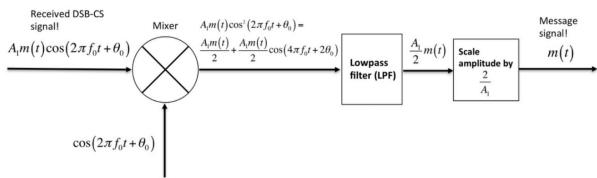


Maria de los Angeles Prieto Ortega
C.C. 1062278202 

1. Sea el demodulador en amplitud presentado en la siguiente Figura:



Asumiendo $\theta_0 = 0$, determine el espectro de Fourier (teórico) en cada una de las etapas del sistema. Luego, con base en la simulación de modulación en amplitud del Taller 2 y utilizando cinco segundos de una canción de Youtube como mensaje, grafique cada una de las etapas principales del proceso de modulación y demodulación en el tiempo y la frecuencia (reproduzca el segmento de la canción en cada etapa).

Nota: Para la etapa de filtrado pasa bajas, realice su implementación a partir de la transformada rápida de Fourier.

$$X(w) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jwt} dt$$

Espectro de señal recibida al mixer:

$$\begin{aligned} s_{\text{rec}}(t) &= A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \quad \text{Si } \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \text{ y } w_0 = 2\pi f_0 \\ &= A_1 m(t) \cos(w_0 t) \\ &= A_1 m(t) \left(\frac{e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} A_1 m(t) (e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}) \end{aligned}$$

$$\text{Si } f(t) e^{jw_0 t} \leftrightarrow F(w - w_0)$$

$$S_{\text{rec}}(w) = F\left\{ \frac{1}{2} A_1 m(t) (e^{jw_0 t} + e^{-jw_0 t}) \right\} = \frac{1}{2} A_1 F\{m(t) e^{jw_0 t} + m(t) e^{-jw_0 t}\} = \frac{1}{2} A_1 (M(w - w_0) + M(w + w_0))$$

Espectro de señal de salida del mixer:

$$y(t) = \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t + 2\theta_0) \quad \text{Si } w_0 = 2\pi f_0$$

$$y(t) = \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(2w_0 t)$$

$$\begin{aligned} y(w) &= F\left\{ \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(2w_0 t) \right\} = F\left\{ \frac{A_1}{2} m(t) \right\} + F\left\{ \frac{A_1}{2} m(t) \cos(2w_0 t) \right\} = \frac{A_1}{2} M(w) + F\left\{ \frac{A_1}{2} m(t) \cos(2w_0 t) \right\} \quad \text{Si } \cos(\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \\ &= \frac{A_1}{2} M(w) + F\left\{ \frac{A_1}{2} m(t) \left(\frac{e^{j2w_0 t} + e^{-j2w_0 t}}{2} \right) \right\} = \frac{A_1}{2} M(w) + \frac{A_1}{4} F\{m(t) e^{j2w_0 t} + m(t) e^{-j2w_0 t}\} \quad \text{Si } f(t) e^{jw_0 t} \leftrightarrow F(w - w_0) \\ &= \frac{A_1}{2} M(w) + \frac{A_1}{4} (M(w - w_0) + M(w + w_0)) \end{aligned}$$

Demodulador coherente de AM DSB-SC/DSB-CS

Señal mensaje base: $m(t) \rightarrow M(w)$

Señal recibida: $s_{\text{rec}}(t) = A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$

Al Ganancia, f_0 frecuencia de la portadora.

Segunda señal que entra al mixer: $\cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$

$$w_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Despues del mixer:

$$y(t) = A_1 m(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta_0) \cdot \cos(2\pi f_0 t + \theta_0)$$

$$y(t) = A_1 m(t) \cos^2(2\pi f_0 t + \theta_0) ; w_0 = 2\pi f_0$$

$$\text{Si } \cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$y(t) = \frac{A_1}{2} m(t) (1 + \cos(2(2\pi f_0 t + \theta_0)))$$

$$y(t) = \frac{A_1}{2} m(t) + \frac{A_1}{2} m(t) \cos(4\pi f_0 t + 2\theta_0)$$

Filtro pasa-bajas (LPF):

Entrada: $y(t)$

$$\text{Salida: } y_f(t) = \frac{A_1}{2} m(t) \rightarrow Y_f(w) = \frac{A_1}{2} M(w)$$

Escalador de amplitud:

$$\text{Entrada: } y_f(t) = \frac{A_1}{2} m(t)$$

$$\text{Ganancia: } G = \frac{2}{A_1}$$

$$\text{Salida: } \hat{m}(t) = \frac{A_1}{2} m(t) \cdot \frac{2}{A_1} = m(t)$$

Espectro de señal de salida del mixer: $H_f(w) = \begin{cases} 1, & |w| \leq w_c \\ 0, & |w| > w_c \end{cases}$

$$H_f(w) = \frac{Y_f(w)}{Y(w)}$$

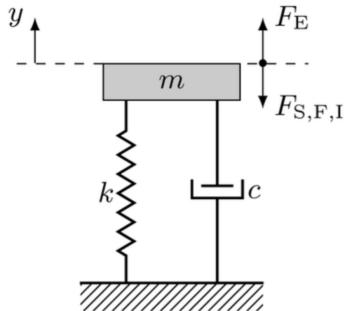
$$Y_f(t) = \frac{A_1}{2} m(t) \rightarrow Y_f(w) = \frac{A_1}{2} M(w)$$

Espectro de señal del escalador:

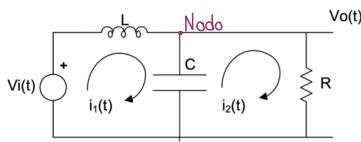
$$\hat{m}(t) = \frac{A_1}{2} m(t) \cdot \frac{2}{A_1} = m(t)$$

$$\hat{m}(w) = \mathcal{F}\{m(t)\} = M(w)$$

2. Encuentre la función de transferencia que caracteriza el sistema masa, resorte, amortiguador, presentado en la siguiente Figura (asuma condiciones iniciales cero):



Posteriormente, encuentre el sistema equivalente del modelo masa, resorte, amortiguador, a partir del siguiente circuito eléctrico:



Finalmente, proponga unos valores de m , k y c y sus equivalentes R , L y C , para simular un sistema subamortiguado, sobreamortiguado y de amortiguamiento crítico (determine el factor de amortiguamiento, la frecuencia natural amortiguada, la frecuencia natural no amortiguada, el tiempo pico, tiempo de levantamiento y el tiempo de establecimiento en cada caso). Para cada caso, grafique el diagrama de polos y ceros, el diagrama de Bode, la respuesta impulsiva, respuesta escalón y respuesta rampa. Repita el proceso para modo lazo cerrado.

$$V_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) = V_i(t) - V_o(t) \rightarrow \frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{V_i(t) - V_o(t)}{L}$$

$$\text{Si le aplicamos derivada a: } i_L(t) = C \frac{d}{dt} V_o(t) + \frac{1}{L} V_o(t)$$

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = C \frac{d^2}{dt^2} V_o(t) + \frac{1}{L} \frac{d}{dt} V_o(t)$$

$$\frac{V_i(t) - V_o(t)}{L} = C \frac{d^2}{dt^2} V_o(t) + \frac{1}{L} \frac{d}{dt} V_o(t) \rightarrow V_i(t) - V_o(t) = C L \frac{d^2}{dt^2} V_o(t) + \frac{1}{L} \frac{d}{dt} V_o(t) \rightarrow V_i(t) = C L \frac{d^2}{dt^2} V_o(t) + \frac{1}{L} \frac{d}{dt} V_o(t) + V_o(t) \rightarrow \text{E.D.O del sistema}$$

$$V_i(s) = C L s^2 V_o(s) + \frac{1}{L} s V_o(s) + V_o(s)$$

$$V_i(s) = V_o(s) (C L s^2 + \frac{1}{L} s + 1)$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{(C L s^2 + \frac{1}{L} s + 1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(C L s^2 + \frac{1}{L} s + 1)} \rightarrow H(s) = \frac{1}{s(C L s^2 + \frac{1}{L} s + 1)} \rightarrow \text{función de transferencia}$$

Si comparamos los sistemas (1) y (2) $m = L$, $C = \frac{1}{LC}$, $K = \frac{1}{C}$, $F_E(t) = \frac{1}{C} V_i(t)$, $y(t) = V_o(t)$

masa (bloque): m , resorte: K , amortiguador: C

fuerza externa aplicada sobre la masa: $F_E(t)$ (hacia arriba)

fuerza del resorte: F_s

$F_s = K y(t)$ (opuesta al desplazamiento)

$F_d = C y'(t)$ (opuesta a la velocidad) $F = m \cdot a$

tomaremos $y(t)$ como el desplazamiento

$$m y''(t) + C y'(t) + K y(t) = F_E(t) \quad (1) \rightarrow \text{E.D.O del sistema}$$

$$\int \left[\frac{d^n}{dt^n} X(t) \right] = \delta^n X(s)$$

$$F_E(s) = \int [m y''(t) + C y'(t) + K y(t)]$$

$$F_E(s) = m s^2 Y(s) + C s Y(s) + K Y(s)$$

$$F_E(s) = Y(s) (m s^2 + C s + K)$$

$$\frac{1}{(m s^2 + C s + K)} = \frac{Y(s)}{F_E(s)}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{(m s^2 + C s + K)}$$

$$H(s) = \frac{1}{m s^2 + C s + K} \rightarrow \text{función de transferencia}$$

Calculamos la función de transferencia del circuito:

$$\text{En paralelo: } i_L(t) = i_C(t) + i_R(t) \rightarrow i_L(t) = C \frac{d}{dt} V_o(t) + \frac{1}{R} V_o(t) \quad \text{Si } V_i(t) = V_o(t) = V_o(t)$$

$$i_L(t) = C \frac{d}{dt} V_o(t) + \frac{1}{R} V_o(t)$$

$$\frac{1}{C} V_i(t) = L \frac{d^2}{dt^2} V_o(t) + \frac{1}{R} \frac{d}{dt} V_o(t) + \frac{1}{C} V_o(t) \quad (2) \rightarrow \text{E.D.O del sistema}$$

$$H(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + \zeta s + \frac{K}{m}}$$

Para llevarlo a su forma estandar de segundo orden:

Si la frecuencia natural no amortiguada es: $\omega_n^2 = \frac{K}{m} \leftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$2\zeta\omega_n = \frac{\zeta}{m} \cdot 5$ es factor de amortiguamiento adimensional

$\zeta = \frac{\zeta}{2m\omega_n} = \frac{\zeta}{2m\omega_n} = \frac{\zeta}{2\sqrt{Km}}$: Si no hay amortiguamiento $\zeta = 0$

$$H(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para los polos:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\text{Con } \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \leftrightarrow P_{1,2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{(2\zeta\omega_n)^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4\zeta^2\omega_n^2 - 4\omega_n^2}}{2} = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{4(\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2)}}{2}$$

$$= \frac{-2\zeta\omega_n \pm 2\sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2}}{2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 - \omega_n^2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\omega_n^2(\zeta^2 - 1)} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Para subamortiguado: $0 \leq \zeta < 1 \rightarrow \zeta^2 - 1 < 0 : \sqrt{\zeta^2 - 1} = j\sqrt{1 - \zeta^2}$

$P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ → La frecuencia amortiguada es la velocidad angular: $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

Tiempo de establecimiento ($\pm 5\%$): $T_s = \frac{3}{\zeta\omega_n}$

Tiempo de pico: $T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}$

Para amortiguamiento critico: $\zeta = 1$ $P_{1,2} = -\zeta\omega_n$

Para sobremortiguado: $\zeta > 1 \rightarrow \zeta^2 - 1 > 0$: $P_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$

Ahora $H(s)$ con lazo cerrado:

$$H(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Para lazo cerrado hay una realimentación:

$$\text{Real}(s) = \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}{1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} = \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}{\frac{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + 1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}} = \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + 1}$$

$$= \frac{1}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) + 1} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + \frac{1}{m}}$$

Respuesta al impulso (Subamortiguado): Si $F_E(t) = \delta(t) \rightarrow F_E(s) = 1$ $H(s) = \frac{y(s)}{F_E(s)} = \frac{y(s)}{1} = y(s)$
 $H(s) = y(s)$

$$H(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2) = (s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2$$

$$H(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$\text{Si } \frac{1}{(s - \alpha)^2 + b^2} \leftrightarrow \mathcal{C} \frac{\text{at } \text{sen}(bt)}{b}$$

$$h(t) = \frac{1}{m} e^{-\zeta\omega_n t} \frac{\text{sen}(\omega_d t)}{\omega_d}$$

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t)$$

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{h(t)\}\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(t)$$

Respuesta al escalón (Subamortiguado): Si $F_E(t) = U(t) \rightarrow F_E(s) = \frac{1}{s}$ $H(s) = \frac{y(s)}{F_E(s)} \rightarrow y(s) = F_E(s)H(s)$

$$y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow Bs + C = B(s + s\omega_n) - \omega_n + C = B(s + s\omega_n) + (C - B\omega_n)$$

$$\frac{1}{m} = A(s^2 + 2s\omega_n s + \omega_n^2) + (Bs + C)$$

$$\frac{1}{m} = A s^2 + A 2s\omega_n s + A \omega_n^2 + Bs^2 + sC$$

$$\frac{1}{m} = (A + B)s^2 + (A 2s\omega_n + C) + A \omega_n^2$$

$$A = \frac{1}{m\omega_n^2}, \text{ De } \omega_n^2 = \frac{K}{m} \rightarrow \frac{1}{K} = \frac{1}{m\omega_n^2}$$

$$A = \frac{1}{K}, B = A = -\frac{1}{m\omega_n^2}, C = -A 2s\omega_n = -2s\omega_n \frac{1}{m\omega_n^2} = -\frac{2s}{m\omega_n}$$

$$\frac{Bs + C}{s^2 + 2s\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{Bs + C}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2} = B \frac{(s + s\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2} + \frac{(C - B\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2}$$

$$y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2s\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = A \frac{1}{s} + B \frac{(s + s\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2} + \frac{(C - B\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2}$$

$$y(s) = A \frac{1}{s} + B \frac{(s + s\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2} + \frac{(C - B\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2}$$

$$\text{Si usamos: } \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{s} \right] dt = 1$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + b^2} \right] dt = e^{-at} \cos(bt)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{b}{(s+a)^2 + b^2} \right] dt = e^{-at} \sin(bt)$$

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{(s+a)^2 + b^2} \right] dt = \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[A \frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[B \frac{(s + s\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(C - B\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2}\right]$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[y(s)] = A \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + B \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s + s\omega_n)}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2}\right] + (C - B\omega_n) \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + s\omega_n)^2 + \omega_n^2}\right]$$

$$y(t) = A + B e^{-s\omega_n t} \cos(\omega_n t) + \frac{(C - B\omega_n)}{\omega_n} e^{-s\omega_n t} \sin(\omega_n t)$$

$$y(t) = A + e^{-s\omega_n t} (B \cos(\omega_n t) + \frac{C - B\omega_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t))$$

$$y(t) = A + e^{-s\omega_n t} (B \cos(\omega_n t) + \frac{C - B\omega_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t))$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} + e^{-s\omega_n t} \left(\frac{1}{m\omega_n^2} \cos(\omega_n t) + \left(-\frac{2s}{m\omega_n} - \left(\frac{1}{m\omega_n^2} s\omega_n \right) \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} + e^{-s\omega_n t} \left(\frac{1}{m\omega_n^2} \cos(\omega_n t) + \left(-\frac{2s}{m\omega_n} - \left(\frac{1}{m\omega_n^2} s\omega_n \right) \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} + e^{-s\omega_n t} \left(\frac{1}{m\omega_n^2} \cos(\omega_n t) + \left(-\frac{2s}{m\omega_n} + \frac{5}{m\omega_n} \right) \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} + e^{-s\omega_n t} \left(\frac{1}{m\omega_n^2} \cos(\omega_n t) - \frac{s}{m\omega_n \omega_n} \sin(\omega_n t) \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} \left(1 - e^{-s\omega_n t} (\cos(\omega_n t) + \frac{s\omega_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t)) \right)$$

$$\text{Si } K = m\omega_n^2$$

$$y(t) = \frac{1}{K} \left(1 - e^{-s\omega_n t} (\cos(\omega_n t) + \frac{s\omega_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t)) \right)$$

Respuesta al escalón (amortiguamiento crítico): $\zeta=1 \rightarrow \omega_d=0$

$$Y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s(s+\omega_n)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+\omega_n} + \frac{C}{(s+\omega_n)^2}$$

$$\frac{1}{m} = A(s+\omega_n)^2 + B(s+\omega_n) + CS$$

$$A = \frac{1}{m\omega_n^2}, B = -\frac{1}{m\omega_n^2}, C = -\frac{1}{m\omega_n}$$

$$Y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B}{s+\omega_n}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{(s+\omega_n)^2}\right]$$

$$y(t) = A + B e^{-\omega_n t} + C t e^{-\omega_n t}$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} - \frac{1}{m\omega_n^2} e^{-\omega_n t} - \frac{1}{m\omega_n} t e^{-\omega_n t}$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} (1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t})$$

$$\text{Si } K = m\omega_n^2$$

$$y(t) = \frac{1}{K} (1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t))$$

Respuesta al escalón (Sobreamortiguado): $\rho_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$Y(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

$$\frac{1}{m} = A(s-s_1)(s-s_2) + B(s-s_2) + C(s-s_1)$$

$$\text{Para } s=0 \rightarrow A = \frac{1}{m s_1 s_2} = \frac{1}{m \omega_n^2}$$

$$\text{Para } s=s_1 \rightarrow B = \frac{1}{m s_1 (s_1 - s_2)}$$

$$\text{Para } s=s_2 \rightarrow C = \frac{1}{m s_2 (s_2 - s_1)}$$

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B}{s-s_1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{C}{s-s_2}\right]$$

$$y(t) = A + B e^{s_1 t} + C e^{s_2 t}$$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_n^2} + \frac{1}{m s_1 (s_1 - s_2)} e^{(\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t} + \frac{1}{m s_2 (s_2 - s_1)} e^{(\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1-\zeta^2})t}$$

Respuesta a la rampa:

$$y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 25\omega_n s + \omega_n^2} \quad \text{Si } f_E(t) = r(t) = tU(t) \rightarrow f_E(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$H(s) = \frac{y(s)}{f_E(s)} \rightarrow y(s) = f_E(s)H(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + 25\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$y(s) = \frac{1}{m} \frac{1}{s^2(s^2 + 25\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 25\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\frac{1}{m} = AS(s^2 + 25\omega_n s + \omega_n^2) + B(s^3 + 25\omega_n s^2 + \omega_n^2 s) + (Cs + D)s^2$$

$$AS(s^2 + 25\omega_n s + \omega_n^2) = AS^3 + A25\omega_n s^2 + A\omega_n^2 s$$

$$B(s^3 + 25\omega_n s^2 + \omega_n^2 s) = B s^3 + B25\omega_n s^2 + B\omega_n^2 s$$

$$(Cs + D)s^2 = Cs^3 + Ds^2$$

$$\frac{1}{m} = (A + C)s^3 + (A25\omega_n + B + D)s^2 + (A\omega_n^2 + B25\omega_n)s + B\omega_n^2$$

$$\begin{aligned} \text{Si comparamos términos de cada lado: } A + C &= 0, \quad A25\omega_n + B + D = 0, \quad A\omega_n^2 + B25\omega_n = 0, \quad B\omega_n^2 = \frac{1}{m} \\ C &= -A \quad D = -A25\omega_n - B \\ C = \frac{25}{m\omega_n^3} & \quad D = \frac{25}{m\omega_n^3} 25\omega_n - \frac{1}{m\omega_n^2} \\ D = \frac{4s^2 - 1}{m\omega_n^2} & \quad A = -\frac{25}{m\omega_n^3} \\ D = \frac{4s^2 - 1}{m\omega_n^2} & \end{aligned}$$

Para (Subamortiguado):

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + 25\omega_n s + \omega_n^2} \xrightarrow{s^2 + 25\omega_n s + \omega_n^2 = (s + 5\omega_n)^2 + \omega_n^2} \xrightarrow{Cs + D = C((s + 5\omega_n) - 5\omega_n) + D = C(s + 5\omega_n) + (D - C5\omega_n)}$$

$$y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C(s + 5\omega_n)}{(s + 5\omega_n)^2 + \omega_n^2} + \frac{(D - C5\omega_n)}{(s + 5\omega_n)^2 + \omega_n^2}$$

$$y(t) = A \int \left[\frac{1}{s} \right] + B \int \left[\frac{1}{s^2} \right] + C \int \left[\frac{(s + 5\omega_n)}{(s + 5\omega_n)^2 + \omega_n^2} \right] + (D - C5\omega_n) \int \left[\frac{1}{(s + 5\omega_n)^2 + \omega_n^2} \right]$$

$$y(t) = A + Bt + C e^{-5\omega_n t} \cos(\omega_n t) + (D - C5\omega_n) \frac{1}{\omega_n} e^{-5\omega_n t} \sin(\omega_n t)$$

$$y(t) = -\frac{25}{m\omega_n^3} + \frac{t}{m\omega_n^2} + \frac{25}{m\omega_n^3} e^{-5\omega_n t} \cos(\omega_n t) + \left(\frac{4s^2 - 1}{m\omega_n^2} - \frac{25}{m\omega_n^3} \right) \frac{1}{\omega_n} e^{-5\omega_n t} \sin(\omega_n t)$$

$$y(t) = -\frac{25}{m\omega_n^3} + \frac{t}{m\omega_n^2} + \frac{25}{m\omega_n^3} e^{-5\omega_n t} \cos(\omega_n t) + \left(\frac{4s^2 - 1}{m\omega_n^2} - \frac{25^2}{m\omega_n^3} \right) \frac{1}{\omega_n} e^{-5\omega_n t} \sin(\omega_n t)$$

$$y(t) = -\frac{25}{m\omega_n^3} + \frac{t}{m\omega_n^2} + \frac{25}{m\omega_n^3} e^{-5\omega_n t} \cos(\omega_n t) + \frac{25^2 - 1}{m\omega_n^2 \omega_n} e^{-5\omega_n t} \sin(\omega_n t)$$

$$y(t) = -\frac{25}{m\omega_n^3} + \frac{t}{m\omega_n^2} + \frac{25}{m\omega_n^3} e^{-5\omega_n t} \cos(\omega_n t) + \frac{25^2 - 1}{m\omega_n^4 \omega_n} e^{-5\omega_n t} \sin(\omega_n t)$$

Nota: En los polos del sistema, la parte real $\rightarrow -\zeta \omega_n$ determina la tasa de decaimiento exponencial
la parte imaginaria determina la oscilación angular ω_b

natural
frecuencia amortiguada:
 $\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$