МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
Кафедра информационных технологий и электронного обучения

Основная профессиональная образовательная программа
Направление подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника
Направленность (профиль) «Технологии разработки программного обеспечения»
форма обучения – очная

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ОБЗОР

по теме: Вычислительная математика

Обучающегося 4 курса
Магера Егора Владимировича

Санкт-Петербург
2025

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная математика (ВМ) — фундаментальная дисциплина, находящаяся на стыке математики, информатики и прикладных наук. Её основная задача — разработка, теоретическое обоснование, анализ и практическая реализация численных методов решения математических задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности: от физики, инженерии и экономики до биологии и социальных наук.

Возникновение вычислительной математики как самостоятельной области знания было стимулировано бурным развитием вычислительной техники во второй половине XX века. Однако её истоки уходят глубоко в прошлое, к трудам Ньютона, Эйлера, Гаусса, Чебышёва и других великих учёных, разрабатывавших методы приближённых вычислений. Появление компьютеров кардинально изменило масштабы решаемых задач: если раньше учёные стремились к аналитическим решениям, то теперь стало возможным находить численные решения для невероятно сложных моделей, описываемых системами дифференциальных уравнений, интегралами, матрицами огромной размерности.

Актуальность вычислительной математики сегодня невозможно недооценить. Она является ядром компьютерного моделирования (вычислительного эксперимента), которое стало третьей, наравне с теорией и экспериментом, парадигмой научного познания. Без численных методов невозможно представить современное проектирование самолётов и автомобилей (CAE), прогноз погоды и климата, расшифровку генома, анализ финансовых рынков, создание спецэффектов в кино и разработку новых материалов.

Цель данного реферата — дать систематизированный обзор ключевых разделов, методов и проблем вычислительной математики. В работе будут рассмотрены основные классы задач, решаемых численными методами, приведены их классические алгоритмы, обсуждены фундаментальные понятия точности, устойчивости и сложности, а также затронуты современные тенденции развития этой жизненно важной научной дисциплины.

1. Основные разделы и задачи вычислительной математики

Вычислительная математика структурирована вокруг типов математических задач, для решения которых создаются алгоритмы.

1.1. Численные методы алгебры.

Эта область занимается решением задач линейной и нелинейной алгебры.

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): $Ax = b$. Методы делятся на **точные (прямые)** (метод Гаусса, LU-разложение, метод Холецкого для симметричных матриц), которые в отсутствие ошибок округления дают точное решение, и **итерационные** (методы Якоби, Гаусса-Зейделя, метод сопряжённых градиентов), которые последовательно приближаются к решению и эффективны для больших разреженных систем.

Проблема собственных значений и векторов: $Ax = \lambda x$. Решение этой задачи необходимо в квантовой механике, анализе колебаний, анализе данных (метод главных компонент). Основные методы: степенной метод, QR-алгоритм.

Системы нелинейных уравнений: $F(x) = 0$. Решаются итерационными методами, такими как метод Ньютона (касательных), метод простой итерации, методы секущих.

1.2. Интерполяция, аппроксимация и численное дифференцирование.

Интерполяция: Построение функции, проходящей **точно** через заданные узловые точки (полиномы Лагранжа, Ньютона, сплайны — кусочно-полиномиальные функции, обеспечивающие гладкость).

Аппроксимация (наилучшее приближение): Построение функции, **наименее уклоняющейся** от заданных точек по некоторой мере (чаще всего — метод наименьших квадратов). Лежит в основе регрессионного анализа.

Численное дифференцирование: Приближённое вычисление производной с использованием конечных разностей. Крайне чувствительно к ошибкам в исходных данных.

1.3. Численное интегрирование.

Задача приближённого вычисления определённого интеграла $\int f(x)dx$ на отрезке. Методы:

- **Формулы Ньютона-Котеса** (прямоугольников, трапеций, Симпсона);
- **Квадратурные формулы Гаусса,** обеспечивающие высокую точность при минимальном числе узлов за счёт их оптимального выбора;
- **Методы Монте-Карло,** особенно эффективные для вычисления кратных интегралов высокой размерности.

1.4. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Задачи: задача Коши (с начальными условиями) и краевые задачи.

- **Методы Эйлера** (явный и неявный) — простейшие одношаговые методы;
- **Методы Рунге-Кутты** (разных порядков точности) — наиболее популярные для решения задачи Коши;
- **Многошаговые методы** (Адамса) — используют информацию о нескольких предыдущих точках;
- **Методы решения жестких систем ОДУ** (неявные методы, метод Гира);
- **Методы решения краевых задач** (метод стрельбы, метод конечных разностей, метод Галёркина).

1.5. Численные методы решения уравнений в частных производных

Самый обширный и сложный раздел. Основные классы уравнений: эллиптические (стационарные задачи, например, уравнение Пуассона), параболические (задачи нестационарной диффузии, теплопроводности), гиперболические (задачи распространения волн).

- **Метод конечных разностей (МКР):** Замена производных разностными отношениями на дискретной сетке. Наиболее интуитивно понятный;
- **Метод конечных элементов (МКЭ):** Область разбивается на конечные элементы (треугольники, тетраэдры), решение ищется в виде комбинации базисных функций на этих элементах. Крайне гибкий, доминирует в инженерных расчётах;
- **Метод конечных объемов (МКО):** Особенно популярен в вычислительной газовой динамике, так как хорошо сохраняет законы сохранения (массы, импульса, энергии).

2. Фундаментальные понятия и проблемы численных методов

Любой численный метод должен оцениваться не только по результату, но и по следующим ключевым критериям:

2.1. Точность и погрешности

- **Неустранимая погрешность:** Обусловлена неточностью исходных данных (коэффициентов, начальных условий);
- **Погрешность метода (дискретизации):** Возникает из-за замены исходной задачи её дискретной аппроксимацией (например, замена интеграла суммой, производной — разностью);
- **Вычислительная погрешность:** Связана с конечностью разрядной сетки компьютера и накоплением ошибок округления в процессе вычислений.

2.2. Устойчивость

Алгоритм называется **устойчивым**, если малые возмущения исходных данных и ошибки округления приводят к малым изменениям результата. В противном случае метод неустойчив, и его применение бессмысленно. Яркий пример неустойчивого алгоритма — вычисление интеграла по рекуррентной формуле для ортогональных многочленов.

2.3. Сходимость

Численный метод должен **сходиться**, т.е. приближённое решение должно стремиться к точному решению исходной задачи при неограниченном измельчении шага дискретизации (шага сетки, шага интегрирования и т.д.).

2.4. Сложность (эффективность)

Оценивается количеством арифметических операций и требуемым объёмом памяти. Например, решение СЛАУ методом Гаусса имеет сложность $O(n^3)$, где n — размерность матрицы, что делает его непригодным для очень больших n. Разработка быстрых алгоритмов (как, например, быстрое преобразование Фурье со сложностью $O(nlogn)$ вместо $O(n^2)$) — одно из главных достижений ВМ.

3. Современные тенденции и применение

3.1. Высокопроизводительные вычисления (HPC)

Решение грандиозных задач современной науки требует использования суперкомпьютеров с параллельной архитектурой. Это порождает целое направление — **параллельные численные алгоритмы**, предназначенные для эффективного распределения вычислений между тысячами и миллионами вычислительных ядер (распараллеливание по данным, по задачам).

3.2. Взаимодействие с машинным обучением.

Границы между ВМ и машинным обучением размываются. Методы ВМ (оптимизация, линейная алгебра) лежат в основе обучения нейронных сетей. В свою очередь, методы машинного обучения начинают использоваться для ускорения традиционных вычислительных методов (например, предобуславливание систем уравнений, построение surrogate-моделей для сложных физических процессов).

3.3. Программное обеспечение.

Разработка численных методов неотделима от их программной реализации. Широко используются как специализированные библиотеки (BLAS, LAPACK для линейной алгебры; PETSc, Trilinos для параллельных вычислений; FEniCS для МКЭ), так и высокоуровневые среды (MATLAB, GNU Octave, NumPy/SciPy в Python, Julia), которые делают мощные численные методы доступными для широкого круга исследователей и инженеров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычислительная математика представляет собой динамично развивающуюся дисциплину, которая служит основным инструментом перевода математических моделей реального мира на язык, понятный компьютеру. От простых вычислений до моделирования климата планеты или ядерных реакций — всё это сфера её применения.

В данном реферате были рассмотрены основные разделы ВМ: численные методы алгебры, анализ функций, интегрирование, решение дифференциальных уравнений. Особое внимание было уделено фундаментальным концепциям, обеспечивающим надёжность вычислений: точности, устойчивости, сходимости и сложности алгоритмов. Без глубокого понимания этих аспектов любое численное решение может оказаться бесполезным или даже вводящим в заблуждение.

Современный этап развития вычислительной математики характеризуется её тесной интеграцией с высокопроизводительными вычислениями, что позволяет решать задачи невиданного ранее масштаба, и с методами искусственного интеллекта, открывающими новые парадигмы в численном моделировании.

Таким образом, вычислительная математика является не просто вспомогательной технической областью, а самостоятельной и крайне важной наукой. Она предоставляет необходимый аппарат для прогресса в естественных и инженерных науках, экономике и технологиях, выступая в роли моста между абстрактной математической теорией и практическими потребностями человечества. Её дальнейшее развитие будет напрямую определять возможности науки и техники в XXI веке.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989. — 432 с.;

2. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы — М.: Наука, 1966. — 248с.;

3. Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. Машинные метода математических вычислений — изд. Мир, перевод Х. Д. Икрамова, 1980 — 276 с.;

4. Бахвалов Н.С, Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы — изд. Лаборатория знаний, 2024 — 636 с.