畠田 証券投資論

松浦総一

2023-07-24

Table of contents

第 1 章

はじめに

この資料は，神戸大学経営学研究科の畠田先生が立命館大学で開講した「証券投資論」という科目の資料をもとに，ファイナンスの基礎を学習するためのノートとして松浦が再編集したものです。この資料の元ネタは，証券アナリスト協会が証券アナリスト試験の教材として推奨している教科書

- 小林孝雄，芦田敏夫 (2009)「**新・証券投資論 I 理論編**」日本経済新聞社

です。この教科書は，ファイナンスの基礎理論を体系的に学ぶことができる良書ですので，この資料とともに教科書も随時参照するようにしてください。ファイナンスの基礎を理解するためには，確率論と統計学の基礎知識が必要です。そのための参考書として以下のものがオススメです。

1. 石井俊全 著 (2018)「**1 冊でマスター 大学の統計学**」技術評論社
2. 木村俊一，鈴川晶夫，古澄英男 (2003)「**確率と統計 – 基礎と応用**」朝倉書店
3. 森棟公夫・照井伸彦・中川満・西埜晴久・黒住英司 著「**統計学**」有斐閣
4. 西山慶彦・新谷元嗣・川口大司・奥井亮 著 (2019)「**計量経済学**」有斐閣
5. 浅野皙・中村二朗 著 (2009)「**計量経済学** 第 2 版」有斐閣
6. 山本拓 (2022)「**計量経済学** 第 2 版」新世社

1 は統計学の基礎を学ぶ教科書・問題集となっていて，独学に最適な教科書です。2 と 3 は統計学の基礎をしっかり学びたい人向けの，数学的な厳密性を重視した教科書です。4 は計量経済学の基礎から応用まで幅広く，かつ厳密に学ぶための教科書です。5 と 6 は 4 と同様に計量経済学の基礎を学ぶ教科書ですが，5 はパネルデータ分析に詳しく，6 は時系列分析に詳しいです。

この教科書では触れられていない行動ファイナンスの知識については，

- Shefrin, H. (2002) “**Beyond Greed and Fear**”, Oxford University Press, Chapter 1-4. (鈴木一功訳「行動ファイナンスと投資の心理学」東洋経済新報社,

2005 年)

- Montier, J, (2002) “**Behavioural Finance: Insights into irrational minds and markets**”, Wiley & Sons, Chapter 1. (真壁昭夫，川西諭、栗田昌孝訳「行動ファイナンスの実践 – 投資家心理が動かす金融市場を読む—」，ダイヤモンド社, 2005 年)

で補います。

1.1　1. 授業のテーマと到達目標

ファイナンスは，大きく分けると，**金融市場** (証券市場) とコーポレートファイナンスの分野に大別されます。金融市場は金融資産への投資問題に焦点を向けることで，リターンとリスクの関係，ポートフォリオ選択，資産の価格づけ，リスクマネジメントを明らかにしようとする分野です。本講義では，先ず，それらの内容について詳細に解説を行うことで，伝統的な証券投資論の考え方を理解します。そして，その上で，最近，積極的に議論されている行動ファイナンスの考え方についての解説を行います。

第 2 章

確率

東証株価指数 (Tokyo Stock Price Index: TOPIX) の値動きから何を感じますか？ 以下では、TOPIX の動きを通して確率について学びます。

まずは、R の環境を整えましょう。いくつかのパッケージを読み込み，グラフ作成時のスタイルを設定しておきます。

```
pacman::p_load(tidyverse, ggthemes, patchwork)

theme_set(theme_minimal())
```

次に TOPIX のデータを読み込みんで、TOPIX の動きを確認します。ここで読み込んでいる `stock_data.csv` には，2007 年 4 月 2 日から 2023 年 4 月 28 日にわたる，TOPIX，トヨタ自動車，日産自動車，本田技術研究所の株価の終値が日次で記録されています。

```
df <- read_csv("data/stock_data.csv")
```

ここで，TOPIX とは，東京証券取引所一部上場株式銘柄を対象として東京証券取引所が 1 秒ごとに算出・公表している株式ポートフォリオ (東証一部の時価総額) を株価指数で表したものです。他の株価指数として有名なものに日経株価平均があります。TOPIX の値動きを確認してみましょう。

```
ggplot(df) + aes(x = date, y = TOPIX) + geom_line()
```

2008 年のリーマンショックで暴落した株価も 2014 年からはじまったアベノミクスで株価は上昇し，2016 年のマイナス金利，2020 年の新型コロナウイルスの感染拡大による株価の下落など，TOPIX の値動きは経済の動向を反映していることが分かります。

2.1　期待値と分散 (標準偏差) の推定

ファイナンスの分野では，資産価値 (たとえば株価) それ自体より，**資産価値の変化率** (これを**リターン**といいます) で議論することも多いです。先の TOPIX のデータを使って，TOPIX のリターンを計算して作図してみましょう。まずリターン (return) の定義を確認します。

! リターン

資産 i の t 期のリターン $r_{i,t}$ は，

$$
\begin{aligned}
r_{i,t} &= \frac{D_{i,t} + (P_{i,t} - P_{i,t-1})}{P_{i,t-1}} \\
&= \frac{D_{i,t} - P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - 1
\end{aligned}
$$

ここで

- D はインカム (配当，クーポン，地代など)
- P は資産価値 (株価，債券価格，地価など)
- i は企業，t は期を表す。

配当を受け取った場合，配当落ち日次リターンを計算することになります。上の式から配当 D を引いて計算します。

❗ 配当落ち日次リターン

株式 i の t 期における (配当落ち) 日次リターン $r_{i,t}$ は，

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} = \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - 1$$

株式の日次リターンを上の式に従って計算する場合，インカムゲインは考慮されていないことに留意しましょう。

同様に，TOPIX の (配当落ち) リターン $r_{i,t}^{TOPIX}$ は

$$r_{i,t}^{TOPIX} = \frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} - 1$$

となります。具体的には、次のような表になります。

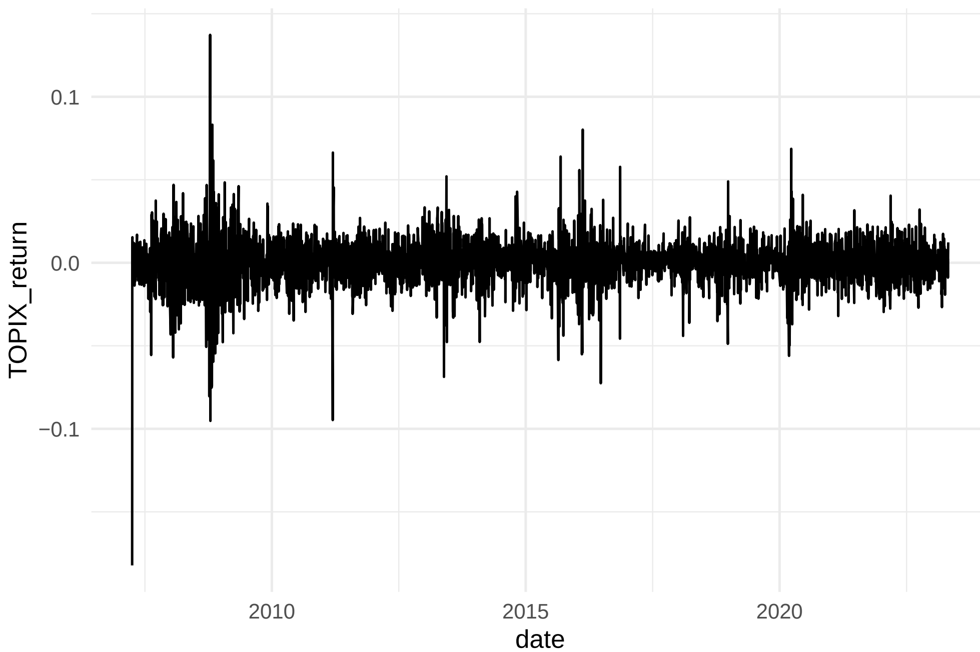
```
# リターンの計算
df <- df %>%
  mutate(
      TOPIX_return = TOPIX / lag(TOPIX) - 1 # TOPIX のリターン
      )
# 作表
df %>%
  select(date, TOPIX, TOPIX_return) %>%
  head(10) %>%
  knitr::kable(digits = 3, booktabs = TRUE)
```

date	TOPIX	TOPIX_return
2007-04-02	1682.49	NA
2007-04-03	1704.32	0.013
2007-04-04	1730.52	0.015
2007-04-05	1720.72	-0.006
2007-04-06	1717.08	-0.002
2007-04-09	1738.10	0.012
2007-04-10	1735.69	-0.001
2007-04-11	1739.01	0.002
2007-04-12	1726.18	-0.007

date	TOPIX	TOPIX_return
2007-04-13	1705.50	-0.012

この TOPIX_return を折れ線グラフにすると以下のようになります。

```
ggplot(df) + aes(x = date, y = TOPIX_return) + geom_line()
```



2.2　確率変数

これまでの観測データの値から，TOPIX，とりわけ TOPIX のリターンはランダムな (確率的な) 値をとっていることが分かります。つまり**予測不可能**なデータということです。TOPIX の長期的な傾向 (Trend) はある程度予想することは可能ですが，明日明後日の TOPIX の値といった短期的な動向を予測することはほぼ不可能です。つまり，TOPIX や TOPIX のリターンは，ある定まった値というよりも，**不確実な値をとる変数**であると考えることができます。このような変数を**確率変数** (random variables) とよびます。

! 確率変数

ある試行 (trial) によって起こりうる事象 ω に対して，ある実数値 $x = X(\omega)$ が与えられ，それぞれの値が起こりうる確率密度関数 $p(x)$ が与えられる場合，ω から x への関数 $X : \omega \mapsto x$ を**確率変数** (random variable) とよびます。確率変数という名

前がついていますが，実は関数なのです。

例：コイン投げ

1 枚のコインを投げるという試行から起こりうる事象を H と T で表わします。

- **試行** (trial)：コイン投げ
- **起こりうる結果** (事象)：$\omega = H, T$ の 2 つの事象が起こりうる。
- **試行の結果**：H の数 $x = \{X(H), X(T)\} = \{1, 0\}$
- **各結果が起こる確率**：$p(1) = p(0) = 0.5$

実現した H の数 (つまり表が出た回数) を x とするとき，事象 ω から x への関数 X(コイン投げによる**表の数**) は確率変数である。

厳密な表現は分かりにくいですね…。直感的には，確率を持った変数として理解してください。でも，しばらく厳密にいきましょう！

```
\begin{tikzpicture}
\draw (0,1) node [left]{$X$};
\draw (0,3) node {before coin toss};
\draw (4,3) node {after coin toss};
\draw [thick, ->] (0,1) -- (4,2) node[pos=0.5, sloped, above]{$p(1)=0.5$};
\draw (4,2) node [right] {$\omega = \boldsymbol{H}, x=1$};
\draw [thick, ->] (0,1) -- (4,0) node[pos=0.5, sloped, below]{$p(0)=0.5$};
\draw (4,0) node [right] {$\omega = \boldsymbol{T}, x=0$};
\end{tikzpicture}
```

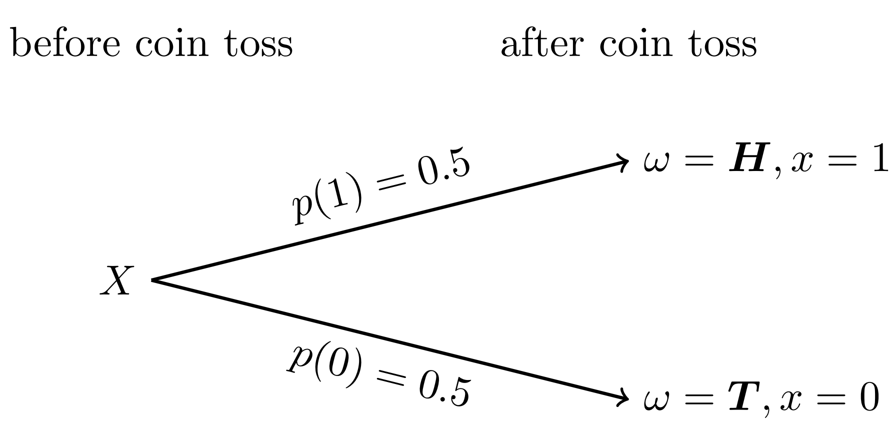
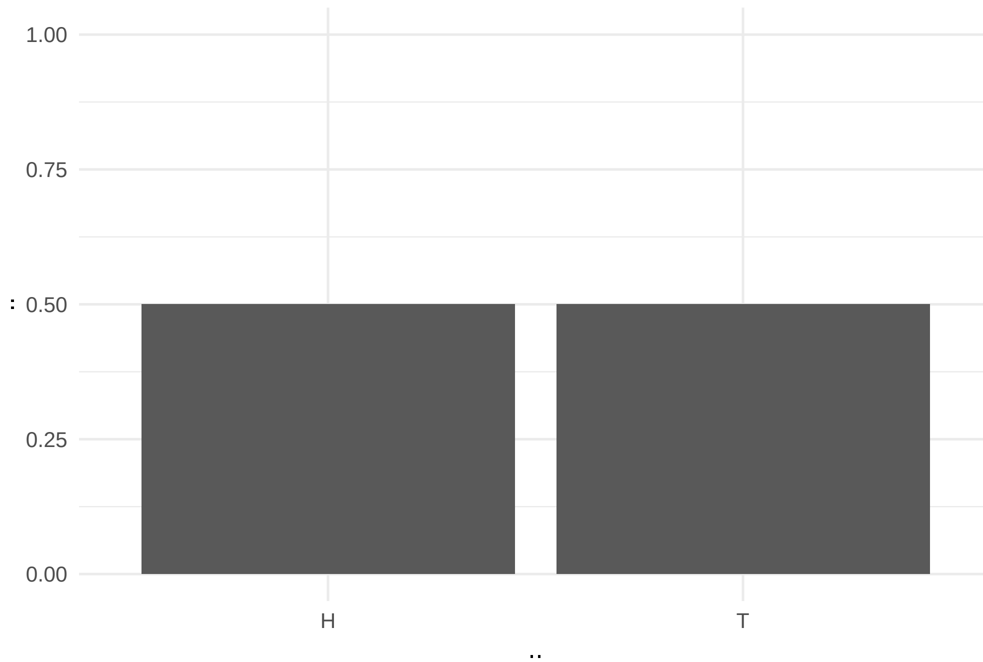


Figure2.1: コイン投げの例

確率は対応する値がどのくらいの割合で発生するかを表します。

```r
df <- data.frame(
  coin <- c("H", "T"),
  p <- c(0.5, 0.5)
)
g <- ggplot(df) + aes(x = coin, y = p) + geom_col()
g <- g + ylim(0,1) + xlab("確率") + ylab("結果")
print(g)
```



> **i** 2 枚コイン投げの例
>
> - **試行** (trial)：コイン投げ
> - **起こりうる事象**：$ = { (H,H),(H,T),(T,H),(T,T)} $
> - **試行結果**：表の数 $x = \{X(H,H), X(H,T), X(T,H), X(T,T)\} = \{2, 1, 0\}$
> - **各結果が起こる確率**：$p(2) = 0.25$, $p(1) = 0.25$, $p(0) = 0.25$
>
> 表の数を x とするとき，ω から x への関数 $X : \omega \mapsto x$(2 枚のコイン投げによる表の数) は確率変数です。

```latex
\begin{tikzpicture}
\draw (0,2) node [left]{$X$};
\draw (0,5) node {before coin toss};
\draw (4,5) node {after coin toss};
\draw [thick, ->] (0,2) -- (4,4) node[pos=0.5, sloped,  above]{$p(2)=0.25$};
```

```
\draw (4,4) node [right] {$\omega = (\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}), x=2$};
\draw [thick, ->] (0,2) -- (4,2) node[pos=0.5, above]{$p(1)=0.5$};
\draw (4,2) node [right] {$\omega = (\boldsymbol{H},\boldsymbol{T}), x=1$};
\draw [thick, ->] (0,2) -- (4,0) node[pos=0.5, sloped, below]{$p(0)=0.25$};
\draw (4,0) node [right] {$\omega = (\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}), x=0$};
\end{tikzpicture}
```

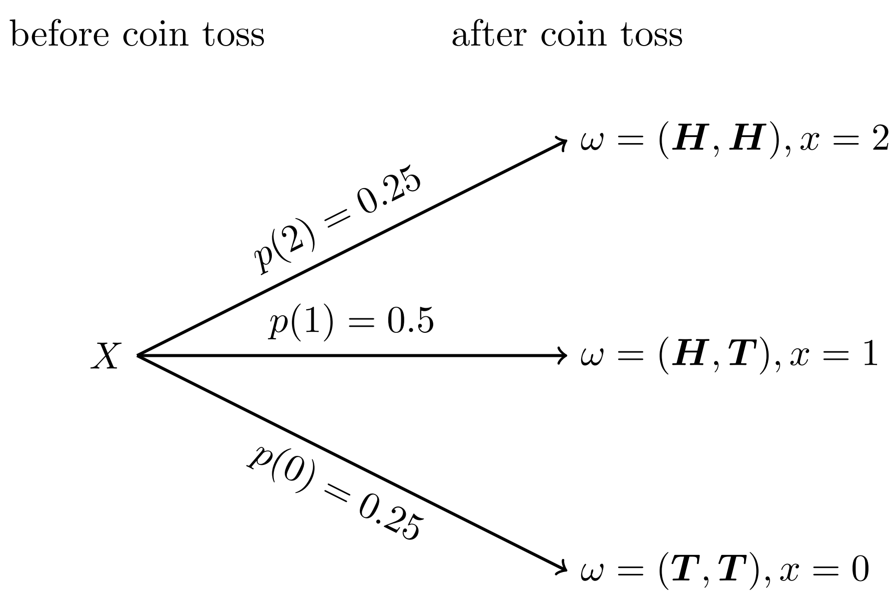
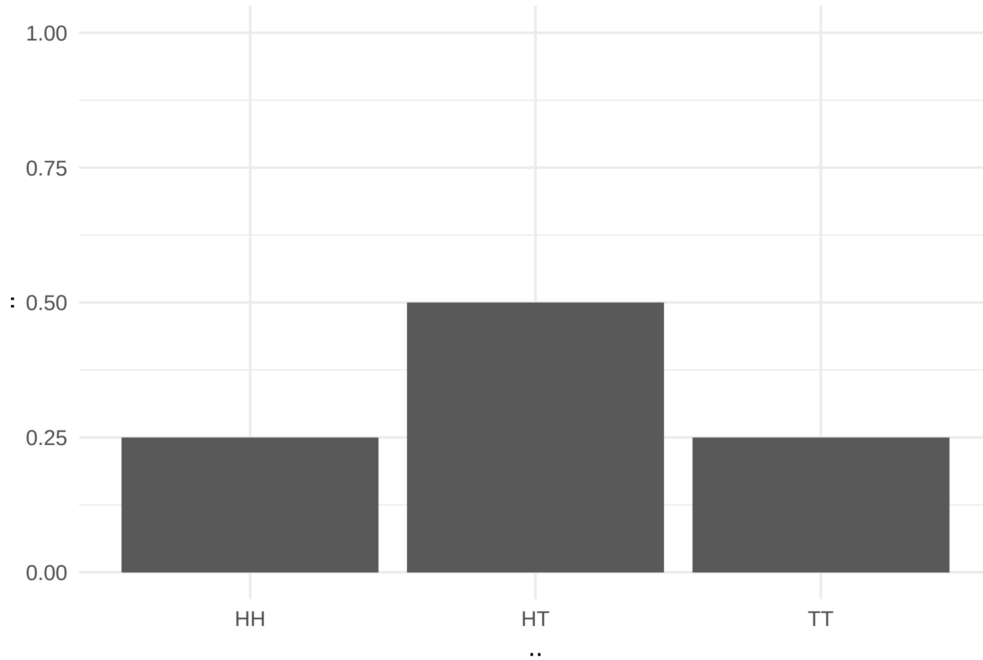


Figure2.2: コイン投げの例

```
df <- data.frame(
  coin <- c("HH", "HT","TT"),
  p <- c(0.25, 0.5,0.25)
)
g <- ggplot(df) + aes(x = coin, y = p) + geom_col()
g <- g + ylim(0,1) + xlab("確率") + ylab("結果")
print(g)
```



先の例と同様に、各確率の対応する値がどれくらいの割合で発生するかを表しています。この確率分布は確率変数の特徴を表しています。

練習問題

コインを 4 枚投げたときに出た表の数を x で表すとします。このとき，以下の (1)〜(4) について答えなさい。

1. 起こりうる事象
2. 試行結果
3. 各結果が起こる確率
4. 確率分布

確率変数により，われわれは**不確実性**を伴う現象を記述できるようになりました。確率変数という用語は，結果を観測する**前**の状況を指し示しています。まとめると、

- これからどうなるかを表しているのが確率変数です。
- 試行後において，確率変数がとって具体的な x の値は実現値 (realized value) といいます。
- 確率変数に 2 つの側面 (観測前と観測後) があり，これらを区別する必要があります。
- 確率変数 X が取りうる値 x に応じて，
  - **離散型確率変数** (discrete random variables)
  - **連続型確率変数** (continuous random variables)

  に区別することができます。

当面は，**離散型確率変数**に着目します。

(金融) 資産を購入をする際，われわれはその資産を将来価値を確認した上で，購入の意思決定をしているのではありません。その資産について将来においてどのような値が実現するのか知らないうちに，購入の意思決定を行います。つまり，資産の価値は不確実性を伴う，したがって資産の価値は確率変数である。このとき，どのようなことを考慮して購入の意思決定を行うのか？

意思決定者は，不確実性に直面しているとき，実現するかもしれない特定の値よりも，実現する値の**起こりやすさ**，つまり**確率分布**に関心を持っている。一般に，確率分布の特徴の中でも，中心とばらつきに関心を持つ傾向がある。確率分布を意識しない人，具体的には宝くじの賞金 (景品) にのみ関心をもつような人はたいてい失敗する結末が！！

先に示した確率分布の特徴 (中心とばらつき) は，指標として統計学的に定義されています。

! 期待値

期待値 (expectation) とは、確率変数 X がとりうる値の加重平均であり、確率分布の**中心の位置**を表します。起こりうる値を x_k，その確率を p_k とすると，確率変数 X の期待値の公式は以下ようになります。

$$\mathbb{E}[X] := \sum_k p_k x_k$$

! 分散

分散 (variance) とは、確率変数 X がとりうる値と期待値との乖離の期待値であり，確率分布の**ばらつきの程度**を表します。確率変数 X の分散の公式は以下ようになります。

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[X] &:= \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \\ &= \sum_k p_k (x_k - \mathbb{E}[X])^2\end{aligned}$$

! 標準偏差

標準偏差 (standard deviation) は分散の平方根であり，次のように定義されます。

$$\sigma[X] := \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

先に示した確率分布の特徴は，分布の中心である期待値と，ばらつきの程度である分散 (あるいは標準偏差) で表現されます。ばらつきの程度の指標である分散は，不確実性の程度を表しており，ファイナンスでは**リスク** (risk) とよびます。重要なことですが、上で説明した期待値，分散，標準偏差といった指標はパラメータ (定数) であり，確率変数では

ありません。

例 5：資産投資

投資資産 A と B を運用して得られるリターンが以下の通りとします。

投資資産 A

状態	1	2	3	4	5
確率	40%	20%	20%	10%	10%
リターン	−100%	−75%	−50%	−25%	1000%

投資資産 B

状態	1	2	3	4	5
確率	40%	20%	20%	10%	10%
リターン	−15%	0%	15%	10%	25%

	投資資産 A	投資資産 B
$\mathbb{E}[X]$	32.5	0.5
$\mathbb{SD}[X]$	323.5	14.4

練習問題

上記設定のもとで、2 つの資産が生み出すリターンの期待値と分散を求めてください。

	資産 A	資産 B
$\mathbb{E}[X]$	32.5	(　)
$\mathbb{V}[X]$	323.5	(　)

解答

定義通りに、投資資産 A の期待値と分散を求めます。

	資産 A	資産 B
$\mathbb{E}[X]$	32.5	(　)
$\mathbb{V}[X]$	323.5	(　)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[A] &= 0.4 \times (-100) + 0.2 \times (-75) + 0.2 \times (-50) \\
&\quad + 0.1 \times (-25) + 0.1 \times 1000 \\
&= 32.50\% \\
\mathbb{V}[A] &= 0.4(-100-32.5)^2 + 0.2(-75-32.5)^2 + 0.2(-50-32.5)^2 \\
&\quad + 0.1(-25-32.5)^2 + 0.1(1000-32.5)^2 \\
&= 104631.25 \\
\sigma[A] &= \sqrt{104631.25} = 323.47\%
\end{aligned}
$$

2.2.1　2 つの確率変数どうしの関係

2 つの確率変数の関連性は，共分散と相関係数で表します。以下では、それぞれの定義とともに、その統計量の特徴を説明します。

! 共分散

確率変数 X_i と X_j との**共分散** (covariance) を $\mathbb{COV}[X_i, X_j]$ で表す。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{COV}[X_i, X_j] &= \sigma_{ij} \\
&= \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])\right] \\
&= \sum_k p_k (x_{i,k} - \mathbb{E}[X_i])(x_{j,k} - \mathbb{E}[X_j])
\end{aligned}
$$

定義より，$i = j$ のとき，$\mathbb{COV}[X_i, X_j] = \mathbb{V}[X_i]$ となります。つまり分散は共分散の特殊ケース ($i = j$ のケース) となります。

! 相関係数

2 変数の関係を表すもう 1 つの尺度が**相関係数** (correlation) です。X_i と X_j との相関係数を ρ_{ij} で表すとします。なぜか伝統的にギリシャ文字のロー ρ で相関係数を表すことが多いので覚えておきましょう。相関係数は，2 つの変数の共分散をそれぞれの標準偏差の積で除した値です。こうすることで，共分散の値が変数の単位に依存しない値となります。

$$
\rho_{ij} \equiv \frac{\mathbb{COV}[X_i, X_j]}{\sigma[X_i]\sigma[X_j]}
$$

- 相関係数は，$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$ の値をとります。
- 相関係数は，X_i と X_j との**線形関係の程度**を表します
- 相関係数の符号を決定づけるのは，$\mathbb{COV}[X_i, X_j]$ の符号です。
- 相関係数の大きさは，共分散の大きさだけでなく，$\sigma[X_i]$ と $\sigma[X_j]$ の大きさに依存します。

問題 2：投資資産

上記の投資資産の数値例に基づいて，投資資産 A と B の共分散および相関係数を求めよ。

- σ_{AB}
- ρ_{AB}

2.3　演算規則

2.3.1　期待値の演算規則

期待値の演算について，次のような法則が成り立っています。重要な法則ですので、一つ一つ確認しながら理解するようにしてください。

まず，X が確率変数ではなく，定数・パラメータであるとき，

$$\mathbb{E}[X] = X$$

たとえば，

$$\mathbb{E}[10] = 10$$

同様に，a がパラメータや代表値 (期待値，分散，標準偏差) であるとき，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[a] &= a \\ \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]] &= \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}[\mathbb{V}[X]] &= \mathbb{V}[X] \end{aligned}$$

となります。

次に、X が確率変数であり，b がパラメータであるとき，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[bX] &= b\mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]X] &= \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]^2 \end{aligned}$$

パラメータは期待値の外に出すことができます。したがって，

$$\mathbb{E}[X]^2 \neq \mathbb{E}[X^2]$$

X と Y が確率変数であるとき，

$$\mathbb{E}[X+Y]=\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]$$

のように，期待値を分解することができます。

a が確定変数であり，X が確率変数であり，b がパラメータであるとき，

$$\mathbb{E}[a+bX]=\mathbb{E}[a]+\mathbb{E}[bX]=a+b\mathbb{E}[X]$$

が成り立ちます。

2.3.2　分散の演算規則

X が確率変数ではなく，確定変数であるとき，

$$\mathbb{V}[X]=0$$

証明

分散の定義は

$$\mathbb{V}[X]=\sum_k p_k(x_i-\mathbb{E}[X])$$

です。いま X が確定変数であるため，$x_i=X$ かつ $\mathbb{E}[X]=X$ となります。つまり $\mathbb{V}[X]=0$ となります。

同様に，a がパラメータや代表値 (期待値・分散・標準偏差) であるとき，

$$\mathbb{V}[a]=0,\quad \mathbb{V}[\mathbb{E}[X]]=0,\quad \mathbb{V}[\mathbb{V}[X]]=0$$

が成立する。

X が確率変数であり，b が定数やパラメータであるとき，

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[bX] &\equiv \mathbb{E}\left[(bX-E[bx])^2\right] && \Leftarrow \mathbb{E}[bX]=b\mathbb{E}[X]\\
&=\mathbb{E}\left[(bX-b\mathbb{E}[X])^2\right]\\
&=\mathbb{E}\left[b^2(X-\mathbb{E}[X])^2\right] && \Leftarrow \mathbb{E}[bX]=b\mathbb{E}[X]\\
&=b^2\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] && \Leftarrow \mathbb{V}[X]=\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right]\\
&=b^2\mathbb{V}[X]
\end{aligned}$$

となります。パラメータは分散の外に出すことができるが，期待値のケースと異なり二乗されます。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}[X] &\equiv \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2\right] \qquad \Leftarrow (9) \text{ 式を適用し，期待値を分解} \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[2X\mathbb{E}[X]\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X]^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2X\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2
\end{aligned}
$$

2.3.3　共分散の演算規則

共分散については，以下の法則が成り立ちます。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{COV}[X_i, X_j] = \sigma_{ij} &\equiv \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])\right] \\
&= \mathbb{E}[X_iX_j - X_i\mathbb{E}[X_j] - \mathbb{E}[X_i]X_j + \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]] \\
&= \mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i\mathbb{E}[X_j]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i]X_j] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]] \\
&= \mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] + \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] \\
&= \mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]
\end{aligned}
$$

$\mathbb{COV}[X_i, X_j] = 0$ つまり無相関であるなら，次の関係が成り立つ。

$$\mathbb{E}[X_iX_j] = \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]$$

2.4　確率変数のアフィン変換

確率変数 X がアフィン変換 (affine transformation) をする場合を考えます。

$$Y = a + bX$$

によって確率変数 X が確率変数 Y に変換されたとします。ここで a と b はパラメータです。このとき，次の関係が成立します。

まず期待値については

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[a + bX] \\
&= \mathbb{E}[a] + \mathbb{E}[bX] \\
&= a + b\mathbb{E}[X]
\end{aligned}
$$

となり，分散については，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^2] \\
&= \mathbb{E}[(a + bX - (a + b\mathbb{E}[X]))^2] \\
&= \mathbb{E}[(bX - b\mathbb{E}[X])^2] \\
&= \mathbb{E}[b^2(X - \mathbb{E}[X])^2] \\
&= b^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\
&= b^2\mathbb{V}[X]
\end{aligned}
$$

となり，標準偏差については，

$$\sigma_Y = \sqrt{\mathbb{V}[Y]} = |b|\sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

となります。

アフィン変換

ある工事が完了する日数とその確率が次のように予測されているとします。

日数 X	1	2	3	4	5
確率 $p(x)$	5%	20%	35%	30%	10%

このとき

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &\equiv \sum_k p_k x_k \text{より} & \mathbb{E}[X] &= 3.2 \\
\mathbb{V}[X] &\equiv \sum_k p_k (x_k - \mathbb{E}[X])^2 \text{より} & \mathbb{V}[X] &= 1.06
\end{aligned}
$$

この工事では，固定費として 100 万円，変動費として 1 日あたり 10 万円の費用がかかるとすると，総費用は，

$$Y = 100 + 10X$$

として表される。このとき，総費用の期待値および分散は，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 100 + 10\mathbb{E}[X] = 100 + 10 \times 3.2 = 132 \\
\mathbb{V}[Y] &= 10^2\mathbb{V}[X] = 100 \times 1.06 = 106
\end{aligned}
$$

となる。

より一般的に，k 個の確率変数 X_i, $i = 1, \dots, k$ の一次結合 $Y = c_0 + c_1X_1 + \cdots + c_kX_k$ で表される確率変数 Y において，次の関係が成立する。ここで，$c_0, c_1, \dots, c_k$ はパラメー

タで，定数です。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= c_0 + c_1\mu_1 + \cdots c_k\mu_k \\
\mathbb{V}[Y] &= c_1^2\sigma_1^2 + \cdots + c_k^2\sigma_k^2 + \sum_{i\neq j}^{k}\sum_{j\neq i}^{k} c_i c_j \sigma_{ij}
\end{aligned}
$$

ここで，$\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$，$\sigma_i^2 = \mathbb{V}[X_i]$，$\sigma_{ij} = \mathbb{COV}[X_i, X_j]$ である。

例えば，$k = 2$ のケースでは,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= c_0 + c_1\mu_1 + c_2\mu_2 \\
\mathbb{V}[Y] &= c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + 2c_1c_2\sigma_{12}
\end{aligned}
$$

問題 3

$k = 3$ のケースにおける確率変数 Y の期待値と分散を求めなさい。

例 8

$k = 2$ のケースで，$Y = 0.5X_1 + 0.5X_2$ の期待値および分散を求めます。ただし，$\mu_1 = 0.07$，$\sigma_1^2 = 1.48$，$\mu_2 = -0.02$，$\sigma_2^2 = 1.46$ とします。

- 無相関 ($\rho_{12} = 0$, $\mathbb{COV}[X_1, X_2] = 0$) のケース

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 0.5 \times 0.07 + 0.5 \times -0.02 = 0.025 \\
\mathbb{V}[Y] &= 0.5^2 \times 1.48 + 0.5^2 \times 1.46 + 2 \times 0.5 \times 0.5 \times 0 = 0.735
\end{aligned}
$$

  Y の分散は，X_1 と X_2 の分散よりも小さい。

- 負の相関 ($\rho_{12} = -0.99 \Leftrightarrow \mathbb{COV}[X_1, X_2] = -1.46$) のケース

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= 0.5 \times 0.07 + 0.5 \times -0.02 = 0.025 \\
\mathbb{V}[Y] &= 0.5^2 \times 1.48 + 0.5^2 \times 1.46 + 2 \times 0.5 \times 0.5 \times -1.46 = 0.005
\end{aligned}
$$

  Y の分散は，X_1 と X_2 の分散よりも小さい。

X_1 と X_2 の共分散は，Y の分散に影響を与える。

2.5　共分散の重要公式

共分散について，以下の公式が成立する。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{COV}[X, a+bY] &\equiv \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])](a+bY-\mathbb{E}[a+bY]) \\
&= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(b(Y-\mathbb{E}[Y]))] \\
&= b\mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] \\
&= b\mathbb{COV}[X, Y]
\end{aligned}
$$

同様に，上の式の発展系として，以下が成立する。

$$
\mathbb{COV}[X_1, c_0 + c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k] = c_1 \mathbb{V}[X_1] + \cdots + c_2 \mathbb{COV}[X_1, X_2] + \cdots + c_k \mathbb{COV}[X_1, X_2]
$$

ここで，$\mathbb{COV}[X, X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(X-\mathbb{E}[X])] = \mathbb{V}[X]$ であることを思い出そう。

第 3 章

統計

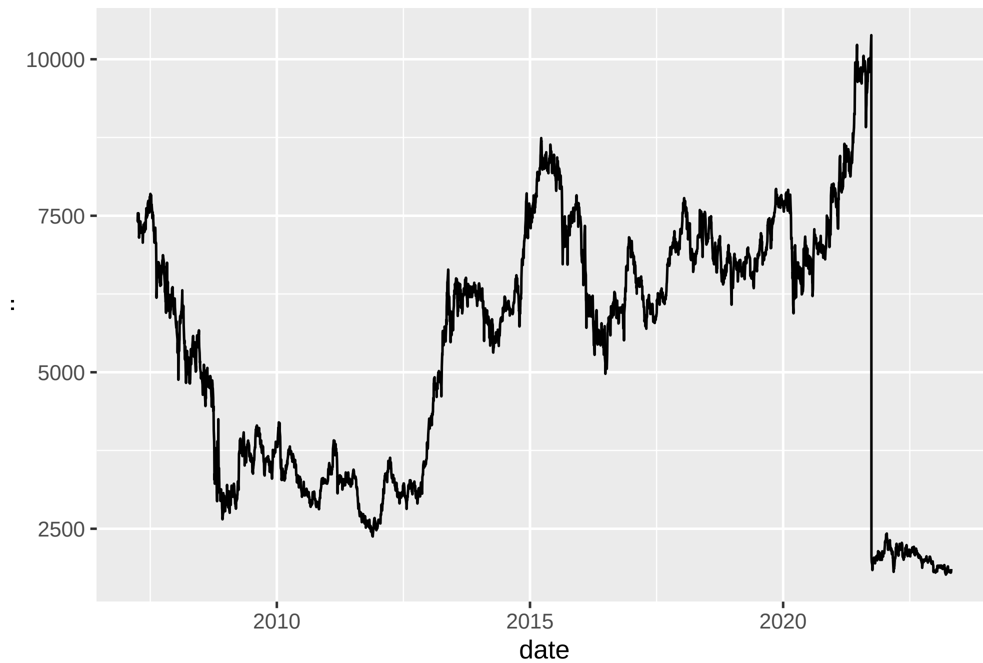
前章で学習したように，ファイナンスではいろいろな理由から，資産価値それ自体より資産価値の**変化率**，すなわち**リターン** (return) で議論することが多いです。ここで，リターンの定義を再度確認します。

```
pacman::p_load(tidyverse, ggthemes, patchwork, datasauRus, gganimate, gifski)
mystyle <- list (#  ggplot のテーマ
  theme_few(),
  theme(
    text = element_text(
      size=16,  #  フォントサイズ
     family = "HiraKakuProN-W3" # ヒラギノフォント
    )
  )
)
```

> **❗ 株式リターン**
>
> 資産 i の t 期の (配当落ち) 日次リターン $r_{i,t}$ は，
>
> $$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1}}{P_{i,t-1}} = \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - 1$$
>
> と定義されています。ここで，
>
> - P は資産価値 (株価，債券価格，地価など)
> - i は銘柄，
> - t は時点や期間
>
> を表してます。

では，トヨタ自動車の終値の日次データを用いて，株式リターンの値動きをグラフにしてみましょう。ggplot パッケージの geom_line() を用いて折れ線グラフを作成します。

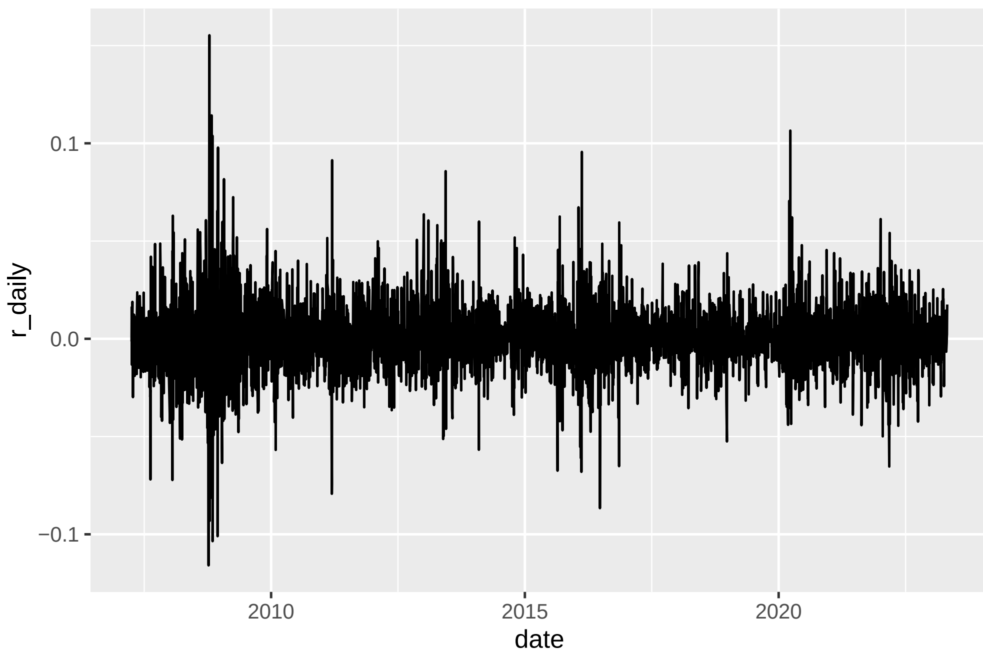
```
df <- read_csv("data/stock_data.csv") # データの読み込み
df |>
    filter(企業名 == "トヨタ自動車") %>% # トヨタ自動車を抽出
    ggplot() + aes(x = date, y = 終値) + geom_line() # 折れ線グラフ
```



トヨタ自動車の 2021 年における株価の急落は，株式分割が原因です。このとき，トヨタ自動車は 1 株を 5 株に分割しています。そのため約 10000 円だった株価が約 2000 円と 5 分の 1 に下落したのです。

次にこのデータから株式リターンを計算し、折れ線グラフにしてみます。

```
df <- df %>%
    group_by(企業名) %>% # 企業名でグループ化
    mutate(
        r_daily = 終値 / lag(終値) -1 # リターンを計算
    ) %>%
    filter(r_daily > -0.5) # 株式分割による異常値を除外
df %>%
    filter(企業名 == "トヨタ自動車") %>% # トヨタ自動車を抽出
    ggplot() + aes(x = date, y = r_daily) + geom_line() # 折れ線グラフ
```



2021 年の株式分割時の下落が異常な値となっていますが，それ以外の値動きは 0 を中心にランダムになっていることが分かります。

3.1 期待値と分散 (標準偏差) の推定

ある資産の価格やリターンを確率変数とみなしたとき，その背後にある**確率分布**の特徴を表す指標 (つまり母数) を実際に観察することは不可能です。母集団のパラメータは観察不能なのです。しかしながら，過去の観測値の集合である**データ**を用いて，確率分布の特徴やそれらの指標 (期待値，分散，標準偏差) の**推定値**を求めることはできます。そこで，推定値を用いて確率変数の特徴を考察するようにします。

例えば，データから作成される**ヒストグラム** (histogram) や度数分布表は確率変数を特徴付ける確率分布の仮想となります。期待値，分散，標準偏差の推定値は，確率変数を特徴付ける母平均 (期待値)，母分散，母標準偏差の仮想です。この期待値，分散，標準偏差の推定値は，より具体的に**標本平均** (期待値)，**標本分散**，**標本標準偏差**とよばれます。ただし「標本」という言葉はしばしば省略されることが多いので注意しましょう。

! (標本) 単純平均

観測値 x_k の単純平均値は，

$$\bar{X} = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} x_k$$

となる。ここで T は観測値の数 (これを**標本サイズ**という) を表します。

$t-1$ から $t-T$ までの期間における資産 i の標本期待 (平均) リターン $\bar{r}_i$ は，

$$
\bar{r}_i = \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} r_{i,t-k}
$$

となります。

R の基本関数だと mean() で計算できます。たとえば，トヨタの株式リターンの平均は次の通りです。

```
mean(df$r_daily[df$企業名 == "トヨタ自動車"], na.rm = TRUE)
```

```
[1] 0.000225068
```

このコードの意味するところは，mean() で引数のベクトルの平均を計算しています。引数の df$r_daily とすることで，df というデータフレームの r_daily という変数をしていしています。さらに，[df$**企業名** == "**トヨタ自動車**"] と続けることで，df の**企業名**が"**トヨタ自動車**"となる行のみを抽出しています。最後の na.rm = TRUE は，平均を出そうとするベクトルに欠損値が含まれている場合，その欠損値を除外して平均を計算することを意味しています。

計算されたトヨタ自動車の期待リターンは，2.145399e-05 となりました。これは指数表記で科学研究よく利用される書き方です。数式で表現すると，

$$
2.145399 \times 10^{-5}
$$

のことで，具体的には，0.00002145399 ということです。

標本 (不偏) 分散は，観測値 x_k とその標本平均 $\bar{X}$ からの乖離の単純平均である。

> **❗ 標本分散**
>
> $$
> s^2[X] = \frac{1}{T-1}\sum_{k=1}(x_k - \bar{X})^2
> $$

$t-1$ から $t-T$ までの期間における資産 i のリターンの標本分散 $s^2[r_i]$ は，次の通りである。

$$
s^2[r_i] = \frac{1}{T-1}\sum_{k=1}^{T}(r_{i,t-k} - \bar{r}_i)^2
$$

R の基本関数だと var() で計算できます。たとえば，トヨタの株式リターンの標本分散は次の通りです。

```r
var(df$r_daily[df$企業名 == "トヨタ自動車"], na.rm = TRUE)
```

```
[1] 0.0003337524
```

標本標準偏差は，分散の平方根です。

> **!** 標本標準偏差
>
> $$s[X] = \sqrt{s^2[X]}$$

$t-1$ から $t-T$ までの期間における資産 i のリターンの標本標準偏差 $s[r_i]$ は，次の通りである。

$$s[r_i] = \sqrt{s^2[r_i]}$$

R の基本関数で標準偏差を返す関数は `sd()` です。たとえば，トヨタの株式リターンの標本標準偏差は次の通りです。

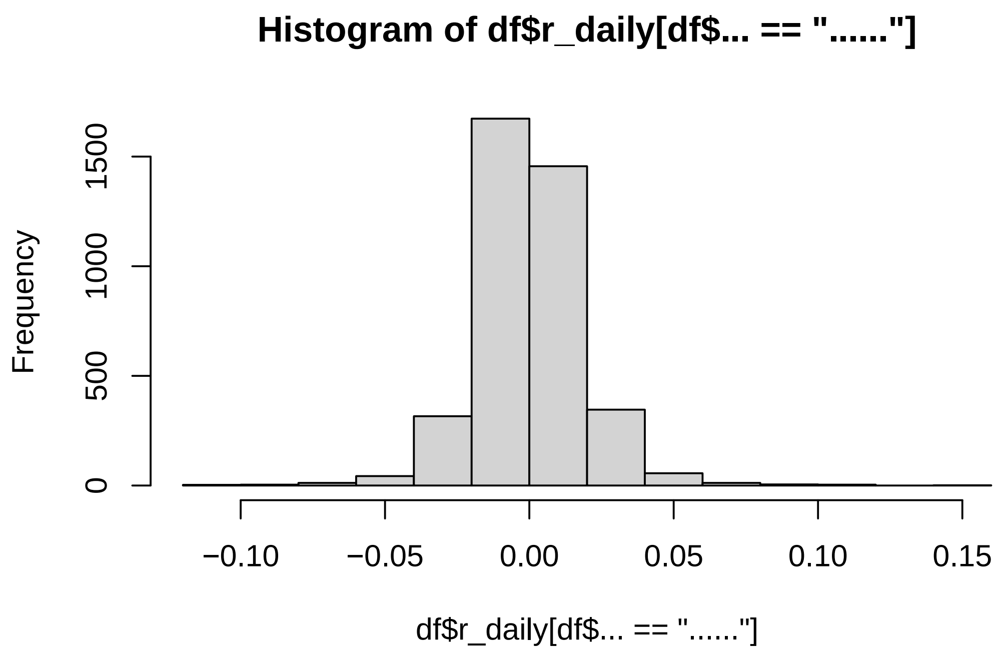
```r
sd(df$r_daily[df$企業名 == "トヨタ自動車"], na.rm = TRUE)
```

```
[1] 0.01826889
```

データから確率分布の特性を表す指標にはほかにも色々あります。たとえば尖度や歪度などです。尖度 (skewness) とは，確率分布の尖り具合を表す指標です。歪度 (kurtosis) とは，確率分布の裾の重さを表す指標です。

多様な統計量から分布の特徴を捉えることも重要ですが、グラフの 1 つである**ヒストグラム** (histogram) は数値よりも直観的に分布の形を確認できるため，まず度数分布表やヒストグラムを作成することをお勧めします。R の基本関数でヒストグラムを作成するには `hist()` を用います。いままでと同様に、トヨタ自動車の株式リターンのヒストグラムを作成してみましょう。

```r
# par(family = "HiraKakuProN-W3") # mac の文字化け対策 win の人はコメントアウト
hist(df$r_daily[df$企業名 == "トヨタ自動車"]) # 基本関数でヒストグラム
```



これでももちろんヒストグラムを作成することはできるのですが、よりキレイなグラフを作成したいなら、tidyverse の ggplot2 パッケージが便利です。ただし，ggplot2 で利用できるデータの型は data.frame 型に限るので注意しましょう。

まず、作図のためのデータを用意します。トヨタ自動車の日次リターンと日付を抽出し、data.frame 型に変換して，df_toyota という変数に格納します。

```
df_toyota <- df %>%
    filter(企業名 == "トヨタ自動車") %>%
    select(date, r_daily)
```

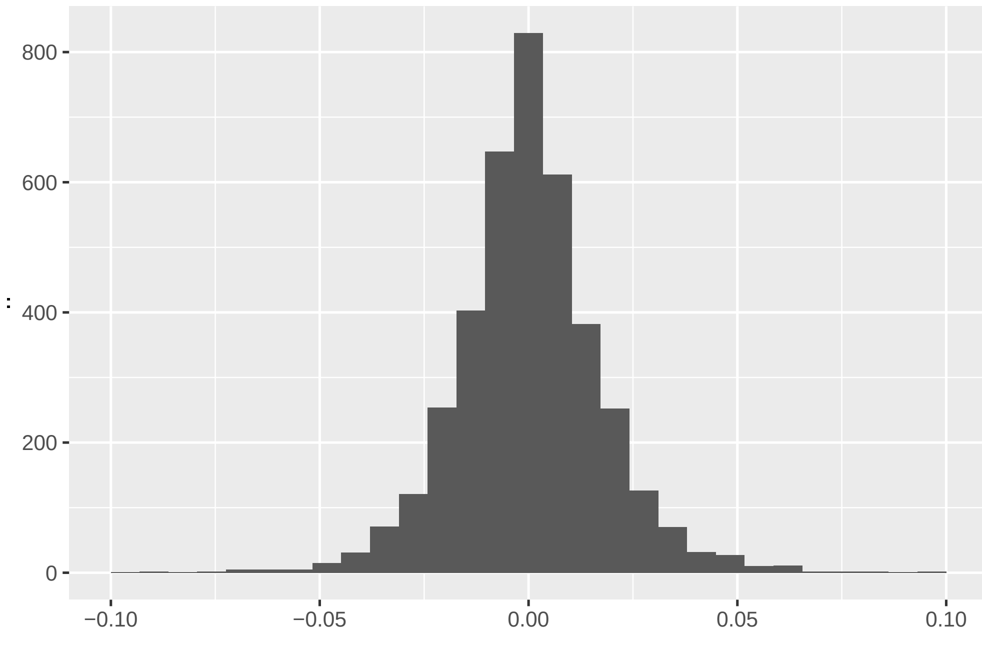
つぎに，ggplot() 関数で作図してみます。ggplot2 パッケージでは，以下の要素を指定してグラフを作ります。

- ggplot() 関数でデータを指定
- aes() 関数で x 軸と y 軸の変数を指定
- geom_***関数でグラフの種類を指定

たとえば，geom_histogram() 関数を用いるとヒストグラムを作成できます。

```
g <- ggplot(df_toyota) + # データを指定
    aes(x = r_daily) +  # 変数を指定
    geom_histogram() # グラフを指定
g <- g + xlim(-0.1, 0.1) # x 軸の範囲を指定
```

```
g <- g + xlab("日次リターン") + ylab("度数") # x 軸と y 軸のラベルを指定
print(g) # 出力
```



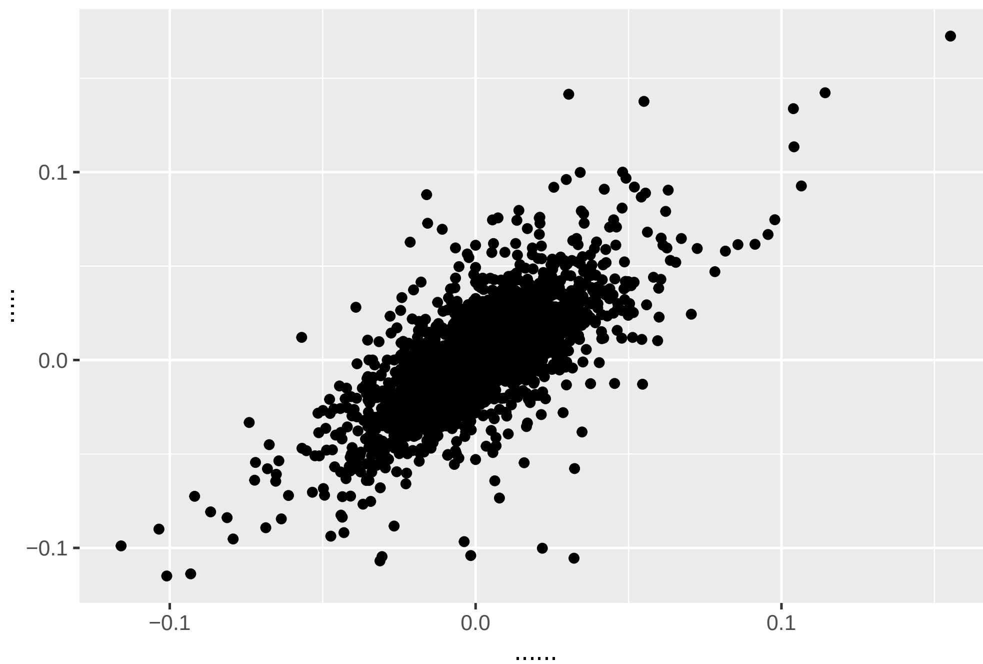
正規分布のように左右対称の分布になっていることが分かります。

ここまでの学習から，1 変数の離散確率変数の特徴を表す指標として，期待値，分散，標準偏差を学習し，またデータの分布を視覚的に把握するグラフとしてヒストグラムの作り方を学習しました。それぞれの定義，計算方法，作図方法を理解し，説明できるようになっていれば，この節は終了です。次節から，2 変数間の関係を表す統計量について学習します。

3.2　共分散と相関係数の推定

2 つの確率変数間の特徴を表す指標として、**共分散** (covariance) と**相関係数** (correlation coefficient) を学習します。いま，観察される確率変数 X と Z の実現値の組 $(x_i, z_i), i = 1, \dots, N$ がデータとして手元にあるとします。ここで，N は標本サイズを表しています。つまり N 個のデータの組があるということです。この N 個のデータを座標平面上で表したものを**散布図** (scatter diagram) といいます。たとえば、トヨタ自動車と日産自動車の株式リターンの散布図を作成してみましょう。

```
df %>%
    filter(企業名 == "トヨタ自動車" | 企業名 == "日産自動車") %>%
    select(企業名, date, r_daily) %>%
    pivot_wider(names_from = 企業名, values_from = r_daily) %>%
    ggplot() + aes(x = トヨタ自動車, y = 日産自動車) + geom_point()
```



この散布図から，トヨタ自動車と日産自動車の株式リターンはどちらかの株式リターンが増加したら，もう片方も増加する，という関係にあるといえます。この関係の強さを数値で表したものが共分散や相関係数となります。共分散は，次のように定義される。

共分散

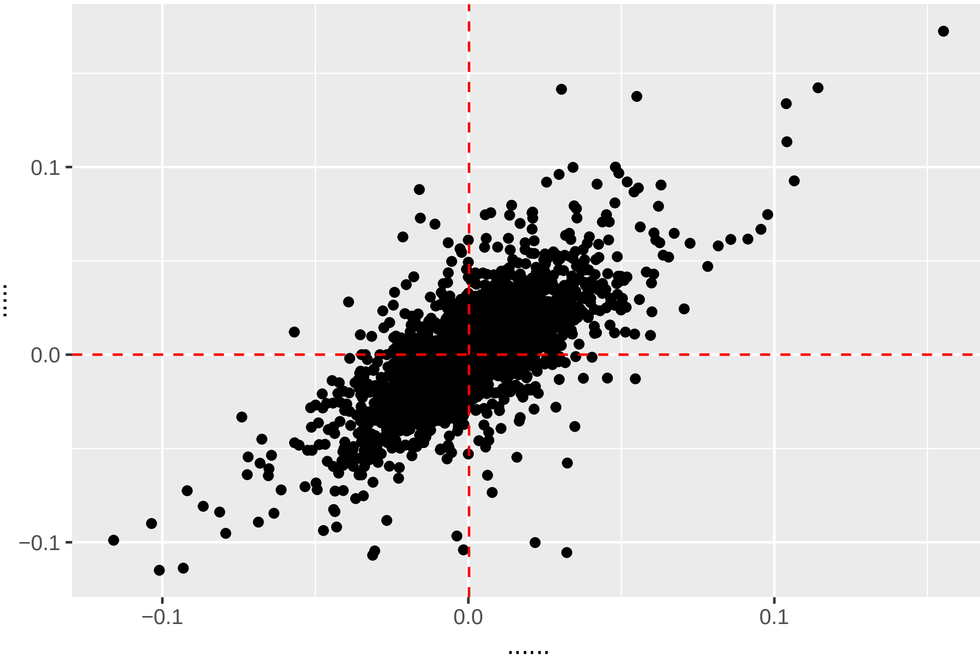
共分散の定義は，

$$
s_{XZ} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})(z_i - \bar{Z})
$$

共分散は，X と Z の標本平均からの乖離の単純平均となります。図で示すと，次のようになります。

```
df %>%
    filter(企業名 == "トヨタ自動車" | 企業名 == "日産自動車") %>%
    select(企業名, date, r_daily) %>%
```

```
    pivot_wider(names_from = 企業名, values_from = r_daily) %>%
    ggplot() + aes(x = トヨタ自動車, y = 日産自動車) + geom_point() +
    geom_vline(xintercept = mean(df$r_daily[df$企業名 == "トヨタ自動車"], na.rm = TRUE), linetype = "dashed
    geom_hline(yintercept = mean(df$r_daily[df$企業名 == "日産自動車"], na.rm = TRUE), linetype = "dashed"
```



この第 1 象限 (右上) に位置する実現値の組 (x_i, z_i) は，$x_i > \bar{X}$ かつ $z_i > \bar{Z}$ であり，また第 3 象限 (左下) の領域の点も $x_i < \bar{X}$ かつ $z_i < \bar{Z}$ であるため，$(x_i - \bar{X})(z_i - \bar{Z})$ は正の値をとります。つまり，第 1 象限と第 3 象限の点の組み合わせが多いとき，共分散の値を正にする方向に寄与し，第 2 象限と第 4 象限は負に寄与します。よってトヨタ自動車と日産自動車の株式リターンの共分散は正になることが予想されます。では計算してみましょう。

```
df_cov <- df %>%
    filter(企業名 == "トヨタ自動車" | 企業名 == "日産自動車") %>%
    select(企業名, date, r_daily) %>% # 変数を選択
    pivot_wider(names_from = 企業名, values_from = r_daily) %>% # 横データに
    drop_na() # 欠損値を削除
(cov_toyota_nissan <- cov(df_cov$トヨタ自動車, df_cov$日産自動車))
```

```
[1] 0.0003021892
```

トヨタ自動車と日産自動車の株式リターンの共分散は 3×10^{-4} となり，正の値であることが分かりました。共分散は 2 変数間の関係をしめす尺度ですが、その値の大きさは単位

に依存するという問題があります。そこで、共分散を標準化したものが相関係数です。相関係数は、共分散を各変数の標準偏差で割ったものです。

❗ 相関係数

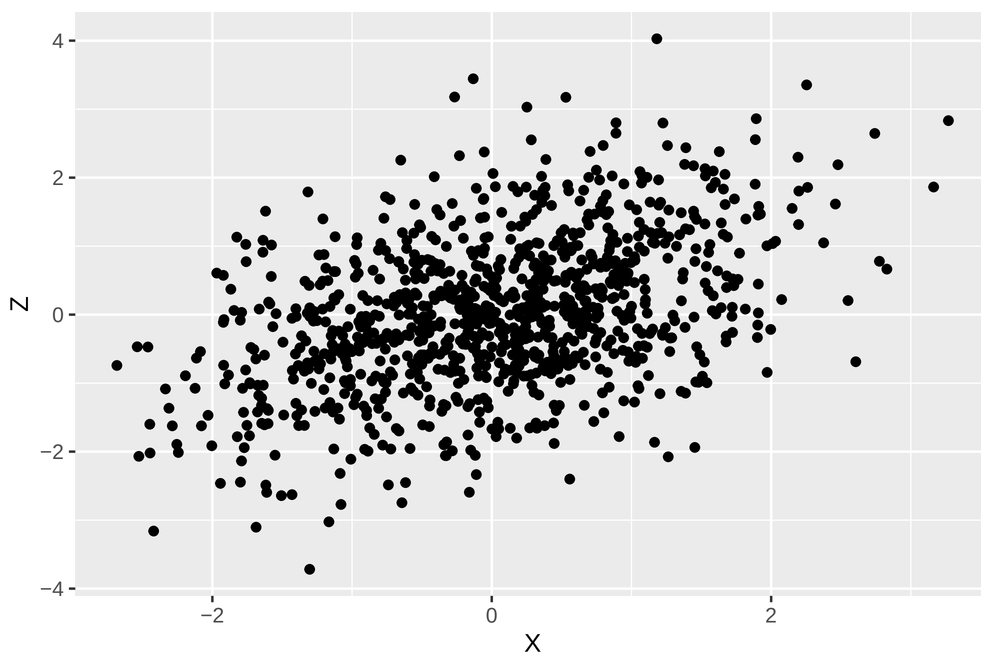
相関係数の定義は,

$$\rho_{XZ} = \frac{\mathbb{COV}[XZ]}{s[X] \times s[Z]}$$

相関係数は変数の単位に依存せず、$-1 \leq \rho_{XZ} \leq 1$ の値をとる尺度で、2 変数間の関係の強さを表します。相関係数が 1 に近いほど正の相関が強く、-1 に近いほど負の相関が強いといえます。また、相関係数が 0 に近いほど 2 変数間の関係は弱いといえます。

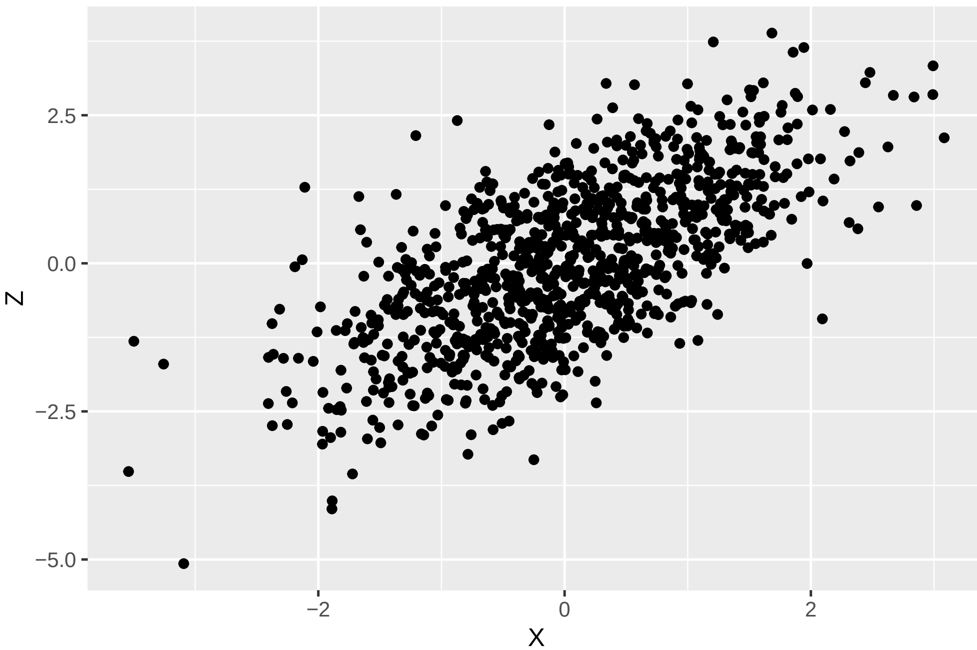
標本相関係数 ρ_{XZ} が 0.5 の場合、以下のような散布図になります。

```
X <- rnorm(1000, mean = 0, sd = 1)
Z <- 0.5 * X + rnorm(1000, mean = 0, sd = 1)
df <- data.frame(X, Z)
ggplot(df) + aes(x = X, y = Z) + geom_point()
```



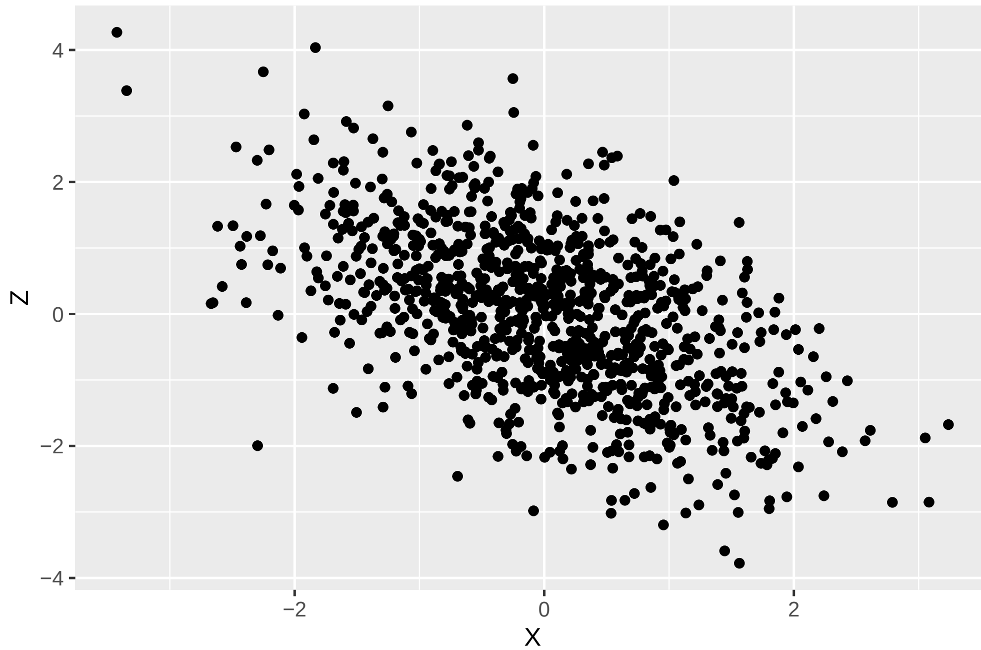
標本相関係数 ρ_{XZ} が 0.90 の場合、以下のような散布図になります。

```
X <- rnorm(1000, mean = 0, sd = 1)
Z <- 0.9 * X + rnorm(1000, mean = 0, sd = 1)
df <- data.frame(X, Z)
ggplot(df) + aes(x = X, y = Z) + geom_point()
```



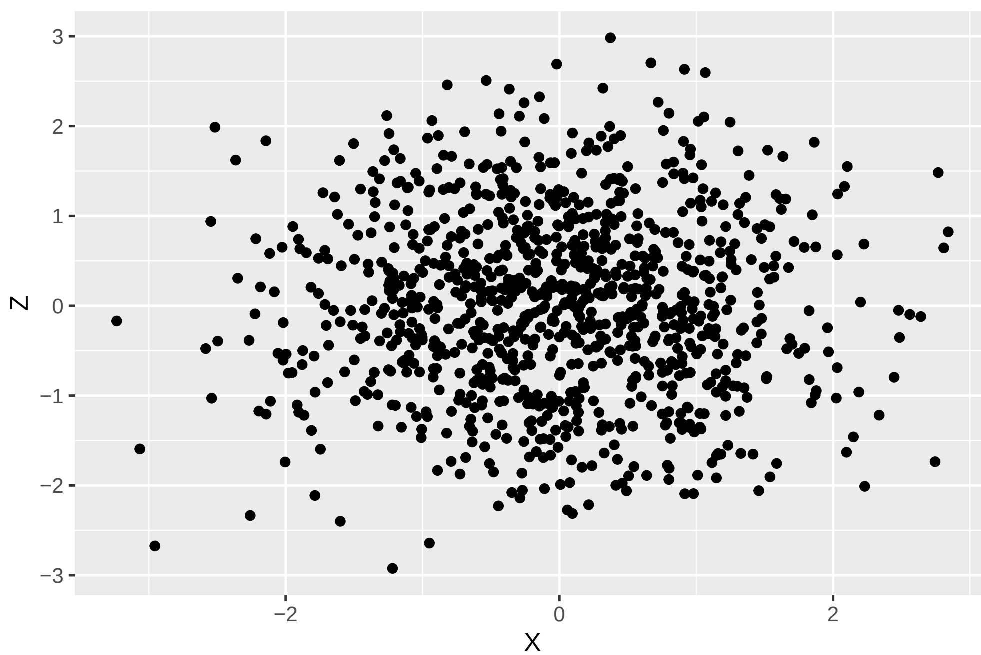
標本相関係数 ρ_{XZ} が -0.6 の場合、以下のような散布図になります。

```
X <- rnorm(1000, mean = 0, sd = 1)
Z <- -0.6 * X + rnorm(1000, mean = 0, sd = 1)
df <- data.frame(X, Z)
ggplot(df) + aes(x = X, y = Z) + geom_point()
```



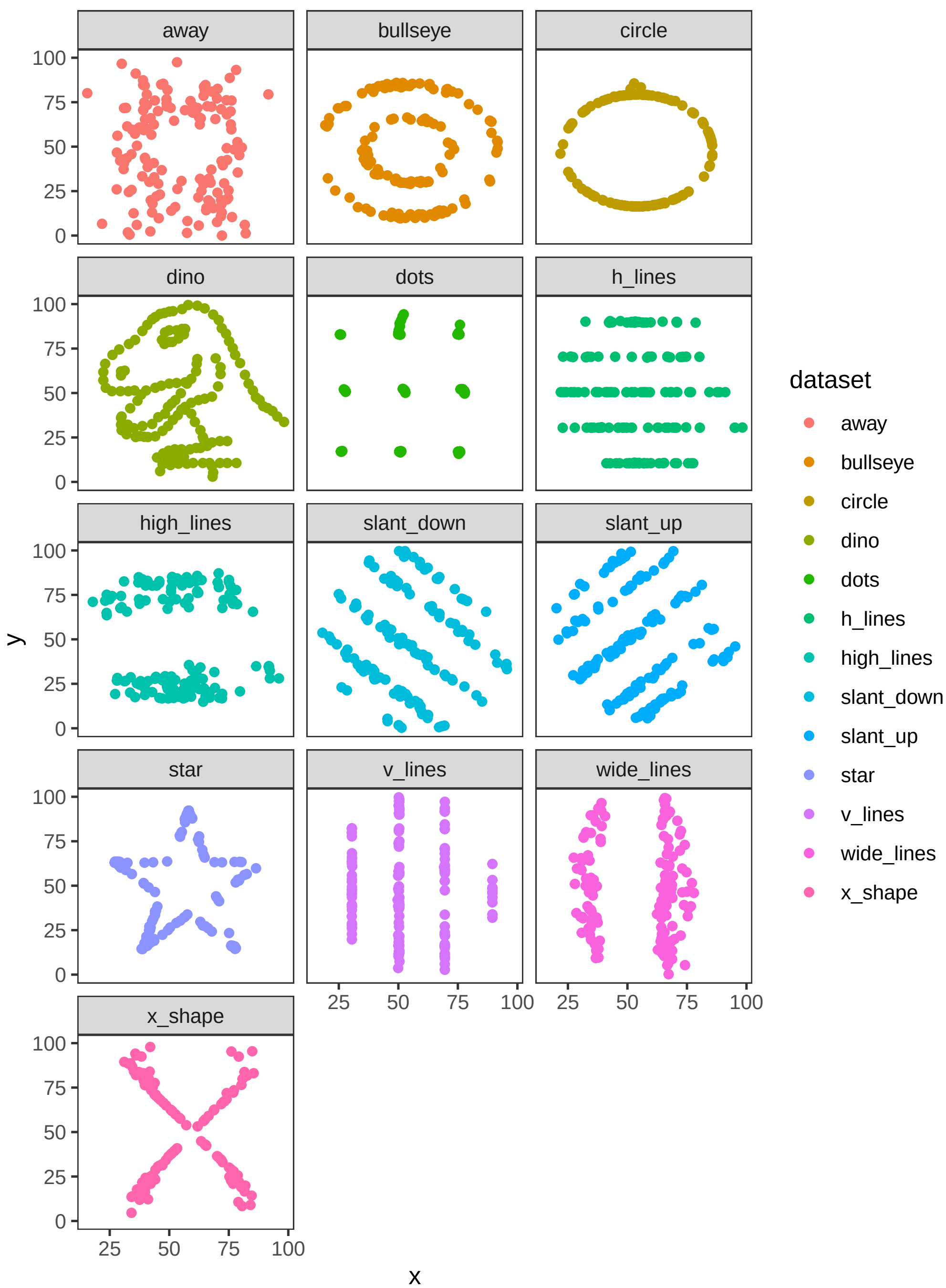
無相関，つまり標本相関係数 ρ_{XZ} が 0 の場合、以下のような散布図になります。

```
X <- rnorm(1000, mean = 0, sd = 1)
Z <- rnorm(1000, mean = 0, sd = 1)
df <- data.frame(X, Z)
ggplot(df) + aes(x = X, y = Z) + geom_point()
```



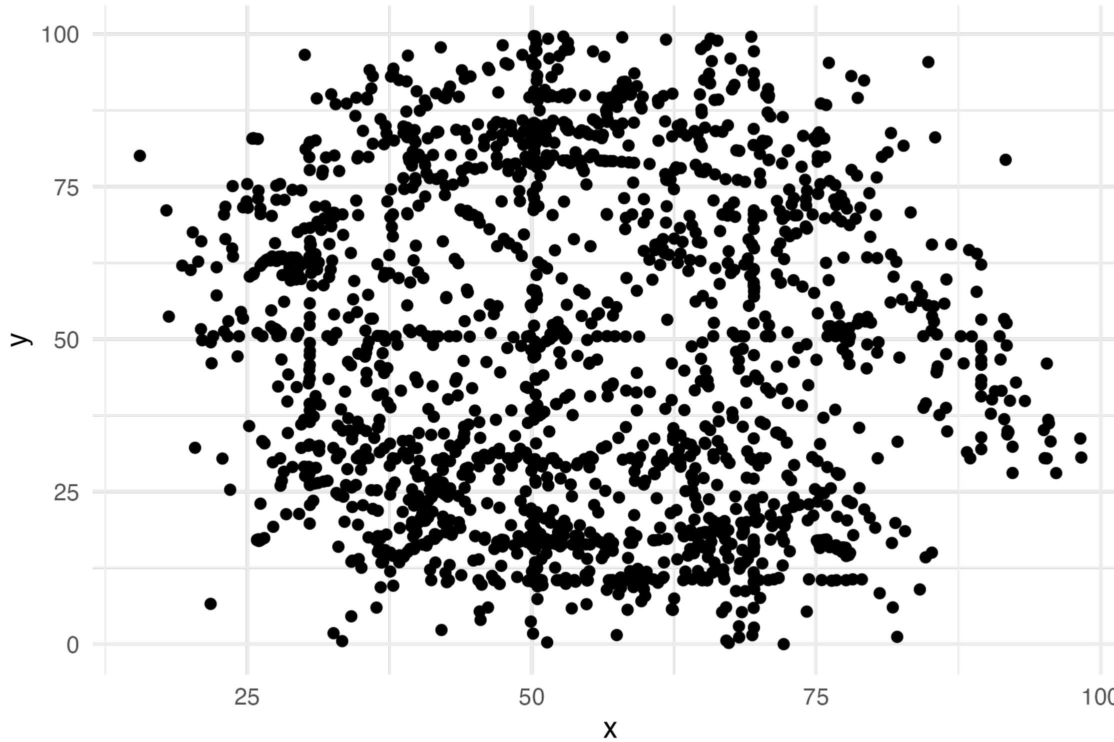
注意しないといけないのは，相関係数が線形関係を前提とした尺度であることです。もし2変数の関係が非線形である場合は，相関係数は役に立ちません。たとえば，いかのような有名な図があります。

```
ggplot(datasaurus_dozen) + aes(x = x, y = y, color = dataset) + geom_point() + facet_wrap(~dataset, ncol
```



アニメーションにするとこうなります。gganimate パッケージの transition_states()

関数を用いてアニメーションを作成しています。



この散布図のデータの基本統計量はほぼ同じで，相関係数はほぼ 0 のデータですが，実際に散布図として可視化してみると全く異なるデータであることがわかります。つまりは，手元のデータは一度可視化して，そのデータの特徴をつかむことが重要なのです。

3.3　変数のアフィン変換

線形変換 (linear transformation) とは，線形性をもつ変換で，

$$f(x) = Ax$$

と表し，線形変換は，

1. 直線を維持したまま，
2. 原点を固定

した変換となります。この線形変換 f に平行移動 g を合成した変換を**アフィン変換** (affine transformation) といいます。

確率変数の一次変換あるいは線形変換、より一般的にはアフィン変換について学習します。一般に確率変数 X のアフィン変換は以下のように表されます。

$$y = f \circ g(x) = Ax + b$$

以下では，ある確率変数 X に対して，行列 A がスカラー a，ベクトル b がスカラー b の場合を考えます。つまり，

$$Y = aX + b$$

である場合について考えます。このとき，変換後の確率変数 Y の期待値と分散は以下のようになります。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= a\mathbb{E}[X] + b \\ \mathbb{V}[Y] &= a^2\mathbb{V}[X] \\ \mathbb{SD}[Y] &= |a|\mathbb{SD}[X]\end{aligned}$$

以下の例で確認してみましょう。従業員 9 名の 1 ヶ月の労働時間 X が以下の表に示されている。

```
labor <- data.frame(
    従業員 = c("A","B","C","D","E","F","G","H","I"),
    労働時間 = c(30,45,50,35,60,70,55,60,45)
)
knitr::kable(t(labor), booktabs = TRUE)
```

従業員	A	B	C	D	E	F	G	H	I
労働時間	30	45	50	35	60	70	55	60	45

総賃金 Y_2 は毎月の固定給 100 千円に時間給 Y_1(時給 3 千円) を合わせた額として支給される。すなわち，$Y_2 = 100 + Y_1 = 100 + 3X$ の関係が成立している。したがって，各従業員の労働時間と賃金は以下の通りとなる。

```
labor <- labor %>%
    mutate(
        時間給 = 労働時間 * 3,
        総賃金 = 100 + 時間給
    )
knitr::kable(t(labor), booktabs = TRUE)
```

従業員	A	B	C	D	E	F	G	H	I
労働時間	30	45	50	35	60	70	55	60	45

時間給	90	135	150	105	180	210	165	180	135
総賃金	190	235	250	205	280	310	265	280	235

この表からわかることは，$Y_1 = 3X$ であることから，Y_1 の標本平均と標本標準偏差はともに X の標本平均と標本標準偏差の 3 倍になっている，ということです。つまり，標本平均と標本標準偏差はともに比例的に変化していることがわかります。

このデータを元に，労働時間，時間給，総賃金の標本平均や標本標準偏差を計算してみましょう。

```
labor_summary <- labor %>%
    summarise(
        平均 = c(mean(労働時間), mean(時間給), mean(総賃金)),
        標準偏差 = c(sd(労働時間), sd(時間給), sd(総賃金))
    )
labor_summary$変数名 <- c("労働時間", "時間給", "総賃金")
labor_summary <- labor_summary %>%
    select(変数名, 平均, 標準偏差)
knitr::kable(labor_summary, booktabs = TRUE, digits = 2)
```

変数名	平均	標準偏差
労働時間	50	12.75
時間給	150	38.24
総賃金	250	38.24

総賃金は $Y_2 = 100 + Y_1$ であるため，総賃金 Y_2 の標本平均は時間給 Y_1 の標本平均に 100 を加えたものになります。また総賃金 Y_2 の標本標準偏差は、時間給 Y_1 と同じである。

3.4　変数の線形結合

より一般的に線形結合について考えてみましょう。いま、k 個の変数 $X_1, \dots, X_k$ から一次結合 $Y = c_0 + c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k$ で表される変数 Y において (ただし c はパラメータ)，データから計算される変数 Y の標本平均，標本分散 (標本標準偏差) に対して次の関係が成立します。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[c_0 + c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k] \\
&= c_0 + c_1 \mathbb{E}[X_1] + \cdots + c_k \mathbb{E}[X_k] \\
&= c_0 + c_1 \bar{X}_1 + \cdots + c_k \bar{X}_k \\
\mathbb{V}[Y] &= \mathbb{V}[c_0 + c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k] \\
&= c_0 + \mathbb{V}[c_1 X_1] + \cdots + \mathbb{V}[c_k X_k] + \sum_{i \neq j}^{k} \sum_{j \neq i}^{k} c_i c_j s_{ij}(X_i, X_j) \\
&= c_0 + c_1^2 \mathbb{V}[X_1] + \cdots + c_k^2 \mathbb{V}[X_k] + \sum_{i \neq j}^{k} \sum_{j \neq i}^{k} c_i c_j s_{ij}(X_i, X_j) \mathbb{V}[Y] \quad = a^2 \mathbb{V}[X]
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{SD}[Y] = |a| \mathbb{SD}[X]
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{Y} &= c_0 + c_1 \bar{X}_1 + \cdots + c_k \bar{X}_k \\
s^2[Y] &= c_1^2 s^2[X_1] + \cdots + c_k^2 s^2[X_k] + \sum_{i \neq j}^{k} \sum_{j \neq i}^{k} c_i c_j s_{ij}(X_i, X_j)
\end{aligned}
$$

ここで，$\bar{X}_i$，$s^2[X_i]$, $s_{ij}(X_i, X_j)$ はそれぞれ標本平均，標本分散，標本共分散を表す。

$k = 2$ の場合,

$$
\begin{aligned}
\bar{Y} &= c_0 + c_1 \bar{X}_1 + c_2 \bar{X}_2 \\
s^2[Y] &= c_1^2 s^2[X_1] + c_2^2 s^2[X_2] + 2 c_1 c_2 s_{12}(X_1, X_2)
\end{aligned}
$$

となる。

例 2

$k = 2$ のケースで，$Y = 0.5X_1 + 0.5X_2$ の期待値および分散を求める。ただし，$\bar{X}_1 = 0.07$，$s^2[X_1] = 1.48$，$\bar{X}_2 = -0.02$，$s^2[X_2] = 1.46$ である。

- 無相関 ($s_{ij}(X_i, X_j) = 0$) のケース

$$
\begin{aligned}
\bar{Y} &= 0.5 \times 0.07 + 0.5 \times -0.02 = 0.025 \\
s^2[Y] &= 0.5^2 \times 1.48 + 0.5^2 \times 1.46 + 2 \times 0.5 \times 0.5 \times 0 = 0.735
\end{aligned}
$$

  Y の分散は，X_1 と X_2 の分散よりも小さい。

- 負の相関 ($s _{ij}(X_i,X_j) = -1.46 $) のケース

$$
\begin{aligned}
\bar{Y} &= 0.5 \times 0.07 + 0.5 \times -0.02 = 0.025 \\
s^2[Y] &= 0.5^2 \times 1.48 + 0.5^2 \times 1.46 + 2 \times 0.5 \times 0.5 \times -1.46 = 0.005
\end{aligned}
$$

  Y の分散は，X_1 と X_2 の分散よりも小さい。

X_1 と X_2 の共分散は，Y の分散に影響を与える。

第 4 章

効用

いままでで、確率と統計の基礎を学習したので、つぎは効用について学習します。次章から学ぶポートフォリオ理論では、投資家と投資対象の 2 つをモデル化し、最適な投資意思決定について考えます。

投資対象として株式や債券を中心に学習しますが、それらの投資対象をモデル化するさいに重要なことは、投資対象がもつリスクをどのように捉えるか、ということです。そこでは、確率分布を用いてリスクをモデル化しました。つまり、投資対象がもたらすリターンのばらつきが大きい、つまり分散 (あるいは標準偏差) が大きいとき、その投資対象はリスクが高い、とします。

つぎに投資対象に投資する主体である投資家の投資対象に対する選好をモデル化する必要があります。ここに**効用**が登場します。

この節では，以下の項目について学習します。

- 効用関数
- リスク態度・リスク回避度
- 確実性等価
- リスクプレミアム

ファイナンスはリスクについて考える学問といえます。そして個人が負担するリスクを考える際、個人がリスクに対してどのような態度を持っているのか、を表現する必要があります。そこで用いられる概念が**効用** (utility) となります。

株式の例で考えてみましょう。

⚠ 例 1：株価

株式 A と株式 B の 2 銘柄を考えます。将来起こりうる状態が 2 つ (g、b) あり、それぞれの生起確率は $(0.5, 0.5)$ とします。これらのことは投資家にとって既知であると仮定します。つまり、将来 g か b のどちらかが等確率で生じることは知っているけれど、どちらが出るのかはわからない、という状況です。**株価は確率変数である**、ということです。
株式 A は状態 g で価格が 100、状態 b で価格が 50 となります。株式 B は状態 g で価格が 120、状態 b で価格が 40 となります。
このとき、投資家はどちらの株式を購入するでしょうか？ この投資家は自己の効用が最大になる選択肢を選ぶとします。

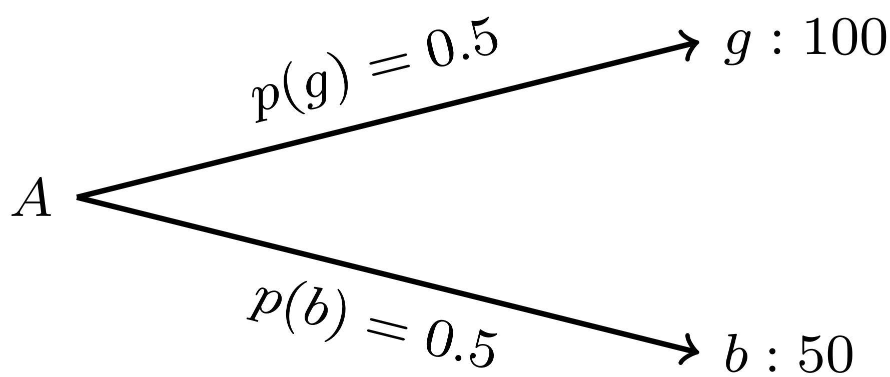


Figure4.1: 株式投資の例

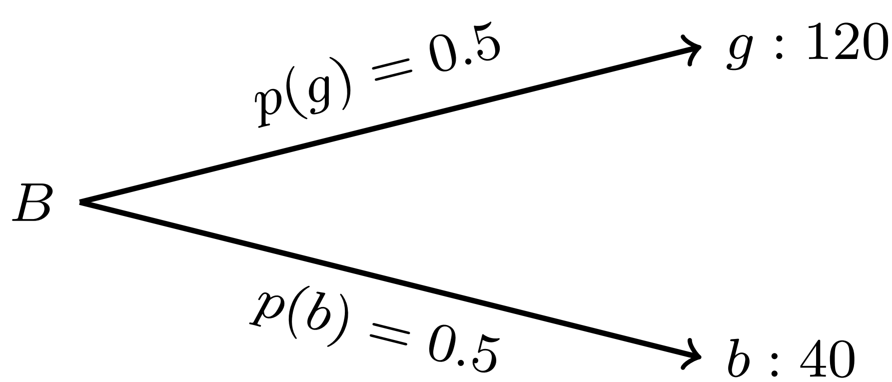


Figure4.2: 株式投資の例

第 3 章で学習したの知識を用いて，株式 A と B の期待値と標準偏差を求めてみましょう。

資産 A と B の期待値は,

$$\mathbb{E}[A] = \frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times 50 = 75$$
$$\mathbb{E}[B] = \frac{1}{2} \times 120 + \frac{1}{2} \times 40 = 80$$

となり，資産 B の方が期待値が大きいことがわかります。つぎに標準偏差を計算してみると,

$$\sigma[A] = \sqrt{\frac{1}{2} \times (100 - 75)^2 + \frac{1}{2} \times (50 - 75)^2} = 25$$
$$\sigma[B] = \sqrt{\frac{1}{2} \times (120 - 80)^2 + \frac{1}{2} \times (40 - 80)^2} = 40$$

となり，資産 B の方が標準偏差が大きいことがわかります。資産価格の標準偏差や分散を，**リスク** (risk) や**ボラティリティ** (volatility) とよぶことがあります。つまり，資産 B は期待リターンが高いが，リスクも高い投資先であることがわかりました。

4.1 効用関数

例 2 より，株式 A は B よりも期待値は低くリスクも低い，そして株式 B は A より期待値が高いもののリスクも高い，ということがわかりました。では投資家は株式 A と株式 B のどちらの株式 (1 単位) を購入するのだろうか？ このとき，投資家の**リスク選好** (risk preference) により，投資家がどちらの投資先をより好むのか，を考えることができます。

- リスクを回避する投資家は，株式 A を購入
- リスクを好む投資家は，株式 B を購入

このリスク選好を表現するために，効用関数を用いる。

財を消費することで得られる満足度を**効用** (utility) と呼び，効用 U と財の消費量 X の関係を記述した関数を**効用関数** (utility function) といいます。効用関数は実数値関数 (real-valued function)，つまり消費量 X を実数に写像する関数です。

$$U : X \mapsto \mathbb{R}$$

効用関数の形状で，経済主体 (ここでは投資家) の財 X に対する**選好** (preference) を表すことができます。ファイナンスでは，財 X として，財の消費量の代わりに，富の大きさを用いることもあります (実は，富の大きさではなく，変化率 (リターン) がよく利用されるのですが)。先の例でいえば，将来の株価が 50 円になったときの効用水準は $U(50)$ であり，100 円になったときの効用水準は $U(100)$ で表されます。

まず，重要な効用関数の性質について説明します。

! 単調性 (monotonicity)

消費財や富の量が多いほど，効用は大きくなります。つまり効用関数は消費や富の**増加関数** (increasing function) です。

効用関数が微分可能であることを仮定すると，単調性は

$$U'(X) \geq 0$$

で表せます。

! 限界効用の低減

消費財や富の量が大きくなるほど，追加的に得られる 1 円あたりの消費や富がもたらす効用の増分が小さくなる，という仮定します。つまり効用関数は**凹関数** (concave function) である，ということです。

効用関数が 2 階微分可能であることを仮定すると，限界効用の低減は，

$$U''(X) \leq 0$$

を意味している。

⚠ 例 3：性質 1 と性質 2 を満たす効用関数の例

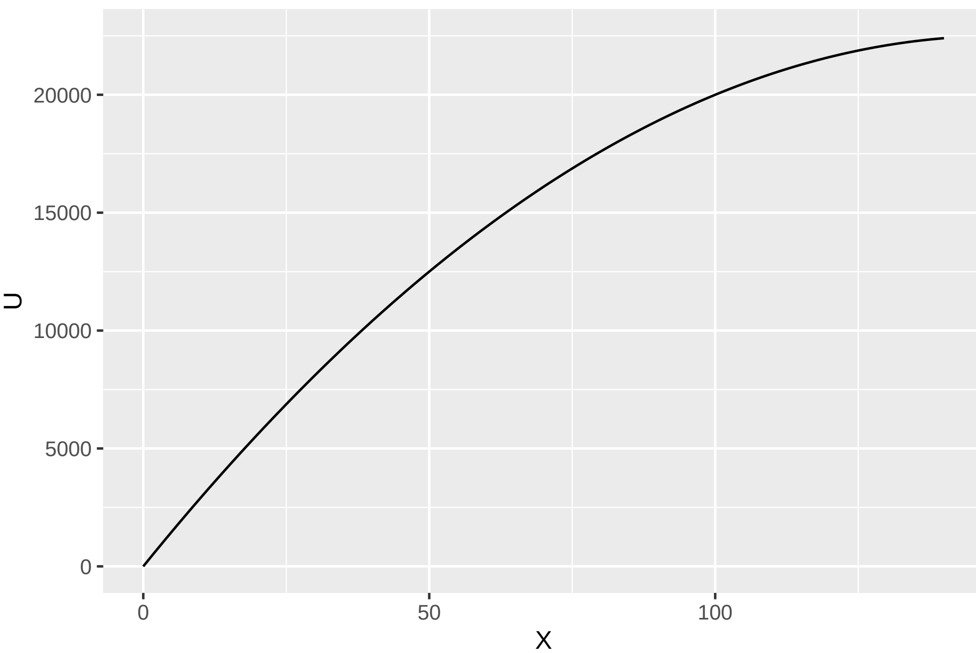
$$\begin{aligned} U(X) &= 300X - X^2 \\ U'(X) &= 300 - 2X \geq 0 \quad \text{for} \quad x \leq 150 \\ U''(X) &= -2 < 0 \end{aligned}$$

これをグラフにすると以下のようになります。

```
library(tidyverse)
library(ggthemes)
library(patchwork)
require(fontregisterer)
require(systemfonts)
mystyle <- list (#  ggplot のテーマ
  theme_few(),
  theme(
    text = element_text(
      size=16,  #  フォントサイズ
     family = "HiraKakuProN-W3" # ヒラギノフォント
    )
```

```
  )
)
```

```
df <- data.frame(
    X <- seq(0, 300, 1),
    U <- 300*X - X^2
)
ggplot(df) + aes(x = X, y = U) + geom_path() + xlim(0,140)# + mystyle
```



4.1.1 期待効用最大化原理

数学者フォン・ノイマン (Von Neumann) と経済学者オスカー・モルゲンシュテルン (Oskar Morgenstern) によれば，一定の前提条件の下において，合理的な投資家は複数の投資案件からの選択にあたって**最大の期待効用をもたらす**投資案件を選択する，行動原理を構築しています。このような期待効用に基づく投資家の選択行動を**期待効用最大化原理**とよんでいます。

例 4

効用関数が $U(X) = 300X - X^2$ である場合，先の数値例に基づいて期待効用を計算する。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[U(A)] &= \frac{1}{2} \times U(100) + \frac{1}{2} \times U(50) \\
&= \frac{1}{2} \times 20,000 + \frac{1}{2} \times 12,500 = 16,250 \\
\mathbb{E}[U(B)] &= \frac{1}{2} \times U(120) + \frac{1}{2} \times U(40) \\
&= \frac{1}{2} \times 21,600 + \frac{1}{2} \times 10,400 = 16,000
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\mathbb{E}[U(A)] \geq \mathbb{E}[U(B)]
$$

であるため，投資家は株式 A を購入する。

4.2　効用関数とリスク回避

確実なリターンを見込める債券投資とリターンが不確実な株式投資の 2 つの投資先について考えてみます。

例 1 の株式

例 1 の株式 A がもたらす利益の期待値は、

$$
\mathbb{E}[A] = \frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times 50 = 75
$$

でした。株式 A の利益の期待値である 75 を**確実に**得られる債券 Z_A の (期待) 効用は、

$$
U(\mathbb{E}[A])] = U(75) = 300 \times 75 - 75^2 = 16875
$$

となります。利益が不確実な株式 A の期待効用は,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[U(A)] &= \frac{1}{2}U(100) + \frac{1}{2}U(50) \\
&= \frac{1}{2} \times 20000 + \frac{1}{2} \times 12500 \\
&= 16250
\end{aligned}
$$

となります。つまり債券投資がもたらす期待値の効用 $U(\mathbb{E}[A])$ よりも，株式投資がもたらす期待効用 $\mathbb{E}[U(A)]$ の方が小さいため，期待効用最大化の原理より，投資家は (不確実な) 資産 A よりも確実な債権 Z_A を購入する、ということになります。

期待値が同じなら，投資家はリスクの少ない投資先を選択するのです。効用関数が性質 2 を満たす限り，どのような投資資産 X を考えても,

$$
\mathbb{E}[U(X)] \leq U(\mathbb{E}[X])
$$

が成立する。この不等式を**イェンセンの不等式** (Jensen's inequality) とよび、非常に重要な性質となります。このような効用関数を持つ投資家を**リスク回避的** (risk averse) な投資家とよびます。

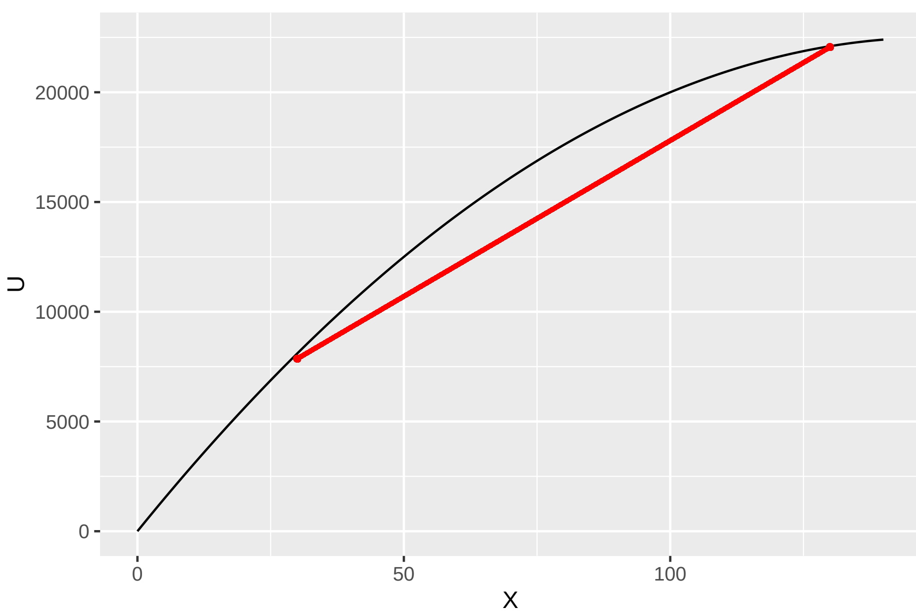
❗ イェンセンの不等式

イェンセンの不等式は，凸関数の性質を表しています。凸関数 (convex function) とは，2 点を結んだ線分が関数のグラフよりも上にあるような関数のことです。実数値関数 f が凸関数であるとは，任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ と任意の $\lambda \in [0,1]$ に対して，

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

が成立することをいいます。図にすると、次のようになります。

```
df <- data.frame(
    X <- seq(0, 300, 1),
    U <- 300*X - X^2
)
x1 <- 30
x2 <- 130
g <- ggplot(df) + aes(x = X, y = U) + geom_path() + xlim(0,140)# + mystyle
g <- g + geom_segment(aes(x = x1, y = U[x1], xend = x2, yend = U[x2]), color = "red", size = 1)
g <- g + geom_point(aes(x = x1, y = U[x1]), color = "red", size = 1)
g <- g + geom_point(aes(x = x2, y = U[x2]), color = "red", size = 1)
print(g)
```



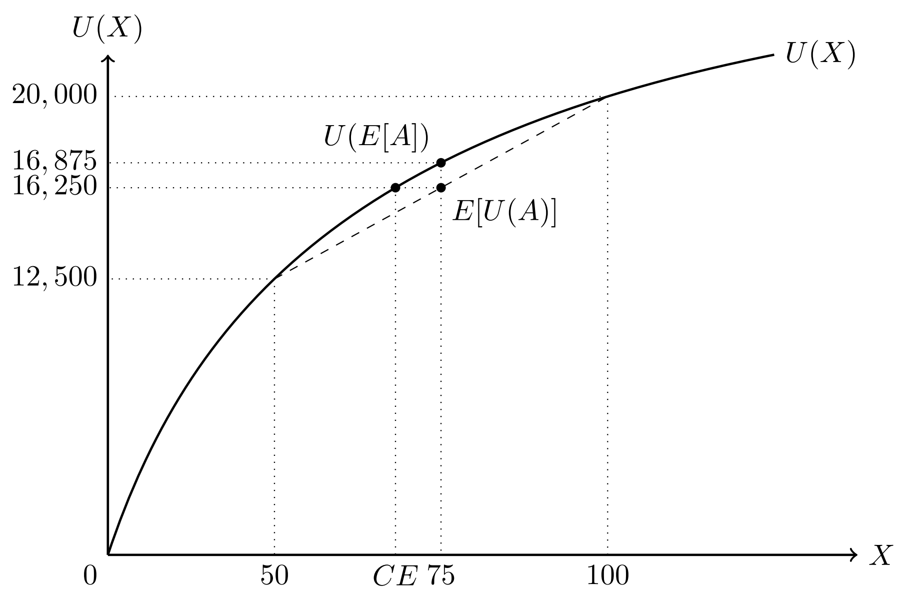
効用関数の形状が投資家のリスクに対する選好を表します。リスク回避的な投資家は，平均的に同じ消費 (富) を得るならば，確実なものを選好します。

上の「例 1 の株式」の例を図示すると以下のようになります。この株式 A がもたらす利益の期待値は 75 でした。この投資家の効用関数は,

$$U(X) = 300X - X^2$$

でした。上で計算したとおり，好景気時の利益 100 を得た場合の効用 $U(100) = 20,000$ で，不景気の利益 50 を得た場合の効用 $U(50)$ は 12500 です。それぞれ確率 50 %で生じるので，期待効用 $\mathbb{E}(U(X)]$ は 16250 でした。

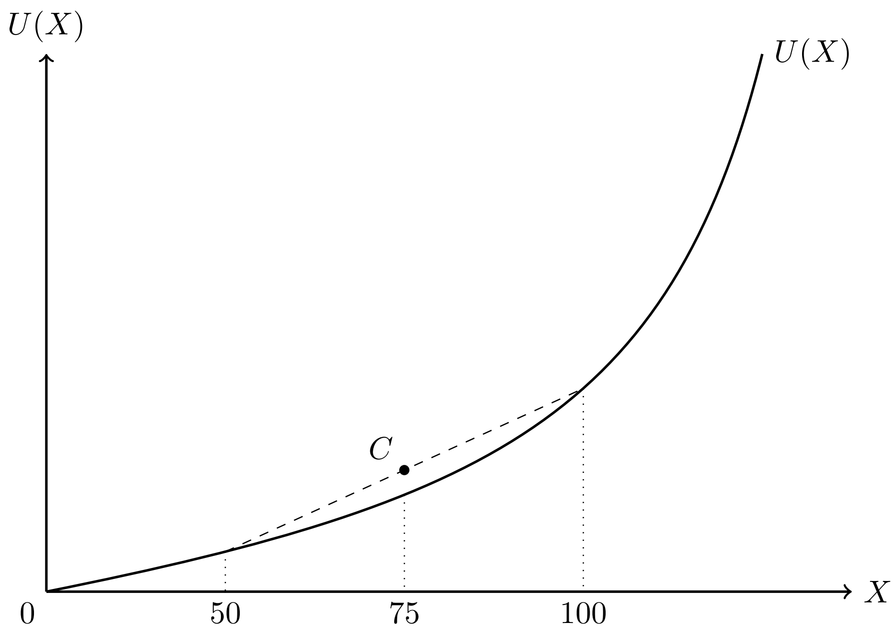
この株式の期待利益 75 を確実に得ることができる場合の効用 $U(75)$ は 16875 となり，期待効用 $\mathbb{E}(U(X)]$ よりも大きくなります。つまりこの投資家はリスク (つまり結果のばらつき) を回避する傾向があるということです。



次に，**リスク愛好型** (risk lover) の効用関数をもつ投資家について考えてみましょう。リスク愛好的な投資家とは，どのような株式投資 X を考えても,

$$\mathbb{E}[U(X)] \geq U(\mathbb{E}[X])$$

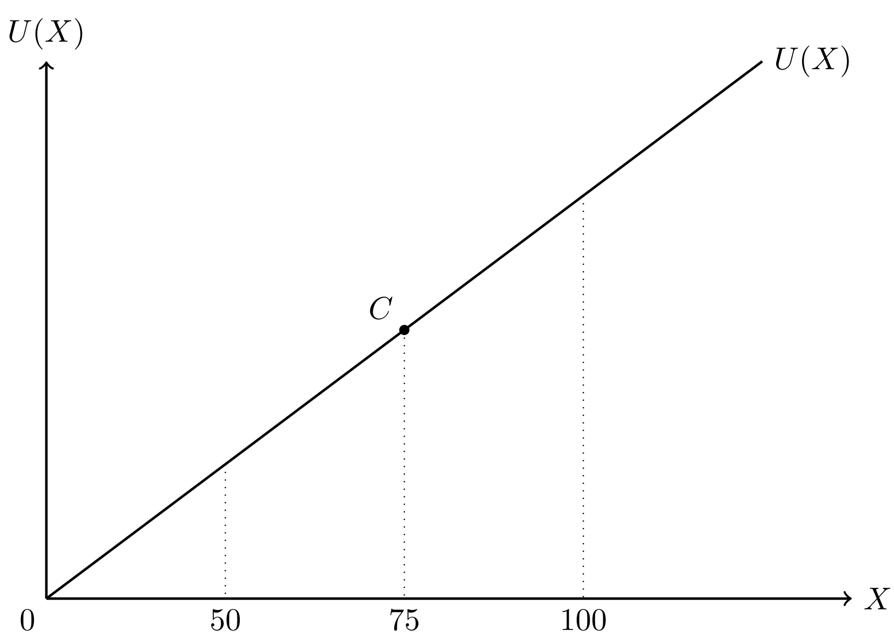
が成立する投資家をいいます。先のリスク回避的な投資家とは対照的に，リスク愛好的な投資家は，同じ消費 (富) を得るならば，不確実なものを選好します。つまり，確実にもらえる 100 万円より，当たると 200 万，外れると 0 円といったギャンブルを好む投資家のことです。このような投資家を想定することはほとんど無いため，ここでは詳細な説明は省略します。



リスク中立的 (risk-neutral) な効用関数をもつ投資家は，どのような株式投資 X を考えても，

$$\mathbb{E}[U(X)] = U(\mathbb{E}[X])$$

が成立します。このような効用関数をもつ投資家を**リスク中立的**な投資家と呼びます。リスク中立的な投資家は，確実なものと不確実なものの選好に関して無差別となり，リスクプレミアムがゼロとなります。



4.3　確実性等価とリスク割引額

次に，確実性等価について説明します。

確実性等価

確実性等価 (certainty equivalent) とは，確率変数 X に対して，

$$\mathbb{E}[U(X)] = U(\hat{X})$$

を満たす $\hat{X}$ を確率変数 X の確実性等価 (certainty equivalent) とよびます。

つまり，効用の期待値が $\mathbb{E}[U(X)]$ であるとき，確実に得られる値 $\hat{X}$ の効用 $U(\hat{X})$ が $\mathbb{E}[U(X)]$ と等しくなるような $\hat{X}$ の値を確実性等価とよびます。リスク回避的な投資家は，

$$\mathbb{E}[U(X)] \leq U(\mathbb{E}[X]) \Leftrightarrow CE \leq \mathbb{E}[X]$$

と言い換えることができます。

例 6：株式 A のケース

例 1 で登場した株式 A の期待効用は，

$$\mathbb{E}[U(A)] = 16250$$

でした。株式 A の期待値が**確実に**得られる証券 Z_A の効用は

$$U(Z_A) = U(\mathbb{E}[A]) = 16875$$

となります。ここで，$\mathbb{E}[U(A)] = 16250$ の効用を得るためには，$Z_A = \hat{A}$ をいくらに設定すればよいのかを考えてみましょう。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U(A)] = 16250 &= U(\hat{A}) \\ 16250 &= 300\hat{A} - \hat{A}^2 \\ \hat{A} &\cong 70.94 \end{aligned}$$

確実性等価の解釈として，**不確実な値をとる資産を確実な値をとる資産で評価**したときの値，というものがあります。つまり，不確実な値をとる資産の売価 (selling price) とも解釈できます。

次に，リスク・ディスカウント額 (risk discount) を考えてみましょう。

リスク・ディスカウント

確率変数 X の期待値 $\mathbb{E}[X]$ と確実性等価 $\hat{X}$ の差を**リスク・ディスカウント額** (RD) と呼ぶ。

$$RD = \mathbb{E}[X] - \hat{X}$$

例 7

例 1 の株式 A のリスク・ディスカウント額 RD_A は,

$$RD_A = 75 - 70.94 = 4.06$$

となります。

例 8

例 1 の株式 B のリスク・ディスカウント額 RD_B は,

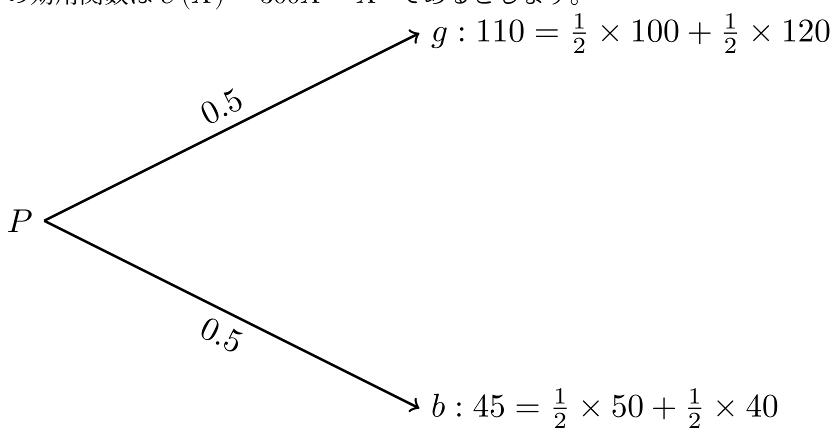
$$RD_B = 80 - 69.38 = 10.62$$

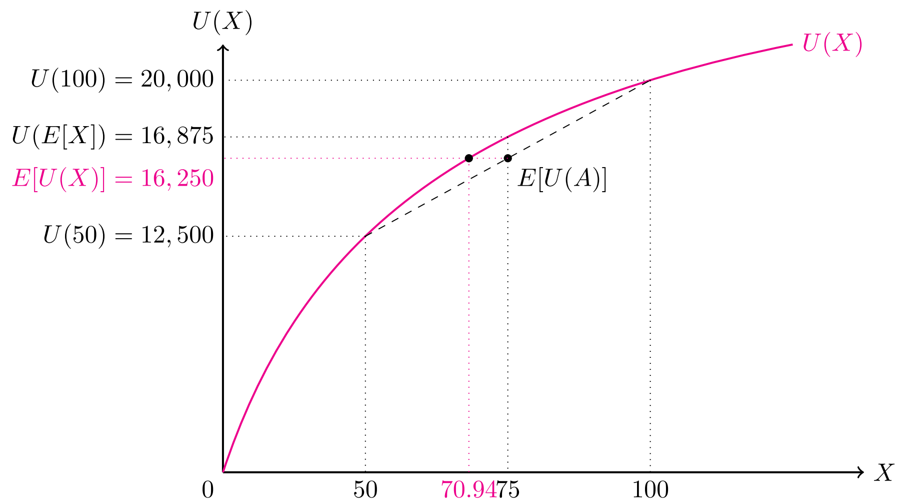
となります。

次のこの株式 A と株式 B からなるポートフォリオ P を考えてみましょう。

例 9

例 1 の株式 A を 1/2 単位，株式 B を 1/2 単位ずつ投資するとします。この投資家の効用関数は $U(X) = 300X - X^2$ であるとします。





4.4　効用関数の曲率とリスク回避度

曲率が大きいほど，リスク回避度が高いといえます。たとえば，投資家の効用関数を $V(X) = 500X - X^2$ とします。

このとき，株式 A と株式 B がもたらす期待効用は，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[V(A)] &= \frac{1}{2}V(100) + \frac{1}{2}V(50) \\
&= \frac{1}{2} \times 40000 + \frac{1}{2} \times 22500 \\
&= 31250 \\
\mathbb{E}[V(B)] &= \frac{1}{2}V(120) + \frac{1}{2}V(40) \\
&= \frac{1}{2} \times 45600 + \frac{1}{2} \times 18400 \\
&= 32000
\end{aligned}
$$

となり，この効用関数 $V()$ をもつ投資家は，$\mathbb{E}[V(A)] < \mathbb{E}[V(B)]$ となり，株式 B を選択します。

では次に確実性等価を計算してみます。確実性等価は，期待効用が $\mathbb{E}[V(A)]$ と等しくなるような確実な利益の量を計算します。

第 5 章

ポートフォリオ理論

この章では，ファイナンスの主要分野の 1 つである**ポートフォリオ理論** (portfolio theory) について説明します。

```
pacman::p_load(tidyverse, ggthemes, patchwork)
mystyle <- list (#  ggplot のテーマ
  theme_few(),
  theme(
    text = element_text(
      size=16,  #  フォントサイズ
     family = "HiraKakuProN-W3" # ヒラギノフォント
    )
  )
)
```

5.1　投資のリターン

> **!** リターンの定義
>
> $t = 0$ で金額 X_0 の投資を行い，$t = 1$ で X_1 のペイオフを得るとき，
>
> $$R \equiv \frac{X_1 - X_0}{X_0} = \frac{X_1}{X_0} - 1$$
>
> を**投資収益率** (リターン) とよびます。

X_1 は利子・配当などの**インカムゲイン**と資産価格の上昇 (下落) から生じる**キャピタル・ゲイン (ロス)** との合計額からなります。

例 1: リターン

90 万円の資産を購入し，1 年後 117 万円で売却できるなら，その投資収益率はいくらか？

$$R = \frac{117-90}{90} = \frac{117}{90} - 1 = 0.3$$

R で計算すると

```
R = (117 - 90) / 90
print(R)
```

```
[1] 0.3
```

例 2： 株式

X_{t-1} は時点 $t-1$ の株価 P_{t-1} ，X_t はその株式が時点 t でもたらすペイオフとなる。ここで，時点 t でもたらすペイオフとは，株式を保有することで得られる配当 D_t と時点 t における株式の価値 (配当落ち株価 P_t) の合計となる。したがって，時点 $t-1$ から時点 t にかけて実現した株式の投資リターン R_t は，

$$R_t \equiv \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1 = \frac{D_t + P_t}{P_{t-1}} - 1 \tag{5.1}$$

ここで D は一株当りの配当で，P は一株当りの株価である。
日時リターンを (Equation 5.1) 式に従って計算する場合は，年間配当額 $D_{i,t}$ を 365 で割ることで日次配当を計算することになるが，ほとんどの場合無視できるほど小さいので，株式 i の日時リターン $R_{i,t}$ は，

$$R_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - 1$$

で計算される。

資金を資産 1 と資産 2 に分けて運用するポートフォリオを想定する。企業を i , 時点を t で表し，投資時点を $t=0$ ，ペイオフが実現する時点を $t=1$ で表す。

- X_0 ：ポートフォリオへの投資額
- $X_{i,0}$ ：各資産 i，$i = 1,2$ への投資金額
- X_1 ：ポートフォリオから総ペイオフ
- $X_{i,1}$ ：資産 i からのペイオフ

このとき，各資産 $i \in \{1,2\}$ のリターンは，

$$R_t \equiv \frac{X_{i,0}}{X_{i,1}} - 1,$$

となる。ここで，以下の条件が成立していることに留意せよ。

$$X_{1,0} + X_{2,0} = X_0$$
$$X_{1,1} + X_{2,1} = X_1$$

ポートフォリオの投資収益率を R_p とすると，

$$\begin{aligned} R_p &\equiv \frac{X_1}{X_0} - 1 \\ &= \frac{X_{1,1} + X_{2,1}}{X_0} - 1 \\ &= \frac{X_{1,1}}{X_0} + \frac{X_{2,1}}{X_0} - 1 \\ &= \frac{X_{1,0}}{X_0} \times \frac{X_{1,1}}{X_{1,0}} + \frac{X_{2,0}}{X_0} \times \frac{X_{2,1}}{X_{2,0}} - 1 \end{aligned}$$

である。ここで，$\omega_i \equiv \frac{X_{i,0}}{X_0}$ を資産 i への投資率，ただし $\omega_1 + \omega_2 = 1$ とすると，次式が求められる。

$$\begin{aligned} R_p &= \omega_1 \left(\frac{X_{1,1}}{X_{1,0}} - 1 \right) + \omega_2 \left(\frac{X_{2,1}}{X_{2,0}} - 1 \right) \\ &= \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2 \end{aligned}$$

一般に，資金を資産 1，資産 2，⋯，資産 n に分けて運用するポートフォリオを想定する。X_0 をポートフォリオへの投資額，資産 $i \in \{1, \dots, n\}$ への投資金額を $X_{i,0}$ とする。また X_1 をポートフォリオからの総ペイオフ，$X_{i,1}$ を資産 $i \in \{1, \dots, n\}$ からのペイオフとする。このとき，ポートフォリオの投資収益率は，

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i R_i$$

ここで，

$$R_i \equiv \frac{X_{i,1}}{X_{i,0}} - 1, \qquad \omega_i \equiv \frac{X_{i,0}}{X_0} \qquad \text{for } i = 1, \dots, n$$

ただし $\sum \omega_i = 1$ である。

投資のポジションは次の 2 つに分けられる。

- $\omega_i > 0$：資産に対して買いポジション (**ロングポジション**)
- $\omega_i < 0$：資産に対して**空売り** (**ショートポジション**)

例 3

資産 10 億円をもつ投資家が，資産 1 に 8 億円，資産 2 に 2 億円投資する場合，

$$\omega_1 = 0.8, \quad \omega_2 = 0.2$$

例 4

資金 10 億円をもつ投資家が，資産 2 を 2 億円相当分空売り，空売りで入手した資金を自己資金を 12 億円を，資産 1 に投資する場合

$$\omega_1 = 1.2, \quad \omega_2 = -0.2$$

ω_i を資産 $i \in \{1,2\}$ の投資率とするとき，ポートフォリオの期待リターンは，

$$\mathrm{E}[R_p] \equiv \mu_p = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2$$

となる。ここで，$\mathrm{E}[R_i] = \mu_i$, $\omega_1 + \omega_2 = 1$ となる。$\omega_1 + \omega_2 = 1$ より，以下のように書き直せる。

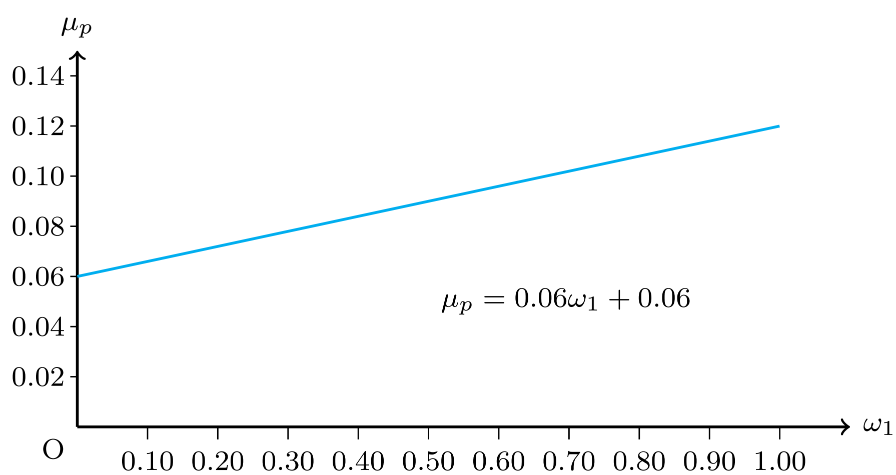
$$\mathrm{E}[R_p] \equiv \mu_p = \omega_1\mu_1 + (1-\omega_1)\mu_2$$

例 5

各資産の投資率 $(\omega_1, \omega_2) = (0.4, 0.6)$, 各資産の期待リターン $(\mu_1, \mu_2) = (0.12, 0.06)$ のとき，ポートフォリオの期待リターンは，

$$\mu_p = 0.4 \times 0.12 + 0.6 \times 0.06 = 0.084$$

投資比率 ω_1 とポートフォリオの期待収益率 μ_p との関係は次のように表される。



この図からわかるように，投資率とポートフォリオの期待リターンの間には**線形関係**が成立する。

5.2 ポートフォリオのリスク

資産 1 がもたらすリターンの分散を σ_1^2 ，資産 2 のリターンの分散を σ_2^2 ，資産 1 と資産 2 の収益の共分散を σ_{12} とする。このときポートフォリオのリターンの分散は，

$$\mathrm{Var}[R_p] \equiv \sigma_p^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12} \tag{5.2}$$

となる (第 2 回講義資料の (23) 式と (25) 式を参照)。

相関係数を ρ で表すとき，(Equation 5.2) 式は，

$$\mathrm{Var}[R_p] \equiv \sigma_p^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 \tag{5.3}$$

ここで相関係数 ρ の定義は次式となる。

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma^1\sigma^2} \Longleftrightarrow \sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2$$

例 6

各資産の投資率が $(\omega_1, \omega_2) = (0.4, 0.6)$，各資産のリターンの分散が $(\sigma_1^2, \sigma_2^2) = (0.18^2, 0.12^2)$，相関係数 $\rho = 0$ のとき，ポートフォリオのリターンの分散は，(**??**) 式より，

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= 0.4^2 \times 0.18^2 + 0.6^2 \times 0.12^2 + 2 \times 0.4 \times 0.6 \times 0 \times 0.18 \times 0.12 \\
&= 0.010368 \\
\sigma_p &= \sqrt{0.010368} = 0.102
\end{aligned}$$

一般に，n 種ある資産 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ への各投資割合を ω_i で表し，投資割合の合計が 1，つまり $\sum \omega_1 = 1$ の投資率とするとき，

- ポートフォリオの期待リターン：μ_p

$$\mathrm{E}[R_p] \equiv \mu_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i \tag{14-1}$$

  ここで，$\mathrm{E}[R_i] = \mu_i$

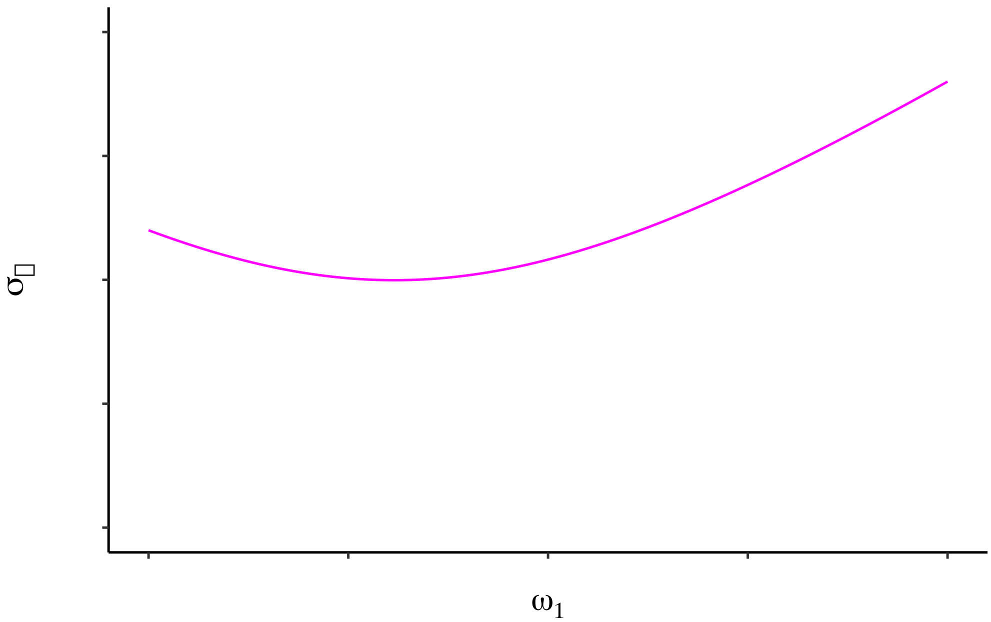
- ポートフォリオのリターンの分散：σ_p^2

$$\mathrm{V}[R_p] \equiv \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i \neq j}^{n}\sum_{j \neq i}^{n} \omega_i\omega_j\sigma_{i,j} \tag{14-2}$$

ここで，$\mathrm{V}[R_i] = \sigma_i^2$, $\mathrm{Cov}[R_i, R_j] \equiv \sigma_{i,j}$ for $i \neq j$

(14-2) 式に関しては，第 2 回の講義資料 (23) 式と (25) 式を参照

投資率 ω_1 とポートフォリオのリターンの標準偏差 σ_p の関係



リスク低減効果の源泉について考える。

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 \\ &= (\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2)^2 - 2(1-\rho)\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

ω_1 と ω_2 が非負ならば，$(1-\rho)\omega_1\omega_2\sigma_1\sigma_2$ も非負

$$\sigma_p \geq \omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2$$

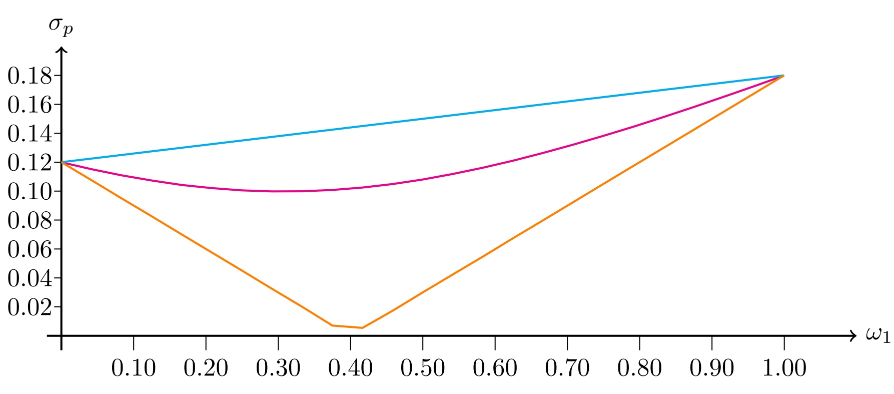
ポートフォリオの総リスクは，**個別資産の総リスクの加重和以下**になる。$\rho = 1$ でない限り，**厳密な不等号が成立**する。

$\rho = 1$ のとき，

$$\begin{aligned}&\sigma_p^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\rho\sigma_1\sigma_2 = (\omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2)^2 \\ &\sigma_p = \omega_1\sigma_1 + \omega_2\sigma_2\end{aligned}$$

リスク分散効果への相関係数のインパクトについて見ていく。リスク分散の効果は，ρ の大きさに依存している。

```
\begin{tikzpicture}[domain=0:1,yscale = 20, xscale=10]%, samples=100, very thick] % 定義域、点の数、線幅
% \draw (0,0) node[below left]{0}; % 原点、0 でも、above, below, left, right で位置指定
 % 位置指定は anchor=north, south, east, west でも可能
\draw[thick, ->] (-0.02,0) -- (1.1,0) node[right] {$\omega _1$}; % x 軸、[->] で矢印、他に [-stealth] 等
\draw[thick, ->] (0,-0.01) -- (0,0.20) node[above] {$\sigma _p$}; % y 軸
\foreach \x in {0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00} {
    \draw (\x,0) -- (\x, -0.01);
    \draw (\x,-.01) node[below]{$\x$};
    }
\foreach \y in {0.02,0.04,0.06,0.08,0.10,0.12,0.14,0.16,0.18} {
    \draw (0,\y) -- (-0.01,\y);
    \draw (0,\y) node[left]{$\y$};
}

\draw [magenta,thick] plot(\x, { sqrt(\x^2*0.18^2 + (1-\x)^2*0.12^2) });% rho =0
\draw [cyan,thick] plot(\x, { \x *0.18 + (1-\x)*0.12 });% rho=1
% \draw [orange,thick] plot(\x, { sqrt( \x^2 * 0.18^2 + ( 1 - \x)^2 * 0.12^2 - 2*\x*(1-\x)*0.18*0.12) })
\draw [orange,thick] plot(\x, { sqrt(0.014400000 - 0.072000000*\x + 0.0900000000*\x^2)});% rho=1

% \draw [magenta,thick] plot(\x, { sqrt(\x^2*0.18^2 + (1-\x)^2*0.12^2) });% node at(5.5,2) {$\mu _p = \o
% \draw (0,0.6) node[left]{$0.06$};
% \draw (5.5,1) node {$\phantom{\mu _p }= \omega_1 0.06 + 0.06$}; % at で node の位置指定
\end{tikzpicture}
```



5.3　2 資産の最適化問題の解法

株式と安全資産の 2 資産を考える。

- R_s: 株式リターン $\mathrm{E}[R_s] = \mu_s$,　$\mathrm{V}[R_s] = \sigma_s^2$

- r_f: 安全資産リターン $\mathrm{E}[r_f] = r_f, \quad \mathrm{V}[r_f] = 0$
- R_p: ポートフォリオの期待リターン $\mathrm{E}[R_p] = \mu_p, \quad \mathrm{V}[R_p] = \sigma_p^2$

次のような投資家の期待効用関数を仮定する。

$$\mathrm{E}[U] = \mu_p - \frac{1}{2}\gamma\sigma_p^2, \quad \gamma\text{は絶対的リスク回避度} \tag{5.4}$$

1. ポートフォリオの期待リターンが上昇するほど期待効用は上昇
2. ポートフォリオの分散 (標準偏差) が小さいほど期待効用は上昇

投資家は，**できる限り高い期待リターン**と**標準偏差の低い**ポートフォリオを選択しようとする。

2 資産の最適化問題の解法について見てみる。

投資率 (ω_1, ω_2) とするとき，

- ポートフォリオの期待リターン

$$\mathrm{E}[R_p] = \omega_1\mu_s + \omega_2 r_f \tag{5.5}$$

- ポートフォリオの期待リターンの分散

$$\mathrm{V}[R_p] = \omega_1^2\sigma_s^2 \tag{5.6}$$

(1) 式と (Equation 5.6) 式を (Equation 5.4) 式に代入

$$\mathrm{E}[U] = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2 = \omega_1\mu_s + \omega_2 r_f - \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\sigma_s^2$$

$\omega_1 + \omega_2 = 1$ より，投資家の期待効用関数は，

$$\mathrm{E}[U] = \omega_1(\mu_s - r_f) - \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\sigma_s^2 + r_f \tag{5.7}$$

期待効用 (Equation 5.7) 式を最大にする最適なポートフォリオとなる株式への投資率 (ω_1) を求める。

$$\mathrm{E}[U] = \omega_1(\mu_s - r_f) - \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\sigma_s^2 + r_f$$

と置くと，$f(\omega_1)$ は ω_1 に関する上に凸の 2 次関数である。

ω_1 について，最適化の 1 階の条件を求め，最適 ω_1^* を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{E}[U]}{\partial \omega_1} &= \mu_s - r_f - \gamma\omega_1\sigma_s^2 = 0 \\ \omega_1^* &= \frac{1}{\gamma}\frac{\mu_s - r_f}{\sigma_s^2}, \quad \mu_s - r_f\text{はリスクプレミアム}\end{aligned}$$

求めた株式への最適投資率 ω_1^* について比較静学を行い，最適解の挙動を確認する。

まず，リスクプレミアムと投資率の関係は，

$$\frac{\partial \omega_1^*}{\partial(\mu_s - r_f)} = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\sigma_s^2} > 0$$

となり，リスクプレミアムと投資率の間には正の関係がある。次に，株式のリスクと投資率の関係は，

$$\frac{\partial \omega_1^*}{\partial \sigma_s^2} = -2\frac{1}{\gamma}\frac{\mu_s - r_f}{\sigma_s^4} < 0$$

となり，リスクと投資率の間には負の関係がある。最後に，リスク回避度と投資率の関係は，

$$\frac{\partial \omega_1^*}{\partial \gamma} = -\frac{1}{\gamma^2}\frac{\mu_s - r_f}{\sigma_s^2} < 0$$

となり，リスク回避度と投資率の間には負の関係がある。

まとめると，リスクプレミアム $\mu_s - r_f$ が上昇，株式のリスク σ_s^2 が減少，リスク回避度 γ が減少するとき，株式への投資割合 ω_1 が増える。

5.4　投資可能集合と効率的フロンティア

リスク資産のみからなる投資対象があるとする。例 6 のケース (ただし, 相関係数 $\rho = 0$, ω_1 の値は任意) では,

$$\mu_p = \omega_1 \times 0.12 + (1 - \omega_1) \times 0.06 = 0.06(1 + \omega_1) \tag{5.8}$$

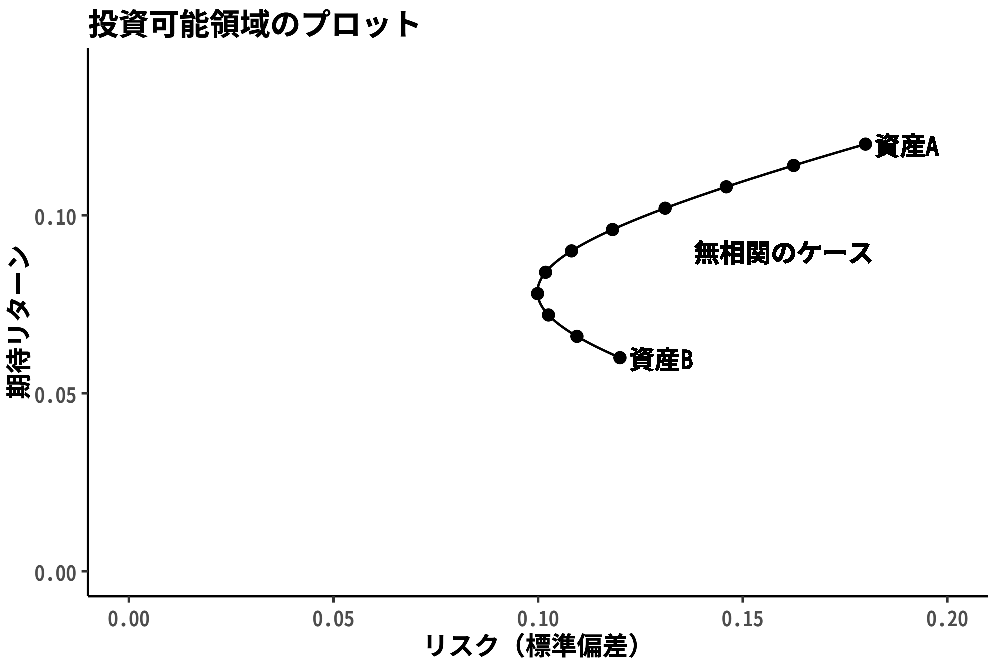
$$\begin{aligned}\sigma_s^2 &= \omega_1^2 \times 0.18^2 + (1-\omega_1)^2 \times 0.12^2 + 2\omega_1(1-\omega_1) \times 0 \times 0.18 \times 0.12 \\ &= (0.18^2 + 0.12^2)\omega_1^2 - 2 \times 0.12^2 \omega_1 + 0.12^2\end{aligned}$$

(2) 式を ω_1 に関して解いて (Equation 5.9) 式に代入する。

(μ_p, σ_p) の関係は双曲線である。後で見るように，相関係数の大きさに依存して双曲線の形状は変化する。以下で投資可能領域を図示する。

```
# text p.65
# 設定
rho = 0

sigma_A <- 0.18  # 資産 A の標準偏差
sigma_B <- 0.12  # 資産 B の標準偏差
mu_A <- 0.12     # 資産 A の期待リターン
```

```r
mu_B <- 0.06     # 資産 B の期待リターン

# 保有費率
wa <- seq(0,1,by = 0.01)
wb <- 1 - wa

df <- tibble(
  mu_p = wa * mu_A + wb * mu_B,
  sigma_p = sqrt(wa^2 * sigma_A^2 + wb^2 * sigma_B^2 + 2 * rho * wa * wb * sig
  label= c(
  "0,1", rep("", 9),
  "0.1,0.9",rep("", 9),
  "0.2,0.8",rep("", 9),
  "0.3,0.7",rep("", 9),
  "0.4,0.6",rep("", 9),
  "0.5,0.5",rep("", 9),
  "0.6,0.4",rep("", 9),
  "0.7,0.3",rep("", 9),
  "0.8,0.2",rep("", 9),
  "0.9,0.1",rep("", 9),
  "1,0")
  )

g <- ggplot(df) + aes(y = sigma_p, x = mu_p) + geom_line() + geom_point(data =
  labs(title = "投資可能領域のプロット", x = "期待リターン", y = "リスク（標準偏差）
# 資産 A と資産 B の文字を追加し，hiragino Kaku Gothic ProN は Mac の場合のフォント指定
g <- g +
  geom_text(aes(label = "資産 A"), x = 0.12, y = 0.19, size = 4, family = "Japa
  geom_text(aes(label = "資産 B"), x = 0.06, y = 0.13, size = 4, family = "Japa
  geom_text(aes(label = "無相関のケース"), x = 0.09, y = 0.16, size = 4, family
print(g)
```

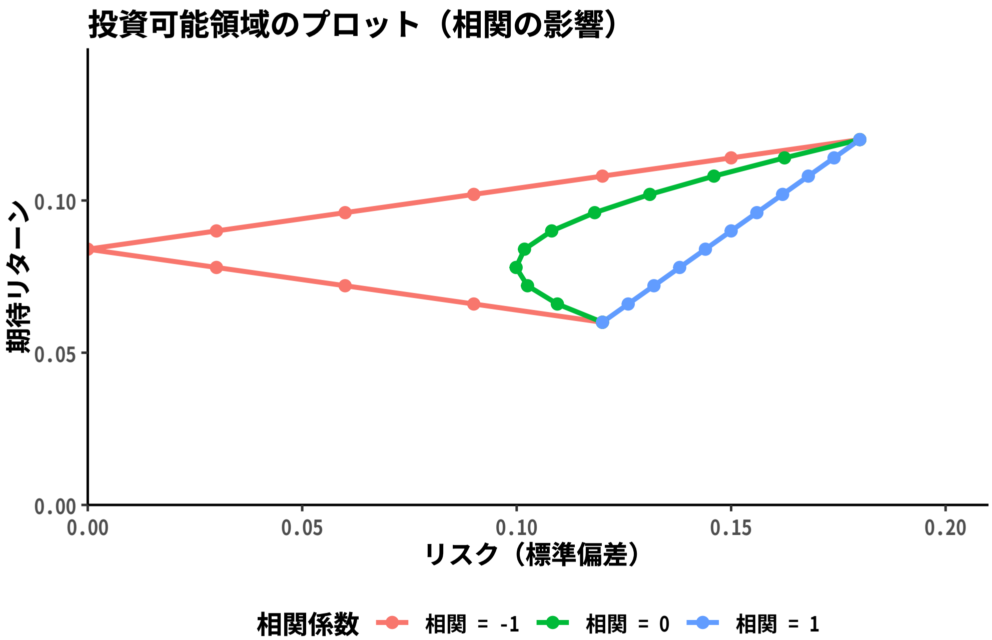


曲線上の点が**投資可能領域** (ポートフォリオは実現リターンと標準偏差の組み合わせとなる)。

2 つのリスク資産のリターンの相関係数がリスク低減効果に与える影響を図示すると，次のようになる。相関係数がマイナス 1 に近づくほど，左に弓なりになる。つまり**ポートフォリオのリスク低減効果が高いことを意味する。

```
# 相関係数のリスト
rho_values <- c(-1, 0, 1)

# 資産の標準偏差と期待リターン
sigma_A <- 0.18  # 資産 A の標準偏差
sigma_B <- 0.12  # 資産 B の標準偏差
mu_A <- 0.12     # 資産 A の期待リターン
mu_B <- 0.06     # 資産 B の期待リターン

# 保有比率
wa <- seq(0, 1, by = 0.1)
wb <- 1 - wa

# データフレーム作成
df <- expand.grid(wa = wa, rho = rho_values) |>
  mutate(
```

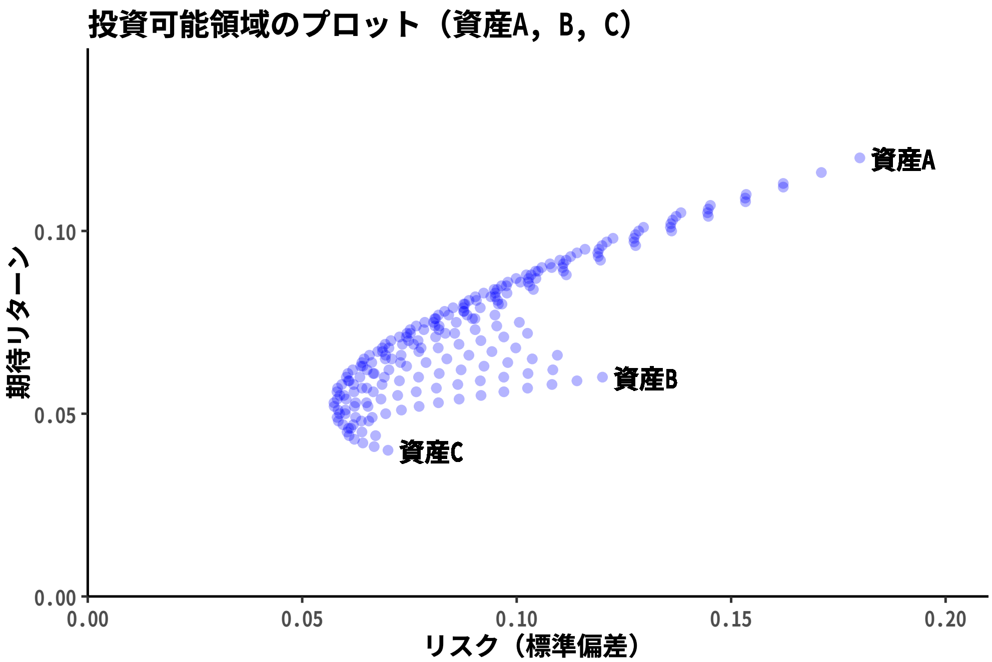
```
    wb = 1 - wa,
    mu_p = wa * mu_A + wb * mu_B,
    sigma_p = sqrt(wa^2 * sigma_A^2 + wb^2 * sigma_B^2 + 2 * rho * wa * wb * s
    rho_label = factor(rho, levels = c(-1, 0, 1), labels = c("相関 = -1", "相関
  )

# wa が 0.1 刻みのデータを抽出
label_points <- df |>
  filter(wa %in% seq(0, 1, by = 0.1))

# プロット
g <- ggplot(df, aes(x = mu_p, y = sigma_p, color = rho_label)) +
  geom_line(size = 1) +
  geom_point(data = label_points, aes(x = mu_p, y = sigma_p, color = rho_label
  coord_flip() +
  scale_y_continuous(limits = c(0, 0.21), expand = c(0, 0)) +  # 0 以下の余白を削
  scale_x_continuous(limits = c(0, 0.15), expand = c(0, 0)) + # x 軸の余白も削除
  labs(
    title = "投資可能領域のプロット（相関の影響）",
    x = "期待リターン",
    y = "リスク（標準偏差）",
    color = "相関係数"
  ) +
  theme_classic(base_family = "Japan1GothicBBB") +
  theme(legend.position = "bottom")  # 凡例を下に配置

# 資産 A と資産 B、無相関ケースのラベル追加
# g <- g +
#   geom_text(label = "資産 A", x = 0.12, y = 0.19, size = 4, family = "Japan1G
#   geom_text(label = "資産 B", x = 0.06, y = 0.13, size = 4, family = "Japan1G
#   geom_text(label = "無相関のケース", x = 0.09, y = 0.19, size = 4, family = '

# 描画
print(g)
```



3 つのリスク資産のみのケースを考える。リスク資産が増えれば増えるほど，左に弓なりになる。つまりポートフォリオのリスク低減効果が大きくなる。

```
rho <- 0  # 相関係数（仮にすべての組み合わせで無相関とする）

# 資産の標準偏差と期待リターン
sigma_A <- 0.18  # 資産 A の標準偏差
sigma_B <- 0.12  # 資産 B の標準偏差
sigma_C <- 0.07  # 資産 C の標準偏差

mu_A <- 0.12     # 資産 A の期待リターン
mu_B <- 0.06     # 資産 B の期待リターン
mu_C <- 0.04     # 資産 C の期待リターン

# 保有比率（wa, wb の組み合わせを作成し、wc = 1 - wa - wb を計算）
wa_wb_grid <- expand.grid(wa = seq(0, 1, by = 0.05), wb = seq(0, 1, by = 0.05)) |>
  mutate(wc = 1 - wa - wb) |>
  filter(wc >= 0)  # wc が負にならないように制限

# 3 資産ポートフォリオの計算
df <- wa_wb_grid |>
  mutate(
```

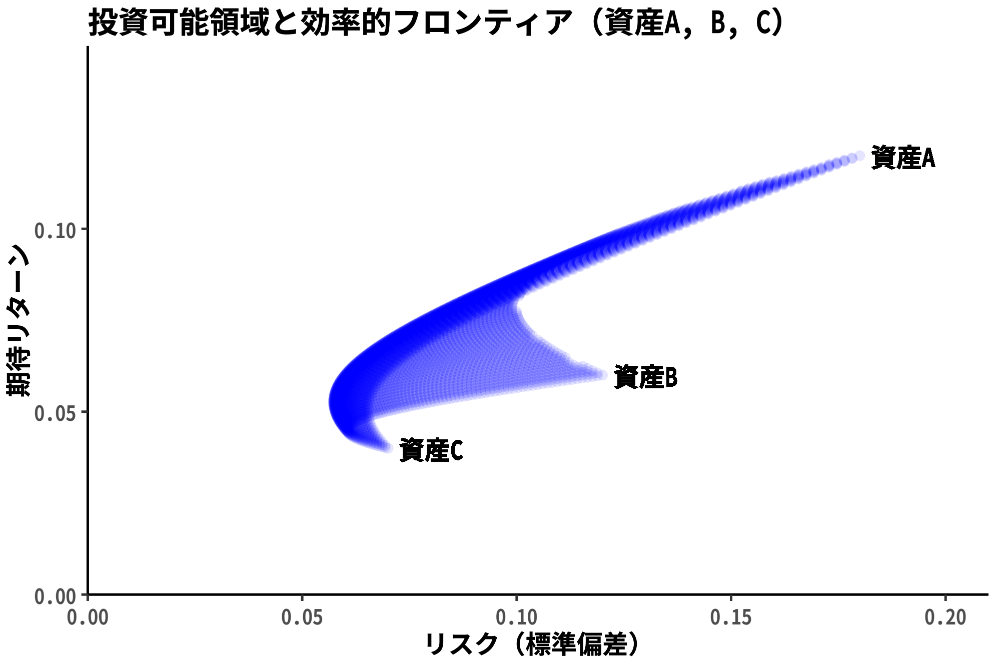
```
    mu_p = wa * mu_A + wb * mu_B + wc * mu_C,
    sigma_p = sqrt(
      wa^2 * sigma_A^2 + wb^2 * sigma_B^2 + wc^2 * sigma_C^2 +
      2 * rho * (wa * wb * sigma_A * sigma_B + wb * wc * sigma_B * sigma_C + w
    )
  )

# プロット
g <- ggplot(df, aes(x = mu_p, y = sigma_p)) +
  geom_point(alpha = 0.3, color = "blue") +  # 3 資産の投資可能領域を点でプロット
  coord_flip() +
  scale_y_continuous(limits = c(0, 0.21), expand = c(0, 0)) +  # 0 以下の余白を削
  scale_x_continuous(limits = c(0, 0.15), expand = c(0, 0)) + # x 軸の余白も削除
  labs(
    title = "投資可能領域のプロット（資産 A, B, C）",
    x = "期待リターン",
    y = "リスク（標準偏差）"
  ) +
  theme_classic(base_family = "Japan1GothicBBB") +
  theme(legend.position = "none")  # 凡例を非表示（点のプロットのため）

# 資産 A, B, C のラベル追加
g <- g +
  geom_text(label = "資産 A", x = 0.12, y = 0.19, size = 4, family = "Japan1Got
  geom_text(label = "資産 B", x = 0.06, y = 0.13, size = 4, family = "Japan1Got
  geom_text(label = "資産 C", x = 0.04, y = 0.08, size = 4, family = "Japan1Got

# 描画
print(g)
```



3 つのリスク資産への投資可能領域は，曲線上ではなく曲線に囲まれた領域 (集合) となる。ただこのうち，同じリスク (同じ標準偏差) の下で最も高い期待リターンを実現するポートフォリオが最適となるため，双曲線の上半分が望ましいポートフォリオとなり，これを**効率的フロンティア**と呼ぶ。

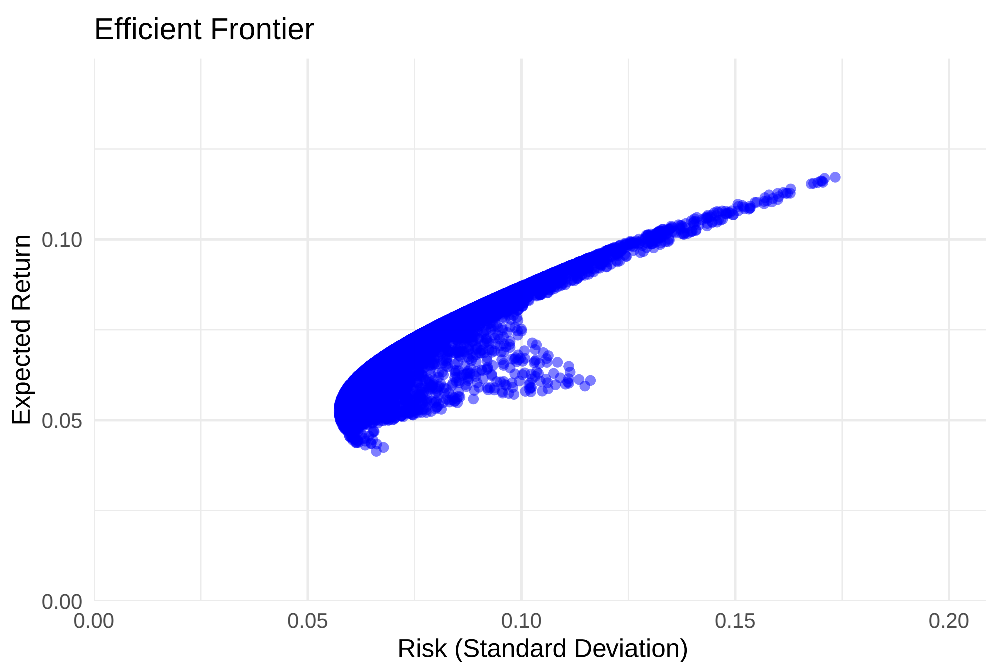
```
rho <- 0  # 相関係数（仮にすべての組み合わせで無相関とする）

# 資産の標準偏差と期待リターン
sigma_A <- 0.18  # 資産 A の標準偏差
sigma_B <- 0.12  # 資産 B の標準偏差
sigma_C <- 0.07  # 資産 C の標準偏差

mu_A <- 0.12     # 資産 A の期待リターン
mu_B <- 0.06     # 資産 B の期待リターン
mu_C <- 0.04     # 資産 C の期待リターン

# 保有比率（wa, wb の組み合わせを作成し、wc = 1 - wa - wb を計算）
wa_wb_grid <- expand.grid(wa = seq(0, 1, by = 0.01), wb = seq(0, 1, by = 0.01)) |>
  mutate(wc = 1 - wa - wb) |>
  filter(wc >= 0)  # wc が負にならないように制限

# 3 資産ポートフォリオの計算
```

```
df <- wa_wb_grid |>
  mutate(
    mu_p = wa * mu_A + wb * mu_B + wc * mu_C,
    sigma_p = sqrt(
      wa^2 * sigma_A^2 + wb^2 * sigma_B^2 + wc^2 * sigma_C^2 +
      2 * rho * (wa * wb * sigma_A * sigma_B + wb * wc * sigma_B * sigma_C + w
    )
  )

# 効率的フロンティアを特定（sigma_p が同じなら mu_p が最大のものを選択）

# プロット
g <- ggplot(df, aes(x = mu_p, y = sigma_p)) +
  geom_point(alpha = 0.1, color = "blue") +  # 3 資産の投資可能領域を点でプロット
  # geom_point(data = efficient_frontier, aes(x = mu_p, y = sigma_p), color =
  coord_flip() +
  scale_y_continuous(limits = c(0, 0.21), expand = c(0, 0)) +  # 0 以下の余白を削
  scale_x_continuous(limits = c(0, 0.15), expand = c(0, 0)) + # x 軸の余白も削除
  labs(
    title = "投資可能領域と効率的フロンティア（資産 A，B，C）",
    x = "期待リターン",
    y = "リスク（標準偏差）"
  ) +
  theme_classic(base_family = "Japan1GothicBBB") +
  theme(legend.position = "none")  # 凡例を非表示（点のプロットのため）

g <- g +
  geom_text(label = "資産 A", x = 0.12, y = 0.19, size = 4, family = "Japan1Got
  geom_text(label = "資産 B", x = 0.06, y = 0.13, size = 4, family = "Japan1Got
  geom_text(label = "資産 C", x = 0.04, y = 0.08, size = 4, family = "Japan1Got

# 描画
print(g)
```




```
# 変数の定義
rho <- 0  # 無相関
sigma_A <- 0.18
sigma_B <- 0.12
sigma_C <- 0.07

mu_A <- 0.12
mu_B <- 0.06
mu_C <- 0.04

# 共分散行列の作成（対角行列）
cov_matrix <- matrix(c(sigma_A^2, 0, 0,
                       0, sigma_B^2, 0,
                       0, 0, sigma_C^2),
                     nrow = 3, byrow = TRUE)

# ポートフォリオの生成
set.seed(123)
n_portfolios <- 5000
weights <- matrix(runif(3 * n_portfolios), ncol = 3)
weights <- weights / rowSums(weights)  # 各行の合計を 1 にする
```

```
# 期待リターンとリスクを計算
port_returns <- weights %*% c(mu_A, mu_B, mu_C)
port_risks <- sqrt(rowSums((weights %*% cov_matrix) * weights))

# データフレームに格納
portfolio_data <- tibble(Return = port_returns, Risk = port_risks)

# 効率的フロンティアのプロット
ggplot(portfolio_data, aes(x = Risk, y = Return)) +
  geom_point(alpha = 0.5, color = "blue") +
  labs(title = "Efficient Frontier",
       x = "Risk (Standard Deviation)",
       y = "Expected Return") +
  scale_x_continuous(limits = c(0, 0.21), expand = c(0, 0)) +  # 0 以下の余白を削
  scale_y_continuous(limits = c(0, 0.15), expand = c(0, 0)) + # x 軸の余白も削除
  theme_minimal()
```



5.4.1　複数資産のケース：安全資産も含む

安全資産 (リターン r_f) と 1 つのリスク資産 (期待リターン μ_1 , その分散 σ_1^2) か らなるポートフォリオの期待リターン μ_p は,

$$\mu_p = \omega_1\mu_1 + (1-\omega_1)r_f = (\mu_1 - r_f)\omega_1 + r_f \tag{5.9}$$

となり，その分散 σ_p^2 は,

$$
\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \mathrm{E}\left[(R_p - \mu_p)^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\omega_1 R_1 + (1-\omega_1) r_f - (\omega_1 \mu_1 + (1-\omega_1) r_f)\right)^2\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\omega_1 (R_1 - \mu_1)\right)^2\right] \\
&= \omega_1^2 \mathrm{E}\left[(R_1 - \mu_1)^2\right] \\
&= \omega_1^2 \sigma_1^2
\end{aligned}
$$

となる。つぎに，(Equation 5.10) 式を変形する。$\sigma_1 > 0$ かつ $\omega_1 > 0$ であるため，$\sigma_p = \omega_1 \sigma_1$ となり，これより $\omega_1 = \sigma_p / \sigma_1$ と変形できる。この ω_1 を (Equation 5.9) 式に代入し整理する。

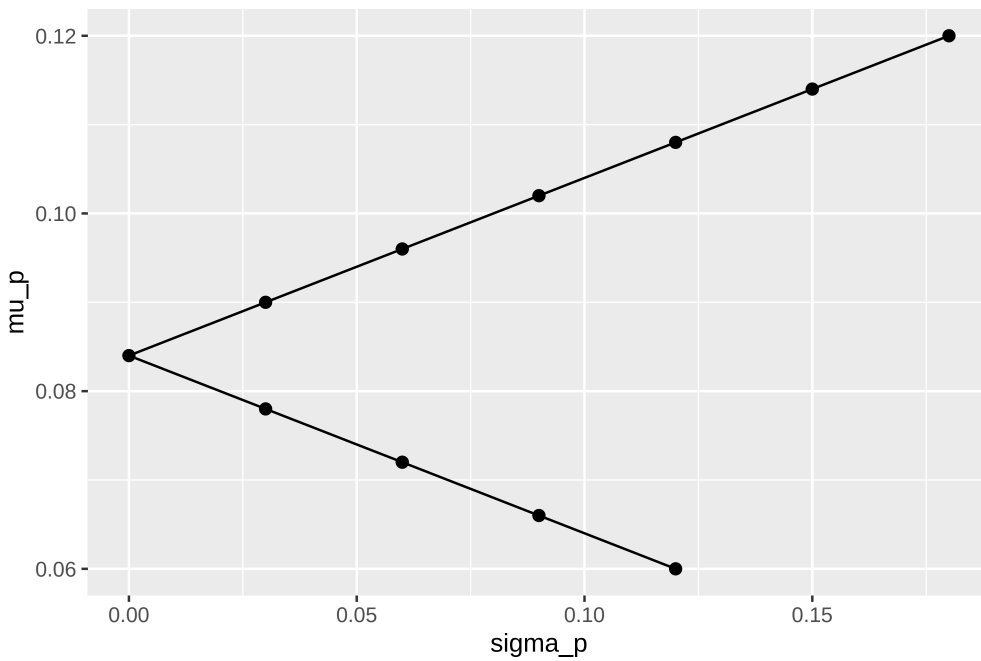
$$
\begin{aligned}
\mu_p &= (\mu_1 - r_f)\omega_1 + r_f \\
&= (\mu_1 - r_f)\frac{\sigma_p}{\sigma_1} + r_f \\
&= \left(\frac{\mu_1 - r_f}{\sigma_1}\right)\sigma_p + r_f
\end{aligned}
$$

となり，ポートフォリオの期待リターン μ_p は，無リスク利子率 r_f を切片，傾きを $\frac{\mu_1 - r_f}{\sigma_1}$ とする σ_p の線形関数となる。

以下のように，$w_A \sigma_A = w_B \sigma_B$ となるように w_A と w_B を選べば、$\sigma_P = 0$ となるポートフォリオを作れる。

```
# text p.65
sigma_A <- 0.18  # 資産 A の標準偏差
sigma_B <- 0.12  # 資産 B の標準偏差
mu_A <- 0.12     # 資産 A の期待リターン
mu_B <- 0.06     # 資産 B の期待リターン

wa <- seq(0,1,by = 0.01)
wb <- 1 - wa



df <- tibble(
  mu_p = wa * mu_A + wb*mu_B,
  sigma_p = abs(wa*sigma_A - wb*sigma_B),
  label= c(
  "0,1", rep("", 9),
  "0.1,0.9",rep("", 9),
```

```
    "0.2,0.8",rep("", 9),
    "0.3,0.7",rep("", 9),
    "0.4,0.6",rep("", 9),
    "0.5,0.5",rep("", 9),
    "0.6,0.4",rep("", 9),
    "0.7,0.3",rep("", 9),
    "0.8,0.2",rep("", 9),
    "0.9,0.1",rep("", 9),
    "1,0")
)
ggplot(df) + aes(y = sigma_p, x = mu_p) + geom_line() + geom_point(data = filt
```



5.5　6．2 基金分離定理

効率的フロンティアにおける特徴として，リスク回避的な投資家であるならば，効率的フロンティア上のポートフォリオを選択しようとする。また，安全資産と多数のリスク資産に投資する場合，効率的フロンティアは**接点ポートフォリオと安全資産からなる効率的フロンティア**(直線) であり，リスク回避的な投資家は，その効率的フロンティア上にあるポートフォリオを選択しようとする。

効率的フロンティア上の点は、安全資産と接点ポートフォリオの投資比率によって決定される。効率的フロンティア上では，接点ポートフォリオを構成するリスク資産の投資比率

は同一である。

> ❗ 2 基金分離定理
>
> 2 基金分離（Two-Fund Separation）とは、効率的フロンティア上に存在する 2 つのポートフォリオに投資することで組成されるポートフォリオは、効率的フロンティア上に存在することを示した定理である。この定理より、フロンティア上の 2 つポートフォリオを見つけることができれば、効率的フロンティア上のすべてのポートフォリオを再現できることがわかる。投資信託定理とも呼ばれる。

次のような投資家の期待効用関数を仮定する。

$$\mathbb{E}U = \mu_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2 \tag{5.10}$$

ここで，γ は絶対的リスク回避度であり，γ が大きいほど，リスク回避的な投資家であることを示す。

5.5.1　分離定理

期待効用最大化を実現する最適なポートフォリオは，**安全資産と接点ポートフォリオの投資比率**を表しており，接点ポートフォリオを構成するリスク資産の投資率は，投資家の効用関数 (投資家の選好) には依存しない。

したがって，接点ポートフォリオを見つけることができれば，投資家の決定問題は，安全資産と接点ポートフォリオの投資比率として表すことができる。これを**分離定理**という。