Min_25 筛求函数 $f(x)$ 的前缀和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(i)=F(n)$

对质数 p，要求 $f(p^k)$ 容易计算

设 p_i 为第 i 个质数

设 $F(n,j)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(i)[i\text{ 的最小质因子}\ge p_j]$，则 $F(n)=F(n,1)+f(1)$

$g(t)=\sum\limits_{i=1}^{t} f(i)[i\text{ 为质数 }]$

算 $F(n,j)$ 时，按每个 $i\le n$ 的最小质因子和它的次数分类，

即 $F(n,j)=g(n)-\sum\limits_{i=1}^{j-1} f(p_i)+\sum\limits_{i\ge j}^{p_i^2\le n}\sum\limits_{k\ge 1}^{p_i^{k+1}\le n}((\sum\limits_{m(m\text{的最小质因子}>p_i\text{且}m\le\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor)} f(p_i^k m))+f(p_i^{k+1}))$

$=g(n)-\sum\limits_{i=1}^{j-1} f(p_i)+\sum\limits_{i\ge j}^{p_i^2\le n}\sum\limits_{k\ge 1}^{p_i^{k+1}\le n}((\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} f(p_i^k m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}])+f(p_i^{k+1}))$

若 $f(x)$ 是积性函数，则 $\sum\limits_{m(m\text{的最小质因子}>p_i\text{且}m\le\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor)} f(p_i^k m)=\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} f(p_i^k m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}]=$

$\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} f(p_i^k)f(m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}]=f(p_i^k)\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} f(m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}]=f(p_i^k)F(\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor,i+1)$

$\therefore F(n,j)=g(n)-\sum\limits_{i=1}^{j-1} f(p_i)+\sum\limits_{i\ge j}^{p_i^2\le n}\sum\limits_{k\ge 1}^{p_i^{k+1}\le n}(F(\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor,i+1)f(p_i^k)+f(p_i^{k+1}))$

一般地，若 $f(p_i^k m)=h(p_i^k)f(m)$，就有 $\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} f(p_i^k m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}]=$

$\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} h(p_i^k)f(m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}]=h(p_i^k)\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} f(m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}]=h(p_i^k)F(\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor,i+1)$

更一般地，若有 c 个函数 $f_1,f_2,...,f_c$，$f_i(p_i^k m)=\sum\limits_{q=1}^{c} h_{i,q}(p_i^k)f_q(m)$，

则 $\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} f(p_i^k m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}]=\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor}(\sum\limits_{q=1}^{c} h_{i,q}(p_i^k)f_q(m))[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}]=$

$\sum\limits_{q=1}^{c}(h_{i,q}(p_i^k)\sum\limits_{m=1}^{\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor} f_q(m)[m\text{的最小质因子}\ge p_{i+1}])=\sum\limits_{q=1}^{c} h_{i,q}(p_i^k)F_q(\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor,i+1)$

即 $\vec{f}(p_i^k m)=H\vec{f}(m)$，则由 $\vec{F}(\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor,i+1)$ 们可算出 $\vec{F}(n,j)$

递归地求 $F(n,1)$，则由于 $\lfloor\frac{\lfloor\frac{n}{a}\rfloor}{b}\rfloor=\lfloor\frac{n}{ab}\rfloor$，所有用到的 $F(x,j)$ 中的 x 都属于集合 {n/1,n/2,...,n/n}，这个集合中不同的数最多只有 $2\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 个，即 $\lfloor\frac{n}{1}\rfloor,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,...,\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\rfloor,\lfloor\frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}\rfloor,...,1$，所以只要对等于这些数的 t 求出 $g(t)$。

如果 $f(p)$ 是个关于 p 的多项式 $G(p)$

设 $g(t,j)$ 为 $\sum G(i)[i\le t$，且 $(i$ 为质数或 i 的最小质因子 $\ge p_j)]$

设 $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，将多项式 G 的每一项分开来求和，即分别求满足条件的 i 的 k 次方之和，$G_k(i)=i^k$，开始 $g_k(t,1)=\sum\limits_{i=2}^{t} G_k(i)$

若 $p_j^2>t$，则 $g_k(t,j+1)=g_k(t,j)$，此时剩下的都是质数点的值

若 $p_j^2\le t$，则减去最小质因子等于 p_j 的合数的 k 次方和，$g_k(t,j+1)=g_k(t,j)-G_k(p_j)(g_k(t/p_j,j)-g_k(p_{j-1},j))$

这样再乘以系数 a_k 相加就可以求出 $g(t)$，进而得到 $F(n)$

以上需要枚举的所有质数 $p^2\le n$

若 **n/j=t**，**n/(j-1)>=t+2**，即 $\frac{n}{j-1} \ge t+2$，$\frac{n}{j} < t+1$

$\frac{n}{t+2}+1 \ge j > \frac{n}{t+1}$，$(n+t+2)(t+1) > n(t+2)$，$t^2+3t+2 > n$

若 $t+1 \le \sqrt{n}$, 即 $n \ge t^2+2t+1$, 则 $t+1 > \frac{n}{j} \ge (t+1)^2 j, j > t+1, j \ge t+2, n \ge (t+2)(j-1) \ge (t+2)(t+1) = t^2+3t+2$,

矛盾，因此若 $t+1 \le \sqrt{n}$，则一定能取到 $t+1$

$\therefore$ 前 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 个正整数都能被 **n/i** 取到

7 G【给定 n，以 n 的所有因子为顶点建图，两个因子，一个是另一个的质数倍则连边，问 1 到 n 所有图的总边数】

对于 n，假设质因子 p 在其中的幂为 e，则将它的所有因子按含 p 的次数分类，则每一类都是 p^0 类整体乘一个 p^i，相邻两层间的边数即点数，所以总边数 $f(n)=(e+1)f(n/p^e)+e\cdot d(n/p^e)$

其中 $d(n)$ 为 n 的因子数

$f(n=p^k)=k$，设 $F(n,j)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(i)[i \text{ 的最小质因子} \ge p_j]$，$g(t)=\sum\limits_{i=1}^{t} f(i)[i \text{ 为质数}]$

枚举最小质因子和次数

则 $F(n,j)=g(n)-\sum\limits_{i=1}^{j-1} f(p_i)+\sum\limits_{\substack{i\ge j}}^{p_i^2\le n}\sum\limits_{k\ge 1}^{p_i^{k+1}\le n}((k+1)F(n/p_i^k,i+1)+k\cdot D(n/p_i^k,i+1)+f(p_i^{k+1}))$

$d(p^k)=k+1$，$D(n,j)=\sum\limits_{i=1}^{n} d(i)[i \text{ 的最小质因子} \ge p_j]$，$h(t)=\sum\limits_{i=1}^{t} d(i)[i \text{ 为质数}]$

$$D(n,j)=h(n)-\sum_{i=1}^{j-1} d(p_i)+\sum_{i\ge j}^{p_i^2\le n}\sum_{k\ge 1}^{p_i^{k+1}\le n}(D(\lfloor\frac{n}{p_i^k}\rfloor,i+1)d(p_i^k)+d(p_i^{k+1}))$$

可以一起算