

# Projet MNI : Modèle de Kuramoto & Modèle FPUT

A. Cremel-Schlemer (3800159)  
L. Jonkisz (28708367)  
M. Panet (28705836)

30 Novembre 2023

## 1 Le modèle de Kuramoto

### Question Préambule

$$\begin{aligned}\theta_i &= \omega_i + \sum_{j=1}^N \frac{K}{N} \sin(\theta_j - \theta_i) \\ &= \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \sin(\theta_j) \cos(\theta_i) - \cos(\theta_j) \sin(\theta_i) \right] \\ &= \boxed{\omega_i + \frac{K}{N} \left[ \cos(\theta_i) \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j) - \sin(\theta_i) \sum_{j=1}^N \cos(\theta_j) \right]} \quad (1)\end{aligned}$$

or on a d'autre part :

$$\begin{aligned}Re^{i\Psi} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{i\theta_i} \\ NR \cos(\Psi) + iNR \sin(\Psi) &= \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i) + i \sin(\theta_i)\end{aligned}$$

par identification :

$$\boxed{NR \cos(\Psi) = \sum_{i=1}^N \cos(\theta_i)} \quad (2)$$

$$\boxed{NR \sin(\Psi) = \sum_{i=1}^N \sin(\theta_i)} \quad (3)$$

alors on remplace dans (2) et (3) dans (1) :

$$\theta_i = \omega_i + KR \left[ \sin(\Psi) \cos(\theta_i) - \cos(\Psi) \sin(\theta_i) \right]$$

enfin

$$\boxed{\theta_i = \omega_i + KR \sin(\Psi - \theta_i)}$$

### Question 1

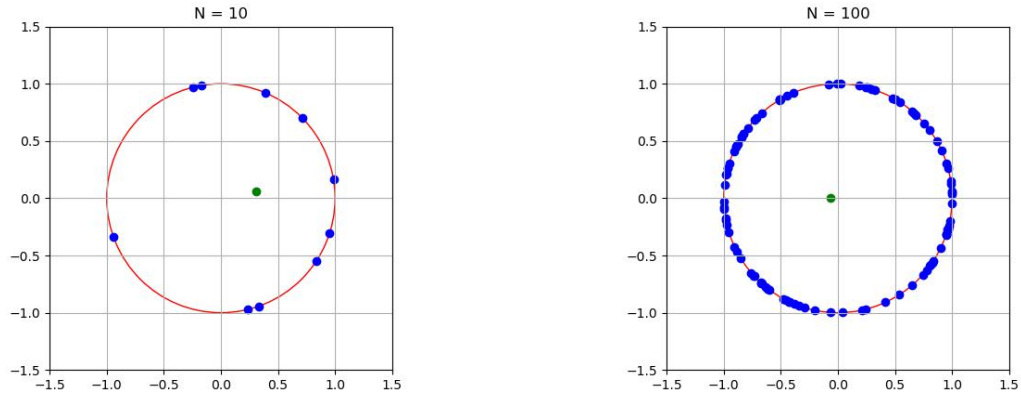


FIGURE 1 – Représentation des Oscillateurs pour deux  $N$  différents

### Question 2

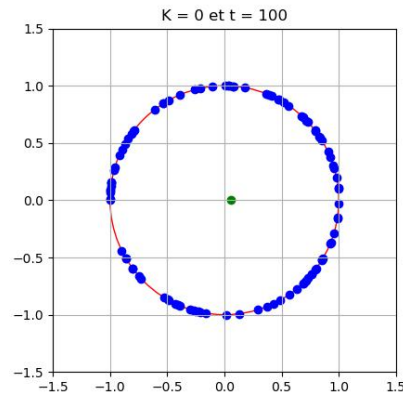


FIGURE 2 – Représentation des Oscillateurs à  $t = 100$

### Question 3

Pour  $K = 0$ , on remarque que les phases des oscillateurs sont réparties aléatoirement sur l'ensemble  $[-\pi, \pi]$ . Il n'y a donc aucune synchronisation entre ces oscillateurs. Au contraire, à  $K = 2$ , les phases se regroupent et convergent vers une même valeur. Ce phénomène traduit une synchronisation des oscillations.

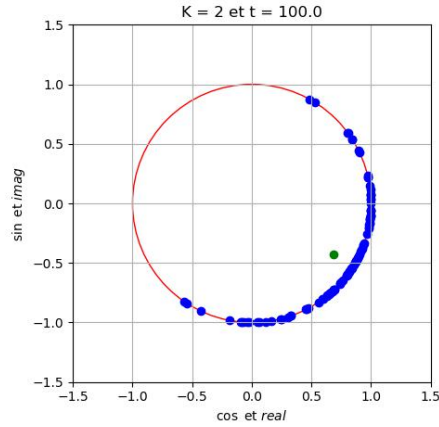


FIGURE 3 – Représentation des Oscillateurs à  $t = 100$  pour  $K = 2$

#### Question 4

Nos résultats restent très bruités et nécessitent d'être répétés afin de réduire l'impact de l'aléatoire. Cependant, on remarque deux modes de fonctionnement distincts :

- Pour  $K \leq 1.6$ , les modes sont non synchronisés avec  $r$  qui reste inférieur à 0.5.
- Pour  $K > 1.6$ , les modes sont ici synchronisés et les valeurs de  $r$  sont bien plus élevées et tendent vers 1.

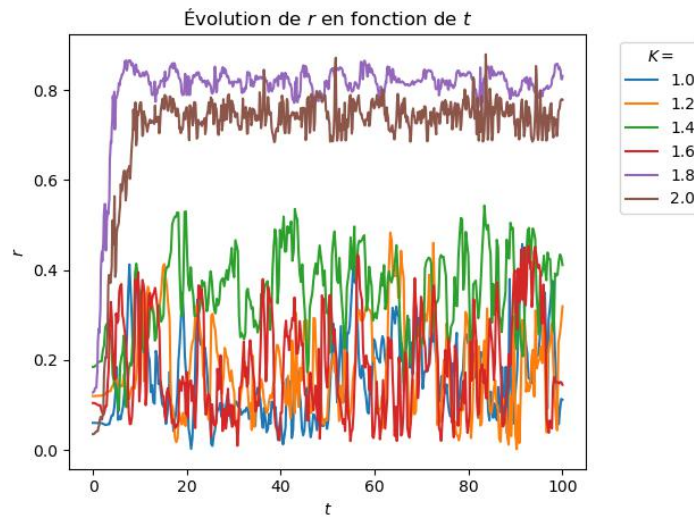


FIGURE 4 – Évolution temporelle de la valeur absolue du terme d'ordre complexe.

#### Question 5

On remarque que la tendance de  $r(K)$  est difficile à interpréter à cause du bruit lié aux fluctuations aléatoires. On voit, néanmoins, qu'elle croît globalement.

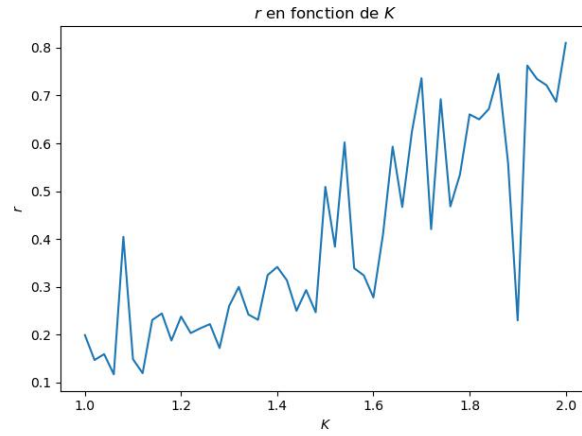


FIGURE 5 – Évolution de  $r$  en fonction de  $K$  sans répétition.

### Question 6

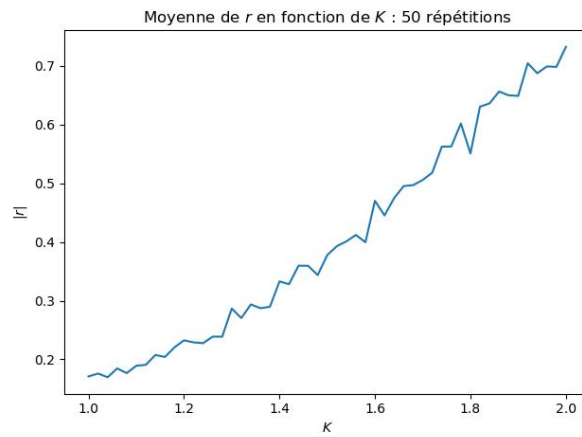


FIGURE 6 – Évolution de  $r$  en fonction de  $K$  avec répétition.

### Question 7

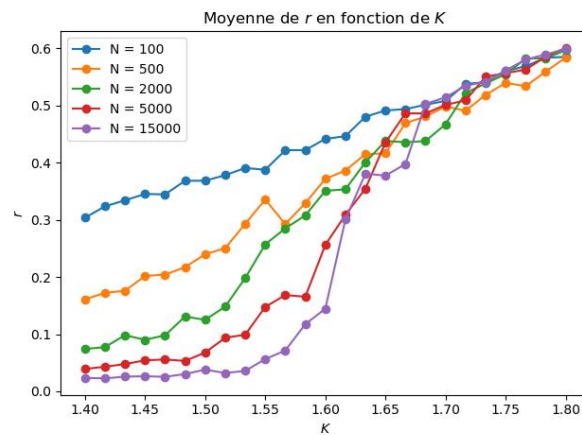


FIGURE 7 – Évolution de  $r$  en fonction de  $K$  avec répétition et avec différentes tailles de systèmes.

### Question 8

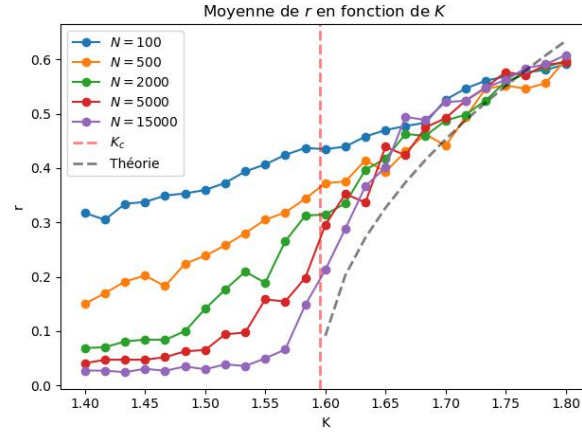


FIGURE 8 – Évolution de  $r$  en fonction de  $K$

### Question 9

$$r = \sqrt{\frac{-16(K - K_c)}{\pi K_c^4 g''(0)}}$$

avec :

$$K_c = \frac{2}{\pi} \sqrt{2\pi} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$$

et

$$g''(0) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

on a :

$$r = \sqrt{\frac{8(K - K_c)}{K_c^3}}$$

Fonction de Bessel :

$$I(n, x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}$$

On fait le DL en  $y$  de :

$$\begin{aligned} r &= \frac{y\sqrt{2\pi}}{4} e^{-\frac{y^2}{4}} \left[ I(0, \frac{y^2}{4}) + I(1, \frac{y^2}{4}) \right] \\ &= \frac{y\sqrt{2\pi}}{4} \left[ 1 - \frac{y^2}{4} + o(y^3) \right] \left[ (1 + o(y^3)) + \left( \frac{y^2}{8} + o(y^3) \right) \right] \\ &= \frac{y\sqrt{2\pi}}{4} \left[ 1 - \frac{y^2}{8} + o(y^3) \right] \\ r &\approx \frac{y}{K_c} - \frac{y^3}{8K_c} \end{aligned} \tag{4}$$

avec  $y = Kr$

On ne s'intéresse pas au cas où  $r = 0$  (solutions non-synchronisées)

$$1 \approx \frac{K}{K_c} - \frac{K^2 r^2}{8K_c}$$

$$r^2 = \frac{8(K - K_c)}{K^3}$$

Ce qui est très proche de la valeurs sur laquelle on est censé retomber :  $r^2 = \frac{8(K - K_c)}{K_c^3}$

Ceci est lié au fait qu'on recherche une approximation de cette fonction. Analysons donc le comportement de la tangente en  $K \rightarrow K_c$  de  $r^2$ . Le comportement est donnée par :

$$R^2 = r'^2(K_c)(K - K_c) + r(K_c)$$

$$= \frac{24K_c - 16K_c}{K_c^4}(K - K_c)$$

$$= \frac{8(K - K_c)}{K_c^3}$$

Alors

$$R = \sqrt{\frac{8(K - K_c)}{K_c^3}}$$

Le domaine de validité de cette fonction est donnée par le pourcentage d'erreur

$$P(K) = 1 - \sqrt{\frac{K_c^3}{x^3}}$$

Si l'on considère que la validité de R est bonne jusqu'à 10% alors  $K \in [K_c \approx 1.6, 1.71]$ . Notons une dernière fois que pour  $K = 1.8$ , l'erreur est approximativement de 17% d'où l'utilité dans le programme d'utiliser la fonction (4).

La figure 9 montre bien que la majorité de nos points se situe bien au dessus de la fonction (4). Cependant, on remarque que deux points se situent en dessous de la fonction. Ceci est dû au fait que l'on a pris un nombre de répétition par systèmes trop faible. En effet, on remarque que lorsque l'on augmente le nombre de répétition par systèmes, les points passent au dessus de la fonction (4) (voir figure 10).

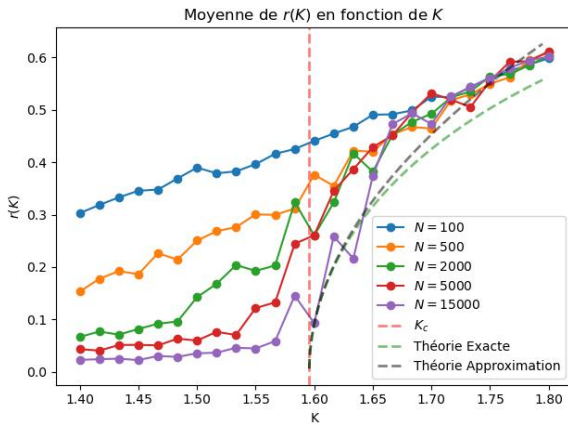


FIGURE 9

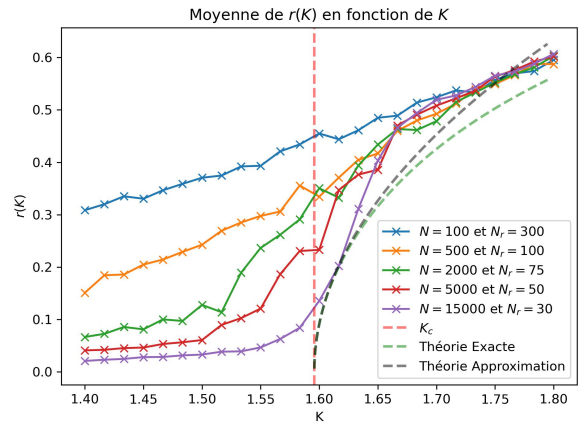


FIGURE 10

## 2 Le modèle FPUT

### Question 1

On a :

$$x_i = a \sin\left(\frac{i\pi}{N}\right)$$

$$V(x) = \frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^3}{3}$$

Pour  $N$  grand, on peut remplacer la somme des potentiels du Hamiltonien par la moyenne des valeurs des positions. On a donc deux termes :

- le terme à l'ordre deux :  $\langle x^2 \rangle \propto \langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$
- le terme à l'ordre trois :  $\langle x^3 \rangle \propto \langle \sin^3 \rangle = 0$

Le terme en alpha correspond au terme à l'ordre trois. Il est donc négligeable tant que  $N$  est grand.

|           | $\alpha$ | Energie Total |
|-----------|----------|---------------|
| Système 1 | 0        | 0.0770444     |
| Système 2 | 0.25     | 0.0770444     |

TABLE 1 – Résultats FPUT 1

### Question 2

Initialement, seul le mode de plus grande longueur d'onde (mode 1) est excité. Pour tout les autres modes, les énergies sont nulles. C'est un comportement induit par la non linéarité du système. Or ce comportement a bien été prédit par la théorie de l'évolution des modes de Mary Tsingou :

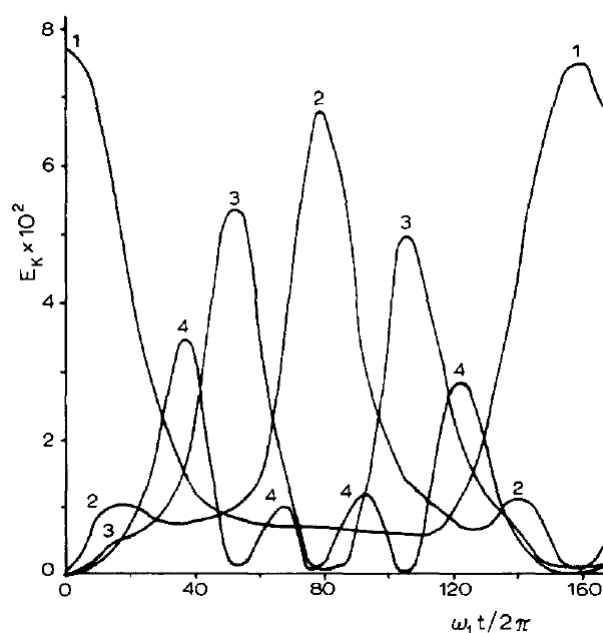


FIGURE 11 – Résultats de Mary Tsingou sur l'évolution des premiers modes normaux d'un modèle FPUT

|          | Système 1       | Système 2       |
|----------|-----------------|-----------------|
| $\alpha$ | 0               | 0.25            |
| $E_0$    | 0.0             | 0.0             |
| $E_1$    | 0.0770444       | 0.0770444       |
| $E_2$    | $4.03151e - 34$ | $4.03151e - 34$ |
| $E_3$    | $4.43448e - 34$ | $4.43448e - 34$ |

TABLE 2 – Tableau des énergies des 4 premiers modes

### Question 3

Pour  $\alpha = 0$ , on ne distingue pas de fonctions de modes mais deux énergies  $E = 0$  et  $E = 7.6$  qui est l'énergie max du niveau excité. Pour  $\alpha = 0.25$ , on obtient la figure de mode de Mary Tsingou avec l'état initial décrit dans la question 2, une évolution des modes qui tend à retourner dans l'état initial.

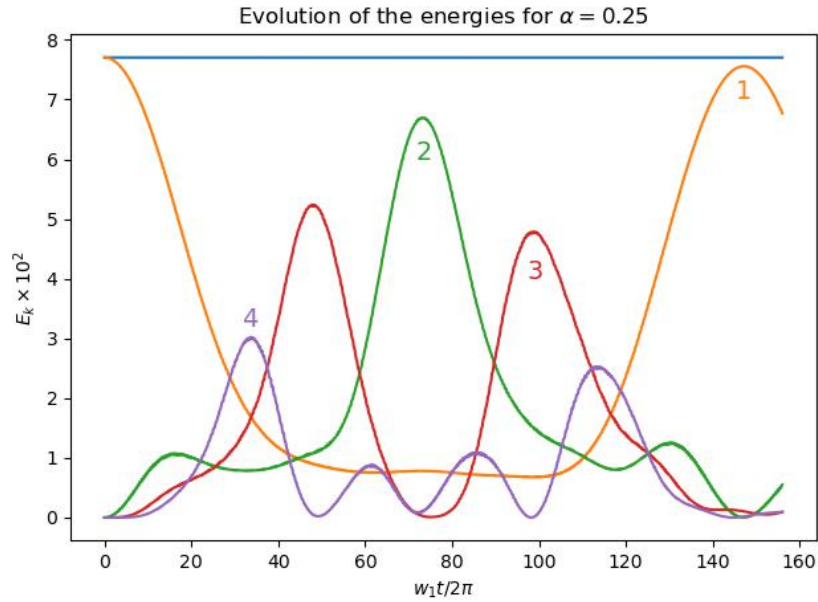


FIGURE 12 – Evolution temporelle de l'énergie des quatres premiers modes

### Question 4

On pourrait s'attendre à ce que l'énergie se disperse de manière homogène dans les différents modes (phénomène de thermalisation selon l'hypothèse ergodique de Boltzmann). À la place, le système évolue de façon quasi-périodique, ce qui est une évolution possible des non-linéaires (systèmes chaotiques).



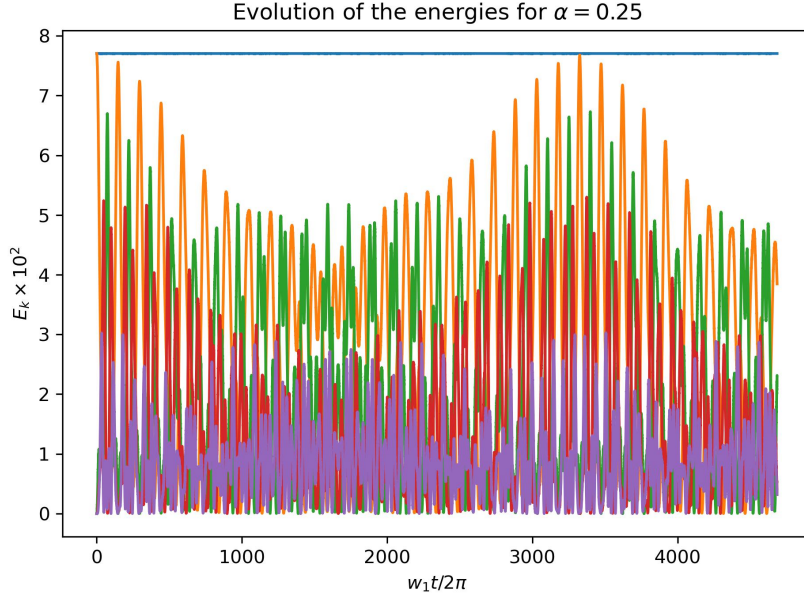


FIGURE 13 – Évolution temporelle de l'énergie des quatres premiers modes

Comment visualiser ce comportement quasi-périodique ? Si l'on tente de tracer une enveloppe cosinusienne pour l'énergie du premier mode sur l'intervalle donné ( $30 * 10000$ , question 4), cela semble correct. Cependant, lorsqu'on réalise la simulation pour ( $8 * 30 * 10000$ ) et que l'on trace cette même enveloppe, celle-ci finit par devenir incorrecte, car le comportement du système est quasi-périodique, c'est-à-dire qu'il ne reboucle pas sur lui-même de façon périodique.

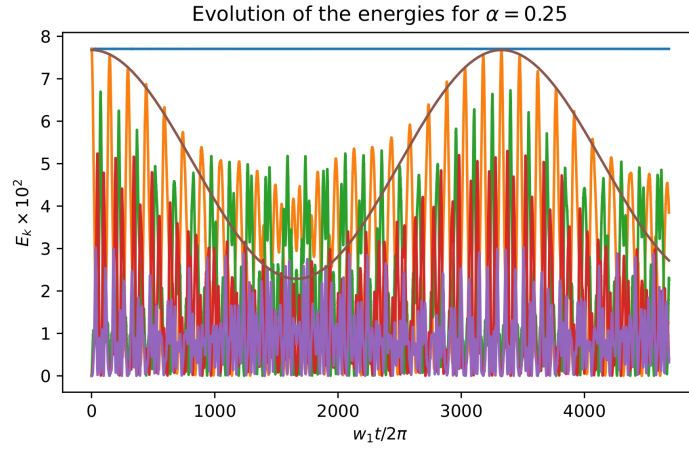


FIGURE 14 – Évolution temporelle de l'énergie des quatres premiers modes + enveloppe du mode initiale

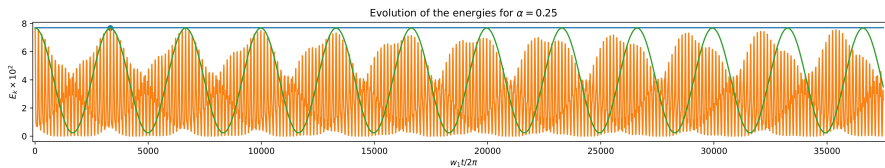


FIGURE 15 – Évolution temporelle de l'énergie du premier mode + enveloppe