de Norton

Selon le théorème de Norton, le circuit de la figure 1 peut être mis sous la forme équivalente:

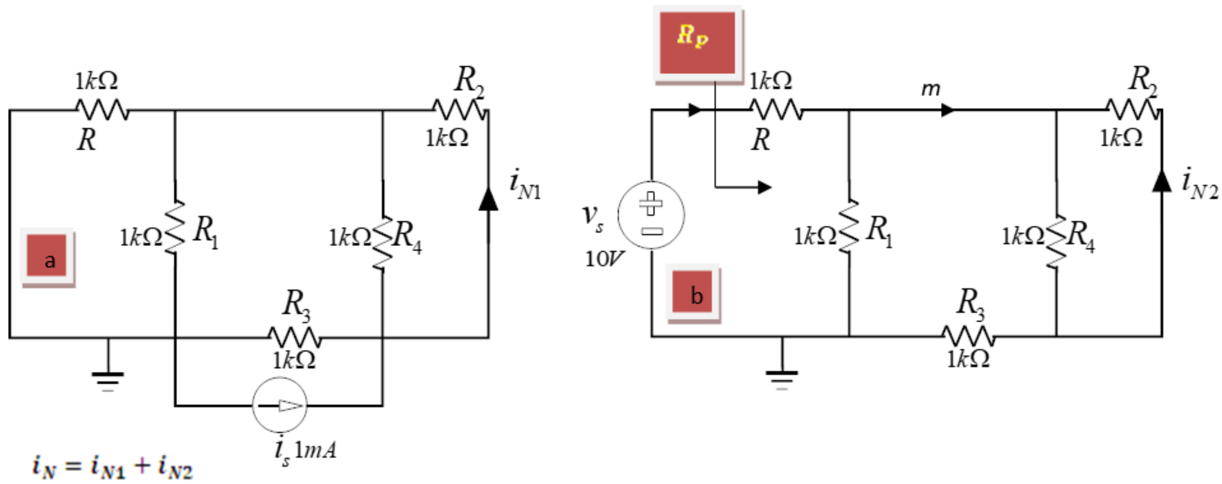


Calcul de i_N

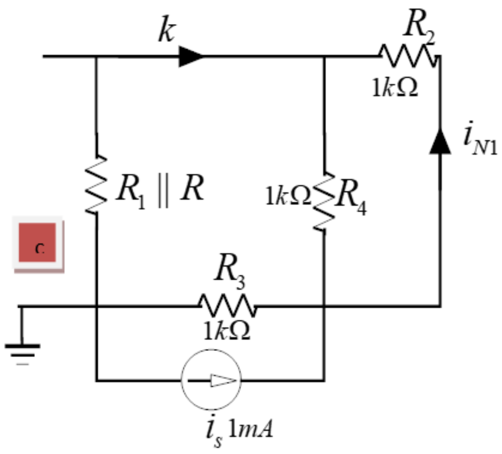
On établit un *court-circuit* en remplacement à la résistance R_5:

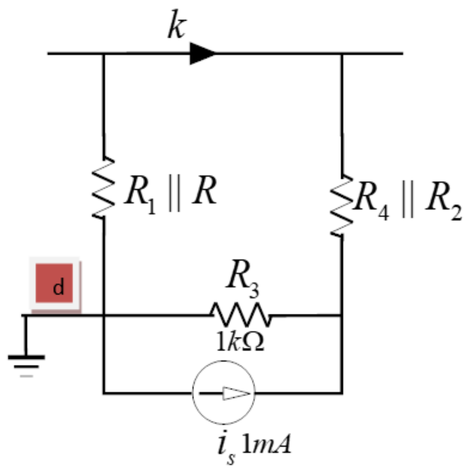


Pour calculer le courant i_N, on applique le principe de superposition :



Le premier schéma (a) peut être mis sous la forme ci-dessous (c) :





L'application de la *loi diviseur de courant* au schéma (d) donne :

$$\begin{aligned} k &= -\frac{R_3}{R_3 + R_1 \parallel R + R_4 \parallel R_2} i_s \\ &= -\frac{1}{1 + 0.5 + 0.5} i_s = -\frac{1}{2} i_s \end{aligned}$$

De même, à partir du premier schéma ($fig.(c)$) on peut obtenir le courant i_{N1} en fonction de k par application de la *loi diviseur de courant*:

$$\begin{aligned} i_{N1} &= -\frac{R_4}{R_2 + R_4} k \\ &= -\frac{1}{2} k \\ &= \frac{1}{4} i_s = 0.25mA \end{aligned}$$

Pour calculer le courant i_{N2}, on utilise le schéma (b). On procède ici par application de la *loi diviseur de tension*. Désignons par R_p la résistance équivalente vue par la source v_s. On a :

$$\begin{aligned} R_p &= R + R_1 \parallel (R_2 \parallel R_4 + R_3) \\ &= R + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} + R_3} \right)^{-1} \\ &= 1 + \left(1 + \frac{1}{(2)^{-1} + 1}\right)^{-1} k\Omega = 1.6k\Omega \end{aligned}$$

Diviseurs de courants

$$i_{N2} = -\frac{mR_4}{R_4 + R_2} = -\frac{1}{2} m$$

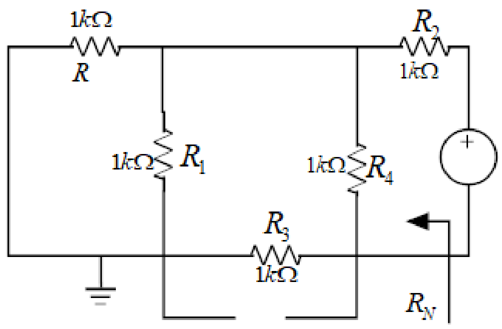
$$\begin{aligned} m &= \frac{R_1}{R_1 + R_3 + (R_4 \parallel R_2)} \frac{v_s}{R_p} \\ &= \frac{1}{1 + 1 + (0.5)} \frac{10}{1.6} mA = 2.5mA \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} i_{N2} &= -1.25mA \\ i_N &= i_{N1} + i_{N2} \\ &= -1mA \end{aligned}$$

Calcul de R_N

On éteint les sources indépendantes et on élimine la charge, puis on calcule la résistance vue par un générateur placé à l'emplacement de la charge.



$$\begin{aligned} R_N &= (R \parallel R_1 + R_3) \parallel R_4 + R_2 \\ &= \frac{3}{2} \parallel 1 + 1 \quad k\Omega \\ &= 1.6 k\Omega \end{aligned}$$

Calcul de I

$$\begin{aligned} I &= -\frac{R_N}{R_N + R_5} i_N \\ &= -\frac{1.6}{1.6 + 1} \times (-1)\, mA \\ &= 0.615 mA \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Selon le principe de superposition, le schéma de la fig. 2 peut être scindé en deux schémas comportant chacun une seule source indépendante comme illustré aux figures 2a et 2b. Le courant j dans la résistance R_2 est donc :

$$j = j_1 + j_2$$

Fig. 2a

L'application de la transformation de la source de tension en source de courant (transformation Thévenin-Norton) conduit au schéma de la figure 2c. Le courant j_1 se déduit de la *loi diviseur de courant* :

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{R_1 \parallel R_4 \parallel (R_2 + R_3)}{R_2 + R_3} \frac{v_s}{R_1} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_3}\right)^{-1}}{R_2 + R_3} \frac{v_s}{R_1} \\ &= \frac{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^{-1}}{2} \frac{20}{1} mA = 4 mA \end{aligned}$$

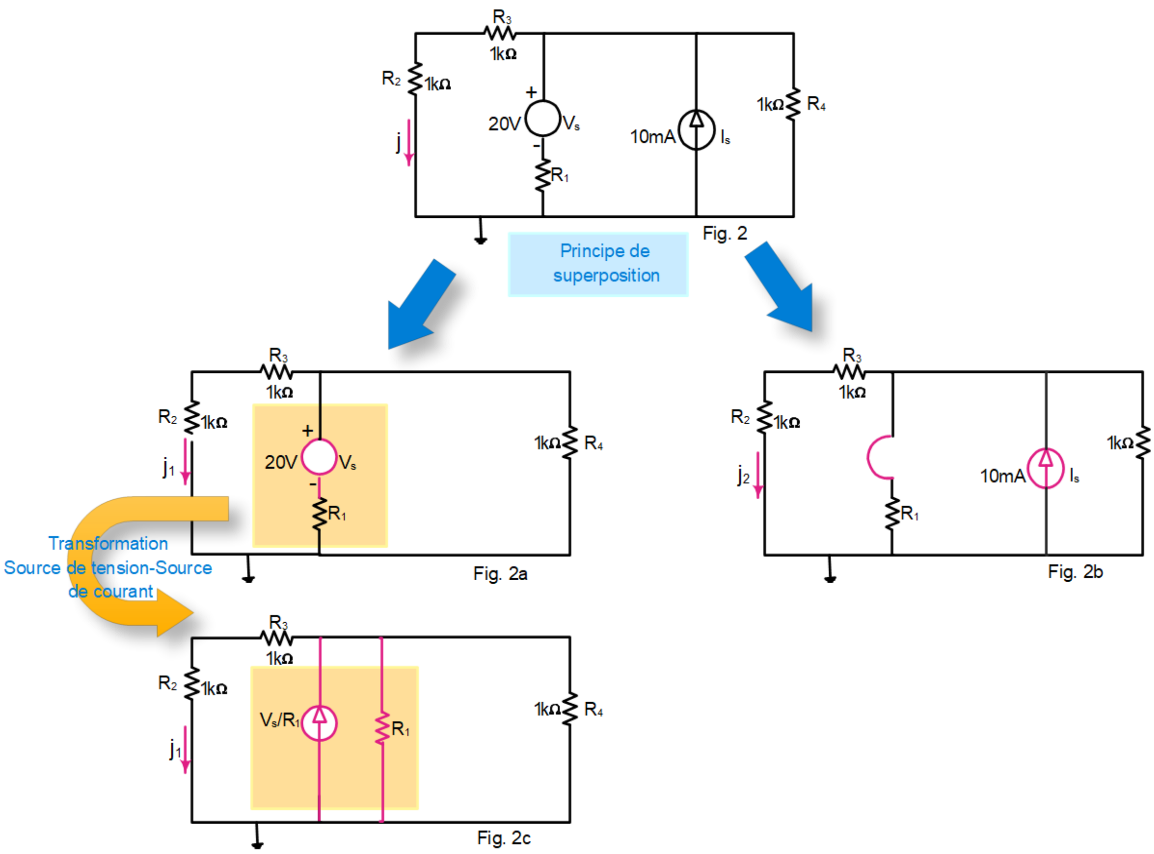
Fig. 2b

La *loi diviseur de courant* conduit directement à l'expression du courant j_2 :

$$
\begin{aligned}
j_2 &= \frac{R_1 \parallel R_4 \parallel (R_2+R_3)}{R_2+R_3} i_s \\
&= \frac{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2+R_3}\right)^{-1}}{R_2+R_3} i_s \\
&= \frac{\left(2+\frac{1}{2}\right)^{-1}}{2} 10mA = 2mA
\end{aligned}
$$

Le courant traversant la résistance R_2 est :

$$j = j_1 + j_2 = 6mA$$



2. **Loi des mailles**

Maille M1

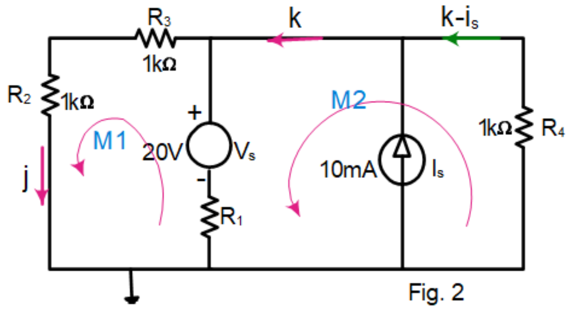
$$R_2 j + R_1(j-k) - v_s + R_3 j = 0$$

Maille M2

$$v_s + R_1(k-j) + R_4(k-i_s) = 0$$

Les deux équations des mailles M1 et M2 peuvent être mises sous forme d'un système linéaire :

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_1 \\ -R_1 & R_1+R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_s \\ R_4 i_s - v_s \end{pmatrix}$$

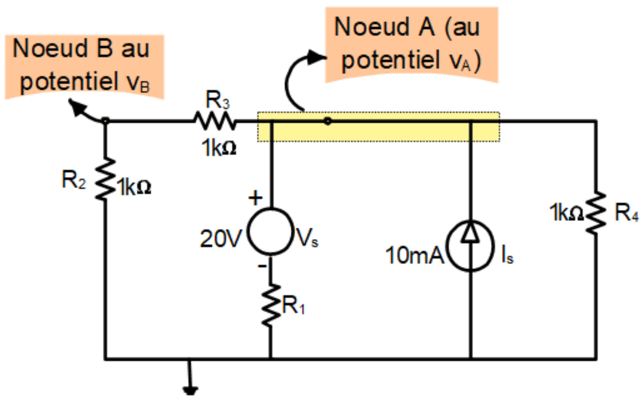


Le courant j est donné par :

$$
\begin{aligned}
j &= \frac{\begin{vmatrix} v_s & -R_1 \\ R_4 i_s - v_s & R_1 + R_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R_4 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{v_s(R_1 + R_4) + R_1 (R_4 i_s - v_s)}{(R_1 + R_2 + R_3)(R_1 + R_4) - R_1^2} \\
&= \frac{R_4 v_s + R_1 R_4 i_s}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4) + R_1 R_4} \\
&= \frac{20 \times 1 + 10}{4 + 1} mA = 6mA
\end{aligned}
$$

2. **Loi des nœuds**

La loi des nœuds qui consiste en la somme des courants qui sortent d'un nœud égale la somme des courants qui y rentrent se traduit par les équations :



Nœud B

$$\frac{v_B}{R_2} + \frac{v_B - v_A}{R_3} = 0$$

Nœud A

$$\frac{v_A - v_B}{R_3} + \frac{v_A}{R_4} + \frac{v_A - v_s}{R_1} = i_s$$

Les deux équations ci-dessus peuvent être écrites sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_B \\ v_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i_s + \frac{v_s}{R_1} \end{pmatrix}$$

La tension aux bornes de la résistance R_2 est :

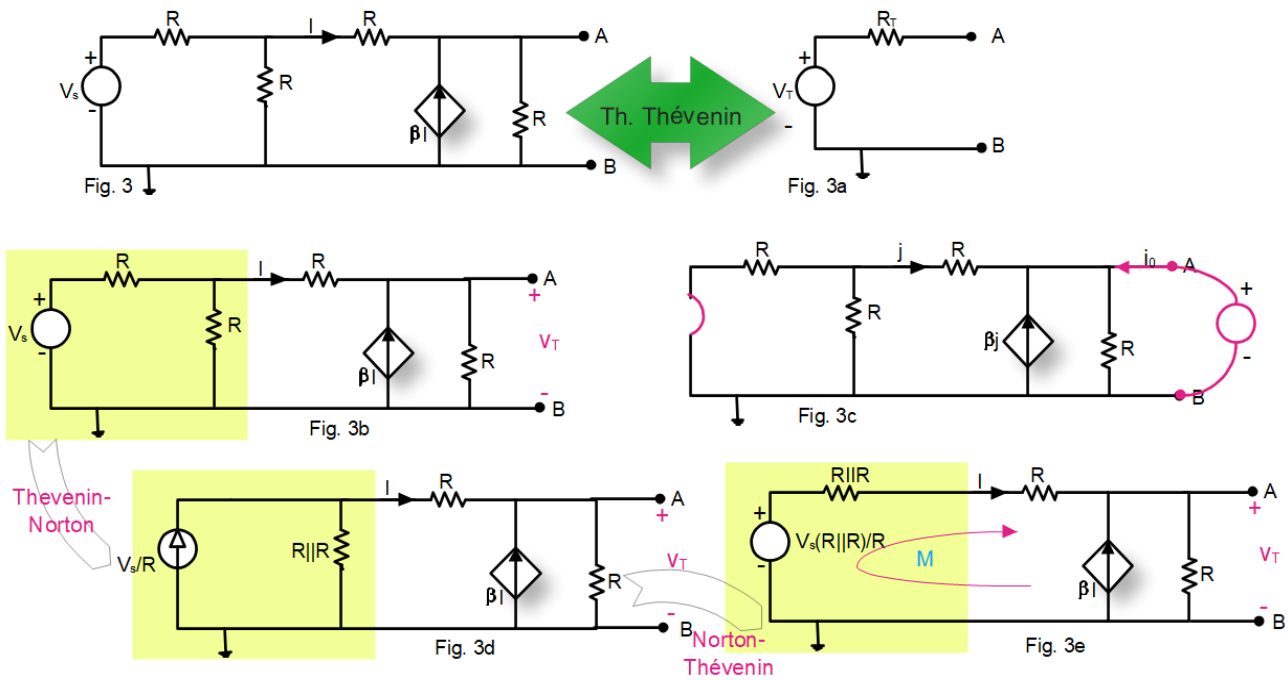
$$\begin{aligned}
v_B &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{R_3} \\ i_s + \frac{v_s}{R_1} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\left(i_s + \frac{v_s}{R_1}\right) \frac{1}{R_3}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(10+20)}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} V = 6V
\end{aligned}$$

Le courant j dans la résistance R_2 est :

$$\begin{aligned}
j &= \frac{v_B}{R_1} \\
&= \frac{6V}{1k\Omega} = 6mA
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Le Théorème de Thévenin nous permet de mettre le dipôle de la figure 3 sous la forme illustrée à la figure 3a.



Détermination de V_T

La tension V_T est la tension aux bornes A, B (voir fig. 3b) :

$$V_T = R(\beta + 1)i$$

D'autre part, la transformation Thévenin-Norton appliquée au circuit de la fig. 3b entraîne le circuit de la fig. 3d. Egalement la transformation Norton- Thévenin conduit au schéma de la fig. 3e.

Maille M *fig. 3e*

$$
\begin{aligned}
-\frac{v_s}{R}(R \parallel R) + ((R \parallel R) + R)i + R(\beta+1)i &= 0 \\
-\frac{v_s}{2} + R(\beta+1+1.5)i &= 0
\end{aligned}
$$

$$
i = \frac{v_s}{R(2\beta+5)}
$$

Il s'ensuit que :

$$
\begin{aligned}
V_T &= R(\beta+1)\frac{v_s}{R(2\beta+5)} \\
&= \frac{\beta+1}{2\beta+5}v_s
\end{aligned}
$$

Détermination de R_T, *fig. 3c*

Pour déterminer la résistance R_T, on éteint les sources indépendantes et on alimente la sortie A, B du dipôle par une source e_0 qui débite le courant i_0 (voir fig. 3c). La résistance R_T est définie donc par :

$$
R_T = \frac{e_0}{i_0}
$$

La loi des nœuds nous permet d'avoir :

$$
i_0 = \frac{e_0}{R} - (\beta+1)j
$$

De plus

$$
j = -\frac{e_0}{R + (R \parallel R)}
$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
i_0 &= \frac{e_0}{R} + (\beta+1)\frac{e_0}{R + (R \parallel R)} \\
R_T &= \frac{e_0}{i_0} \\
&= \left(\frac{1}{R} + \frac{\beta+1}{R + (R \parallel R)}\right)^{-1} \\
&= R\left(\frac{2\beta+5}{3}\right)^{-1} \\
&= \frac{3R}{2\beta+5}
\end{aligned}
$$