Resolução da primeira prova de Teoria Eletromagnética II

Matheus Silva de Lima
Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil
mathlima@poli.ufrj.br

***Resumo*—Este trabalho tem por objetivo apresentar a resolução da Primeira Prova de Teoria Eletromagnética II, aplicada no dia 6 de Abril de 2018, passo a passo, com o auxílio de ferramentas computacionais. O trabalho está organizado de forma a apresentarmos cada questão, e em seguida a resolvemos sucintamente.**

***Palavras-chave*—Teoria Eletromagnetica, TEII, Eletromagnetismo, Equações de Maxwell**

I. INTRODUÇÃO

TEORIA Eletromagnética II é a disciplina que da sequência aos assuntos abordados em Físicas III e IV na grade curricular da Engenharia Eletrônica e de Computação, com foco e aprofundamento naquilo que existe de mais importante na área de eletromagnetismo para a formação de um profissional de Engenheira Eletrônica.

Dessa forma, uma vez que os assuntos abordados nas Físicas III e IV são de suma importância para a continuidade da disciplina, a primeira prova de Teoria Eletromagnética II de 2018.1 consistiu de um apunhado de conceitos já abordados e revisados durante as aulas da disciplina, como por exemplo,: *Equações de Maxwell* e *Leis de Newton*.

II. QUESTÃO I

Um tubo muito fino possui em seu interior uma pequena bola de plástico carregada (Q = 1μC) mostrado na figura abaixo. Uma segunda bola é inserida no sistema. Esta segunda bola é idêntica à primeira. Assumindo que não há atrito, que a parede do tubo não influencia nas cargas das bolas, que as bolas possuem massa de 1g, que a permissividade do tudo é igual do espaço livre e que as bolas não sairão do tubo, calcule:

1) *A distância entre as bolas para a configuração da esquerda*
2) *A distância entre bolas para a configuração da direita, para α = 30, 45, 60*
3) *A distância entre as bolas para a configuração 1 e 2 com permissividade dentro do tubo igual a $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{3}$*
4) *Qual o comportamento do sistema para as condições listadas no item b se a carga da segunda fosse Q/2, -Q, -Q/2 ?*

Item a)

Para a resolução desta questão, é preciso relembrar alguns conceitos de Leis de Newton e de Força entre partículas. Para um sistema em equilíbrio, a aceleração resultante das forças aplicadas na partícula deverá ser zero. Matematicamente, podemos utilizar a terceira lei de Newton e escrever que:

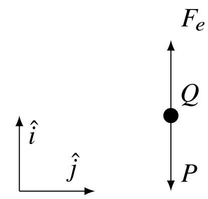

Figura 1. Diagrama de Forças sobre a partícula superior

$$\sum_{i=0}^{N-1} \vec{F_i} = m\vec{a} = 0 \ Newtons \tag{1}$$

Podemos então construir o diagrama de corpo livre da esfera superior e verificar que sobre ela, atuam apenas as forças elétrica e gravitacional. Dessa maneira, ambas as forças deverão se anular e podemos escrever que:

$$\vec{F_g} + \vec{F_e} = 0 \ Newtons \tag{2}$$

Utilizando o sistema de coordenadas $\hat{i}$ e $\hat{j}$, é simples verificar que não há contribuições de ambas as forças na direção do vetor unitário $\hat{i}$, e por fim, equacionamos as forças por:

$$F_g(-\hat{i}) + F_e(\hat{i}) = 0 \rightarrow F_g = F_e \Rightarrow mg = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \tag{3}$$

de onde podemos chegar em

$$d = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 mg}} \ metros \tag{4}$$

O calculo da expressão resulta em: d = 0.957 metros ($g = 9.8 \ m/s^2$)

Item b)

Para a Configuração da Direita, o equacionamento é parecido, com a diferença que agora haverá contribuição da força elétrica para ambas as direções $\hat{i}$ e $\hat{j}$. Podemos assumir que a contribuição em $\hat{i}$ é anulada pelas paredes do tubo, e assim iremos equacionar, novamente, apenas a direção dada pelo vetor unitário $\hat{j}$. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\vec{F_e} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}\hat{i} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}\hat{j} \rightarrow F_e\hat{j} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} sen(\alpha)\hat{j} \ Newtons \tag{5}$$

Onde α é o ângulo formado entre o piso e a parede interna do tubo, como definido na questão. Assim, podemos concluir que:

$$d = \sqrt{\frac{Q^2 sen(\alpha)}{4\pi\epsilon_0 mg}}\ metros \tag{6}$$

Para os ângulos de 30º, 45º e 60º a expressão resulta em, respectivamente: $0,676$, $0,804$ e $0,890$ *metros*

Item c)

Podemos utilizar as expressões já calculadas nos itens a) e b), de forma que só é necessário substituir a permissividade dentro do tubo de ϵ_0 para $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{3}$. Dessa forma:

Para o tubo da esquerda:

$$d = \sqrt{\frac{Q^2}{4\pi\frac{\epsilon_0}{3} mg}}\ metros \tag{7}$$

E para o tubo da direita:

$$d = \sqrt{\frac{Q^2 sen(\alpha)}{4\pi\frac{\epsilon_0}{3} mg}}\ metros \tag{8}$$

O calculo numérico das expressões resulta em uma distância de $0,164$ *metros* para o tubo da esquerda e $0,116$, $0,137$ e $0,152$ *metros* para o tubo da direita, respectivamente para os ângulos de 30º, 45º e 60º.

Item d)

A força elétrica entre duas partículas atua sempre na direção que as une, e seu sentido varia de acordo com as cargas envolvidas na interação. Caso ambas as cargas tenham mesmo "sinal", ou seja, ambas positivas ou negativas, a força é repulsiva e as partículas tendem a assumir uma distância infinita. Caso contrário, a força é atrativa e as cargas tendem a se aproximar até o limite físico de distância nula.

Dito isso, podemos dizer que certamente, caso a segunda carga tenha carga -Q ou $\frac{-Q}{2}$, a distância final do sistema seria nula, uma vez que a direção da força elétrica corroboraria com a Força gravitacional e não a anularia (ou seja, as partículas iriam se aproximar até o limite de d=0).

Já para o caso em que a segunda carga possui carga $\frac{Q}{2}$, podemos aproveitar o resultado obtido no item b), apenas adaptando-o para o novo valor de Carga. Dessa forma, chegamos no resultado:

$$d = \sqrt{\frac{\frac{Q^2}{2} sen(\alpha)}{4\pi\epsilon_0 mg}}\ metros \tag{9}$$

Para os ângulos de $\alpha = 30º$, 45º e 60º, temos um resultado numérico de $0,478$, $0,568$ e $0,629$ *metros*.

III. Questão 2

Duas cargas positivas $+Q$C e duas cargas negativas $-Q$C foram posicionadas nas bases da pirâmide e, uma quinta carga $-Q$C completando a estrutura ilustrada na figura abaixo. A base da pirâmide tem dimensões $d \times dm^2$ e é quadrada, além disso seus lados têm dimensão d m. Sendo assim, calcule:

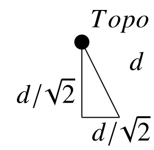

Figura 2. Diagrama Trigonométrico utilizado para o Cálculo da Altura

1) *O vetor campo elétrico no pináculo da pirâmide*
2) *O vetor campo elétrico no centro da base da pirâmide*
3) *O vetor força elétrica nas cargas negativas da base da pirâmide*
4) *Qual o potencial elétrico do sistema, tomando como referência uma das cargas positivas?*
5) *Qual o potencial elétrico do sistema, tomando como referência uma das cargas positivas da base, se a quinta carga fosse substituída por uma carga de* $\frac{+Q}{3}$*?*

Item a)

Podemos utilizar a linearidade do campo elétrico a nosso favor. Uma vez que temos um sistema de partículas e queremos calcular o campo elétrico em um ponto específico, podemos calcular os campos elétricos gerados por cada partícula separadamente sobre o pináculo (topo) da pirâmide, e por fim soma-los. Em um sistemas de coordenadas retangulares $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, isso se torna:

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{Q_i((x-x_i)\hat{i}+(y-y_i)\hat{j}+(z-z_i)\hat{k})}{((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

Os pontos de cada um das quatro cargas que irão contribuir para este campo elétrico em coordenadas retangulares (x,y,z) são:

1) *Q1 = (d/2,d/2,0)*
2) *Q2 = (d/2,-d/2,0)*
3) *Q3 = (-d/2,d/2,0)*
4) *Q4 = (-d/2,-d/2,0)*

É importante notar que o ponto residente sobre o pináculo da pirâmide não participará efetivamente do calculo do campo elétrico, pois não poderíamos definir um campo neste ponto considerando-o, uma vez que isso viola a definição de campo elétrico:

$$\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q} \tag{11}$$

Já o pináculo da pirâmide pode ser encontrado utilizando relações geométricas. A figura deixa clara que o pináculo se encontra sobre $x = 0$, $y = 0$ no plano xy. Já o eixo z encontramos através do teorema de Pitágoras: $z = d\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dessa forma, nos basta resolver a Equação (10) para N = 4 pontos, no ponto de interesse (x,y,z) = Pináculo da pirâmide = $(0,0,d\frac{\sqrt{2}}{2})$:

$$\vec{E}(0,0,d\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{Q(-x_i\hat{i}-y_i\hat{j}+(d\frac{\sqrt{2}}{2}-z_i))\hat{k}}{(x_i^2+y_i^2+(d\frac{\sqrt{2}}{2}-z_i)^2)^{\frac{3}{2}}}+\ldots\Big) \tag{12}$$

Pela simetria do problema, é simples chegarmos a conclusão que essa expressão é igual a $\vec{0}$ para qualquer ponto $\vec{r}$ que resida sobre o eixo z (ou seja, $(x, y) = (0, 0)$). Dessa forma:

$$\vec{E}(0, 0, d\frac{\sqrt{2}}{2}) = \vec{0}\ N/C. \tag{13}$$

Item b)

Novamente, podemos utilizar a linearidade do Campo Elétrico e calcular novamente o Campo Elétrico no ponto de interesse $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Entretanto, desta vez deverá ser utilizado todos os 5 pontos no lugar de quatro, uma vez que a carga sobre o pináculo da pirâmide não é mais tratada como carga de teste. Dessa forma, considerando as cinco Cargas sobre os pontos:

1) *Q1 = (d/2,d/2,0)*
2) *Q2 = (d/2,-d/2,0)*
3) *Q3 = (-d/2,d/2,0)*
4) *Q4 = (-d/2,-d/2,0)*
5) *Q5 = (0,0,$d\frac{\sqrt{2}}{2}$)*

Temos que o Campo Elétrico é dado por:

$$\vec{E}(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{4} \frac{Q_i((0 - x_i)\hat{\imath} + (0 - y_i)\hat{\jmath} + (0 - z_i)\hat{k})}{((0 - x_i)^2 + (0 - y_i)^2 + (0 - z_i)^2)^{\frac{3}{2}}}\ N/C \tag{14}$$

Entretanto, este somatório é, até o índice $N = 3$, igual a $\vec{0}$, pois como já visto no item a), o Campo Elétrico gerado pelas 4 Cargas Q_i da base da pirâmide é igual a zero em qualquer ponto sobre o eixo z ($(x, y) = (0, 0)$).

Em outras palavras, a única contribuição para o Campo Elétrico na base da Pirâmide será dada pela quinta carga, Q_5, residente em seu pináculo. Dessa forma, nosso campo elétrico é igual a:

$$\vec{E}(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_4((0 - 0)\hat{\imath} + (0 - 0)\hat{\jmath} + (0 - d\frac{\sqrt{2}}{2})\hat{k})}{((0 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - d\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^{\frac{3}{2}}}\ N/C \tag{15}$$

$$\vec{E}(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+Qd\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{k}}{(-d\frac{\sqrt{2}}{2})^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q\hat{k}}{d^2}\ N/C \tag{16}$$

Que nada mais é do que o Campo gerado por uma Carga Puntiforme.

Item c)

A força elétrica exercida sobre as cargas na base pode ser calculada por:

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Q_i((x - x_i)\hat{\imath} + (y - y_i)\hat{\jmath} + (z - z_i)\hat{k})}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{\frac{3}{2}}}\ N \tag{17}$$

Onde N é o número de cargas que exercem força sobre a carga de teste.

Para o caso das cargas negativas na Base, temos N=4 e então a Força elétrica será dada por:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\frac{d}{2}, \frac{-d}{2}, 0) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\Big(& \frac{Q((\frac{d}{2} - \frac{d}{2})\hat{\imath} + (\frac{-d}{2} - \frac{d}{2})\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k})}{((\frac{d}{2} - \frac{d}{2})^2 + (\frac{-d}{2} - \frac{d}{2})^2 + (0 - 0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{-Q((\frac{d}{2} - \frac{-d}{2})\hat{\imath} + (\frac{-d}{2} - \frac{d}{2})\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k})}{((\frac{d}{2} - \frac{-d}{2})^2 + (\frac{-d}{2} - \frac{d}{2})^2 + (0 - 0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{+Q((\frac{d}{2} - \frac{-d}{2})\hat{\imath} + (\frac{-d}{2} - \frac{-d}{2})\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k})}{((\frac{d}{2} - \frac{-d}{2})^2 + (\frac{-d}{2} - \frac{-d}{2})^2 + (0 - 0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{-Q((\frac{d}{2} - 0)\hat{\imath} + (\frac{-d}{2} - 0)\hat{\jmath} + (0 - d\frac{\sqrt{2}}{2})\hat{k})}{((\frac{d}{2} - 0)^2 + (\frac{-d}{2} - 0)^2 + (0 - d\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)\ N\end{aligned} \tag{18}$$

Podemos simplificar esta expressão, explicitando a direção na qual cada força atua. Assim, chegamos ao resultado:

$$\vec{F}(\frac{d}{2}, \frac{-d}{2}, 0) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}\Big(\hat{\jmath} + \frac{(\hat{\imath} - \hat{\jmath})}{2\sqrt{2}} - \hat{\imath} + \frac{(\hat{\imath} - \hat{\jmath} - \sqrt{2}\hat{k})}{\frac{125}{4}}\Big)\ N \tag{19}$$

De forma similar, a força elétrica sobre a segunda carga negativa na base pode ser calculada facilmente, utilizando-se da mesma fórmula:

$$\begin{aligned}\vec{F}(\frac{-d}{2}, \frac{d}{2}, 0) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\Big(& \frac{Q((\frac{-d}{2} - \frac{d}{2})\hat{\imath} + (\frac{d}{2} - \frac{d}{2})\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k})}{((\frac{-d}{2} - \frac{d}{2})^2 + (\frac{d}{2} - \frac{d}{2})^2 + (0 - 0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{-Q((\frac{-d}{2} - \frac{-d}{2})\hat{\imath} + (\frac{d}{2} - \frac{d}{2})\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k})}{((\frac{-d}{2} - \frac{-d}{2})^2 + (\frac{d}{2} - \frac{d}{2})^2 + (0 - 0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{+Q((\frac{-d}{2} - \frac{-d}{2})\hat{\imath} + (\frac{d}{2} - \frac{-d}{2})\hat{\jmath} + (0 - 0)\hat{k})}{((\frac{-d}{2} - \frac{-d}{2})^2 + (\frac{d}{2} - \frac{-d}{2})^2 + (0 - 0)^2)^{\frac{3}{2}}} + \\ & + \frac{-Q((\frac{-d}{2} - 0)\hat{\imath} + (\frac{d}{2} - 0)\hat{\jmath} + (0 - d\frac{\sqrt{2}}{2})\hat{k})}{((\frac{-d}{2} - 0)^2 + (\frac{d}{2} - 0)^2 + (0 - d\frac{\sqrt{2}}{2})^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)\ N\end{aligned} \tag{20}$$

O que também pode ser simplificado para:

$$\vec{F}(\frac{-d}{2}, \frac{d}{2}, 0) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}\Big(\hat{\imath} + \frac{(\hat{\jmath} - \hat{\imath})}{2\sqrt{2}} - \hat{\jmath} + \frac{(\hat{\jmath} - \hat{\imath} - \sqrt{2}\hat{k})}{\frac{125}{4}}\Big)\ N \tag{21}$$

Item d)

Podemos utilizar o fato que o potencial elétrico é um campo escalar linear e, portanto, o potencial total para N cargas pontuais é dado pela soma de N potencias elétricos pontuais, ou seja:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{Q_i}{\sqrt{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)}}\ Volts \tag{22}$$

Dessa maneira, o campo elétrico é dado por:

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{\sqrt{((x-d/2)^2+(y-d/2)^2+(z)^2)}} - \frac{1}{\sqrt{((x+d/2)^2+(y-d/2)^2+(z)^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x+d/2)^2+(y+d/2)^2+(z)^2)}} - \frac{1}{\sqrt{((x-d/2)^2+(y+d/2)^2+(z)^2)}} - \frac{1}{\sqrt{((x)^2+(y)^2+(z-d\frac{\sqrt{2}}{2})^2)}}\Big)\ Volts \tag{23}$$

Item e)

Caso a quinta carga seja substituída, basta alterarmos a parcela na qual ela afeta o campo elétrico, não sendo necessário alterar as demais contribuições. Isso nos leva a:

$$V(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{\sqrt{((x-d/2)^2+(y-d/2)^2+(z)^2)}} - \frac{1}{\sqrt{((x+d/2)^2+(y-d/2)^2+(z)^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x+d/2)^2+(y+d/2)^2+(z)^2)}} - \frac{1}{\sqrt{((x-d/2)^2+(y+d/2)^2+(z)^2)}} + \frac{1/5}{\sqrt{((x)^2+(y)^2+(z-d\frac{\sqrt{2}}{2})^2)}}\Big)\ Volts \tag{24}$$

IV. Questão 3

1) *Suponha uma carga pontual Q, está localizada na origem. Assim sendo, mostre que $divD = 0$ para todos os pontos exceto para a origem. Substitua a carga pontual Q por uma densidade volumétrica de carga uniforme ρ_v (distribuída entre $0 < r < r_1$), relacione ρ_v com Q e r_1 de modo que a carga pontual seja a mesma e determine $divD$ para todos os pontos.*
2) *Quatro cargas pontuais de $0.8\eta C$ são posicionadas no espaço livre nos vértices de um quadrado de $4cm$ de lado. Determine a energia potencial total armazenada, e se uma quinta carga, também de $0.8\eta C$ fosse posicionada no centro do quadrado, qual seria a energia potencial total armazenada nessa nova configuração?*
3) *Suponha um filamento quadrado perfeitamente condutor contendo um pequeno resistor de 500Ω com $0,5m$ de lado posicionado sobre o plano xy (com $z = 0$). Determine a corrente no filamento ($i(t)$) se o campo magnético (B) for $B_1 = 0,3cos(120\pi t - 30°)^z T$, $B_2 = 0,4cos(\pi(ct-y))^z T$, onde $c = 3 * 10^8 m/s$*

Item a)

Seguindo o enunciado da questão, podemos substituir a carga puntiforme Q na origem por uma densidade volumétrica de cargas ρ_v, distribuída de tal forma que $0 < \rho_v \leq r_1$.

Esta densidade volumétrica de cargas está portanto contida dentro de uma esfera de raio r_1, cujo volume é dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \longmapsto V \propto r_1^3 \tag{25}$$

Pela definição de densidade volumétrica de cargas, temos que:

$$\rho_v = \lim_{V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V} \longmapsto = \lim_{r_1\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta r_1} \tag{26}$$

Ainda, pelas Equações de Maxwell, temos a relação entre a Densidade volumétrica de cargas e a Densidade de Fluxo Elétrico, dado por:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v \tag{27}$$

Portanto:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \lim_{r_1\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta r_1} \tag{28}$$

Por essa equação podemos ver que para que o Divergente da densidade de Fluxo Elétrico seja diferente de zero, a densidade de cargas ρ_v deve ser diferente de zero. Como a mesma foi definida em termos do raio r_1 da esfera centrada na origem, temos que o vetor posição $\vec{r}$ deve estar entre 0 e r_1 para que $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v$. Entretanto, como tomamos o $\lim_{r_1\to 0}$ no volume da esfera, pelo teorema do confronto, temos que, necessariamente:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} \neq 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_v \Leftrightarrow \vec{r} = \vec{0} \tag{29}$$

e finalmente, utilizando-se de lógica matemática

$$\vec{r} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0 \tag{30}$$

Item b)

A energia potencial em um sistema se relaciona com o potencial elétrico pela seguinte relação:

$$\Delta V q = \Delta U \tag{31}$$

Assim podemos tomar como referencial nulo um ponto no infinito e afirmar que

$$V(x,y,z)q = U(x,y,z) \tag{32}$$

Posicionando o quadrado cuidadosamente no centro do plano xy no espaço livre, os pontos ocupados pelas cargas serão:

1) *Q1 = (2cm,2cm,0)*
2) *Q2 = (2cm,-2cm,0)*
3) *Q3 = (-2cm,2cm,0)*
4) *Q4 = (-2cm,-2cm,0)*

Podemos então utilizar o mesmo procedimento adotado na Questão 2d), e utilizar a linearidade do potencial elétrico para calcular, utilizando a Fórmula (22):

$$V(x,y,z) = \frac{0.8}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{\sqrt{((x-2)^2+(y-2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x+2)^2+(y-2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x-2)^2+(y+2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x+2)^2+(y+2)^2+z^2)}}\Big)\ Volts \tag{33}$$

O que nos leva a:

$$U(x,y,z) = q\frac{0.8}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{\sqrt{((x-2)^2+(y-2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x+2)^2+(y-2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x-2)^2+(y+2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x+2)^2+(y+2)^2+z^2)}}\Big)\ J \tag{34}$$

Caso a quinta carga seja adicionada, ela será posicionada no ponto $P5 = (0,0,0)$, a energia potencial total passará a ser:

$$U(x,y,z) = q\frac{0.8}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{\sqrt{((x-2)^2+(y-2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x+2)^2+(y-2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x-2)^2+(y+2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{((x+2)^2+(y+2)^2+z^2)}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}\Big)\ J \tag{35}$$

Item c)

Podemos utilizar as Equações de Maxwell para campos variáveis no tempo e descobrir a tensão induzida sobre o filamento. Mais especificadamente, utilizando a Lei de Lenz:

$$E_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{36}$$

Onde E_i é a Tensão induzida sobre o fio. Dessa forma:

$$\Phi_1 = \iint_R \vec{B}_1 \cdot d\vec{A} = \iint_R B_1 dA = B_1 \iint_R dA = 0,5^2 B_1\ Wb \tag{37}$$

$$E_1 = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} = 9\pi sen(120\pi t - \measuredangle 30)\ N/C \tag{38}$$

De forma parecida, para o Campo $B_2(t)$ temos:

$$\Phi_2 = \iint_{R=[0,0.5]\times[0,0.5]} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A} = \iint_R B_2 dA = \int_0^{0.5}\int_0^{0.5} B_2 dxdy \tag{39}$$

$$\Phi_2 = 0.2\int_0^{0.5} cos(\pi(ct-y))dy = \frac{0.2}{\pi}(cos\Big(\frac{2\pi ct-\pi}{2}\Big) - cos(\pi ct))\ Wb \tag{40}$$

O que nos da o Campo E_2

$$E_2 = -c(sen\Big(\frac{2\pi ct-\pi}{2}\Big) - sen(\pi ct))\ N/C \tag{41}$$

Enfim, temos que as correntes elétricas induzidas são:

$$i_1(t) = \frac{E_1(t)}{500\Omega} = \frac{9\pi}{500} sen(120\pi t - \measuredangle 30)\ A \tag{42}$$

$$i_2(t) = \frac{E_2}{500\Omega} = -\frac{3*10^8}{500}(sen\Big(\frac{2\pi 3*10^8 t-\pi}{2}\Big) - sen(\pi 3*10^8 t))\ A \tag{43}$$

V. Questão 4

1) *Prove o teorema do divergente, utilizando a lei de Gauss*
2) *Disserte sobre o experimento das duas esferas e suas aplicações em eletromagnetismo.*

Item a)

Seja ∂S uma superfície fechada e $\vec{D}(x,y,z)$ a densidade de fluxo elétrico definida por $\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0\vec{E}(\vec{r})$, a Lei de Gauss nos diz que a integral de superfície sobre S é igual a carga interna total, ou seja:

$$\oiint_{\partial S} \vec{D}\cdot d\vec{A} = Q_{int} \tag{44}$$

Podemos então, utilizando a definição de densidade volumétrica de cargas $\rho_v = \lim_{v\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta v}$, escrever que

$$Q = \iiint_v \rho_v dv \tag{45}$$

E assim igualamos as integrais sobre o volume $v = S$ para encontrar

$$\oiint_{\partial S} \vec{D}\cdot d\vec{A} = \iiint_S \rho_v dv \tag{46}$$

Por fim, utilizamos a Lei de Gauss em sua forma diferencial para relacionarmos a Densidade de Fluxo Elétrico e a Densidade Volumétrica de Cargas, e enfim, chegamos à forma final do Teorema do Divergente:

$$\rho_v = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} \tag{47}$$

$$\oiint_{\partial S} \vec{D}\cdot d\vec{A} = \iiint_S \vec{\nabla}\cdot\vec{D}dv \rightarrow \oiint_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{A} = \iiint_S \vec{\nabla}\cdot\vec{F}dv \tag{48}$$

Item b)

O experimento conhecido por "Experimento de duas esferas"foi realizado por Michael Faraday ao redor de 1837, e consiste basicamente da observação da carga armazenada em esferas concêntricas.

Uma esfera metálica condutora, e uma casca esférica também condutora, foram postas *"uma dentro da outra"*, separadas por um material *dielétrico*. O experimento segue como descrito:

1) *Com o equipamento desmontado, a esfera metálica interna é dada uma carga Q conhecida*
2) *O equipamento é então montado, fechando-se a casca esférica sobre a esfera metálica, de forma que ambas fiquem separados pelo material dielétrico (não condutor)*
3) *A casca esférica exterior é brevemente descarregada, para assegurar-se que possui carga nula*
4) *O equipamento é então desmontado cuidadosamente, utilizando ferramentas de material isolante com objetivo de não se alterar as cargas envolvidas no experimento*

Faraday observou então que a Carga induzida sobre a esfera exterior era exatamente igual *em módulo* a carga conhecida interna, e após repetir o experimento com outros materiais dielétricos, concluiu que mantinha uma relação de independência com o material dielétrico utilizado. Dessa forma, concluiu que devia existir um fluxo elétrico que unisse ambas as esferas.

Esse experimento é fundamental para a história do eletromagnetismo, pois é a primeira comprovação experimental da existência de um fluxo elétrico, e é o primeiro passo para a definição da Lei de Gauss como definida nas Equações de Maxwell.

VI. Conclusão

Neste trabalho foi resolvida toda a primeira prova de Teoria Eletromagnética II, passo a passo, de maneira clara e concisa. Esse trabalho teve então por produto final a melhor compreensão do aluno quanto à prova aplicada, o estudo da linguagem LaTeX, e espera-se que sirva de material de estudo para os próximos alunos que cursarão a disciplina nos próximos semestres.

Referências

[1] Hayt, William Hart, 1920– Engineering electromagnetics / William H. Hayt, Jr., John A. Buck. — 8th ed. p. cm. Includes bibliographical references and index. ISBN 978–0–07–338066–7 (alk. paper) 1. Electromagnetic theory. I. Buck, John A. II. Title. QC670.H39 2010 530.14 1—dc22 2010048332

[2] Nathanael Jr, "Notas de Aula". Rio de Janeiro: 2018