Matheus Taniguti de Araujo
11443252
matheus_tani@usp.br

Mecânica II
Trabalho final - O Problema de 3 Corpos de Euler e o Método de Hamilton-Jacobi

28 de fevereiro de 2025

I Introdução

Nesse trabalho iremos discutir o método de Hamilton-Jacobi para sistemas Hamiltonianos, aplicado ao problema de 3 corpos de Euler.

O problema de 3 corpos de Euler se refere ao sistema em que um corpo sofre atração gravitacional de duas massas fixas. Se as duas massas fixas estão na reta x, nas posições $x = -c$ e $x = c$, então a Lagrangeana desse sistema pode ser escrita como:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) + \frac{k_1}{r_1} + \frac{k_2}{r_2}$$
$$r_1 = |\mathbf{r} - \mathbf{R}_1| \qquad r_2 = |\mathbf{r} - \mathbf{R}_2| \tag{I.1}$$

Sendo $\mathbf{r}$ a posição da massa, e $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ a posição das massas fixas, e $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2 + z^2}$ e $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2 + z^2}$ em coordenadas cartesianas.

No que segue, iremos analisar o movimento bidimensional do sistema, excluindo termos dependentes da coordenada z e vamos tomar $m = 1$. O problema apresenta dois focos de atração gravitacional de forma que faz sentido utilizar coordenadas elípticas:

$$x = c\cosh\xi\cos\eta$$
$$y = c\sinh\xi\sin\eta \tag{I.2}$$
$$\xi \geq 0 \qquad 0 \leq \eta < 2\pi$$

A expressão de r_1 em coordenadas elípticas é:

$$(x-c)^2+y^2 = c^2\Big(\underbrace{\cosh^2\cos^2\eta}_{(1+\sinh^2\xi)\cos^2\eta} - 2\cosh\xi\cos\eta + 1\Big) + c^2\sinh^2\xi\sin^2\eta = c^2\big(\sinh^2\xi + \cos^2\eta - 2\cosh\xi\cos\eta + 1\big) \tag{I.3}$$

Utilizando $\sinh^2\xi + 1 = \cosh^2\xi$ temos $(x-c)^2 + y^2 = c^2(\cosh\xi - \cos\eta)^2$. Como $\cosh$ é sempre maior que 1 temos $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = |c(\cosh\xi - \cos\eta)| = c(\cosh\xi - \cos\eta)$. Similarmente para r_2 temos:

$$r_1 = c(\cosh\xi - \cos\eta) \qquad r_2 = c(\cosh\xi + \cos\eta) \tag{I.4}$$

Também queremos obter $\dot{x}$ e $\dot{y}$:

$$\dot{x} = \dot{\xi}c\sinh\xi\cos\eta - \dot{\eta}c\cosh\xi\sin\eta \qquad \dot{y} = \dot{\xi}c\cosh\xi\sin\eta + \dot{\eta}c\sinh\xi\cos\eta \Rightarrow$$
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\xi}^2c^2(\sinh^2\xi\cos^2\eta + \cosh^2\xi\sin^2\eta) + \dot{\eta}^2c^2(\cosh^2\xi\sin^2\eta + \sinh^2\xi\cos^2\eta) = \tag{I.5}$$
$$\dot{\xi}^2c^2(\sin^2\eta + \sinh^2\xi) + \dot{\eta}^2c^2(\sin^2\eta + \sinh^2\xi) = c^2(\sin^2\eta + \sinh^2\xi)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)$$

Onde usamos $\cosh^2\xi = \sinh^2\xi + 1$. O termo $\sin^2\eta + \sinh^2\xi$ pode ser escrito $\cosh^2\xi - \cos^2\eta$, que nos leva a Lagrangeana:

$$L = \frac{c^2}{2}(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{k_1}{c(\cosh\xi - \cos\eta)} + \frac{k_2}{c(\cosh\xi + \cos\eta)} \tag{I.6}$$

Tomando $p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}$ e $p_\eta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}$:

$$p_\xi = c^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)\dot{\xi} \qquad p_\eta = c^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)\dot{\eta} \tag{I.7}$$

E isolando $\dot{\eta}$ e $\dot{\xi}$ obtemos:

$$\dot{\eta}p_\eta + \dot{\xi}p_\xi = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{c^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)}$$
$$-L = -\frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{2c^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)} - \frac{k_1}{c(\cosh\xi - \cos\eta)} - \frac{k_2}{c(\cosh\xi + \cos\eta)} \tag{I.8}$$

E com $H = \dot{\xi} p_\xi + \dot{\eta} p_\eta - L$ temos:

$$H(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta) = \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{2c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} - \frac{k_1}{c(\cosh \xi - \cos \eta)} - \frac{k_2}{c(\cosh \xi + \cos \eta)} \tag{I.9}$$

Ou, reescrevendo:

$$-\frac{k_1}{c(\cosh \xi - \cos \eta)} - \frac{k_2}{c(\cosh \xi + \cos \eta)} = -\frac{2c(\cosh^2 \xi + \cos^2 \eta) k_1}{2c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} - \frac{2c(\cosh \xi - \cos \eta) k_2}{2c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \tag{I.10}$$

E juntando termos de ξ e termos de η temos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \Big[p_\xi^2 + p_\eta^2 - 2ck_1(\cosh \xi + \cos \eta) - 2ck_2(\cosh \xi - \cos \eta) \Big] \\ &= \frac{1}{2c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta)} \Big[\big(p_\xi^2 - 2c(k_1 + k_2) \cosh \xi \big) + \big(p_\eta^2 - 2c(k_1 - k_2) \cos \eta \big) \Big] \end{aligned} \tag{I.11}$$

Obtemos a forma mais simples[1]:

$$\begin{gathered} H = \frac{H_\xi + H_\eta}{\cosh^2 \xi - \cos^2 \eta} \\ H_\xi = \frac{1}{2c^2} \Big(p_\xi^2 - 2c(k_1 + k_2) \cosh \xi \Big) \qquad H_\eta = \frac{1}{2c^2} \Big(p_\eta^2 - 2c(k_1 - k_2) \cos \eta \Big) \end{gathered} \tag{I.12}$$

O método de Hamilton-Jacobi, que utilizaremos para encontrar o movimento do sistema, consiste em encontrar uma transformação canônica que leva $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ para $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, e leva a Hamiltoniana $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ para uma Hamiltoniana modificada $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0$, de forma que nas novas coordenadas o sistema pode ser resolvido trivialmente. A função geradora dessa transformação canônica $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ satisfaz:

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t) = H\big(\mathbf{p}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \mathbf{q}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), t\big) + \frac{\partial S}{\partial t} \tag{I.13}$$

$$\mathbf{p} = \nabla_{\mathbf{q}} S \tag{I.14}$$

$$\mathbf{Q} = \nabla_{\mathbf{P}} S \tag{I.15}$$

$$\det \left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_j \partial P_i} \right) \neq 0 \tag{I.16}$$

Que nos leva à equação de Hamilton-Jacobi:

$$H\big(\nabla_{\mathbf{q}} S, q, t\big) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{I.17}$$

Como o sistema após a transformação canônica tem Hamiltoniana $K = 0$, as coordenadas e momentos $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ são todas constantes e utilizamos a notação $\alpha_i = P_i(0)$ e $S = S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$. Resolvendo a equação de Hamilton-Jacobi encontramos S que nos permite encontrar $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ em função das coordenadas $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, que sabemos que são constantes.

Quando a Hamiltoniana é independente do tempo (como no problema estudado), e é possível tomar um caso especial da função geradora S definida em função da energia E que é conservada:

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) = W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) - E(\boldsymbol{\alpha}) t \tag{I.18}$$

Com isso a equação de Hamilton-Jacobi vira:

$$H(\nabla_{\mathbf{q}} W, \mathbf{q}) = E(\boldsymbol{\alpha}) \tag{I.19}$$

A função W pode ser utilizada para encontrar a função geradora S, e W é também uma função geradora, de outra transformação canônica.

Nesse texto seguimos as exposições de Fasano,Marmi [**1**] (páginas 413-430) e de Iro [**2**] (páginas 397-418).

[1] Essa passagem é feita incorretamente em Iro [**2**] (página 413). Na referência, a definição de H_ξ e H_η não recuperam a Hamiltoniana original apresentada na Equação (14.53) dessa referência. A definição apresentada aqui de H_ξ e H_η recuperam a Hamiltoniana original apresentada na nossa Equação (I.9), que coincide com a Hamiltoniana da referência (Equação (14.53)).

II Separação de variáveis em coordenadas elípticas

Para um sistema de Hamiltoniana igual a (I.12) a equação de Hamilton-Jacobi fica:

$$\frac{H_\xi + H_\eta}{\cosh^2\xi - \cos^2\eta} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H_\xi + \cosh^2\xi\frac{\partial S}{\partial t} = -H_\eta + \cos^2\eta\frac{\partial S}{\partial t} \tag{II.1}$$

A equação pode ser resolvida por separação de variáveis se tomarmos:

$$S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = W_1(\xi, \alpha_\xi) + W_2(\eta, \alpha_\eta, \alpha_\xi) - E(\alpha_\eta, \alpha_\xi)t \tag{II.2}$$

A equação de Hamilton-Jacobi é então:

$$H_\xi - E\cosh^2\xi = -H_\eta - E\cos^2\eta \equiv B \tag{II.3}$$

O lado esquerdo só depende de ξ, o lado direito só depende de η, então para que sejam iguais $\forall\,(\xi,\,\eta)$, B deve ser uma constante. Substituindo $H = H(\nabla_{\mathbf{q}}S, \mathbf{q}) \Rightarrow H_\xi = H(\frac{\partial S}{\partial \xi}, q_\xi),\ H_\eta = H_\eta(\frac{\partial S}{\partial \eta}, \eta)$:

$$\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right)^2 - 2c(k_1+k_2)\cosh\xi - 2c^2E\cosh^2\xi = -\left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}\right)^2 + 2c(k_1-k_2)\cos\eta - 2c^2E\cos^2\eta = 2c^2B \tag{II.4}$$

Que nos leva às soluções:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^\xi \Big[2c^2B + \big(2c^2E\cosh x + 2c(k_1+k_2)\big)\cosh x\Big]^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \\ W_2 &= \int_0^\eta \Big[-2c^2B - \big(2c^2E\cos x - 2c(k_1-k_2)\big)\cos x\Big]^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{II.5}$$

Onde, B, E, k_1, k_2 e c são constantes que dependem do problema. k_1, k_2 estão relacionados à constantes universais e a massa de cada corpo fixo; c determina a posição de cada masssa fixa no referencial utilizado; e por fim B e E são constantes de movimento, dependendo das condições iniciais do sistema.

As duas integrais acima são integrais elípticas e não possuem expressão fechada em termos de funções elementares. Portanto, na prática, para obter o movimento do sistema precisamos lançar mão de métodos numéricos.

Note que W_1 e W_2 dependem das constantes E, $2c^2B$ além de uma das coordenadas ξ ou η, consistente com o fato de que a função geradora depende das coordenadas originais $\mathbf{q}$ e dos momentos transformados $\mathbf{P}$, estes últimos sendo constantes. Portanto, podemos escrever $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) = S(\xi, \eta, E, 2c^2B)$, e temos $\mathbf{Q} = (\frac{\partial S}{\partial E}, \frac{\partial S}{\partial(2c^2B)})$. Disso, temos:

III Hamiltoniana transformada e solução do sistema

As Equações (II.5) nos dão a função geradora S que é solução da equação de Hamilton-Jacobi, $S = W_1 + W_2 - Et$. No entanto, a função $W \equiv W_1 + W_2$ também é uma função geradora de uma transformação canônica[2], em particular como $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$, temos que $K^W = H(\nabla_{\mathbf{q}}W, \mathbf{q}, t) = E$:

$$H(\nabla_{\mathbf{q}}W, \mathbf{q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow H(\nabla_{\mathbf{q}}W, \mathbf{q}, t) = E(\boldsymbol{\alpha}) \tag{III.1}$$

Onde $W = W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$ e $\boldsymbol{\alpha}$ são os momentos novos, e são constantes. Como a nova Hamiltoniana é $E(\boldsymbol{\alpha})$ então as coordenadas conjugadas a $\boldsymbol{\alpha}$ são cíclicas e $\boldsymbol{\alpha(t)} = \boldsymbol{\alpha(0)}$. Além disso, as coordenadas conjugadas $\boldsymbol{\beta}$ satisfazem $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha})$, como os α_i são constantes, então vale $\boldsymbol{\beta}(t) = \gamma t + \boldsymbol{\beta}(0)$. Sempre podemos tomar $E(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha_1$ de forma que as coordenadas novas satisfazem $\beta_1 = t + \beta_1(0)$ e $\beta_i = \beta_i(0)$ para $i \neq 1$.

No nosso problema W depende de duas constantes E e $2c^2B$, que são os dois momentos transformados $(P_1,\,P_2) = (\alpha_1,\,\alpha_2) = (E,\,2c^2B)$. A Hamiltoniana transformada é $E(\boldsymbol{\alpha_1}) = \alpha_1 = E$, e por fim as coordenadas transformadas são $(\beta_1,\,\beta_2) = (t + \beta_1(0),\,\beta_2(0)) = (\frac{\partial W}{\partial E},\,\frac{\partial W}{\partial(2c^2B)})$. Juntando tudo obtemos:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\partial W}{\partial E} \Leftrightarrow t + \beta_1(0) = \frac{\partial W_1}{\partial E} + \frac{\partial W_2}{\partial E} \\ \beta_2 &= \frac{\partial W}{\partial(2c^2B)} \Leftrightarrow \beta_2(0) = \frac{\partial W_1}{\partial(2c^2B)} + \frac{\partial W_2}{\partial(2c^2B)} \end{aligned} \tag{III.2}$$

[2] Impor que o determinante de $\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{P}}$ seja não nulo equivale a impor o mesmo sobre $\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{P}}$, e ambas dependem das mesmas variáveis $\mathbf{q}$ e $\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}$. A primeira condição garante que são ambas funções geradoras, e como dependem das mesmas variáveis são funções geradoras de mesma espécie.

Como W_1, W_2 são integrais que dependem de constantes, e das coordenadas originais ξ, η, e o lado esquerdo das igualdades acima só dependem de constantes ou do tempo, então basta inverter as equações acima para obter as soluções $\xi(t)$ e $\eta(t)$, a não ser por constantes, que são determinadas pelas condições iniciais utilizadas (note que temos 4 constantes $(E, 2c^2B, \beta_1(0), \beta_2(0))$ para 4 graus de liberdade $(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta)$). Na prática isso deve ser feito numericamente, pois W_1 e W_2 não têm expressão em termos de funções elementares.

IV Separação de variáveis com potencial genérico

Podemos considerar uma Hamiltoniana independente do tempo com um potencial do tipo $V(\xi,\eta) = \frac{a(\xi)+b(\eta)}{c^2(\cosh^2\xi - \cos^\eta)}$, e mostrar que um problema desse tipo é sempre separável.

Além de mostrar que o problema que expômos acima é um caso particular de uma classe mais geral de problemas sepáraveis, o nosso interesse maior é enfatizar como o procedimento de separação de variáveis fornece constantes de movimento de maneira muito direta.

Com o potencial considerado a Hamiltoniana tem a forma:

$$H(p_\xi, p_\eta, \xi, \eta) = \frac{1}{c^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)}\big(\frac{1}{2m}p_\xi^2 + \frac{1}{2m}p_\eta^2 + a(\xi) + b(\eta)\big) \tag{IV.1}$$

Tomando $S = W_1(\xi, \alpha_\xi) + W_2(\eta, \alpha_\eta, \alpha_\xi) - Et$ a equação de Hamilton-Jacobi é:

$$H(\nabla_{\mathbf{q}} S, \mathbf{q}) = E \Leftrightarrow \frac{1}{2mc^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)}\left[\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}\right)^2 + 2ma(\xi) + 2mb(\eta)\right] = E \tag{IV.2}$$

Multiplicando os dois lados por $2mc^2(\cosh^2\xi - \cos^2\eta)$ e reorganizando termos:

$$2mc^2E\cosh^2\xi - \left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right)^2 - 2ma(\xi) = 2mc^2E\cos^2\eta + \left(\frac{\partial W_2}{\partial \eta}\right)^2 + 2mb(\eta) \tag{IV.3}$$

O lado direito da equação depende só de ξ e o lado direito só de η. Logo, para que a igualdade seja válida para todo par (ξ, η) é necessário que os dois lados sejam constantes.

Qualquer processo de separação de variáveis visa concluir que duas funções distintas são constantes, mas no caso do método de Hamilton-Jacobi, encontramos funções constantes que dependem de W_1, W_2 e de coordenadas do sistema, nos permitindo utilizar as expressões $\frac{\partial W_i}{\partial q_i} = p_i$ para encontrar constantes de movimento:

$$2mc^2E\cosh^2\xi - p_\xi^2 - 2ma(\xi) = e_1 = cte. \tag{IV.4}$$

$$2mc^2E\cos^2\eta + p_\eta^2 + 2mb(\eta) = e_1 = cte. \tag{IV.5}$$

A Equação (IV.3) nos leva à solução formal para a equação de Hamilton-Jacobi, basta isolar $\frac{\partial W_1}{\partial \xi}$ ou $\frac{\partial W_2}{\partial \eta}$ e integrar os dois lados.

Em muitos problemas o método de separação de variáveis leva rapidamente a constantes de movimento usuais, sem necessidade de invocar explicitamente simetrias, leis de conservação ou o teorema de Noether. Por exemplo no caso do problema de Kepler, podemos aplicar um método similar de separação de variáveis em coordenadas esféricas, podendo concluir que o momento angular total é conservado e que o momento conjugado a coordenada azimutal ϕ é conservado. Ambas essas afirmações podem ser verificadas a partir das simetrias do sistema: o potencial central leva a conservação do momento angular total, enquanto a simetria cilindrica leva a conservação de uma das componentes do momento angular, nomeadamente p_ϕ.

Mais detalhes sobre o método de Hamilton-Jacobi aplicado ao problema de Kepler podem ser encontrados em Fasano, Marmi [**1**] (páginas 466-471) e em Lemos [**3**] (páginas 306-308)

Referências

[1] Fasano, A., Marmi, S. (2006). Analytical Mechanics: An Introduction. OUP Oxford.

[2] Iro, H. (2015). A modern approach to classical mechanics. World Scientific Publishing Company.

[3] Lemos, N. A. (2013). Mecânica analítica. Editora Livraria da Fisica.