

Principal Component Analysis: dalla teoria alla pratica

Marco Buracchi

Università degli studi di Firenze

19 febbraio 2018



Sommario

Principal Component Analysis

Obiettivi

Funzionamento

Implementazione Python

Strumenti

Implementazione

Caso di studio

Problema

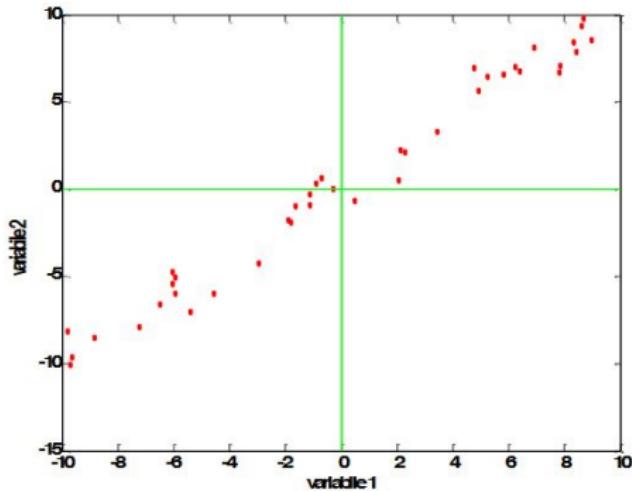
Esperimento

Risultati

PCA

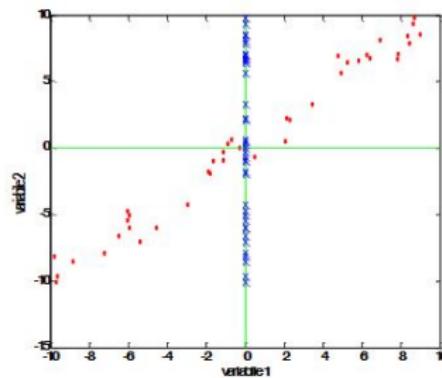
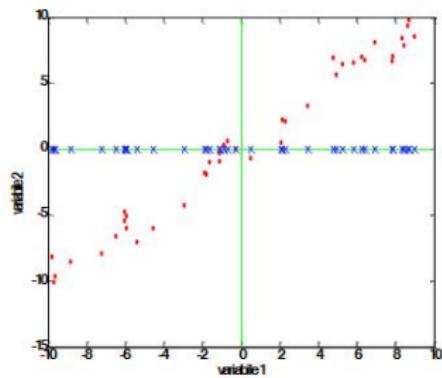
- Trasformazione lineare della matrice dei dati \mathcal{X}
- Misurazione della variazione delle variabili utilizzando un numero minore di "fattori"
- Trasportare il problema in uno spazio k -variato (generalmente bi-trivariato)
- Semplificazione di visualizzazione e lettura dei dati

Esempio



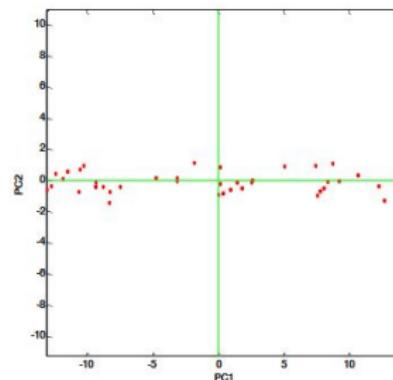
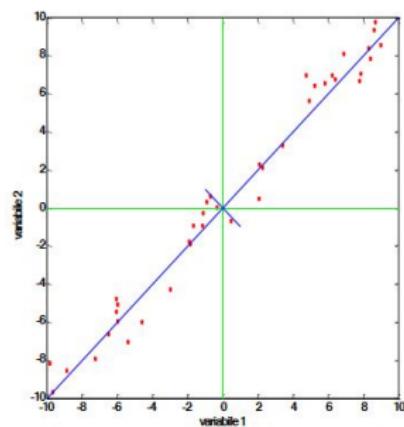
- 40 campioni
- 2 variabili

Esempio - 2



- Nessuna delle due variabili descrive completamente la variabilità dei dati

Componenti



- Prendiamo come componenti principali le linee blu
- La prima componente spiega la massima percentuale di variabilità rappresentabile in una dimensione

Varianza

- Questa percentuale di variabilità può essere calcolata tramite la varianza
- La varianza è un indice della dispersione dei dati lungo una particolare direzione
- La varianza è indipendente dal sistema di riferimento
- Ruotare gli assi mantiene inalterata la varianza totale

Componenti

- La prima componente cattura quasi tutta la variabilità presente nei dati (99.83%)
- La seconda descrive la rimanente (0.17%)
- Generalizzando, le componenti principali successive spiegano una sempre minore percentuale della variabilità originale
- Le ultime componenti principali descrivono principalmente rumore

Funzionamento

1 Standardizzazione

- Standardizzare i dati (media = 0, varianza = 1)
- Possiamo lavorare con variabili su scale e unità di misure differenti

2 Calcolo covarianza/correlazione

- Calcoliamo la matrice S di covarianza

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x - \mu)(x - \mu)^T$$

- Possiamo usare anche la matrice di correlazione

3 Calcolo autovalori/autovettori

- $S \times v = \lambda \times v$

Funzionamento

4 Scelta delle componenti

- Ordiniamo in maniera decrescente gli autovalori ottenuti
- Selezioniamo i primi k
- Costruiamo \mathcal{V} , la matrice dei rispettivi autovettori

5 Rotazione dei dati

- Moltiplichiamo i dati originali per gli autovettori che indicano le direzioni dei nuovi assi (componenti principali)
- I dati ruotati vengono chiamati *score*

$$Sc = \mathcal{X} \times \mathcal{V}$$

Strumenti utilizzati

- Linguaggio: Python
- Libreria per l'analisi dei dati: *PANDAS*
- Dataset: IRIS

PANDAS

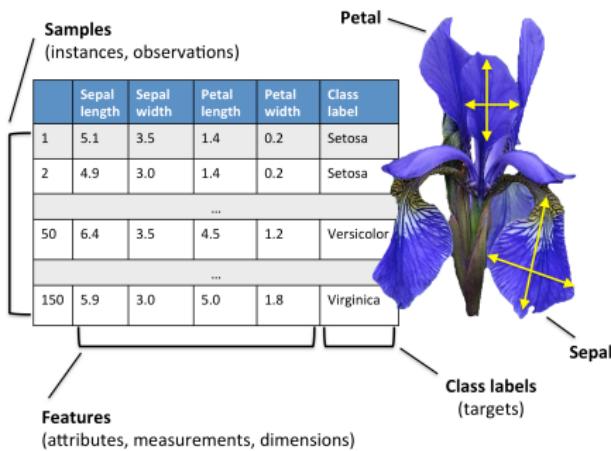
- Libreria Python, open source, ad alte prestazioni e con licenza BSD
- Strutture dati e strumenti per l'analisi facili da usare (R-like)
 - Serie (unidimensionali)
 - Dataframe (bidimensionali)
- Dati organizzati in maniera *relazionale* o *etichettata*
- Sponsorizzato da NumFocus

A Fiscally Sponsored Project of



- sviluppo continuo, a livello mondiale e sistema di donazioni a supporto

Dataset



- Dataset IRIS
- 150 misurazioni di fiori iris
- 3 diverse specie

Caricamento Dataset

```
# download dataset
df = pd.read_csv(
    filepath_or_buffer='https://archive.ics.uci.edu/ml/machine-learning-databases/iris/iris.
                      data',
    header=None,
    sep=',')  
  
# scelgo solamente le colonne con i valori di interesse
df.columns=['sepal_len', 'sepal_wid', 'petal_len', 'petal_wid', 'class']
df.dropna(how="all", inplace=True) # Elimina i valori NA
print(df.tail()) #visualizza ultime 5 righe
```

	sepal_len	sepal_wid	petal_len	petal_wid	class
145	6.7	3.0	5.2	2.3	Iris-virginica
146	6.3	2.5	5.0	1.9	Iris-virginica
147	6.5	3.0	5.2	2.0	Iris-virginica
148	6.2	3.4	5.4	2.3	Iris-virginica
149	5.9	3.0	5.1	1.8	Iris-virginica

Divisione valori

- Matrice valori numerici $X \in \mathcal{M}^{150 \times 4}$
- Vettore specie $y \in \mathcal{M}^{150 \times 1}$

```
# X = tabella con valori, y = etichette
X = df.ix[:, 0:4].values
y = df.ix[:, 4].values
```

Analisi descrittiva

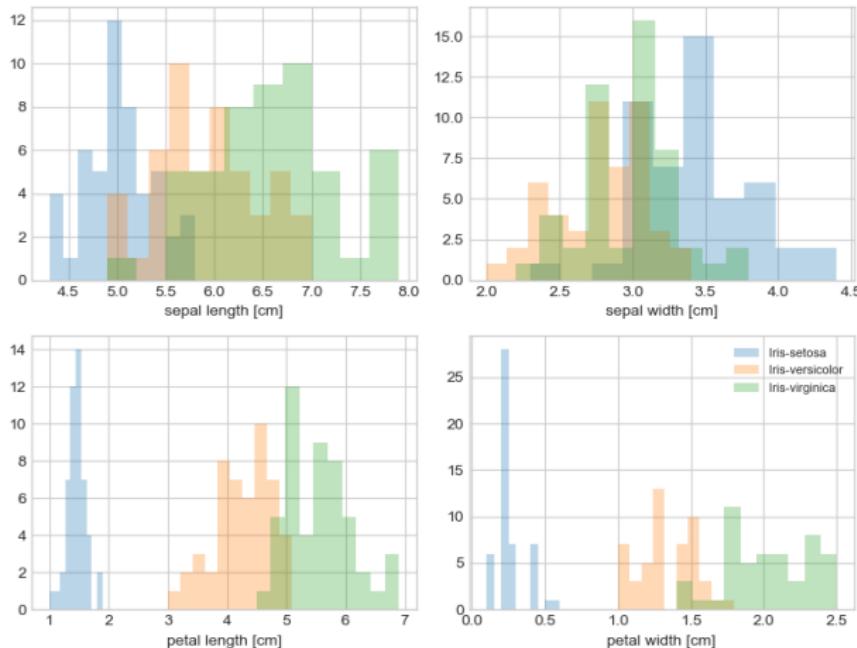
```
# creazione istogrammi
feature_dict = {0: 'sepal length [cm]',
                1: 'sepal width [cm]',
                2: 'petal length [cm]',
                3: 'petal width [cm]'}

with plt.style.context('seaborn-whitegrid'):
    plt.figure(figsize=(8, 6))
    for cnt in range(4):
        plt.subplot(2, 2, cnt+1)
        for lab in ('Iris-setosa', 'Iris-versicolor', 'Iris-virginica'):
            plt.hist(X[y==lab, cnt],
                      label=lab,
                      bins=10,
                      alpha=0.3)
        plt.xlabel(feature_dict[cnt])
    plt.legend(loc='upper right', fancybox=True, fontsize=8)

    plt.tight_layout()
plt.show()
```



Analisi descrittiva



Analisi descrittiva

- Valori su scale diverse richiedono standardizzazione
- Usiamo la funzione di libreria

```
# normalizzazione dati  
X_std = StandardScaler().fit_transform(X)
```

Autovalori e autovettori

```
# vettore delle medie e matrice di covarianza
mean_vec = np.mean(X_std, axis=0)
cov_mat = (X_std - mean_vec).T.dot((X_std - mean_vec)) / (X_std.shape[0]-1)
print('Matrice di covarianza calcolata: \n%s\n' %cov_mat)

# funzione di libreria
print('Matrice di covarianza NumPy: \n%s\n' %np.cov(X_std.T))
separate()

# calcolo autovalori e autovettori su matrice di covarianza
cov_mat = np.cov(X_std.T)
eig_vals, eig_vecs = np.linalg.eig(cov_mat)
print('Autovettori cov: \n%s\n' %eig_vecs)
print('Autovalori cov: \n%s\n' %eig_vals)
separate()

# calcolo autovalori ed autovettori su matrice di correlazione dati standardizzati
cor_mat1 = np.corrcoef(X_std.T)
eig_vals, eig_vecs = np.linalg.eig(cor_mat1)
print('Autovettori corrSTD: \n%s\n' %eig_vecs)
print('Autovalori corrSTD: \n%s\n' %eig_vals)
separate()
```

Autovalori e autovettori

```
# calcolo autovalori ed autovettori su matrice di correlazione dati grezzi
cor_mat2 = np.corrcoef(X.T)
eig_vals, eig_vecs = np.linalg.eig(cor_mat2)
print('Autovettori corr: \n%s\n' %eig_vecs)
print('Autovalori corr: \n%s\n' %eig_vals)
separate()

# decomposizione ai valori singolari
u,s,v = np.linalg.svd(X_std.T)
print('Autovettori SVD: \n%s\n' %u)
separate()
```

- In tutti i casi otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 0.52237162 & -0.37231836 & -0.72101681 & 0.26199559 \\ -0.26335492 & -0.92555649 & 0.24203288 & -0.12413481 \\ 0.58125401 & -0.02109478 & 0.14089226 & -0.80115427 \\ 0.56561105 & -0.06541577 & 0.6338014 & 0.52354627 \end{bmatrix}$$



Selezione componenti

- Gli autovettori calcolati forniscono solamente la direzione perché sono tutti a norma unitaria
- Per scegliere i più interessanti ordiniamo i rispettivi autovalori

```
# ordinamento degli autovalori  
  
## creazione coppie (autovalore,autovettore)  
eig_pairs = [(np.abs(eig_vals[i]), eig_vecs[:,i]) for i in range(len(eig_vals))]  
  
## Ordinamento dal maggiore al minore  
eig_pairs.sort(key=lambda x: x[0], reverse=True)
```

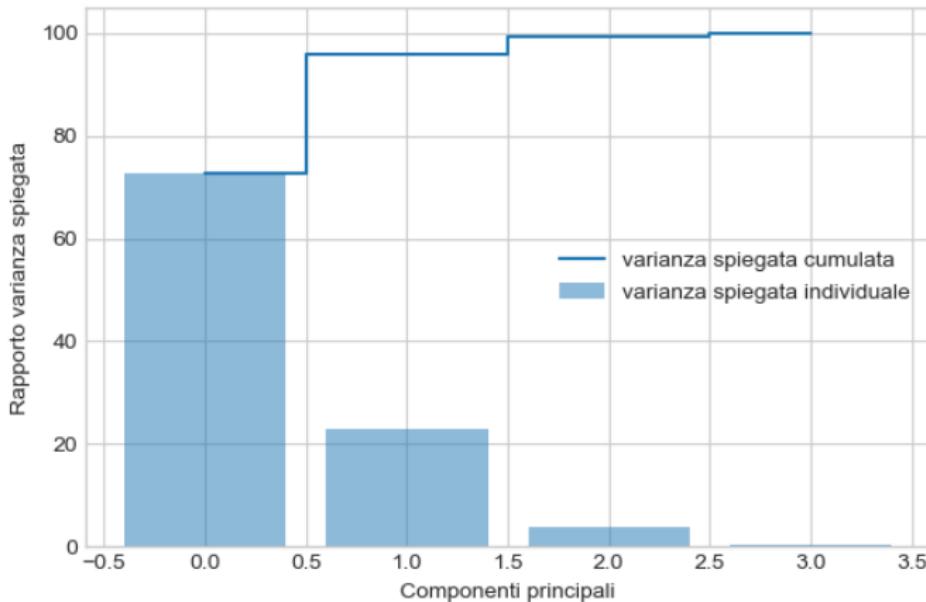
Varianza spiegata

- Calcoliamo la varianza spiegata dalle singole componenti
- Visualizziamo il risultato su un grafico

```
# varianza spiegata
tot = sum(eig_vals)
var_exp = [(i / tot)*100 for i in sorted(eig_vals, reverse=True)]
cum_var_exp = np.cumsum(var_exp)
with plt.style.context('seaborn-whitegrid'):
    plt.figure(figsize=(6, 4))

    plt.bar(range(4), var_exp, alpha=0.5, align='center',
            label='varianza spiegata individuale')
    plt.step(range(4), cum_var_exp, where='mid',
            label='varianza spiegata cumulata')
    plt.ylabel('Rapporto varianza spiegata')
    plt.xlabel('Componenti principali')
    plt.legend(loc='best')
    plt.tight_layout()
    plt.show()
```

Varianza spiegata



Matrice di proiezione

- Passiamo da 4 a 2 dimensioni
- Estraiamo le prime due componenti dalla matrice degli autovettori

```
# matrice di proiezione  
matrix_w = np.hstack((eig_pairs[0][1].reshape(4,1),  
                      eig_pairs[1][1].reshape(4,1)))
```

- Creiamo la matrice di proiezione \mathcal{W}

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0.52237162 & -0.37231836 \\ -0.26335492 & -0.92555649 \\ 0.58125401 & -0.02109478 \\ 0.56561105 & -0.06541577 \end{bmatrix}$$

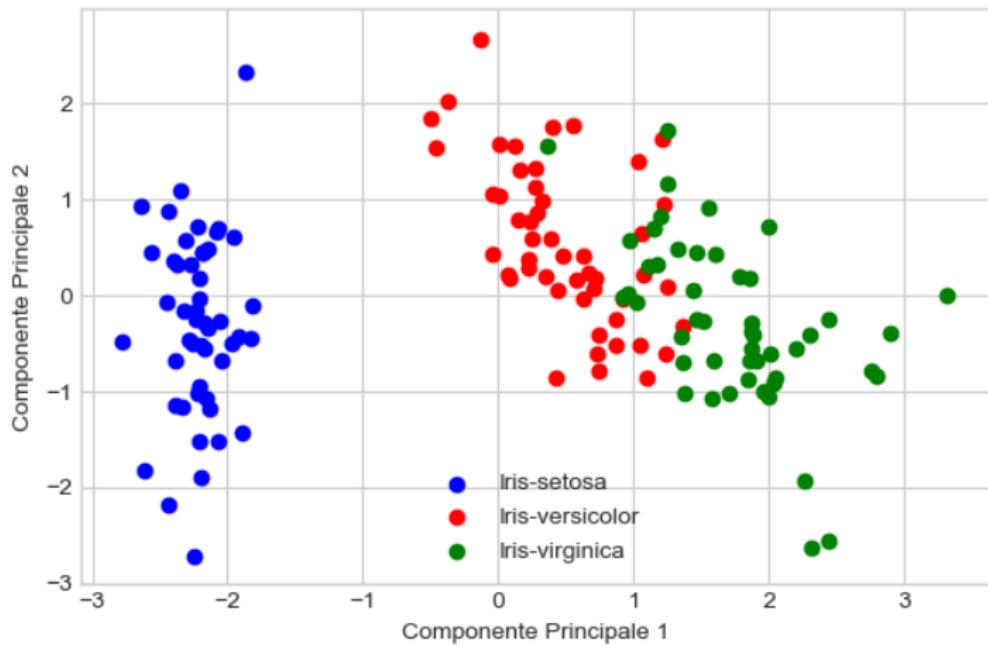
Proiezione

- Proiettiamo nel nuovo sottospazio

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{W} \quad \mathcal{Y} \in \mathcal{M}^{150 \times 2}$$

```
# proiezione nel nuovo spazio  
Y = X_std.dot(matrix_w)
```

Risultato



Post Scriptum

- Esiste una funzione di libreria che calcola \mathcal{Y} direttamente da \mathcal{X}
- L'unico parametro da fornire è il numero di componenti che si vogliono prendere in considerazione

```
# pacchetto scikit-learn
sklearn_pca = sklearnPCA(n_components=2)
Y_sklearn = sklearn_pca.fit_transform(X_std)
```



Problema



- Miliardi di dispositivi informatici connessi in rete nel mondo
- Innumerevoli casi di intrusioni malevole in tali sistemi
- Il problema della sicurezza delle reti è molto serio
- I dati relativi al traffico di rete hanno in genere molte dimensioni
- Difficili da visualizzare e analizzare

Intrusion Detection Systems



- Gli IDS si dividono in due grandi categorie

- 1 Signature based

- Riconoscono le *firme* degli attacchi noti
- 100% di successo delle rilevazioni
- Riconosco solo attacchi noti

- 2 Anomaly based

- Riconoscono un comportamento diverso dal *normale*
- Possono riconoscere attacchi nuovi
- Possono creare falsi allarmi o non riconoscere qualche attacco

Idea

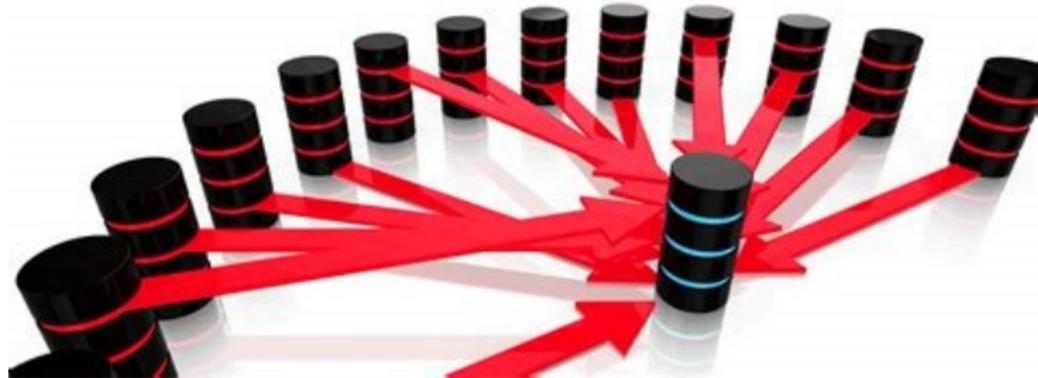


- Possiamo costruire un IDS basato sulla PCA?
- Capiamo un po' meglio come funzionano i principali attacchi

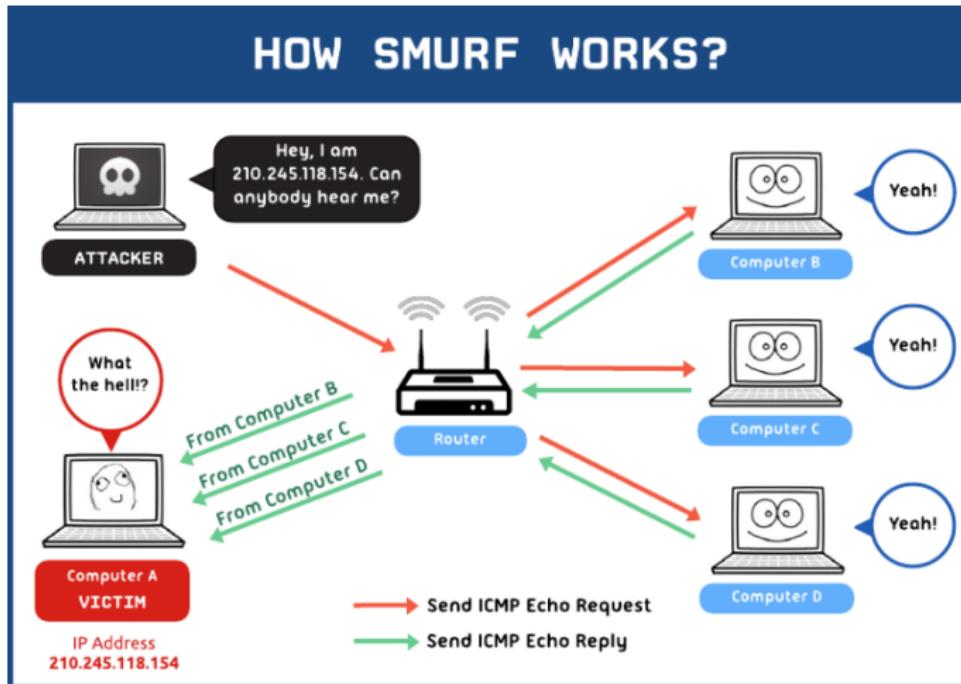
Tipi di attacchi

- Ci focalizzeremo su due tipi di attacchi
 - 1 Denial of Service (DoS)
 - Si cerca di rendere la risorsa sotto attacco troppo occupata (rete) o piena (memoria) per essere utilizzata
 - 2 Network Probe (NP)
 - Scansione sistematica di tutti i dispositivi connessi alla rete e delle loro porte di comunicazione

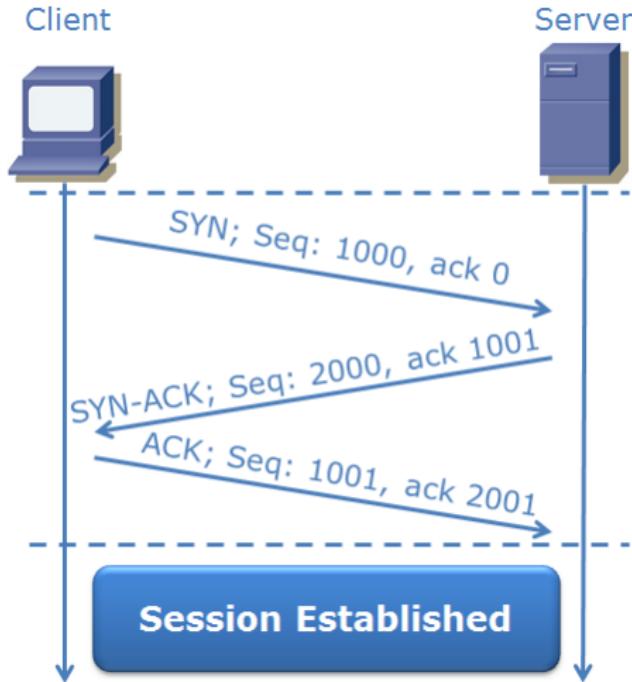
Attacchi DoS



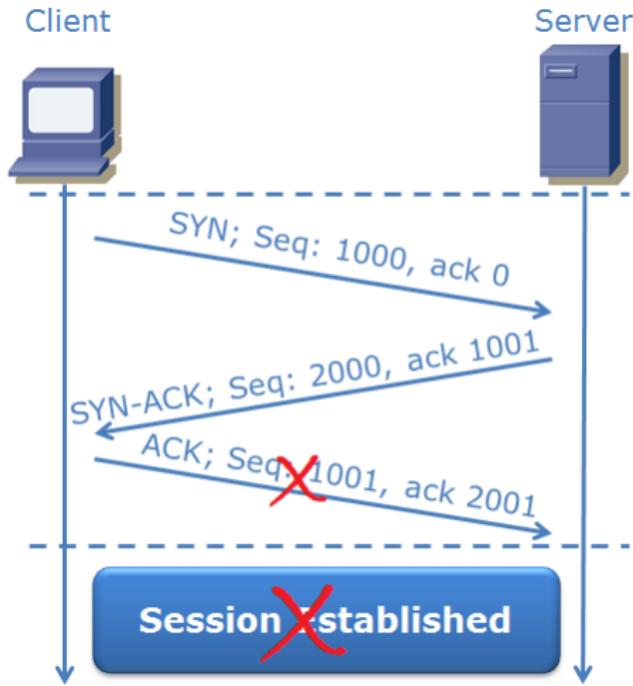
Attacco SMURF



Attacco Neptune



Attacco Neptune



Attacchi NP

- IPSweep
 - Scansione sistematica di tutti gli IP connessi alla rete
- PortSweep
 - Scansione sistematica di tutte le porte di comunicazione dei sistemi scoperti al passo precedente

Analisi dei dati

- 1998 DARPA Intrusion Detection Evaluation data sets
- Utilizzo della rete in 7 settimane
- Presente traffico normale e vari attacchi (tra cui quelli ai quali siamo interessati)
- Preprocessing (estrazione delle intestazioni o *header* dei pacchetti di rete)
- 12 variabili rilevanti

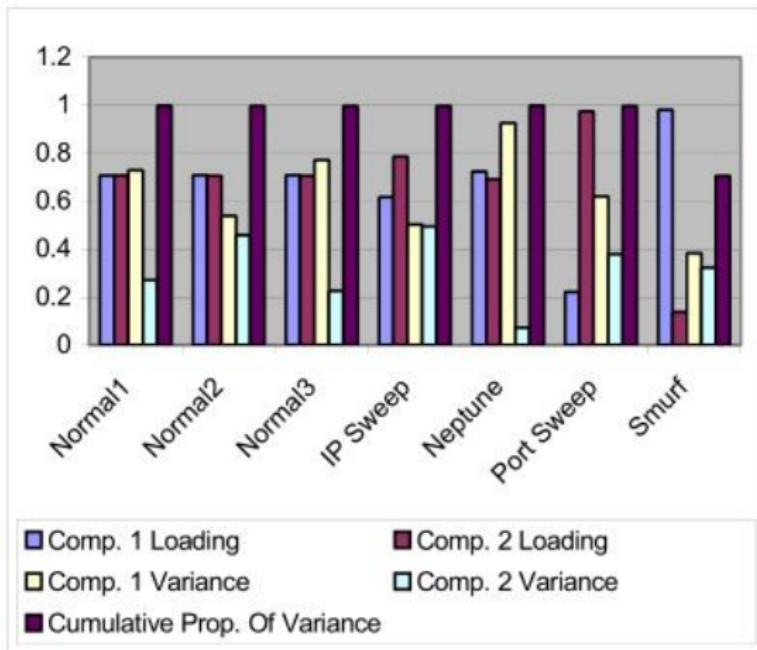
Esperimento

- Creati 7 dataset (uno per ogni attacco e 3 di traffico normale)
- Applicata la PCA ad ognuno di essi per passare da 12 a 2 dimensioni
- Le componenti forniranno la direzione della massima varianza
- I coefficienti della trasformazione (*loading*) ci indicheranno la malignità/benignità del traffico

Loadings

- I loadings forniscono informazioni su quanto ogni variabile influenza sulla relativa componente principale (che è una loro combinazione lineare)
- Focalizzeremo l'attenzione sulle prime due componenti principali e sui relativi loadings

Loadings



The image features a iconic title card from a Looney Tunes cartoon. The background consists of several concentric, slightly curved bands of color transitioning from dark red at the edges to bright orange in the center. Overlaid on this background is the text "That's all Folks!" written in a white, flowing, cursive font. The text is positioned in the lower half of the frame, with "That's all" on the left and "Folks!" on the right, though they appear to be connected by a single, continuous line of script.

That's all Folks!