Cyfrowe przetwarzanie sygnału

Zadanie 2

Próbkowanie i kwantyzacja

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z praktycznymi aspektami procesu konwersji analogowo-cyfrowej (A/C) i cyfrowo-analogowej (C/A) sygnałów.

Zadanie polega na zaimplementowaniu procesu przetwarzania analogowo-cyfrowego z uwzględnieniem operacji próbkowania i kwantyzacji oraz konwersji odwrotnej, tj. cyfrowo-analogowej. Dostępne warianty:

- Konwersja A/C – próbkowanie
  - (S1) Próbkowanie równomierne
- Konwersja A/C – kwantyzacja
  - (Q1) Kwantyzacja równomierna z obcięciem
  - (Q2) Kwantyzacja równomierna z zaokrąglaniem
- Konwersja C/A – rekonstrukcja sygnału
  - (R1) Ekstrapolacja zerowego rzędu
  - (R2) Interpolacja pierwszego rzędu
  - (R3) Rekonstrukcja w oparciu o funkcję sinc

Istotność zasadniczych parametrów konwersji A/C, czyli częstotliwości próbkowania i progu kwantyzacji oraz wyboru metody interpolacji sygnału podczas konwersji C/A należy ocenić porównując sygnał zrekonstruowany $\hat{x}$ z sygnałem oryginalnym x. Możliwość obiektywnej oceny skutków konwersji wymaga zdefiniowania odpowiednich miar podobieństwa sygnałów. W ramach realizacji ćwiczenia należy zaimplementować wszystkie poniższe miary:

- (C1) Błąd średniokwadratowy (MSE)
- (C2) Stosunek sygnał - szum (SNR)
- (C3) Szczytowy stosunek sygnał - szum (PSNR)
- (C4) Maksymalna różnica (MD)

Uwaga: Porównania powinny być realizowane osobno dla procesu próbkowania i kwantyzacji. W przypadku próbkowania sygnał zrekonstruowany na podstawie ciągu próbek porównywany jest z sygnałem oryginalnym [1]. Należy przedstawić wyniki dla różnych sygnałów zwracając szczególną uwagę na zależność między częstotliwością sygnału, a częstotliwością jego próbkowania. W przypadku kwantyzacji, skwantowany ciąg próbek sygnału porównujemy z tym samym

[1] z uwagi na możliwość praktycznej implementacji miar podobieństwa oba sygnały muszą być również reprezentowane w postaci dyskretnej (oczywiście, ich dyskretyzacja powinna być „dokładniejsza", tzn. powinna wykorzystywać krótszy okres próbkowania niż miało to miejsce podczas określania ciągu próbek do rekonstrukcji)

ciągiem w postaci oryginalnej (sprzed kwantyzacji). Należy przedstawić wyniki dla różnych sygnałów i różnej liczby poziomów kwantyzacji. Uzyskane wartości SNR porównać z wartościami teoretycznymi dla określonej liczby bitów reprezentacji stałoprzecinkowej, obliczyć wartość ENOB.

Rozważając kwestię próbkowania sygnału (dolnopasmowego) z częstotliwością próbkowania f_s zakładamy, że użyteczne pasmo sygnału jest ograniczone do przedziału $(-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2})$. Częstotliwość $\frac{f_s}{2}$ nosi nazwę częstotliwości Nyquista. W przeciwnym wypadku, tj. jeśli sygnał będzie zawierał składową f_d o częstotliwości większej od połowy częstotliwości próbkowania, będzie to powodować zniekształcenie (osłabienie, bądź wzmocnienie) pewnej składowej o częstotliwości f_0 leżącej w paśmie użytecznym. Zjawisko to nazywamy *aliasingiem*[2], ponieważ wyraża się ono faktycznym *utożsamieniem* ze sobą składowych f_0 i f_d. Należy zademonstrować to zjawisko określając odpowiednią wartość f_d dla zadanej częstotliwości f_0 sygnału sinusoidalnego i częstotliwości próbkowania f_s:

- (A1) $f_0 = 100\text{Hz}$, $f_s = 1000\text{Hz}$
- (A2) $f_0 = 440\text{Hz}$, $f_s = 22050\text{Hz}$
- (A3) $f_0 = 220\text{Hz}$, $f_s = 44100\text{Hz}$

Uwaga: uzyskane wyniki należy przedstawić na wykresach, z uwzględnieniem kilku różnych wartości amplitudy sygnału o częstotliwości f_d przy ustalonej amplitudzie sygnału użytecznego f_0.

Uwagi ogólne

Proces próbkowania pozwala na zamianę wejściowego sygnału analogowego $f(t)$ na sygnał dyskretny

$$x(n) = f(nT_s) \ ,$$

reprezentowany jako ciąg próbek rozmieszczonych równomiernie w czasie w odstępach T_s. Twierdzenie o próbkowaniu określa możliwość odtworzenia oryginalnego sygnału analogowego przy założeniu, że częstotliwość próbkowania

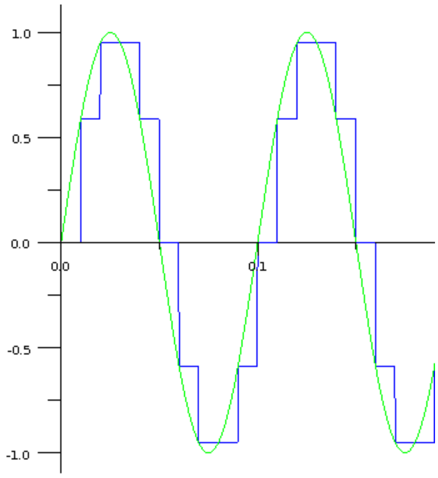
$$f_s = \frac{1}{T_s}$$

jest przynajmniej dwukrotnie wyższa niż najwyższa częstotliwość jakiejkolwiek składowej sygnału.

Najprostsza metoda rekonstrukcji sygnału oparta jest na ekstrapolacji zerowego rzędu (ZOH, ang. *zero-order hold*), w której wartość próbki jest pamiętana i definiuje stałą wartość sygnału wyjściowego aż do nadejścia próbki następnej. Zastosowanie tej metody wymaga zwykle użycia znacznie wyższej częstotliwości próbkowania niż wynikałoby to z twierdzenia o próbkowaniu. Redukcję widocznego na rys. 1 efektu „schodków” uzyskuje się w praktyce za pomocą odpowiednich filtrów wygładzających.

Lepsze efekty można osiągnąć stosując interpolację pierwszego rzędu (FOH, ang*first-order hold*), w której wartości sygnału pomiędzy sąsiednimi próbkami interpoluje się za pomocą odcinków prostej (rys. 2).

[2]W praktyce, w celu uniknięcia skutków aliasingu składowe leżące poza pasmem użytecznym filtruje się za pomocą analogowego filtru dolnoprzepustowego *przed* próbkowaniem



Rysunek 1: Metoda *zero-order hold*. Kolorem zielonym zaznaczono sygnał oryginalny, kolorem niebieskim - jego rekonstrukcję.

Metodą umożliwiającą teoretycznie dowolnie dokładne odtworzenie sygnału analogowego jest zastosowanie wzoru interpolacyjnego:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\mathrm{sinc}\,(t/T_s - n)$$

gdzie znormalizowana funkcja sinc (od łac. *sinus cardinalis*) zdefiniowania jest jako:

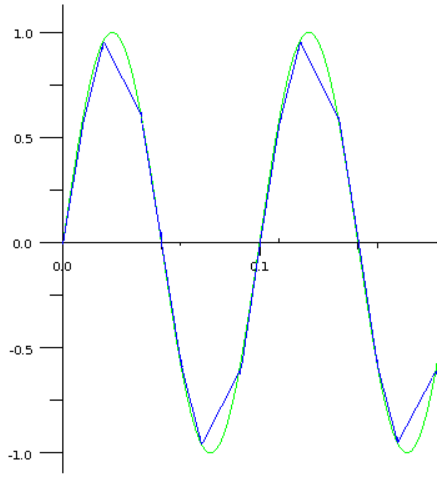
$$\mathrm{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{sin(\pi t)}{\pi t} & ;\text{dla } x \neq 0 \\ 1 & ;\text{dla } x = 0 \end{cases}$$

W praktycznej realizacji granice sumowania są ograniczone, przy czym liczba uwzględnianych próbek jest parametrem metody (należy przeprowadzić testy dla kilku różnych wartości).

Zjawisko aliasingu występuje w przypadku każdej częstotliwości sygnału f_0 i każdej częstotliwości próbkowania f_s. Wyraża się ono tym, że niemożliwe jest odróżnienie spróbkowanego sygnału o częstotliwości f_0 od sygnału o częstotliwości $f_d = f_0 + kf_s$, gdzie k jest dowolną liczbą całkowitą. Warto zauważyć, że dla $k < 0$ możemy otrzymać sygnał o częstotliwości *ujemnej* f_d, interpretowany jako sygnał o częstotliwości $-f_d$ przesunięty w fazie o 180°.

Kwantyzacja jest procesem, w którym amplituda sygnału zostaje odwzorowana w skończony zbiór wartości (poziomów kwantyzacji). Różnicę sąsiednich wartości w tym zbiorze nazywamy progiem kwantyzacji. Jeśli jest on stały, mówimy wówczas o kwantyzacji równomiernej. Stosując b-bitową stałoprzecinkową reprezentację danych, liczba poziomów kwantyzacji wynosi zwykle 2^b.

Kwantyzacja może być rozumiana jako operacja obcinania, bądź zaokrąglania danych (rys. 3 i 4, odpowiednio).



Rysunek 2: Metoda *first-order hold*. Kolorem zielonym zaznaczono sygnał oryginalny, kolorem niebieskim - jego rekonstrukcję.

W obu przypadkach jej efektem jest powstawanie błędu kwantyzacji, który może być interpretowany jako addytywny szum o mocy zależnej bezpośrednio od liczby bitów kwantyzera. Przykładowo, dla sygnału sinusoidalnego idealny przetwornik A/C o b bitach charakteryzuje się maksymalnym wyjściowym stosunkiem sygnał szum danym jako:

$$\mathrm{SNR}_{A/C} \approx 6.02b + 1.76dB \ .$$

Przekształcając to wyrażenie otrzymujemy wzór na efektywną liczbę bitów (ENOB, ang. *Effective Number Of Bits*) rzeczywistego przetwornika:

$$\mathrm{ENOB} = \frac{SNR - 1.76}{6.02} \ .$$

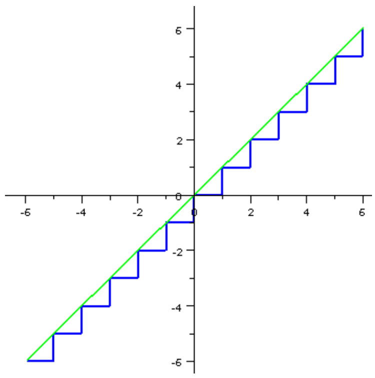
Miary podobieństwa przydatne do obiektywnej oceny skutków próbkowania i kwantyzacji definiujemy jako:

- Błąd średniokwadratowy (MSE, ang. *Mean Squared Error*)

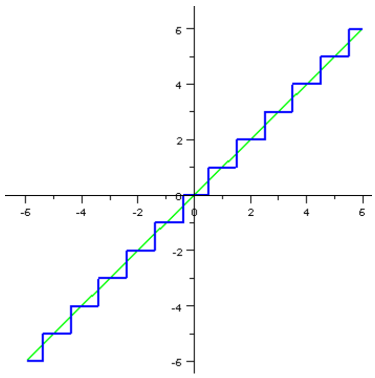
$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [x(i) - \hat{x}(i)]^2$$

- Stosunek sygnał - szum (SNR, ang. *Signal to Noise Ratio*)

$$\mathrm{SNR_{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{i=0}^{N-1} x^2(i)}{\sum_{i=0}^{N-1} [x(i) - \hat{x}(i)]^2} \right)$$



Rysunek 3: Kwantyzacja z obcięciem. Kolorem zielonym zaznaczono sygnał oryginalny, kolorem niebieskim - wynik kwantyzacji.



Rysunek 4: Kwantyzacja z zaokrąglaniem. Kolorem zielonym zaznaczono sygnał oryginalny, kolorem niebieskim - wynik kwantyzacji.

- Szczytowy stosunek sygnał - szum (PSNR, ang. *Peak Signal to Noise Ratio*)

$$\mathrm{PSNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}\left(\frac{\max\limits_{i=0,\ldots,N} x(i)}{\mathrm{MSE}}\right)$$

- Maksymalna różnica (MD, ang. *Maximum Difference*)

$$\mathrm{MD} = \max_{i=0,1,\ldots,N} |x(i) - \hat{x}(i)|$$

Zauważmy tu, że błąd średniokwadratowy MSE wyraża w istocie moc średnią sygnału różnicowego $n = x - \hat{x}$, rozumianego jako szum powstały w wyniku konwersji sygnału.