

# 顕示選好

松浦総一

備忘録

## 目次

1	顕示選好の理論	1
1.1	選好モデル	2
1.2	選好	2
1.3	顕示選考理論	5

## 1 顕示選好の理論

Kreps (1988) "Notes on the Theory of Choice" に基づいて、単一個人意思決定モデルの基礎的な考え方を説明します。

「選択」(choice) という現象は、ある集合  $A$  がある個人にとっての実際に選択可能な選択肢の集合であったときに、その中から個人によって 1 つの選択肢  $a \in A$  が選ばれる、という現象をいいます。ここに、「選ぶ」というのは、第三者に観察できる行為として選ぶ、ということに限って用いられます。また、問題となっている集合  $A$  の各要素  $a \in A$  を「選択肢」(alternative) と呼びます。

選択現象を問題にしている選択肢  $a$  が確率的構造を持っているとき、その選択肢をとくに\*\*クジ\*\* (lottery) と呼びます。

説明すべき対象を選択肢とします。

$$X \supseteq A \mapsto a$$

ここで  $A$  は選択肢の集合で、 $a$  はその選択肢を選んだ結果となります。 $X$  は整合性を問題にできる選択肢集合のうち最大のもの、となります。

$X$  上の、この人の選択関数

$$C : X \supseteq A \mapsto C(A) \subseteq X$$

が安定的に存在すると仮定します。ここで  $C(A)$  は、 $A$  の中からこの人が選んだ選択肢集合を表します。

$X$  を考察する選択行動で、選択の対象となりうる潜在的な選択肢を集めた集合を表す。選択集合とは、ある  $A \in \mathcal{P}(X)$  が実際に選択可能な選択肢の集合であったときに、その中から 1 つの選択肢が選ばれる現象をいい

ます。「選ばれる」といういうとき、現に選ばれた1つの選択肢以外にも「それでも同様に良かった」というものがあるとき、それらの「そのどれでも良かった」選択肢を全て集めた集合  $C$  を、 $A$  からの選択結果とみなします。

選択関数を定義すると、

$$C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

であるとき、 $X$  上の選択関数 (choice function) である、といいます。ここで、 $\mathcal{P}(X)$  は、 $X$  の部分集合 1 つ 1 つを全部集めてできる冪集合 (power set) のうち、 $X$ の中から二者択一の結果だけを集めたデータを表します。

## 1.1 選好モデル

二項関係 (binary relation) を定義します。 $X$  の (たまたま同じであることを許す) 2つの要素について語られた関係が、 $X$  上の二項関係 (binary relation) であるとは、 $X \times X$  のすべての要素  $(x, y)$  について、 $x$  は  $y$  に対してその関係にあるか、またはその関係にないか、を必ず一方をいうことができる場合を言います。

つまり、選択肢集合  $A$  に選択肢  $x$  と  $y$  があり、その人の選択結果  $C(\{x, y\}) = ?$  を見ます。その人が選択するものは、

$$C(\{x, y\}) = \phi \quad x \text{ も } y \text{ も選べたのに選ばなかった。}$$

$$C(\{x, y\}) = \{x\} \quad x \text{ を選び、} y \text{ を選ばなかった}$$

$$C(\{x, y\}) = \{y\} \quad y \text{ を選び、} x \text{ を選ばなかった}$$

$$C(\{x, y\}) = \{x, y\} \quad x \text{ も } y \text{ も選んだ。}$$

## 1.2 選好

$X$  上の選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  が与えられたとき、 $X$  の (それがたまたま同じであることを許す) 2つの要素についての関係を、各  $(x, y) \in X \times X$  に対して、 $y \notin C(\{x, y\})$  なら、 $x$  は  $y$  に対してその関係にあり、 $y \in C(\{x, y\})$  なら  $x$  は  $y$  に対してその関係にない、というやり方で定められるとき、その関係 (それは二項関係である) を、(選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  によって生成された)  $X$  上の\*\*強選好\*\* (strict preference) といいます。

この二項関係を記号  $\succ$  で表わし、 $x$  が  $y$  に対して強選好の関係にあるとき、 $x$  を  $y$  よりも厳密に選好する、あるいは  $x$  は  $y$  よりも厳密に選好されるといって、 $x \succ y$  と書き、 $x$  が  $y$  に対して強選好の関係にないとき、 $x$  は  $y$  よりも厳密に選好されるわけではない、といって  $x \not\succ y$  と書きます。

ある  $X$  上の強選好  $\succ$  は、それが定義されたもとの選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  を明示する必要があるときは、 $\succ_c$  と書く。

$x, y$  の二者択一の結果、 $C(\{x, y\})$  を、

$$x \not\succ y \iff y \in C(\{x, y\}) \leftarrow x \text{ は } y \text{ より厳密に選好されるわけではない。}$$

$$x \succ y \iff y \notin C(\{x, y\}) \leftarrow x \text{ は } y \text{ より厳密に選好される。}$$

のように書いたものを、この人の (強) 選好という。

つぎに、 $X$  上の強選好  $\succ$  が与えられたとき、各  $A \in \mathcal{P}(X)$  に対し、

$$C(A, \succ) = \{x \in A \mid \nexists y \in A \text{ s.t. } y \succ x\}$$

を対応づける (集合体集合の) 関数  $C(\cdot, \succ) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  を、 $X$  上の選択の**選好モデル** (preference model) といいます。

まとめると、

$$C : \mathcal{P}(X) \rightarrow C(A) \in \mathcal{P}(X)$$

のうち、「二択一の結果を、 $X$  の各ペア  $(x, y)$  ごとに、 $x \succ y$  か  $x \not\succ y$  かを書いて、書いたものを  $X$  上の (この人の) 強選好」といいます。選好モデルとは、

$$C : \mathcal{P}(X) \ni A \rightarrow C(A) \in \mathcal{P}(X)$$

を

$$\begin{aligned} C(\cdot, \succ) : \mathcal{P}(X) \ni A \rightarrow C(A, \succ) \in \mathcal{P}(X) \\ \text{such that } C(A, \succ) = \{x \in A \mid \nexists y \in A \text{ s.t. } y \succ x\} \end{aligned}$$

となり、この選好  $\succ$  をもつ人が、実際に  $A$  に直面したときに選ぶと予測するということを意味します。これは  $C(\cdot, \succ)$  のデータから予測されます。

$C(\cdot, \succ) : \mathcal{P}(X) \ni A \rightarrow C(A, \succ) \in \mathcal{P}(X)$  は、 $C : \mathcal{P}(X) \ni A \rightarrow C(A) \in \mathcal{P}(X)$  のうち、 $|X|^2$  個のデータで、 $C : \mathcal{P}(X) \ni A \rightarrow C(A) \in \mathcal{P}(X)$  全体の  $2^{|X|}$  個の値を予測しているのです。

合理性モデルでは、「もし・・・なら、 $\forall A \in \mathcal{P}; C(A, \succ) = C(A)$  となります。

ふりかえると、

- 説明する対象は、選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto C(A) \in \mathcal{P}(X)$  である。
- データを取ってくるパラメータとしての選好  $\succ$  (つまり、 $X$  上のすべての二択一の結果) を考えます。
- 選択を説明するモデルである**選好モデル**は、

$$C(A, \succ) = \{x \in A \mid \nexists y \in A \text{ s.t. } y \succ x\}$$

となります。つまり、「自分より良いものが存在しない」要素だけを集めたものを意味します。

- 選択理論とは、「 $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  が・・・の条件を満たすとき、 $C$  のうち  $\times \times$  から作った  $C(A, \times \times) = C(A)$ 」が成り立つような「・・・」と「 $\times \times$ 」を考えます。

ただ、選好  $\succ$  としてどんなものでも認めてしまうと、

$$\exists \succ, \exists A \text{ s.t. } C(A, \succ) = \emptyset$$

となる場合があります。たとえば、 $A = X = \{x, y, z\}$  で、 $C(\{x, y\}) = \{x\}$ 、 $C(\{y, z\}) = \{y\}$ 、 $C(\{x, z\}) = \{z\}$  かつ、 $C(A) \neq \emptyset$ . 場合、 $C(\{x, y, z\}) = \emptyset$  となります。

つまり、

- $z \succ x$  より  $x \notin C(\{x, y, z\}, \succ)$

- $x \succ y$  より  $y \notin C(\{x, y, z\}, \succ)$
- $y \succ z$  より  $z \notin C(\{x, y, z\}, \succ)$

すなわち、 $C(\{x, y, z\}, \succ) = \emptyset$  となります。

では、どのような二択一行動を示す人なら、その人の選好モデルは完結性があるのかを考えます。次の2つの条件が満たされるとき、選好  $\succ$  は**完結性** (completeness) を持つといいます。

1. **反対称性** (asymmetry) :  $\forall x, y \in X$ ; 「 $x \succ y$  かつ  $y \succ x$ 」ということはない。つまり二択一行動が  $C(\{x, y\}) = \{\emptyset\}$  ということがない。
2. **負推移性** (negative transitivity) :  $\forall x, y \in X$ ; 「もし  $x \not\succ y$  かつ  $y \not\succ z$ 」ならば「 $x \not\succ z$ 」である。つまり二択一行動としては、もし  $y \in C(\{x, y\})$  かつ  $z \in C(\{y, z\})$  ならば、 $z \in C(\{x, z\})$  である。

これより、 $X$  上の強選好  $\succ$  は、次のように定義できます。

$$\nexists (x, y) \in X \times X; \quad \text{s.t.} \quad x \succ y, \quad y \succ x$$

であるとき、**反対称的** (assymmetric) である、あるいは反対称性を満たすといい、

$$\forall x, y, z \in X; \quad \text{if} \quad x \not\succ y, \quad y \not\succ z, \quad \text{then} \quad x \not\succ z$$

であるとき、**負推移的** (negatively transitive) である、あるいは負推移性を満たすといいます

選好関係

$X$  上の強選好  $\succ$  は、反対称的かつ負推移的であるとき、 $X$  上の**\*\*選好関係\*\***(preference relation) であるといいます。

選好  $\succ$  が反対称的かつ負推移的であるとき、**\*\*推移的\*\***(acyclic) であるといい、 $x_1 \succ x_2$  かつ  $x_2 \succ x_3$  かつ  $\dots$  かつ  $x_{n-1} \succ x_n$  なら  $x_1 \neq x_n$  となります。

### 1.2.1 $X$ が有限集合の場合

$X$  上の強選好  $\succ$  が

$$\forall x \in X; \quad x \not\succ x$$

であるとき、**\*\*非反射的\*\***(irreflexive) である、あるいは非反射性を満たすといいます。

推移性

$X$  上の強選好  $\succ$  は、

$$\forall x, y, z \in X; \quad \text{if} \quad x \succ y, \quad y \succ x, \quad \text{then} \quad x \succ z$$

であるとき、**\*\*推移的\*\***(transitive) である、あるいは推移性を満たすといいます。

証明は省略 (背理法により示せます)。

非周期性

次に、 $X$  上の強選好  $\succ$  は、

$$\begin{aligned} &\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X; \\ &\text{if} \quad x_1 \succ x_2, \quad x_2 \succ x_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} \succ x_n, \quad \text{then} \quad x_1 \neq x_n \end{aligned}$$

であるとき、\*\*非周期的\*\* (acyclic) である、あるいは非周期性を満たすといえます。

証明は省略 (帰納法により示せます)。

$X$  上の強選好  $\succ$  は、 $X$  上の選好関係ならば、非反射的かつ推移的かつ非周期的である。

$X$  上の選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  は、

$$\forall A \in \mathcal{P}(X); \quad \text{if } A \neq \emptyset \quad \text{then } C(A) \neq \emptyset$$

であるとき、\*\*非空\*\* (nonempty) であるといえます。

これらの定理と定義から、次の定理が示せます。

$X$  を有限集合 ( $|X| < \infty$ ) とします。 $X$  上の強選好  $\succ$  は、 $X$  上の (反対称的と負推移性を満たす) 選好関係ならば、 $A \neq \emptyset$  のとき、 $C(\cdot, \succ) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  は非空となります。

が選好関係であるとき、 $X$  が有限集合であれば、任意の  $A \in \mathcal{P}(X)$  に対し、 $C(A, \succ) \neq \emptyset$  となります。

ここまでの説明により、ある個人の選択行動を説明するために必要な条件は、ある個人が (有限の) 選択肢の中から選び取るとき、その人の選好が反対称的かつ負推移的であれば、選択肢集合が非空なら、その人がもつ選択関数は非空である、ということがわかりました。

### 1.3 顕示選考理論

選択肢集合  $X$  が有限であるとしします。すると、 $X$  上の強選好  $\succ$  が  $X$  上の選好関係であるならば、 $C(\cdot, \succ) : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  は非空まつ\*\*ハウタッカーの公理\*\* (Houthakker's axiom) を満たします。

#### 1.3.1 ハウタッカーの公理

$X$  上の選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  は、

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in X, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X); \\ &\quad \text{if } x, y \in A \cap B, \quad x \in C(A), \quad y \in C(B) \\ &\quad \text{then } x \in C(B), \quad y \in C(A) \end{aligned}$$

であるとき、**ハウタッカーの公理 (Houthakker's axiom)** を満たす、といえます。

具体的な例で説明します。たとえば、あなたの買い物の選択肢として

-  $A = \{\text{みかん, リンゴ, バナナ}\}$ 、-  $B = \{\text{バナナ, リンゴ, ぶどう}\}$

があるとしします。

このとき、あなたは

-  $A$  の中からリンゴを選び ( $C(A) = \{\text{リンゴ}\}$ )、-  $B$  の中からバナナを選ぶ ( $C(B) = \{\text{バナナ}\}$ )

としします。

リンゴとバナナはいずれも  $A \cap B$  に含まれています。ハウタッカーの公理は、この状況のもとでは、選択肢集合が  $B$  に変わってもリンゴが選ばれ、選択肢集合が  $A$  に変わってもバナナが選ばなければならない、ということを要請します。

つまり、共通して含まれる選択肢については、集合ごとに選択の優劣が入れ替わるような行動は許されない、という選択の一貫性を表しています。

センの  $\alpha$  規則性

$X$  上の選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  は、

$$\begin{aligned} &\forall x \in X, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X); \\ &\quad \text{if } x \in B \subset A, \quad x \in C(A), \\ &\quad \text{then } x \in C(B) \end{aligned}$$

であるとき、センの\*\* $\alpha$  規則性\*\* (Sen's property  $\alpha$ ) を満たす、といいます。

センの  $\alpha$  規則性の具体例

あなたの選択肢の全集合を  $X$  とし、 $A = \{\text{みかん, リンゴ, バナナ}\}$ 、 $B = \{\text{リンゴ, バナナ}\}$  とします。このとき  $B \subset A$  が成り立っています。

いま、あなたが集合  $A$  からリンゴを選んでいる、すなわち  $C(A) = \{\text{リンゴ}\}$  であるとし、リンゴは  $B$  にも含まれています。

センの  $\alpha$  規則性は、この状況において、選択肢集合が  $A$  からその部分集合である  $B$  に縮小されても、リンゴは引き続き選ばれなければならない、すなわち  $C(B) = \{\text{リンゴ}\}$  であることを要請します。

言い換えると、ある選択肢がより大きな集合の中で選ばれていたのであれば、その選択肢を排除しない範囲で選択肢集合を減らしても、その選択肢が選ばれなくなることは許されない、という性質を表しています。

センの  $\beta$  規則性

$X$  上の選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  は、

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in X, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(X); \\ &\quad \text{if } x, y \in C(A), \quad A \subset B, \quad y \in C(B), \\ &\quad \text{then } x \in C(B) \end{aligned}$$

であるとき、センの  $\beta$  規則性 (Sen's property  $\beta$ ) を満たす、といいます。

センの  $\beta$  規則性の具体例

選択肢の全集合を  $X$  とし、 $A = \{\text{リンゴ, バナナ}\}$ 、 $B = \{\text{みかん, リンゴ, バナナ}\}$  とします。このとき  $A \subset B$  が成り立っています。

いま、集合  $A$  からはリンゴとバナナの両方を選んでいる、すなわち  $C(A) = \{\text{リンゴ, バナナ}\}$  とします。

次に、選択肢が増えた集合  $B$  からはバナナを選んでいる、すなわち  $C(B) = \{\text{バナナ}\}$  であるとし、

センの  $\beta$  規則性は、この状況のもとでは、集合  $A$  で同時に選ばれていたリンゴとバナナのうち、集合  $B$  に移ってもバナナが選ばれているのであれば、リンゴもまた集合  $B$  から選ばれなければならない、ということを要請します。

したがって、この規則性を満たす選択関数では、 $C(B)$  は  $\{\text{バナナ}\}$  ではなく、少なくともリンゴを含み、たとえば  $C(B) = \{\text{リンゴ, バナナ}\}$  でなければならない、ということになります。

この例は、集合を拡大したときに、もともと同時に選ばれていた選択肢の一部だけが残るような振る舞いを排除する性質を具体的に示しています。

これらの公理と規則性から次の定理が示せます。

定理

$X$  上の選択関数  $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  が非空とします。このとき、 $C : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  がハウタッカーの公理を満たすための必要十分条件は、それがセンの  $\alpha$  規則性と  $\beta$  規則性を満たすことです。

具体例で説明してみます。たとえばあなたが買い物をしているとき、選択肢集合  $A = \{\text{豚肉, 牛肉, 鶏肉}\}$  の中から何かを選択する、選択問題に直面しているとします。このとき、センの  $\alpha$  規則性は、もしあなたが  $A$

の中から牛肉を選んだとき ( $C(A) = \{\text{牛肉}\}$ )、選択肢集合が  $B = \{\text{牛肉}, \text{鶏肉}\} \subset A$  に変わっても、あなたは牛肉を選ぶ、ということを意味します。

次にセンの  $\beta$  規則性は、もしあなたが  $A$  の中から牛肉と鶏肉を選んだとき ( $C(A) = \{\text{牛肉}, \text{鶏肉}\}$ )、選択肢集合が  $B = \{\text{豚肉}, \text{牛肉}, \text{鶏肉}\} \supset A$  に変わっても、あなたは鶏肉を選ぶ、ということを意味します。

また、 $X$  上の選択関数  $C: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  が非空 ( $A \neq \emptyset$  なら  $C(A) \neq \emptyset$ ) かつハウタッカーの公理を満たすならば、 $\succ_c$  は  $X$  上の選好関係  $\succ$  であり (反対称性と負推移性を満たす) であり、しかも  $A \neq \emptyset$  ならば、

$$\forall A \in \mathcal{P}(X); \quad C(A, \succ_c) = C(A)$$

が成り立ちます。