

Análise de pontos fixos de um mapa de Hénon modificado

Matheus Taniguti de Araujo - NUSP 11443252

Instituto de Física, Universidade de São Paulo -SP

Resumo

Analizamos o diagrama de bifurcação de um mapa discreto bidimensional baseado no mapa de Hénon. Analisamos os pontos fixos e autovalores da jacobiana por meio de uma implementação numérica e comparamos os resultados com o diagrama de bifurcação. O mapa de parâmetros do sistema sugere que análises similares podem ser estendidas para órbitas periódicas e para outros valores de parâmetros.

I. INTRODUÇÃO

O mapa de Hénon é um dos exemplos mais simples e estudados de mapa não linear bidimensional [1, 2]. Algumas variações ao mapa de Hénon utilizando funções trigonométricas são descritas na literatura [3, 4, 5], onde são utilizados para gerar algoritmos de criptografia de imagens ou em algoritmos de geração de números pseudo-aleatórios. Nesse estudo utilizamos um mapa muito próximo ao proposto em [3], o mapa que estudamos está apresentado na Equação (1).

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + by_n - x_n^2 \\ x_n - c \sin(x_n) \end{pmatrix} \quad (1)$$

II. MÉTODOS

a. Simulação do sistema

Realizamos uma análise do diagrama de bifurcação do mapa e uma análise das órbitas periódicas atrativas no espaço de parâmetros do mapa.

O mapa de bifurcação foi obtido por um programa que aplica o mapa da Equação (1) repetidamente. Com os parâmetros fixos, e a partir de uma condição inicial iteramos o mapa uma quantidade de vezes, que chamamos de transiente, e após o transiente iteramos o mapa salvando o resultado a cada iteração. Os valores salvos são escritos em um arquivo, junto com o valor dos parâmetros utilizado, e então o processo é repetido variando um dos parâmetros do mapa. Ao fim desse processo podemos fazer um gráfico das órbitas periódicas e ponto fixo atrativos em função do parâmetro variado.

O mapa de parâmetros foi obtido por um processo similar, fixamos os parâmetros e a condição inicial e então evoluímos o sistema uma quantidade de vezes sem salvar os resultados. Após esse transiente, continuamos iterando o sistema salvando o resultado de cada iteração, ao fim disso temos uma lista de valores atingidos pela trajetória do sistema. Então vemos quantos valores distintos existem nessa lista e essa quantidade é tomada como o período da órbita. Escrevemos em um arquivo o período e o valor dos parâmetros utilizado e repetimos o processo variando dois parâmetros. Por fim, podemos criar um mapa de calor, em que representamos a periodicidade da órbita em função dos parâmetros variados.

Em ambos os processos é tomado como hipótese que após o transiente o sistema se encontra em um estado estacionário, isto é em uma órbita periódica ou em um ponto fixo, por isso é importante que o transiente utilizado seja alto o suficiente para garantir que essa hipótese seja válida. Além disso, em ambos os casos escolhemos a quantidade de pontos que salvamos, o que define o período máximo que podemos visualizar, e escolhemos também um valor de infinito, que é utilizado para determinar que uma órbita diverge, isto é que tende ao infinito. O mapa de parâmetros também precisa de um cuidado adicional que é a escolha de precisão, dois pontos atingidos por uma trajetória são considerados o mesmo ponto se sua diferença é menor que essa precisão escolhida.

Para os diagramas de bifurcação e os mapas de parâmetro utilizamos transiente de 2×10^4 . O mapa de bifurcação pode armazenar uma órbita de período máximo igual a 40, enquanto o mapa de parâmetros pode armazenar um período máximo de 16. Por fim, o mapa de parâmetros utiliza uma precisão de 10^{-7} .

b. Obtenção numérica de pontos fixos

Os pontos fixos do mapa estudado podem ser encontrados a partir da Equação (1) com a condição $x_{n+1} = x_n$ e $y_{n+1} = y_n$, isso nos leva a equação:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + by_n - x_n^2 \\ x_n - c \sin(x_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\Rightarrow a + (b - 1)x_n - x_n^2 = bc \sin(x_n)$$

A equação acima não pode ser resolvida analítica-

mente no caso geral devido a função seno, e o mesmo ocorre quando tentamos encontrar soluções para órbitas de período $n > 1$. Portanto, é necessário resolver a equação numericamente, o que nos dá os pontos fixos teóricos que podem ser comparados com o diagrama de bifurcação. Para resolver a equação numericamente utilizamos o método *FindRoot* do software *Wolfram Mathematica*. Para verificação substituímos as soluções obtidas na Equação (2) para obter o erro cometido, que são menores que 10^{-14} para todos os valores que usamos.

A Figura 1 mostra um esboço dos gráficos de $\sin(x)$ e de $\frac{a}{bc} + (\frac{1}{c} - \frac{1}{bc})x - \frac{x^2}{bc}$, a partir desse gráfico vemos que o sistema possui duas soluções distintas, o que é coerente com o que encontramos ao utilizar o método numérico.

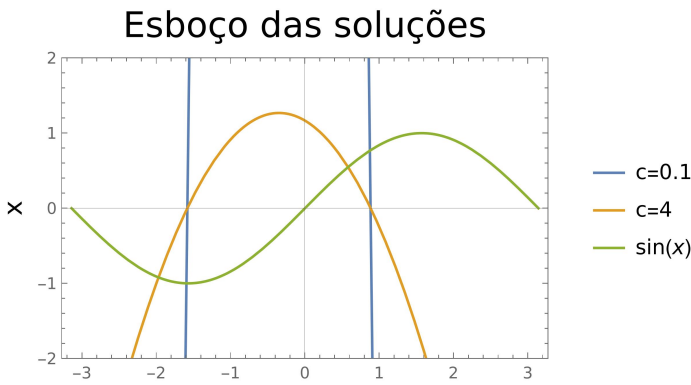


Figura 1: Esboço dos gráficos de $bc \sin(x)$ e $a + (b-1)x - x^2$ utilizando $a = 1.4$, $b = 0.3$ e $c = 0.1, 4$.

III. ANÁLISE

Estamos interessados em analisar o caso em que o mapa é dissipativo, para isso analisamos a jacobiana do mapa da Equação (1):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_n & b \\ 1 - c \cos(x_n) & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Para que o sistema seja dissipativo queremos que o determinante seja menor que 1 em módulo, o que nos leva a condição:

$$|b - bc \cos(x_n)| < 1 \Leftrightarrow \frac{b-1}{bc} < \cos(x_n) < \frac{1+b}{bc} \quad (4)$$

Nas condições $b, c \in (0, 1)$, vale $\frac{b-1}{bc} < 0$ e $\frac{1+b}{bc} > 2$, de forma que se $x_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ então $0 \leq \cos(x_n) \leq 1$, e a condição é automaticamente satisfeita. No entanto, se x_n

sair desse intervalo não podemos garantir por essa análise que o sistema é dissipativo.

Obtivemos os pontos fixos teóricos do sistema a partir da Equação (1) numericamente. Além disso, podemos analisar a estabilidade dos pontos fixos pelos autovalores da jacobiana. A partir da jacobiana exposta na Equação (3) temos os autovalores:

$$\lambda_{\pm} = -\left(x \pm \sqrt{b + x^2 - bc \cos(x)}\right) \quad (5)$$

Para que o termo dentro da raiz seja positivo temos:

$$x^2 + b \geq bc \cos(x) \quad (6)$$

Para b e c positivos, o termo do lado direito é no máximo bc então, uma condição suficiente para que os autovalores sejam reais é:

$$x^2 \geq bc - b = b(c-1) \quad (7)$$

O termo do lado direito é menor que 0 se $c \in (0, 1)$ e só podem existir autovalores complexos para $c > 1$. Se tomássemos c negativo, chegaríamos a condição $x^2 \geq b(|c| - 1)$, então para que os autovalores sejam reais uma condição suficiente é que $c \in [-1, 1]$.

Além disso, para que um ponto fixo seja atrativo é necessário que $|\lambda_{\pm}| < 1$, o que pode ser verificado diretamente para os pontos fixos teóricos.

Seguindo Hénon [1] fixamos $a = 1.4$ e $b = 0.3$ e então construímos o diagrama de bifurcação variando c entre 0 e 1. Ao diagrama de bifurcação sobreposamos, em verde, os pontos fixos obtidos da resolução numérica da Equação (2), o gráfico resultante está apresentado na Figura 2.

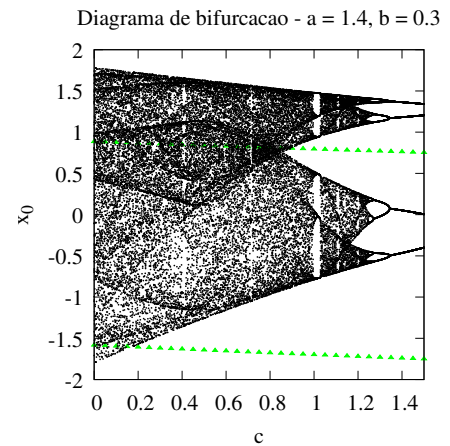


Figura 2: Diagrama de bifurcação.

Nenhum dos pontos fixos teóricos está presente no diagrama de bifurcação. Substituindo os valores obtidos

numericamente na Equação (5) calculamos o módulo dos autovalores nos pontos fixos e um dos conjuntos de ponto fixo apresenta $|\lambda_+| > 1$ e $|\lambda_-| < 1$, enquanto a situação se inverte para o outro conjunto de pontos fixos. Um dos autovalores tem módulo maior que 1 para todos os pontos fixos teóricos, então que são todos instáveis na região estudada, o que justifica que não os vejamos no diagrama de bifurcação.

Além disso, todos os autovalores obtidos são reais como havíamos deduzido anteriormente, e seus módulos estão apresentados no gráfico da Figura 3.

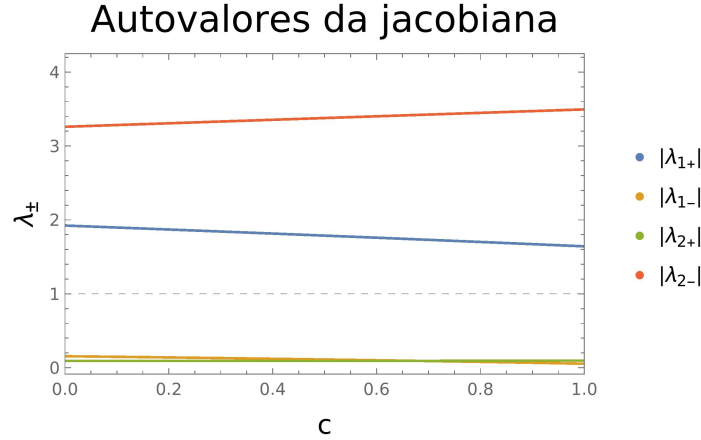


Figura 3: Autovalores nos pontos fixos numéricos, onde os subscritos 1 e 2 indicam em qual dos pontos fixos foi calculado o autovalor.

Por fim, é importante analisar se o sistema é dissipativo. Como vimos anteriormente, se $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, o sistema é dissipativo (pois $b, c \in (0, 1)$), no entanto, na Figura 2 existe uma região em que essa condição não é satisfeita. Para determinar se o sistema é dissipativo nessa região utilizamos a equação (4) e notando que $|b - bc \cos(x_n)| \leq |b - bc|$ chegamos a uma condição suficiente para que o sistema seja dissipativo $|b - bc| < 1$. Construímos um mapa de contorno de $|b - bc|$ apresentado na Figura 4.

A partir do mapa de contorno concluímos que para $b = 0.3$ e $c \in [-2, 4]$ o sistema ainda será dissipativo. Lembramos também que como $|b - bc|$ é maior ou igual ao módulo do determinante, então as regiões do gráfico com valor maior que 1 não são necessariamente não-dissipativos.

A Figura 3 parece sugerir que para valores maiores de c alguns pontos fixos podem ter autovalores de módulo menor que 1. A análise da Figura 4 justifica que ampliemos nossa análise para $c \in [0, 4]$. É importante notar que havíamos deduzido que os autovetores nos pontos fixos seriam reais para $c < 1$ e que o mesmo não vale para

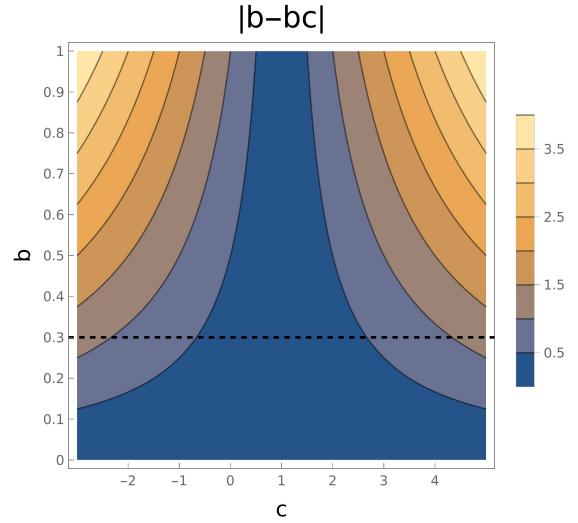


Figura 4: Mapa de contorno de $|b - bc|$ utilizado para determinar se o sistema é dissipativo.

$c > 1$. No caso de autovalores complexos, a análise do seu módulo é um pouco simplificada:

$$\lambda_{\pm} = -x \pm i\sqrt{-b - x^2 + bc \cos(x)} \Rightarrow |\lambda_{\pm}|^2 = x^2 + (-b - x^2 + bc \cos(x)) = b(c \cos(x) - 1) \quad (8)$$

Portanto, $|\lambda_+| = |\lambda_-|$ e o valor máximo que o módulo de um autovalor complexo pode assumir é $\sqrt{b(c-1)}$. Isso nos dá uma condição suficiente para que um ponto fixo complexo seja estável. Para que um ponto fixo seja instável deve valer:

$$\sqrt{b(c-1)} > 1 \Leftrightarrow c > \frac{1}{b} + 1 \quad (9)$$

Para $b = 0.3$ concluímos que só podem existir pontos fixos instáveis onde a jacobiana tem autovalores complexos, para $c > \frac{13}{3} = 4.\overline{33}$.

O diagrama de bifurcação estendido para $c \in [0, 4]$ está apresentado na Figura 5.

A partir de aproximadamente $c = 2.5$ um conjunto de pontos fixos é compatível com os pontos fixos do diagrama de bifurcação. Calculando os autovalores da jacobiana nos pontos fixos percebemos que a partir do mesmo valor de c os autovalores de um conjunto de pontos fixos são menores que 1 em módulo, o que é compatível com o que observamos no diagrama de bifurcação. O módulo dos autovalores está apresentado na Figura 6, e podemos notar que a partir de aproximadamente $c =$ ambos autovalores de um conjunto de pontos fixos têm mesmo valor, e os autovalores só apresentam mesmo módulo se forem

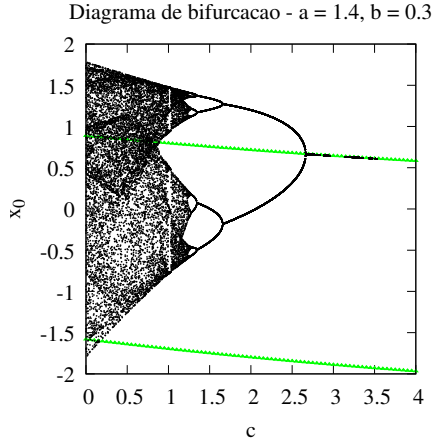


Figura 5: Diagrama de bifurcação estendido para $c \in [0, 4]$.

complexos. Isso de fato é verificado quando analisamos o valor dos autovalores nessa região.

Autovalores da jacobiana

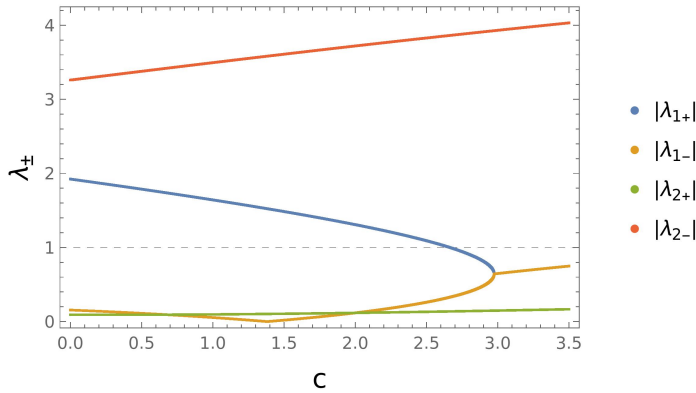


Figura 6: Gráfico do módulo dos autovalores e de $\sqrt{b(c-1)}$ que é uma majorante para o módulo dos autovalores complexos.

Outra possível fonte de erro é uma escolha de transiente muito baixo, o diagrama de bifurcação da Figura 5 utiliza um transiente de 2×10^4 .

Construímos um diagrama de bifurcação na região que apresenta pontos fixos, este está apresentado na Figura 7. Utilizamos um transiente maior nessa região de 2×10^5 , e o resultado é compatível com o obtido com o transiente utilizado anteriormente de 2×10^4 .

O diagrama de bifurcação apresenta uma linha quebrada de pontos fixos, ao passo que os autovalores indicam que existem pontos fixos estáveis mesmo nessas regiões. Isso sugere que a convergência para um ponto fixo depende do valor inicial escolhido para (x, y) . Com isso em

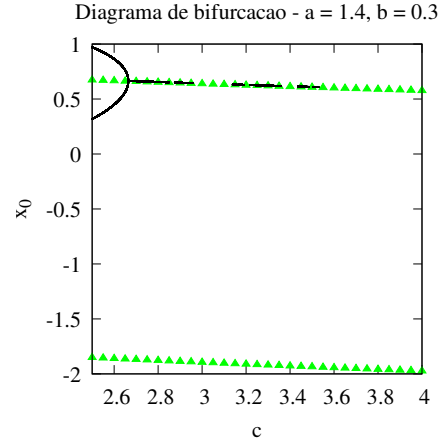


Figura 7: Diagrama de bifurcação na região $c \in [2.5, 4]$ e transiente de 2×10^5 .

mente, produzimos um último diagrama de bifurcação, na região $c \in [2.5, 4]$ porém com valor inicial $x = (0.5, -0.9)$ que é uma região próxima a um dos pontos fixos obtidos numericamente. Este diagrama está apresentado na Figura 8 e vemos que os pontos fixos obtidos são compatíveis com os pontos fixos numéricos, e que agora a linha é contínua, confirmando que a convergência para os pontos fixos é sensível ao valor inicial utilizado.

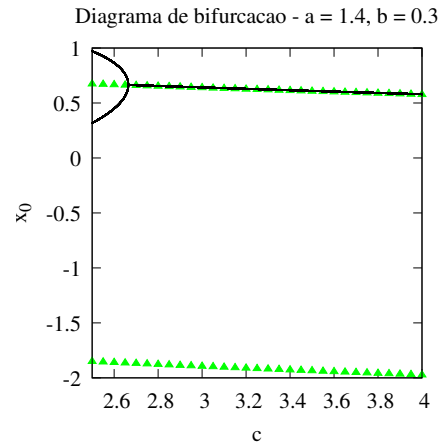


Figura 8: Diagrama de bifurcação com outro valor inicial.

Nosso estudo se restringiu a valores fixos de a e b , porém como vimos o sistema pode ser dissipativo em uma região mais ampla de parâmetros, e a variação de a e b não impede análises similares as que fizemos. Por isso construímos mapas de período em volta de $a = 1.4$ e $b = 0.3$. Na Figura 9 temos o mapa de período para $b = 0.3$ fixo e vemos que, por exemplo, a região onde $a = 1.5$ é

muito rica, apresentando várias órbitas periódicas quando se varia o parâmetro c .

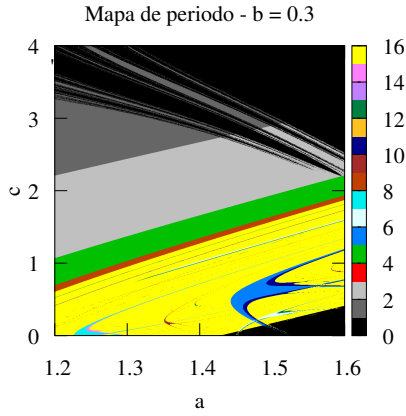


Figura 9: Mapa de parâmetros na região de $c \in [2.5, 4]$ e $a \in [1.2, 1.6]$.

Na Figura 10 vemos o mapa de período para $a = 1.4$ fixo, onde vemos que para qualquer parâmetro d e b o mapa parece apresentar órbitas periódicas similares, sendo alterando a região de c que apresenta cada tipo de órbita.

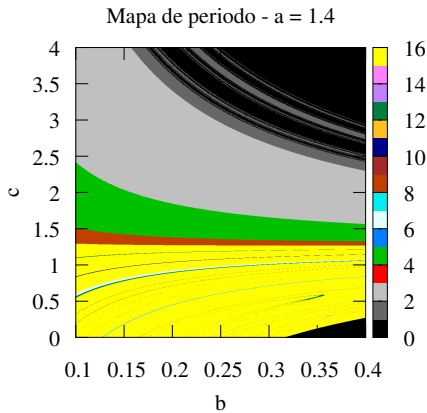


Figura 10: Mapa de parâmetros na região $c \in [2.5, 4]$ e $b \in [0.1, 0.4]$.

A análise das Figuras 9 e 10 sugere que pode ser interessante analisar órbitas periódicas além de pontos fixos, e outros valores para a e b . A análise que fizemos nesse estudo para pontos fixos, a partir da dedução de uma equação para os pontos fixos, e sua resolução numérica pode ser utilizada para órbitas de qualquer período. Para uma órbita de período p aplicamos o mapa da Equação (1) p vezes e então impomos a condição $(x_{n+p}, y_{n+p}) = (x_n, y_n)$, a equação resultante deve ficar extremamente complicada

conforme p é aumentado, mas em tese pode ser resolvida numericamente para encontrar as órbitas periódicas.

IV. CONCLUSÃO

Estudamos o mapa definido pela Equação (1) que é baseado no mapa de Hénon, no entanto, a função seno dificulta a obtenção analítica de propriedades do mapa. Apesar disso, para $b = 0.3$ podemos encontrar condições suficientes para que o mapa seja dissipativo ($c \in (0, 1)$) e para que a jacobiana tenha autovalores reais ($c \in [-1, 1]$). A Equação (4) pode ser simplificada levando a uma condição suficiente para que o sistema seja dissipativo $|b - bc| < 1$.

A Equação (5) garante que para $0 < c < 1$ a jacobiana tem autovalores reais. Além disso, para autovalores complexos o seu módulo pode ser calculado de maneira simples $|\lambda_{\pm}| = \sqrt{b(c \cos(x) - 1)}$, e portanto os autovalores têm o mesmo módulo apenas se são complexos.

Comparamos o diagrama de bifurcação com os pontos fixos encontrados numericamente solucionando a Equação (2). A estabilidade dos pontos fixos encontrados numericamente pode ser verificada diretamente calculando o autovalor da jacobiana e os pontos fixos estáveis correspondem aos pontos fixos vistos no diagrama de bifurcação também.

Por fim, os mapas de parâmetros sugerem que outros valores de parâmetros sejam estudados. Isso pode ser feito estendendo o método aqui utilizado para órbitas periódicas.

REFERÊNCIAS

- [1] Hénon, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor, Commun.Math. Phys. 50, 69–77 (1976)
- [2] Alligood, K.T., Sauer, T. and Yorke, J.A. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York (1996)
- [3] Rajendran, R. A non-linear two dimensional henon-sine chaotic map based image cryptosystem. European Journal of Pure and Applied Mathematics. 115
- [4] Wu, J. Liao, X., Yang, B. Image encryption using 2D Hénon-Sine map and DNA approach. Signal Processing . 153. 10.1016 (2018)
- [5] Murillo-Escobar, et al. Pseudorandom number generator based on novel 2D Hénon-Sine hyperchaotic map with microcontroller implementation. Nonlinear Dyn 111, 6773–6789 (2023)