



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Informatica

Svolgimento esercizi assegnati

MODELLI DI SISTEMI SEQUENZIALI E
CONCORRENTI

MARCO BURACCHI

Prof. Rosario Pugliese

Anno Accademico 2015-2016

INDICE

1	Svolgimento esercizi assegnati	1
1.1	Esercizio 2.13	1
1.2	Esercizio 3.13	4
1.3	Esercizio 4.6	5
1.3.1	punto (a)	5
1.3.2	punto (e)	5
1.3.3	punto (f)	5
1.4	Esercizio 5.7	7
1.5	Esercizio 6.7	8
1.6	Esercizio 7.3	10
1.6.1	Sintassi	10
1.6.2	Semantica operativa	11
1.6.3	Semantica denotazionale	11
1.6.4	Funzione	11
1.7	Esercizio 10.2	13
1.7.1	Operatore di ricorsione	13
1.7.2	Costanti di processo	13
1.7.3	Operatore di replicazione	14
1.8	Esercizio 11.3	15
1.8.1	Caso Id	15
1.8.2	Caso RUS	16
1.8.3	Caso RS	16
1.9	Esercizio 11.8	17
1.10	Esercizio 12.3	19
A	Svolgimento completo esercizio 5.7	20

SVOLGIMENTO ESERCIZI ASSEGNATI

1.1 ESERCIZIO 2.13

Formalizzare e dimostrare la validità dell'induzione strutturale *mutua* che consente la dimostrazione simultanea di diverse proprietà per diverse categorie sintattiche.



A volte si ha la necessità di dimostrare congiuntamente un gruppo di enunciati $S1(n), S2(n), \dots, Sk(n)$ per induzione su n . Un gruppo di enunciati potrebbe essere dimostrato, dimostrando la congiunzione (AND logico) di tutti gli enunciati ($S1(n) \wedge S2(n) \wedge \dots \wedge Sk(n)$). Tuttavia di solito conviene tenere separati gli enunciati e dimostrare per ciascuno la rispettiva base e il passo induttivo. Questo tipo di dimostrazione è detto *induzione mutua*.

Consideriamo ad esempio un interruttore on/off, rappresentato con il seguente automa:

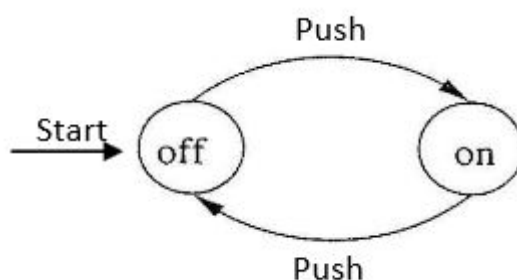


Figura 1.: Un semplice interruttore

Ad ogni pressione del pulsante lo stato cambia tra ON e OFF. Proviamo a dimostrare i seguenti due enunciati:

$S1(n)$: *l'automata si trova nello stato OFF dopo n pressioni $\Leftrightarrow n$ è pari.*

$S2(n)$: *l'automata si trova nello stato ON dopo n pressioni $\Leftrightarrow n$ è dispari.*

Sapendo che un numero n non può essere allo stesso tempo pari e dispari, si potrebbe supporre che $S1 \Rightarrow S2$, e viceversa. Questo però non è sempre vero in quanto, in generale, un automa potrebbe trovarsi contemporaneamente in più stati. Non è questo il caso dell'automata preso come esempio che si trova sempre esattamente in un solo stato, ma questo deve essere dimostrato come parte dell'induzione mutua.

Proviamo a dimostrare le precedenti proprietà:

BASE: Per il caso base scegliamo $n = 0$. Dato che ci sono due enunciati, ognuno dei quali deve essere dimostrato in entrambe le direzioni ($S1$ e $S2$ sono enunciati 'se e solo se'), in effetti ci sono quattro casi per la base e altrettanti per l'induzione:

1. $[S1(0), \Rightarrow]$ Dato che 0 è pari, dobbiamo dimostrare che dopo 0 pressioni l'automata si trova nello stato OFF. Lo stato iniziale dell'automata è proprio OFF e quindi l'automata si trova effettivamente nello stato OFF dopo 0 pressioni.
2. $[S1(0), \Leftarrow]$ L'automata si trova nello stato OFF dopo 0 pressioni, quindi dobbiamo dimostrare che 0 è pari. 0 è pari per definizione quindi non resta altro da dimostrare.
3. $[S2(0), \Rightarrow]$ L'ipotesi afferma che 0 è un numero dispari \Rightarrow l'implicazione è vera.
4. $[S2(0), \Leftarrow]$ L'ipotesi afferma che l'automata si trovi nello stato ON dopo 0 pressioni. Questo è impossibile in quanto all'automata serve almeno una pressione del tasto per arrivare nello stato ON \Rightarrow l'implicazione è vera.

PASSO INDUTTIVO: Supponiamo che $S1(n)$ e $S2(n)$ siano vere, e proviamo a dimostrare $S1(n+1)$ e $S2(n+1)$. Anche questa dimostrazione si divide in 4 parti:

1. $[S1(n+1), \Rightarrow]$ Per ipotesi, $n+1$ è pari. Di conseguenza n è dispari. $S2(n)$ dice che dopo n pressioni l'automata si trova nello stato ON. L'arco da ON a OFF etichettato 'Push' dice che la $n+1$ -esima pressione farà passare l'automata nello stato OFF.
2. $[S1(n+1), \Leftarrow]$ L'ipotesi è che l'automata si trovi nello stato OFF dopo $n+1$ pressioni. Esaminando l'automata vediamo che l'unico modo di pervenire allo stato OFF è di trovarsi nello stato ON e di ricevere

in input il comando 'Push'. Perciò, se l'automa si trova nello stato OFF dopo $n + 1$ pressioni, deve essersi trovato nello stato ON dopo n pressioni. Quindi da $[S2(n), \Leftarrow]$ concludiamo che n è dispari. Dunque $n + 1$ è pari.

3. $[S2(n + 1), \Rightarrow]$ L'ipotesi afferma che $n + 1$ è dispari. Di conseguenza n è pari. $[S1(n), \Rightarrow]$ dice che dopo n pressioni l'automa si trova nello stato OFF. L'arco da OFF a ON con etichetta 'Push' dice che la $n + 1$ -esima pressione farà passare l'automa nello stato ON.
4. $[S2(n + 1), \Leftarrow]$ L'ipotesi è che l'automa si trovi nello stato ON dopo $n + 1$ pressioni. Esaminando l'automa vediamo che l'unico modo di pervenire allo stato ON è di trovarsi nello stato OFF e di ricevere in input il comando 'Push'. Perciò, se l'automa si trova nello stato ON dopo $n + 1$ pressioni, deve essersi trovato nello stato OFF dopo n pressioni. Quindi da $[S1(n), \Leftarrow]$ concludiamo che n è dispari. Dunque $n + 1$ è pari.

Da questo esempio possiamo ricavare il modello di tutte le induzioni mutue:

- Ogni enunciato deve essere dimostrato separatamente nella base e nel passo induttivo.
- Se si tratta di enunciati 'se e solo se', allora entrambe le direzioni di ogni enunciato devono essere dimostrate, sia nella base che nel passo induttivo.

1.2 ESERCIZIO 3.13

Fornire l'espressione, derivante dalla sintassi concreta dell'esercizio 11, che ha il seguente albero di derivazione:

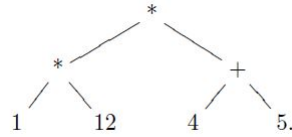


Figura 2.: Albero di derivazione



L'espressione derivante è: $(1 * 12) * (4 + 5)$

1.3 ESERCIZIO 4.6

Dimostrare che la semantica denotazionale delle espressioni regolari soddisfa le seguenti semplici proprietà:

1.3.1 punto (a)

$$E + (F + G) \simeq (E + F) + G$$

1.3.2 punto (e)

$$E(FG) \simeq (EF)G$$

1.3.3 punto (f)

$$E(F + G) \simeq EF + EG$$



La semantica denotazionale delle espressioni regolari è così definita:

- $\mathcal{L}[\emptyset] = \emptyset$
- $\mathcal{L}[1] = \{\varepsilon\}$
- $\mathcal{L}[a] = \{a\}$ (per $a \in A$)
- $\mathcal{L}[E + F] = \mathcal{L}[E] \cup \mathcal{L}[F]$
- $\mathcal{L}[E; F] = \mathcal{L}[E] \cdot \mathcal{L}[F]$
- $\mathcal{L}[E^*] = (\mathcal{L}[E])^*$

Da queste equivalenze possiamo ricavare:

- punto (a):

$$E + (F + G) \simeq (E + F) + G$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[E + (F + G)] &= \mathcal{L}[E] \cup \mathcal{L}[F + G] \\ &= \mathcal{L}[E] \cup \mathcal{L}[F] \cup \mathcal{L}[G] \\ &= \mathcal{L}[E + F] \cup \mathcal{L}[G] \\ &= \mathcal{L}[(E + F) + G]\end{aligned}$$

- punto (e):

$$E(FG) \simeq (EF)G$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[[E(FG)]] &= \mathcal{L}[[E]] \cdot \mathcal{L}[[FG]] \\ &= \mathcal{L}[[E]] \cdot \mathcal{L}[[F]] \cdot \mathcal{L}[[G]] \\ &= \mathcal{L}[[EF]] \cdot \mathcal{L}[[G]] \\ &= \mathcal{L}[[(EF)G]]\end{aligned}$$

- punto (f):

$$E(F + G) \simeq EF + EG$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[[E(F + G)]] &= \mathcal{L}[[E]] \cdot \mathcal{L}[[F + G]] \\ &= \mathcal{L}[[E]] \cdot (\mathcal{L}[[F]] \cup \mathcal{L}[[G]]) \\ &= (\mathcal{L}[[E]] \cdot \mathcal{L}[[F]]) \cup (\mathcal{L}[[E]] \cdot \mathcal{L}[[G]]) \\ &= \mathcal{L}[[EF + EG]]\end{aligned}$$

1.4 ESERCIZIO 5.7

Siano:

$$\mathbf{S} = \lambda xyz.xz(yz)$$

$$\mathbf{K} = \lambda xy.x$$

$$\mathbf{I} = \lambda x.x$$

Trovare la forma normale dei due termini:

$$(\lambda y.yyy)(\mathbf{KI}(\mathbf{SS})) \text{ e } \mathbf{SSSSSSS}$$



$$\begin{aligned} (\lambda y.yyy)(\mathbf{KI}(\mathbf{SS})) &= (\mathbf{KI}(\mathbf{SS}))(\mathbf{KI}(\mathbf{SS}))(\mathbf{KI}(\mathbf{SS})) \\ &= ((\lambda y.\mathbf{I})(\mathbf{SS}))((\lambda y.\mathbf{I})(\mathbf{SS}))((\lambda y.\mathbf{I})(\mathbf{SS})) \\ &= \mathbf{III} \\ &= \mathbf{II} \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{SSSSSSS} &= (\lambda xyz.xz(yz))\mathbf{SSSSSS} \\ &= (\lambda yz.\mathbf{Sz}(yz))\mathbf{SSSSS} \\ &= (\lambda z.\mathbf{Sz}(\mathbf{Sz}))\mathbf{SSSS} \\ &= \mathbf{SS}(\mathbf{SS})\mathbf{SSS} \\ &= (\lambda yz.\mathbf{Sz}(yz))(\mathbf{SS})\mathbf{SSS} \\ &= (\lambda z.\mathbf{Sz}(\mathbf{SS})z)\mathbf{SSS} \\ &= \mathbf{SS}(\mathbf{SSS})\mathbf{SS} \\ &= (\lambda yz.\mathbf{Sz}(yz))(\mathbf{SSS})\mathbf{SS} \\ &= (\lambda z.\mathbf{Sz}(\mathbf{SSS}z))\mathbf{SS} \\ &= \mathbf{SS}(\mathbf{SSSS})\mathbf{S} \\ &= (\lambda yz.\mathbf{Sz}(yz))(\mathbf{SSSS})\mathbf{S} \\ &\vdots \\ &= \lambda za.aa(aa(aa(\lambda b.bb(bb)))) \end{aligned}$$

Lo svolgimento completo si trova in appendice A.

1.5 ESERCIZIO 6.7

Risolvere le equazioni fra linguaggi:

1. $X = \{a\} \cdot X$
2. $X = \{a\} \cup (\{b\} \cdot X)$

dopo aver scelto gli opportuni domini e verificato che \cdot e \cup sono operazioni continue.



Sia $\Sigma = \{a, b\}$ e $L, M, N \subseteq \Sigma^*$. Definiamo la concatenazione \cdot tra linguaggi

$$L \cdot M = \{ss' \mid s \in L \wedge s' \in M\}$$

Questa operazione gode delle seguenti proprietà :

- Possiede l'*elemento neutro* $\{\varepsilon\}$: $\varepsilon \cdot L = L \cdot \varepsilon = L$
- Possiede l'*elemento nullo* $\{\emptyset\}$: $\emptyset \cdot L = L \cdot \emptyset = \emptyset$
- *Associatività* : $(L \cdot M) \cdot N = L \cdot (M \cdot N)$
- *Monotonia*: $L \subseteq L' \text{ e } M \subseteq M' \Rightarrow L \cdot M \subseteq L' \cdot M'$

Prendendo come domini il dominio piatto $\text{up}(L)$ e $\text{up}(M)$ che contengono solamente catene finite, dal momento che Σ^* contiene solo stringhe finite e che l'operazione \cdot è monotona, possiamo concludere che essa è anche continua.

Definiamo adesso l'unione \cup di linguaggi

$$L \cup M = \{s \mid s \in L \vee s \in M\}$$

Anche questa operazione gode delle seguenti proprietà :

- Possiede l'*elemento neutro* $\{\emptyset\}$: $\emptyset \cup L = L \cup \emptyset = L$
- *Associatività* : $(L \cup M) \cup N = L \cup (M \cup N)$
- *Monotonia*: $L \subseteq L' \text{ e } M \subseteq M' \Rightarrow L \cup M \subseteq L' \cup M'$

Con lo stesso ragionamento possiamo quindi concludere che anche \cup è continua.

Per risolvere le due equazioni proviamo ad applicare il metodo delle approssimazioni successive. Iniziamo sostituendo nella prima equazione \emptyset al posto della X e otteniamo

$$\emptyset = \{a\} \cdot \emptyset = \emptyset$$

In questo caso vediamo che con un solo passaggio abbiamo ottenuto una soluzione dell'equazione ed infatti \emptyset è il minimo punto fisso dell'equazione.

Proviamo ad applicare lo stesso procedimento nella seconda equazione.

$$\begin{aligned} F^0 \emptyset &= \{a\} \cup (\{b\} \cdot \emptyset) = \{a\} \cup \emptyset = \{a\} \\ F^1 \{a\} &= \{a\} \cup (\{b\} \cdot \{a\}) = \{a\} \cup \{ba\} = \{a, ba\} \\ F^2 \{a, ba\} &= \{a\} \cup (\{b\} \cdot \{a, ba\}) = \{a\} \cup \{ba, bba\} = \{a, ba, bba\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Non è difficile convincersi che il linguaggio generato è b^*a che è anche la soluzione dell'equazione, infatti

$$b^*a = \{a\} \cup (\{b\} \cdot b^*a) = b^*a$$

1.6 ESERCIZIO 7.3

Introdurre in SLF un tipo di dato *lista di naturali* e scrivere una funzione che, data una lista, ne calcola la lunghezza.



1.6.1 Sintassi

Per introdurre il tipo di dati *lista di naturali* abbiamo sicuramente bisogno di aggiungere i nuovi simboli $\{[,]\}$ e le nuove funzioni di base **hd**(*l*), **tl**(*l*), **null**(*l*) e **remove**(*n*, *l*) alla sintassi di SLF. Aggiungiamo ai valori di base il tipo di dato *lista di naturali* definito come:

1. $[\]$ è una lista di naturali.
2. $\{[n, l] \mid n \in \mathbb{NAT}, l \text{ è una lista di naturali}\}$ è una lista di naturali.

Definiamo le funzioni di base che in generale si trovano associate alle liste:

- ***n* :: *l***: questo è il costruttore che aggiunge *n* in testa alla lista *l*.
- **hd**(*l*): questa funzione restituisce il primo elemento della lista (senza rimuoverlo).
- **tl**(*l*): questa funzione restituisce l'ultimo elemento della lista (senza rimuoverlo).
- **null**(*l*): questa funzione restituisce 0 (*true*) se la lista è vuota o un numero $n + 1$ (*false*) altrimenti.
- **remove**(*n*, *l*): questa funzione rimuove la prima occorrenza dell'elemento *n* dalla lista *l* e restituisce la lista risultante

Con queste aggiunte, la nuova sintassi di SLF diventa la seguente:

$P ::= \text{letrec } D \text{ in } T$

$B ::= n \mid l$

$T ::= x_i \mid B \mid b_j(T_1, \dots, T_m) \mid f_r(T_1, \dots, T_{\rho(r)}) \mid \text{if } T \text{ then } T_1 \text{ else } T_2$

$D ::= f_1(x_1, \dots, x_{\rho(1)}) \Leftarrow T_1, \dots, f_n(x_1, \dots, x_{\rho(n)}) \Leftarrow T_n$

$\rho(j)$ è l'arietà di f_j , $1 \leq j \leq n$

$l ::= [] \mid n :: l$

$\rho(j)$ è l'arietà di f_j , $1 \leq j \leq n$

1.6.2 Semantica operativa

Avendo aggiunto un tipo di dato di base, la semantica operativa deve prevedere che si possano valutare funzioni che abbiano, come argomenti, anche le liste oltre ai naturali. Per questo motivo la regola di inferenza (Bas_1) diventa:

$$\frac{}{b_j(B_1, \dots, B_m) \rightarrow_D B} \quad b_j(B_1, \dots, B_m) = B \quad (\text{Bas}_1)$$

1.6.3 Semantica denotazionale

Sicuramente la semantica denotazionale ha bisogno di qualche modifica in più, a partire dai tipi delle funzioni semantiche. Dobbiamo considerare che adesso i programmi (risp. i termini) possono restituire liste (possono essere composti da liste) e il dominio $(\text{FUN}_m)^n$ rappresenterà il dominio delle funzioni continue con m argomenti che potranno essere naturali o liste. Per questi motivi i nuovi tipi saranno i seguenti:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: \text{Prog} \rightarrow (\text{NAT} + \text{LIST}) \\ \mathcal{D} &: \text{Decl} \rightarrow (\text{FUN}_m)^n \\ \mathcal{T} &: \text{Term} \rightarrow (\text{FUN}_m)^n \rightarrow (\text{NAT} + \text{LIST})^m \rightarrow (\text{NAT} + \text{LIST}) \\ \mathcal{B} &: \text{Base} \rightarrow (\text{NAT} + \text{LIST}) \end{aligned}$$

La semantica denotazionale, a questo punto, ha bisogno dell'aggiunta delle funzioni di interpretazione per la nuova classe sintattica B :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[\![n]\!] &= n \\ \mathcal{B}[\![l]\!] &= l \\ \mathcal{T}[\![B]\!] &= \lambda \vec{F}. \lambda \vec{X}. \mathcal{B}[\![B]\!] \end{aligned}$$

1.6.4 Funzione

La funzione richiesta può essere implementata come segue:

$f(l) \Leftarrow \text{if null}(l) \text{ then } 0 \text{ else } 1 + f(\text{remove}(\text{hd}(l), l))$

1.7 ESERCIZIO 10.2

Si scriva un termine che descriva un distributore automatico in grado di offrire acqua o cioccolato un numero illimitato di volte, senza accettare monete fino a che non è stato servito l'utente precedente. Si risolva l'esercizio in tre modi: con l'operatore di ricorsione, con la definizione di costanti di processo e con l'operatore di replicazione.



1.7.1 Operatore di ricorsione

Utilizzando l'operatore di ricorsione il termine richiesto può essere così definito:

$$\text{recX.coin.}(\overline{\text{choc}}.X + \overline{\text{water}}.X)$$

Si può verificare che le possibili computazioni non accettano monete prima che il prodotto venga effettivamente ritirato. Una delle computazioni possibili, infatti, è la seguente:

$$\begin{array}{l} \text{recX.coin.}(\overline{\text{choc}}.X + \overline{\text{water}}.X) \xrightarrow{\text{coin}} \\ \begin{array}{l} \overline{\text{choc}}.\text{recX.coin.}(\overline{\text{choc}}.X + \overline{\text{water}}.X) \\ + \\ \overline{\text{water}}.\text{recX.coin.}(\overline{\text{choc}}.X + \overline{\text{water}}.X) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{in questo momento} \\ \text{non accetta una nuova} \\ \text{moneta finché non} \\ \text{viene consegnata l'acqua} \\ \text{o il cioccolato} \end{array} \right. \end{array}$$

1.7.2 Costanti di processo

Se vogliamo risolvere il problema utilizzando costanti di processo, la logica resta la stessa. Definendo la costante D come

$$D \triangleq \text{coin.}(\overline{\text{choc}}.D + \overline{\text{water}}.D)$$

il risultato ottenuto è identico. La computazione risultante infatti è :

$$\begin{array}{ccc}
\text{coin}.\overline{(\text{choc}.D + \overline{\text{water}.D})} & \xrightarrow{\text{coin}} & \\
\overline{(\text{choc}.D + \overline{\text{water}.D})} & & \text{(come sopra)}
\end{array}$$

1.7.3 Operatore di replicazione

Similare è anche la soluzione che prevede l'utilizzo dell'operatore di replicazione. Definiamo D come

$$(\bar{a} \mid !a.\text{coin}.\overline{(\text{choc}.\bar{a} + \overline{\text{water}.\bar{a}})}) \backslash a$$

e vediamo ad esempio una possibile computazione:

$$\begin{array}{ccc}
(\bar{a} \mid !a.\text{coin}.\overline{(\text{choc}.\bar{a} + \overline{\text{water}.\bar{a}})}) \backslash a & \xrightarrow{\tau} & \\
\frac{(\text{coin}.\overline{(\text{choc}.\bar{a} + \overline{\text{water}.\bar{a}})}) \mid !a.\text{coin}.\overline{(\text{choc}.\bar{a} + \overline{\text{water}.\bar{a}})}) \backslash a}{((\overline{(\text{choc}.\bar{a} + \overline{\text{water}.\bar{a}})}) \mid !a.\text{coin}.\overline{(\text{choc}.\bar{a} + \overline{\text{water}.\bar{a}})}) \backslash a} & \xrightarrow{\text{coin}} & \\
((\overline{(\text{choc}.\bar{a} + \overline{\text{water}.\bar{a}})}) \mid !a.\text{coin}.\overline{(\text{choc}.\bar{a} + \overline{\text{water}.\bar{a}})}) \backslash a & & \text{(come sopra)}
\end{array}$$

1.8 ESERCIZIO 11.3

Utilizzando la caratterizzazione delle simulazioni forti vista nell'Esercizio 11.1, si provi che Id è una simulazione e che se R ed S sono simulazioni allora $R \cup S$ ed RS sono simulazioni.



La caratterizzazione alla quale si fa riferimento è quella che afferma che una relazione $R \subseteq Q \times Q$ è una simulazione forte se e solo se

$$R^{-1} \xrightarrow{a} \subseteq \xrightarrow{a} R^{-1} \quad \forall a \in A$$

Dalla definizione di composizione di relazioni ricaviamo dal primo membro che $\forall p, q \in Q$ e $\forall a \in A$

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle \in R^{-1} \xrightarrow{a} &\Leftrightarrow \exists r : (p R^{-1} r) \wedge (r \xrightarrow{a} q) \\ &\Leftrightarrow \exists r : (r R p) \wedge (r \xrightarrow{a} q) \end{aligned} \quad (1.1)$$

similarmente dal secondo membro

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle \in \xrightarrow{a} R^{-1} &\Leftrightarrow \exists p' : (p \xrightarrow{a} p') \wedge (p' R^{-1} q) \\ &\Leftrightarrow \exists p' : (p \xrightarrow{a} p') \wedge (q R p') \end{aligned} \quad (1.2)$$

dalla caratterizzazione sappiamo che (1.1) \Rightarrow (1.2)

Dimostriamo adesso che questa implicazione vale per tutti e tre i nostri casi e quindi che Id , $R \cup S$ e RS sono simulazioni forti.

1.8.1 Caso Id

In questo caso vale che $R^{-1} = R = Id$. Dalla (1.1) sappiamo che $\langle p, q \rangle \in Id^{-1} \xrightarrow{a}$ e quindi, in particolare, che $\exists r : (p Id^{-1} r) \wedge (r \xrightarrow{a} q)$.

Poiché r è in relazione Id con p , ricaviamo che $p = r$ e che $p \xrightarrow{a} q$. Da questo si vede che l'implicazione è verificata. Infatti, $(p \xrightarrow{a} q) \wedge (q Id q)$

1.8.2 Caso $R \cup S$

Per ipotesi, R e S sono simulazioni quindi, sempre dalla (1.1), sappiamo che:

$$\langle p, q \rangle \in R^{-1} \xrightarrow{a} \Leftrightarrow \exists r : (r R p) \wedge (r \xrightarrow{a} q) \quad (1.3)$$

$$\langle p, q \rangle \in S^{-1} \xrightarrow{a} \Leftrightarrow \exists s : (s S p) \wedge (s \xrightarrow{a} q) \quad (1.4)$$

Adesso dobbiamo dimostrare che $\forall p, q \in Q$ e $\forall a \in A$

$$\exists r : (r R \cup S p) \wedge (r \xrightarrow{a} q) \Rightarrow \exists p' : (p \xrightarrow{a} p') \wedge (q R \cup S p')$$

Procediamo con la dimostrazione:

$$\exists r : (r R \cup S p) \wedge (r \xrightarrow{a} q) \Rightarrow \exists p' : (p \xrightarrow{a} p') \wedge (q R \cup S p')$$

\Updownarrow

$$\exists r : ((r R p) \vee (r S p)) \wedge (r \xrightarrow{a} q) \Rightarrow \exists p' : (p \xrightarrow{a} p') \wedge ((q R p') \vee (q S p'))$$

I casi sono due:

- se $r R p$, allora, per definizione di simulazione, se $r \xrightarrow{a} q$ allora $p \xrightarrow{a} p'$ per qualche $p' \in Q$ tale che $q R p'$ e questo soddisfa l'implicazione.
- similamente, se $r S p$, allora, per definizione di simulazione, se $r \xrightarrow{a} q$ allora $p \xrightarrow{a} p'$ per qualche $p' \in Q$ tale che $q S p'$ e questo soddisfa l'implicazione.

1.8.3 Caso RS

Come per il caso $R \cup S$ partiamo dall'ipotesi che R e S sono simulazioni. Quindi abbiamo che

$$\langle p, q \rangle \in RS^{-1} \xrightarrow{a} \Leftrightarrow \exists r : (r RS p) \wedge (r \xrightarrow{a} q)$$

e dobbiamo dimostrare che

$$\exists r : (r RS p) \wedge (r \xrightarrow{a} q) \Rightarrow \exists p' : (p \xrightarrow{a} p') \wedge (q RS p')$$

Per definizione di composizione di relazioni, se $\exists r : (r RS p)$ allora $\exists s : r R s S p$ e dato che R e S sono simulazioni questo implica che $\exists s' : s \xrightarrow{a} s'$ con $q R s'$ (perché $r \xrightarrow{a} q$) e che $\exists p' : p \xrightarrow{a} p'$ e $s' S p'$. Da questo si deduce che $q RS p'$ come richiesto.

1.9 ESERCIZIO 11.8

Dimostrare che l'unione di tutte le bisimulazioni di branching (\approx_b) è una bisimulazione di branching e che essa è un'equivalenza.



Possiamo iniziare dimostrando che l'unione di due bisimulazioni di branching è ancora una bisimulazione di branching. Supponiamo che S_1, S_2 siano due bisimulazioni di branching. Per definizione, se, dati $\langle p, q \rangle \in S_1 \cup S_2$ e $p \xrightarrow{\mu} p'$ con $\mu \in A_\tau$ e $p' \in Q$ allora deve valere almeno una delle seguenti due condizioni:

1. $\mu = \tau$ e $\langle p', q \rangle \in S_1 \cup S_2$
2. $q \Rightarrow q'' \xrightarrow{\mu} q'$ per qualche $q', q'' \in Q$ tali che $\langle p, q'' \rangle \in S_1 \cup S_2$ e $\langle p', q' \rangle \in S_1 \cup S_2$

Se $\langle p, q \rangle \in S_1 \cup S_2$ allora o $\langle p, q \rangle \in S_1$ o $\langle p, q \rangle \in S_2$. Senza perdere in generalità supponiamo che $\langle p, q \rangle \in S_1$. Per definizione, se $\langle p, q \rangle \in S_1$ e $p \xrightarrow{\mu} p'$ allora:

1. $\mu = \tau$ e $\langle p', q \rangle \in S_1$ e quindi $\langle p', q \rangle \in S_1 \cup S_2$
2. $q \Rightarrow q'' \xrightarrow{\mu} q'$ per qualche $q', q'' \in Q$ tali che $\langle p, q'' \rangle \in S_1$ e $\langle p', q' \rangle \in S_1$ e quindi $\langle p, q'' \rangle \in S_1 \cup S_2$ e $\langle p', q' \rangle \in S_1 \cup S_2$

In entrambi i casi le proprietà valgono. Generalizzando, è possibile vedere \approx_b come l'unione delle singole bisimulazioni $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \dots$

Per dimostrare che \approx_b è un'equivalenza dobbiamo dimostrare che è *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*. Per fare questo in maniera agevole, dimostriamo prima che le seguenti relazioni sono bisimulazioni di branching assumendo che Id sia la funzione *identità* e che ogni S_i sia una bisimulazione di branching:

1. Id
2. S^{-1}
3. $S_1 S_2$

Dimostriamo il punto 1: Per definizione, se $\langle p, p \rangle \in Id$ e $p \xrightarrow{\mu} p'$ allora il secondo punto della definizione di bisimilarità di branching è soddisfatto in questo modo:

- $p \Rightarrow p \xrightarrow{\mu} p'$ e $\langle p, p \rangle \in \text{Id}$ come $\langle p', p' \rangle \in \text{Id}$

Similarmente, per il punto 2 dobbiamo far vedere che se $\langle p, q \rangle \in S^{-1}$ allora deve valere:

- $q \Rightarrow q \xrightarrow{\mu} q'$ e $\langle p, q \rangle, \langle p', q' \rangle \in S^{-1}$

Se $\langle p, q \rangle \in S^{-1}$ allora $\langle q, p \rangle \in S$ e, se $q \xrightarrow{\mu} q'$ allora vale:

- $p \Rightarrow p \xrightarrow{\mu} p'$ e $\langle q, p \rangle, \langle q', p' \rangle \in S$

Se $\langle q', p' \rangle \in S$ allora $\langle p', q' \rangle \in S^{-1}$ come volevamo dimostrare ($\langle p, q \rangle \in S^{-1}$ ovviamente).

Facciamo lo stesso ragionamento per il punto 3. Supponiamo che $\langle p, q \rangle \in S_1 S_2$ e facciamo vedere che se $p \xrightarrow{\mu} p'$ allora vale:

- $q \Rightarrow q \xrightarrow{\mu} q'$ e $\langle p, q \rangle, \langle p', q' \rangle \in S_1 S_2$

Se $\langle p, q \rangle \in S_1 S_2$ allora esiste un r tale che $\langle p, r \rangle \in S_1$ e $\langle r, q \rangle \in S_2$. Come sopra, da queste due ipotesi ricaviamo che:

- $r \Rightarrow r \xrightarrow{\mu} r'$ e $\langle p, r \rangle, \langle p', r' \rangle \in S_1$
- $q \Rightarrow q \xrightarrow{\mu} q'$ e $\langle r, q \rangle, \langle r', q' \rangle \in S_2$

Se $\langle p, r \rangle, \langle p', r' \rangle \in S_1$ e $\langle r, q \rangle, \langle r', q' \rangle \in S_2$ allora $\langle p, q \rangle, \langle p', q' \rangle \in S_1 S_2$ come richiesto.

Grazie a queste proprietà possiamo dimostrare che \approx_b è un'equivalenza.

Dal primo punto segue che $\forall p \in Q \ p \approx_b p$ e quindi abbiamo la *riflessività*.

Per la *simmetria* facciamo vedere che se $p \approx_b q$ allora $\langle p, q \rangle \in S$ per qualche bisimulazione di branching S . Allora $\langle q, p \rangle \in S^{-1}$ e, per il secondo punto, S^{-1} è una bisimulazione di branching e quindi $q \approx_b p$.

Per la *transitività* facciamo vedere che se $p \approx_b q$ e $q \approx_b r$ allora $\langle p, q \rangle \in S_1$ e $\langle q, r \rangle \in S_2$ per qualche bisimulazione di branching S_1 ed S_2 . Dunque $\langle p, r \rangle \in S_1 S_2$ e quindi $p \approx_b r$ per il terzo punto.

1.10 ESERCIZIO 12.3

Relativamente alla definizione di insieme saturato (Definizione 12.57), si dimostri che se \mathcal{L} è saturato, allora valgono le seguenti proprietà :

1. se $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ allora:
 - $L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}$
 - se $L_1 \subseteq K \subseteq L_2$ allora $K \in \mathcal{L}$
2. $Act(\mathcal{L}) \in \mathcal{L}$



La definizione 12.57 ci dice che se \mathcal{L} è un insieme non vuoto di insiemi finiti di azioni visibili, cioè $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(A_{CCS})$ e $Act(\mathcal{L}) = \{\alpha \mid \alpha \in L, L \in \mathcal{L}\}$ è l'insieme di tutte le azioni di \mathcal{L} allora si dice che \mathcal{L} è *saturato* se $\forall K \subseteq A_{CCS}$

$$L \in \mathcal{L} \wedge L \subseteq K \subseteq Act(\mathcal{L}) \text{ implica } K \in \mathcal{L}$$

Da questa definizione ricaviamo che:

1. se $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ allora:
 - $L_1 \subseteq L_1 \cup L_2 \subseteq Act(\mathcal{L}) \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}$
 - $L_1 \subseteq K \subseteq L_2 \subseteq Act(\mathcal{L}) \Rightarrow L_1 \subseteq K \subseteq Act(\mathcal{L}) \Rightarrow K \in \mathcal{L}$
2. $L \subseteq Act(\mathcal{L}) \subseteq Act(\mathcal{L}) \Rightarrow Act(\mathcal{L}) \in \mathcal{L}$

SVOLGIMENTO COMPLETO ESERCIZIO 5.7

$$\begin{aligned}
\text{SSSSSSS} &= (\lambda x y z. xz(yz)) \text{SSSSSS} \\
&= (\lambda y z. Sz(yz)) \text{SSSSS} \\
&= (\lambda z. Sz(Sz)) \text{SSSS} \\
&= \text{SS}(\text{SS}) \text{SSS} \\
&= (\lambda y z. Sz(yz))(\text{SS}) \text{SSS} \\
&= (\lambda z. Sz(\text{SS})z) \text{SSS} \\
&= \text{SS}(\text{SSS}) \text{SS} \\
&= (\lambda y z. Sz(yz))(\text{SSS}) \text{SS} \\
&= (\lambda z. Sz(\text{SSS}z)) \text{SS} \\
&= \text{SS}(\text{SSSS}) \text{S} \\
&= (\lambda y z. Sz(yz))(\text{SSSS}) \text{S} \\
&= (\lambda z. Sz(\text{SSSS}z)) \text{S} \\
&= \text{SS}(\text{SSSSS}) \\
&= (\lambda y z. Sz(yz))(\text{SSSSS}) \\
&= \lambda z. Sz(\text{SSSSS}z) \\
&= \lambda z. (\lambda y a. aa(ya))(\text{SSSSS}z) \\
&= \lambda z a. aa(\text{SSSSS}aa) \\
&= \lambda z a. aa((\lambda y b. Sb(yb)) \text{SSS}zz) \\
&= \lambda z a. aa((\lambda b. Sb(\text{Sb})) \text{SS}zz) \\
&= \lambda z a. aa(\text{SS}(\text{SS}) \text{S}aa) \\
&= \lambda z a. aa((\lambda y b. Sb(yb))(\text{SS}) \text{S}zz) \\
&= \lambda z a. aa((\lambda b. Sb(\text{SSb})) \text{S}zz) \\
&= \lambda z a. aa(\text{SS}(\text{SSS})aa) \\
&= \lambda z a. aa((\lambda y b. Sb(yb))(\text{SSS})zz) \\
&= \lambda z a. aa((\lambda b. Sb(\text{SSSb}))zz) \\
&= \lambda z a. aa(\text{S}a(\text{SSS}a)a) \\
&= \lambda z a. aa((\lambda y b. bb(yb))(\text{SSS}z)z) \\
&= \lambda z a. aa((\lambda b. bb(\text{SSS}bb))z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda z a. a a (a a (\mathbf{S S S} a a)) \\
&= \lambda z a. a a (a a ((\lambda y b. \mathbf{S} b (y b)) \mathbf{S} z z)) \\
&= \lambda z a. a a (a a ((\lambda b. \mathbf{S} b (\mathbf{S} b)) z z)) \\
&= \lambda z a. a a (a a (\mathbf{S} a [\mathbf{S} a] a)) \\
&= \lambda z a. a a (a a ((\lambda y b. b b (y b)) (\mathbf{S} z) z)) \\
&= \lambda z a. a a (a a ((\lambda b. b b (\mathbf{S} b b)) z)) \\
&= \lambda z a. a a (a a (a a (\mathbf{S} a a))) \\
&= \lambda z a. a a (a a (a a ((\lambda y b. b b (y b)) z))) \\
&= \lambda z a. a a (a a (a a (\lambda b. b b (b b))))
\end{aligned}$$