

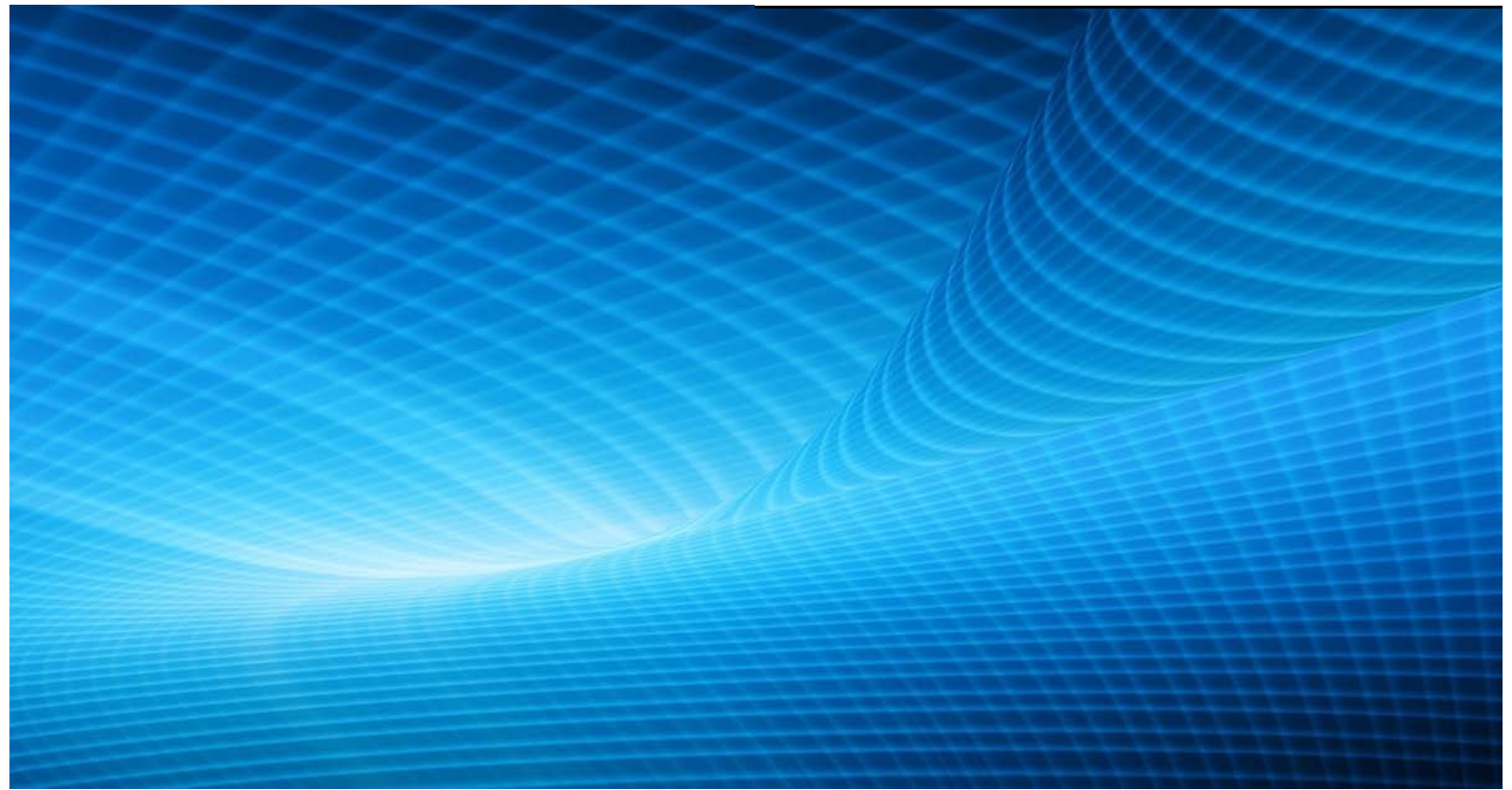
高速フーリエ変換で畳み込み

フーリエ変換入門

tmtk

ツイート0

NHN TECHORUS
Tech Blog
AWS
Data Science
Tech
Event
Column



Topics

- 離散フーリエ変換とは
- 離散フーリエ変換の定義
- まとめ
- 参考文献

こんにちは。データサイエンスチームのtmtkです。
この記事では、離散フーリエ変換の紹介をします。

離散フーリエ変換とは

離散フーリエ変換は、要素数が N の有限集合を定義域にもつ関数を、

$$\phi_n(t) = \exp\left(\frac{i2\pi nt}{N}\right) \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

の形の関数の和で書き表す手続きのことをいいます。別の言い方をすれば、線形空間上で基底変換をしていると考えることもできます。
離散フーリエ変換は、高速フーリエ変換というアルゴリズムで高速化できます。
離散フーリエ変換の応用として、多倍長整数演算や、畳み込み処理の高速化などがあるようです。
この記事では、離散フーリエ変換の定義とその意味について紹介します。続く記事では、高速フーリエ変換や

その応用として畳み込み処理の高速化を紹介します。

離散フーリエ変換の定義

はじめに、自然数 $N \in \mathbb{N}$ を固定します。
関数 $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ が周期 N をもつとします。すなわち、任意の整数 t に対して、 $x(t + N) = x(t)$ が成り立っている
とします。このとき、 x は $x(1), \dots, x(N)$ から決まるので、 x は有限集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 上の関数

$$\begin{array}{ccc} x: & \{1, \dots, N\} & \rightarrow \mathbb{C} \\ & t & \mapsto x(t) \end{array}$$

\mathbb{C}^N の元

や N 次元ベクトル空間

$$\begin{pmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(N) \end{pmatrix}$$

と同一視することができます。以後、 N 次元ベクトル

$$x = \begin{pmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(N) \end{pmatrix}$$

のみにについて考えますが、周期関数や有限集合上の関数とも考えられることに注意してください。
さて、 N 次元ベクトル x に対して、 x の離散フーリエ変換

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(x)(1) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(x)(N) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N$$

を

$$\mathcal{F}(x)(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N x(t) \exp(-\frac{i2\pi nt}{N})$$

で定義します。これが離散フーリエ変換の定義です。
離散フーリエ変換の意味
この離散フーリエ変換の定義はどのように出てきたものなのでしょうか。これから説明します。
周期関数

$$\begin{aligned} \phi_n : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(\frac{i2\pi nt}{N}) \end{aligned}$$

を考えることができます。これと同一視できる N 次元ベクトル

$$\phi_n = \begin{pmatrix} \exp(\frac{i2\pi n1}{N}) \\ \vdots \\ \exp(\frac{i2\pi nN}{N}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{C}^N$$

を $n = 1, \dots, N$ にわたって集めると、これは上の正規直交基底になることがわかります。実際、内積を計算すると

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_m) &= \sum_{t=1}^N \overline{\phi_n(t)} \phi_m(t) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \exp(\frac{i2\pi(-n+m)t}{N}) \\ &= \delta_{nm} \end{aligned}$$

となるので、正規直交基底になっていることが確認できました。
そこで、標準基底 $\{e_1, \dots, e_N\}$ で表示されたベクトル $x \in \mathbb{C}^n$ を基底 $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ に変換して表示すると、 x は

$$x = \sum_{n=1}^N (\phi_n, x) \phi_n$$

と書けることから、 x の ϕ_n に関する係数は

$$\begin{aligned}(\phi_n, x) &= \sum_{t=1}^N \overline{\phi_n(t)} x(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N x(t) \exp\left(-\frac{i2\pi nt}{N}\right)\end{aligned}$$

となります。これは x のフーリエ変換の第 n 項 $\mathcal{F}(x)(n)$ です。これが離散フーリエ変換の由来です。

つまり、離散フーリエ変換は線形空間 \mathbb{C}^N の標準基底 $\{e_1, \dots, e_N\}$ から正規直交基底 $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ への基底変換です。

逆離散フーリエ変換

離散フーリエ変換の逆の操作で、逆離散フーリエ変換というものがあります。これは離散フーリエ変換の逆の基底変換です。具体的に書き表すと以下のようになります。

N 次元ベクトル空間 \mathbb{C}^N の元

$$x = \begin{pmatrix} x(1) \\ \vdots \\ x(N) \end{pmatrix}$$

に対して、その逆離散フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}(x) \in \mathbb{C}^N$ を

$$\mathcal{F}^{-1}(x)(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N x(n) \exp\left(+\frac{i2\pi tn}{N}\right)$$

で定義します。離散フーリエ変換の場合と指数関数 \exp の引数 $\frac{i2\pi nt}{N}$ の符号が変わっています。実際に互いに逆変換になっていることは、以下のように直接の計算で確かめられます。まず、最初に $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$ については

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(x))(t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathcal{F}(x)(n) \exp\left(\frac{i2\pi tn}{N}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s=1}^N x(s) \exp\left(-\frac{i2\pi ns}{N}\right) \right) \exp\left(\frac{i2\pi tn}{N}\right) \\ &= \sum_{s=1}^N x(s) \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \exp\left(\frac{i2\pi n(t-s)}{N}\right) \right) \\ &= \sum_{s=1}^N x(s) \delta_{st} \\ &= x(t)\end{aligned}$$

より、 $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(x) = x$ が任意の $x \in \mathbb{C}^N$ について成り立ちます。同様に、 $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}(x) = x$ も示すことができます。したがって、離散フーリエ変換 \mathcal{F} と逆離散フーリエ変換 \mathcal{F}^{-1} は互いに逆変換になっています。

まとめ

この記事では、離散フーリエ変換の定義を紹介しました。離散フーリエ変換はベクトル空間の基底変換と考えることができます。離散フーリエ変換の逆変換を逆離散フーリエ変換と呼びます。

参考文献

- Ian Goodfellow『深層学習』
- 離散フーリエ変換を用いた多倍長乗算の話
- 山下幸彦他『工学のためのフーリエ解析』

ツイート

0

#フーリエ変換#数学#深層学習

データ分析と機械学習とソフトウェア開発をしています。 アルゴリズムとデータ構造が好きです。

Recommends

こちらもおすすめ

2018.7.26

高速フーリエ変換(FFT)入門

Data Science

S

Tech

GCPの利用料が安くなる|GCPの請求代行・運用代行・導入移行支援AWSの

セミナー・イベント
採用情報
執筆者への取材依頼
フォトギャラリー

Data Science
Tech
Event
Column
Tags
Members

...

商標について

個人情報保護方針

...

ISMS認証