

暑期训练大纲

最简单也是最推荐的学习方式：选择性阅读刘汝佳的蓝书（算法竞赛入门经典：训练指南）和紫书（算法竞赛入门经典最新版）并适当完成书后练习。

同学们如有意向，我之后可组建一个专门的学习交流群，集体交流问题和学习进度。

也经常有推荐《挑战程序设计竞赛》这本书的，俗称白书，但是我没看过。

下面的算法，限于篇幅大部分不提供例题了，可以直接百度搜索对应算法，可以查到很多练习题目。

对于学习资源，这里推荐一些寻找的方法。

- 洛谷日报，主要面向算法入门介绍，现在已经有 350 多期了，[这是 2018 年的索引](#)，可以向后检索所有文章。
- Codeforces 博客。首先进入[主页](#)，然后右上角有一个搜索栏，可以键入感兴趣的关键字查找有关博客。另外，[这是一个汇总贴](#)，包含了非常丰富的算法介绍博客，强烈推荐大家点进去看看。而[这个博客](#)对非常多的专题提供了练习题目链接。此外 CF 的 [EDU 版块](#) 提供了一些算法的详细教学（尽管还很不完善），也推荐大家去学习一下。再列出来一下：
 - [I compiled a list of almost all useful blogs ever published on Codeforces \[update: till 09.06.2021\]](#)，汇总贴
 - [Problem Topics](#)，专题练习
 - [ITMO Academy: pilot course](#)，CF 官方教学

本文附件如下：

- 《背包九讲》
- 《莫比乌斯反演介绍》
- 《再探傅里叶变换》
- 《网络流24题》

Data Structure，数据结构

- Array, Stack, Queue, List 等基本数据结构
- C++ Standard Template Library, C++ STL
- Segment Tree, 线段树（各种信息维护方法、lazy-tag 懒标记、树上二分等技巧）
- Fenwick Tree, BIT, 树状数组（高维扩展、树上二分）
- 倍增，以及典型应用树上 LCA

- Disjoint Sets Union, DSU（国外习惯），Union-Find Set, UFS（国内习惯），并查集
 - 以及带权形式
- Trie, 字典树
- 参考资料（注：下述资料我可能并未详细阅读，但看起来不错）
 - [洛谷日报#4 浅谈线段树（Segment Tree）](#)
 - [洛谷日报#22 可以代替线段树的树状数组?——树状数组进阶（1）](#)

String，字符串

- 字符串匹配
 - KMP 算法
 - AC Automaton, AC 自动机
 - Hash, 哈希算法
- 回文串相关
 - Manacher 算法
- 子串信息查询和维护
 - SAM, 后缀自动机
- 其他
 - Trie, 字典树
 - exKMP, 扩展 KMP

Dynamic Programming，DP，动态规划

- 经典问题和模型
 - Longest Increasing Subsequence, LIS, 最长上升子序列
 - $O(n \log n)$ ，可用数据结构优化 DP，或维护每种长度上升子序列最小结尾数组
 - 其他类似的问题
 - Longest Non-increasing Subsequence, 最长不升子序列
 - Longest Non-decreasing Subsequence, 最长不降子序列
 - Longest Decreasing Subsequence, 最长下降子序列
 - Longest Common Subsequence, LCS, 最长公共子序列
 - $O(n^2)$ 算法
 - 背包问题，可以学习《背包九讲》
 - 可参考往年 NOIP 提高组的 DP 题
- 不同分类
 - DP 有很多分类
 - 区间 DP、计数 DP、数位 DP、棋盘 DP、背包 DP、期望 DP、概率 DP、构造 DP、图上 DP、树上 DP、字符串 DP、序列 DP（如 LIS DP、LCS DP）、动态 DP、DP 套 DP...
 - 建议掌握
 - 区间 DP
 - 数位 DP（模式比较固定）

- 参考资料
 - [洛谷日报#84 数字组成的奥妙——数位dp](#)
 - 常见的树上 DP
 - 期望和概率 DP（学好概率论）
- 通用技术
 - 实现方式
 - 记忆化搜索
 - 迭代
 - 对转移的优化
 - 前缀和优化
 - 数据结构优化
 - 单调队列/栈优化
 - 四边形不等式优化
 - ...
 - 对状态的优化
 - 通过逻辑分析简化状态
 - 交换 DP 值和 状态表示
 - ...

Math，数学类问题

Number Theory，数论部分

- GCD, LCM, Euclidean Algorithm, 最大公约数，最小公倍数，欧几里得算法
 - exGCD，扩展欧几里得
 - 类欧几里得（主要用于格点计数）
- Chinese Remainder Theorem, CRT，中国剩余定理
 - 及其扩展 exCRT
- Generating Primes，素数筛
 - 埃氏筛法（Min_25 筛前置）
 - 线性欧拉筛（杜教筛前置）
 - 叶氏筛法
 - Meissel-Lehmer 算法
 - 清华 maTHu 对此有介绍，当然他们对很多其他的高效数学算法都有介绍
- Prime Test，素性测试
- Prime Factorization，质因数分解
- Modulars，同余理论
- Mobius' Inversion, Dirichlet Convolution
 - 参考资料（排名不分先后）
 - 我刚写的专题报告《莫比乌斯反演介绍》，仅供入门
 - Vfleaking [炫酷反演魔术](#)，从更本质的角度介绍了多种卷积，将其统一起来
 - 洛谷日报#67 [狄利克雷卷积与莫比乌斯反演](#)
 - 多做题、总结常用的技术很重要

- Quadratic Residue, 二次剩余, 以及更高次的剩余等
- 参考资料
 - [Number Theory in Competitive Programming.\[Tutorial\]](#)

计数问题

- 容斥原理
- Polya 置换定理、Burnside 原理
- 贡献法
- 生成函数多项式卷积

三大变换

- Fast Fourier Transform, FFT, 快速傅里叶变换
 - 多项式卷积
- Number Theory Transform, NTT, 快速数论变换
 - 模意义下的多项式卷积
- Fast Walsh Transform, FWT, 快速沃尔什变换
 - 下标位运算意义下的卷积
 - 2^n 元离散值多项式的一般卷积 (暂时不需要这样理解)
 - 经常可以用子集和 DP (Sum over Subset DP, SOS DP) 代替
- FFT 的许多变式
 - 任意模数 FFT
 - Bluestein's Algorithm
 - 参考资料
 - 国家集训队2016年论文《再探傅里叶变换》
- 基于生成函数和多项式的计数问题

概率和期望

- 学好概率论, 常识很重要
- 期望的线性性、变量独立时可乘性
 - 引出重要的贡献法
- Min-Max 容斥

博弈论

- 基本概念
 - 胜负态、SG 函数
 - Nim 游戏
 - 有向图博弈
- 常用技术
 - 逻辑分析 (策略发掘、模型规约等)
 - 打表找规律
- 其他
 - Min-Max 博弈
 - 博弈树、Alpha-Beta 剪枝

Constructive Algorithms, 构造

- 变化多端，固定的逻辑分析途径比较模糊，直觉往往更重要
- 辅助分析的技术
 - 对称、分块、分类、奇偶、逆向、交替、重复、类比、递推、找规律、寻找数学表示
- 这部分没什么大纲

Graph Theory, 图论

- 最短路问题
 - Dijkstra, 单源最短路算法
 - Floyd, 多源最短路
 - 该思想的应用非常广泛，如传递闭包计算、计算理论 CYK 算法等
 - 注意先循环 k ，然后是 i, j
 - ~~传说忘记三层循环顺序，可以暴力做 6 遍，结果一定正确~~
 - 二进制分组最短路
 - 最短路树
- 连通分量问题
 - 无向图
 - 桥、割点、边双连通分量（缩树）、点双联通分量（缩圆方树）
 - DFS 树
 - 树边、非树边（一定是树向边）
 - 有向图
 - 强连通分量
 - DFS 树
 - 树边、非树边（树向边、非树向边）
- 仙人掌
 - 圆方树
 - 环上有很多细节处理
- 网络流
 - 基础模型
 - 可以学习《网络流24题》
 - 最大流
 - 常用算法
 - ISAP
 - Dinic（做二分图匹配更快）
 - HLPP，最高标号预流推进算法（更快的最大流匹配算法）
 - 典型应用
 - 二分图最大匹配
 - 最大权闭合子图
 - 费用流

- 最小费用最大流、最大费用流
- 常用算法
 - MCMF（每次用最短路算法寻找增广路径）
- 典型应用
 - 二分图最大权匹配
- 扩展
 - zkw 费用流
- 带上下界的网络流问题