

# Chapitre 1

## Notion d'Arbitrage

### 1.1 Hypothèses sur le marché

Nous supposons que :

1. Les actifs sont divisibles à l'infini ;
2. Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant ;
3. On peut emprunter et vendre à découvert ;
4. Les échanges ont lieu sans coûts de transaction ;
5. On peut emprunter et prêter au même taux constant  $r$ .

### 1.2 Arbitrage

*Quelles sont les évolutions possibles du marché ?*

$\Omega$  : ensemble des états possibles du marché ;

$\mathbb{P}$  : Probabilité réelle (ou en tout cas anticipée) de survenance de chacun des états.

*Quelles sont les stratégies d'investissement ?*

**Définition 1.2.1** *Un **portefeuille autofinancant** est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'est pas modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent. On notera  $X_t$  la valeur en  $t$  du portefeuille  $X$ .*

On se donne donc simplement un capital initial et une stratégie dynamique d'investissement dans les actifs du marché à partir de ce capital de départ.

*Qu'est ce qu'une stratégie d'arbitrage ?*

**Définition 1.2.2** *Un **arbitrage** sur la période  $[0, T]$  est un portefeuille autofinancant  $X$  de valeur nulle en  $t = 0$  dont la valeur  $X_T$  en  $T$  est positive et strictement positive*

avec une probabilité strictement positive.

$$X_0 = 0, \quad X_T \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_T > 0) > 0$$

On supposera qu'il y a sur le marché l'hypothèse d'**Absence d'opportunités d'arbitrage** (AOA, *no free lunch*) entre tout instant 0 et  $T$ .

$$\boxed{\{X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_T \geq 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) = 0}$$

L'hypothèse signifie simplement : "Si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle", soit "On ne peut gagner d'argent sans capital initial".

Le raisonnement (défaitiste) est : "Si il y avait un arbitrage, quelqu'un en aurait déjà profité". Sachant qu'il y a dans les banques beaucoup d'arbitragistes, cette hypothèse est cohérente sur les marchés.

### 1.3 Comparaison de portefeuilles

**Proposition 1.3.1** *En AOA, si deux portefeuilles autofinancants  $X$  et  $Y$  ont même valeur en  $T$ , ils ont même valeur en 0.*

$$X_T = Y_T \Rightarrow X_0 = Y_0$$

**Démonstration** : Supposons  $X_0 < Y_0$  et proposons la stratégie suivante : A l'instant  $t = 0$ , achat de  $X$ , vente de  $Y$  et placement de  $Y_0 - X_0 > 0$  à la banque. La valeur du portefeuille à l'instant  $t = T$  est  $X_T - Y_T$  plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque, qui est toujours  $> 0$ .

	en 0	en $T$
Achat de $X$	$X_0$	$X_T$
Vente de $Y$	$-Y_0$	$-Y_T$
Placement du gain à la banque	$Y_0 - X_0 > 0$	$(Y_0 - X_0)/B(0, T) > 0$
Valeur	0	$> 0$

Donc AOA implique  $X_0 \geq Y_0$  et, de manière similaire, on obtient  $X_0 \leq Y_0$  si bien que  $X_0 = Y_0$ .  $\square$

**Remarque 1.3.1** *Pour créer un arbitrage, on a acheté le moins cher et vendu le plus cher. Vu qu'ils ont même valeur en  $T$ , on y gagne, logique...*

**Proposition 1.3.2** *En AOA, si deux portefeuilles autofinancants  $X$  et  $Y$  ont même valeur en  $T$ , elles ont presque sûrement même valeur en tout instant  $t \leq T$ .*

$$X_T = Y_T \Rightarrow \forall t \leq T \quad X_t = Y_t \quad \mathbb{P} - p.s.$$

Ce résultat est une conséquence directe du résultat suivant :

**Proposition 1.3.3** *En AOA, considérons deux portefeuilles autofinancants  $X$  et  $Y$ , alors :*

$$X_T \leq Y_T \Rightarrow \forall t \leq T \quad X_t \leq Y_t \quad p.s.$$

**Démonstration :** Soit  $t \leq T$ . Proposons la stratégie suivante :

en 0 : je ne fais rien.

en  $t$  : Sur  $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$ , j'achète le portefeuille  $Y$  au prix  $Y_t$ , je vend le portefeuille  $X$  au prix  $X_t$  et je place la différence  $X_t - Y_t > 0$  à la banque. Sur  $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) \leq Y_t(\omega)\}$ , je ne fais rien.

Finalement, en  $T$ , sur  $\{X_t > Y_t\}$ , je touche  $Y_T - X_T \geq 0$  plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque qui est toujours  $> 0$ , soit une valeur  $> 0$ , et sur  $\{X_t \leq Y_t\}$ , la valeur du portefeuille est nulle.

		en $t$	en $T$
Sur $\{X_t > Y_t\}$	Achat de $Y$ en $t$	$Y_t$	$Y_T$
	Vente de $X$ en $t$	$-X_t$	$-X_T$
	Placement du gain à la banque	$X_t - Y_t > 0$	$(X_t - Y_t)/B(t, T) > 0$
	Valeur	0	$> 0$
Sur $\{X_t \leq Y_t\}$	Valeur	0	0

Donc AOA implique  $\mathbb{P}(X_t > Y_t) = 0$ .

□

## 1.4 Relation de parité Call-Put

Un **call** de strike  $K$  et d'échéance  $T$  sur le sous-jacent  $S$  a pour payoff  $(S_T - K)^+$  ; notons  $C_t$  son prix à l'instant  $t$ .

Un **put** de strike  $K$  et d'échéance  $T$  sur le sous-jacent  $S$  a pour payoff  $(K - S_T)^+$  ; notons  $P_t$  son prix à l'instant  $t$ .

Un **zero-coupon** d'échéance  $T$  est un produit financier de valeur 1 en  $T$ . Son prix en  $t$  est noté  $B(t, T)$ .

Alors, en AOA, les prix des calls et des puts en  $t$  sont reliés par la relation de **parité call put** :

$$C_t - P_t = S_t - KB(t, T)$$

En effet considérons les deux stratégies de portefeuille :

		en 0	en $t$	en $T$
Port. 1	Achat d'un Put européen en $t$		$P_t$	$(K - S_T)^+$
	Achat d'un actif risqué en $t$		$S_t$	$S_T$
	Valeur		$P_t + S_t$	$(K - S_T)^+ + S_T$
Port. 2	Achat d'un Call européen en $t$		$C_t$	$(S_T - K)^+$
	Achat de $K$ actifs sans risque en $t$		$KB(t, T)$	$K$
	Valeur		$C_t + KB(t, T)$	$(S_T - K)^+ + K$

Remarquons que l'on a :

$$(K - S_T)^+ + S_T = K \mathbf{1}_{\{S_T \leq K\}} + S_T \mathbf{1}_{\{K \leq S_T\}} = (S_T - K)^+ + K$$

Donc, les deux portefeuilles ont des flux finaux égaux, et donc en AOA des valeurs égales à tout instant  $t \leq T$  ce qui nous donne la relation de parité Call-Put :

**Remarque 1.4.1** *Cette relation est intrinsèque à l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché et ne dépend en rien du modèle d'évolution imposé aux actifs.*

## 1.5 Prix d'un contrat Forward

Le contrat Forward est un contrat signé à la date  $t = 0$  qui assure l'échange en  $T$  de l'actif risqué  $S$  contre un prix  $F(0, T)$  fixé en  $t = 0$ . Il n'y a aucun échange d'argent à la date  $t = 0$ . Pour déterminer le prix  $F(0, T)$  du contrat, considérons les deux stratégies de portefeuille suivantes :

		en 0	en $T$
Port. 1	Achat de l'actif $S_0$ en 0	$S_0$	$S_T$
	Vente de $F(0, T)$ zéros coupons en 0	$-F(0, T)B(0, T)$	$-F(0, T)$
	Valeur	$S_0 - F(0, T)B(0, T)$	$S_T - F(0, T)$
Port. 2	Achat du contrat Forward en 0	0	$S_T - F(0, T)$

Sous, AOA, on a donc

$$F(0, T) = \frac{S_0}{B(0, T)}.$$

**Remarque 1.5.1** *Montrez que de manière plus générale, on obtient :*

$$F(t, T) = \frac{S_t}{B(t, T)} .$$



## Chapitre 2

# Modèle Binomial à une période

Le modèle binomial est très pratique pour les calculs et la plus grande partie des résultats obtenus se généralisent aux modèles en temps continu.

### 2.1 Modélisation probabiliste du marché

Considérons un marché à deux dates :  $t = 0$  et  $t = 1$  et deux actifs

Un actif **sans risque** qui vaut 1 en  $t = 0$  et vaut  $R = (1 + r)$  en  $t = 1$ , qui représente l'argent placé à la banque au taux  $r$  (dans une obligation), il est sans risque dans le sens où l'on connaît en  $t = 0$  la valeur qu'il aura en  $t = 1$ .

$$1 \rightarrow R = 1 + r$$

Et un **actif risqué**  $S$ , il vaut  $S_0$  en  $t = 0$  et à l'instant 1, il peut avoir pris 2 valeurs différentes : soit il est monté  $S_1^u = u.S_0$ , soit il est descendu  $S_1^d = d.S_0$  avec  $d < u$ .

$$\begin{array}{ccc} & & uS_0 \\ & \nearrow & \\ S_0 & & \\ & \searrow & \\ & & dS_0 \end{array}$$

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de 3 choses :  $\Omega$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathbb{P}$ .

$\Omega$  est l'**ensemble des états du monde** : 2 états possibles selon la valeur de l'actif risqué en  $t = 1$ , état "haut"  $\omega_u$  ou "bas"  $\omega_d$ .  $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$

$\mathbb{P}$  est la **probabilité historique** sur  $\Omega$ .  $\mathbb{P}(\omega_u) = p$  et  $\mathbb{P}(\omega_d) = 1 - p$ . Le prix a une probabilité réelle  $p$  de monter et  $1 - p$  de descendre. Attention  $p \in ]0, 1[$  car les 2 états du monde peuvent arriver.

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$  est un couple de deux tribus représentant l'information globale disponible sur le marché aux instants  $t = 0$  et  $t = 1$ .

En  $t = 0$ , on ne dispose d'aucune information :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

En  $t = 1$ , on sait si l'actif est monté ou descendu :

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_u\}, \{\omega_d\}\}.$$

Cette tribu représente l'ensemble des parties de  $\Omega$  dont je puisse dire à l'instant  $t = 1$  si elles sont réalisées ou non.

**Remarque 2.1.1** *Bien sûr, on a  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$ , en effet plus le temps avance plus l'on acquiert de l'information.*

**Remarque 2.1.2** *Une variable aléatoire est  $\mathcal{F}_1$ -mesurable si et seulement si elle est connue avec l'information donnée par  $\mathcal{F}_1$ , i.e. déterminée à l'instant 1. En effet, heuristiquement*

*Une variable aléatoire  $X$  est  $\mathcal{F}_1$ -mesurable*

- $\Leftrightarrow$  *L'image réciproque de tout Borélien  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}$  est dans  $\mathcal{F}_1$  ;*
- $\Leftrightarrow$  *Je peux dire en  $t = 1$  pour tout Borélien  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}$  si  $X$  est à valeur dans  $\mathcal{B}$  ;*
- $\Leftrightarrow$  *Je peux dire pour tout réel  $r$  si  $X$  est dans  $] - \infty, r[$  ou pas ;*
- $\Leftrightarrow$  *Je connais  $X$  à la date  $t = 1$ .*

**Remarque 2.1.3**  $\mathcal{F}_1$  est la tribu engendrée par  $S_1$  :

$$\boxed{\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1) .}$$

*En effet, par définition, la tribu engendrée par  $S_1$  est l'image réciproque par  $S_1$  des Boréliens de  $\mathbb{R}$ , i.e.  $\{S_1^{-1}(\mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ . C'est la plus petite tribu qui rende  $S_1$  mesurable. Pour tout Borélien  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}$ ,*

- *si  $uS_0$  et  $dS_0$  sont dans  $\mathcal{B}$ , on a  $S_1^{-1}(\mathcal{B}) = \Omega$ ,*
- *si juste  $uS_0$  est dans  $\mathcal{B}$ , on a  $S_1^{-1}(\mathcal{B}) = \omega_u$ ,*
- *si juste  $dS_0$  est dans  $\mathcal{B}$ , on a  $S_1^{-1}(\mathcal{B}) = \omega_d$ ,*
- *et si aucun des 2 n'est dans  $\mathcal{B}$ , on a  $S_1^{-1}(\mathcal{B}) = \emptyset$ .*

*Donc  $\mathcal{F}_1$  est bien la tribu engendrée par  $S_1$  se qui se réécrit :*

$$\boxed{\text{"Connaître } S_1 \text{ est équivalent à connaître tout élément } \mathcal{F}_1\text{-mesurable"}}$$



**Définition 2.1.1** *Un produit dérivé (ou actif contingent) est une v.a.  $\mathcal{F}_1$ -mesurable.*

La valeur d'un produit dérivé dépend de l'état du monde réalisé à la date  $t = 1$  et de manière équivalente, tout produit dérivé s'écrit comme une fonction mesurable  $\phi$  de  $S_1$ .

**Proposition 2.1.1** *Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Alors,  $Y$  est  $\sigma(X)$ -mesurable ssi elle est de la forme  $f(X)$  avec  $f$  une application mesurable (borélienne).*

**Démonstration :** Si  $Y = f(X)$ , alors, pour tout Borélien  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}$ , on a

$$f(X)^{-1}(\mathcal{B}) = X^{-1}(f^{-1}(\mathcal{B})) \in \sigma(X) .$$

Réciproquement, si  $Y$  est l'indicatrice d'un ensemble  $\mathcal{A}$  qui est  $\sigma(X)$ -mesurable, on a :

$$Y = \mathbf{1}_{\mathcal{A}} = \mathbf{1}_{X^{-1}(\mathcal{B})} = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}(X) ,$$

et  $f = \mathbf{1}_{\mathcal{B}}$  convient. Si  $Y$  est une somme finie d'indicatrice  $\mathbf{1}_{\mathcal{A}_i}$  avec  $\mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{B}_i)$ , la somme des  $\mathbf{1}_{\mathcal{B}_i}$  convient. Si  $Y$  est positive, elle s'écrit comme limite croissante de  $Y_n$ , sommes d'indicatrices qui donc s'écrivent  $f_n(X)$  et  $f = \overline{\lim} f_n$  convient. (cette fonction peut valoir  $+\infty$  mais pas en des points atteints par  $X$ ). Si  $Y$  est de signe quelconque, on la décompose en sa partie positive et sa partie négative et l'on approche les deux séparément.  $\square$

Par exemple, le call est donc un produit dérivé  $\phi(S_1)$  avec  $\phi : x \mapsto (x - K)^+$

Notre problème est d'évaluer le prix à la date  $t = 0$  d'un produit dérivé. On va donc essayer de créer un portefeuille de duplication de notre produit dérivé, i.e. une stratégie d'investissement autofinçante dans l'actif risqué et dans l'actif sans risque. L'hypothèse d'AOA nous indiquera alors que ces deux stratégies qui ont même valeur en  $t = 1$  ont même valeur en  $t = 0$ , ce qui nous donnera la valeur en 0 de notre produit dérivé.

## 2.2 Stratégie de Portefeuille simple

**Définition 2.2.1** *Une stratégie de portefeuille simple  $X^{x,\Delta}$  est la donnée d'un capital initial  $x$  et d'une quantité d'actif risqué  $\Delta$ .*

Le portefeuille ne subit aucune rentrée ou sortie d'argent. La stratégie de portefeuille simple consiste en l'achat à la date 0 de  $\Delta$  actifs risqués et de  $x - \Delta S_0$  actifs sans-risques telle que la valeur en 0 du portefeuille est :

$$X_0^{x,\Delta} = \Delta S_0 + (x - \Delta S_0) 1 = x .$$

Sa valeur en  $t = 1$  est donc donnée par :

$$\begin{aligned} X_1^{x,\Delta} &= \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R \\ &= xR + \Delta(S_1 - S_0R). \end{aligned}$$

Cette stratégie est autofinancante car l'on n'apporte ni de retire d'argent à aucun instant entre  $t = 0$  et  $t = 1$ . On l'appelle stratégie de portefeuille simple, car elle ne comporte que des actifs de base du marché : l'actif sans risque et l'actif risqué.

**Théorème 2.2.1** *Tout produit dérivé  $C$  est duplicable par une stratégie de portefeuille simple  $(x, \Delta)$  (On dit que le marché est **complet**).*

**Démonstration :** Considérons un produit dérivé  $C$ . En  $t = 1$ , il prend la valeur  $C_1^u$  dans l'état "up" et  $C_1^d$  dans l'état "down". On cherche un couple  $(x, \Delta)$  vérifiant :

$$\begin{cases} C_1^u = \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R = xR + (u - R)\Delta S_0 \\ C_1^d = \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R = xR + (d - R)\Delta S_0 \end{cases}$$

C'est un système à deux équations et deux inconnues dont la solution est donnée par :

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u - d)S_0} \left( = \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d} \right) \quad \text{et} \quad x = \frac{1}{R} \left( \frac{R - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - R}{u - d} C_1^d \right).$$

□

Donc, sous l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, la définition économique du prix d'un produit dérivé en  $t = 0$  est donnée par :

$$C_0 = \frac{1}{R} \left( \frac{R - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - R}{u - d} C_1^d \right).$$

Le prix du produit dérivé s'écrit comme une somme pondérée de ses valeurs futures. Etudions plus en détail comment s'exprime la valeur en 0 d'une stratégie de portefeuille simple en fonction de ses valeurs finales.

## 2.3 Probabilité risque neutre

**Définition 2.3.1** *Une **opportunité d'arbitrage simple** est une stratégie de portefeuille simple qui, partant d'une richesse nulle en  $t = 0$ , est en  $t = 1$  toujours positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive. C'est la donnée de  $\Delta \in \mathbb{R}$  tel que*

$$\boxed{X_1^{0,\Delta} \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}[X_1^{0,\Delta} > 0] > 0}$$

L'absence d'opportunités d'arbitrage simple (AOA') (sur stratégie de portefeuille simple) s'écrit :

$$\boxed{\forall \Delta \in \mathbb{R}, \quad \left\{ X_1^{0,\Delta} \geq 0 \Rightarrow X_1^{0,\Delta} = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s} \right\}}$$

**Proposition 2.3.1** *L'hypothèse AOA' implique la relation  $d < R < u$ .*

**Démonstration :** Supposons  $d \geq R$ . Une stratégie d'arbitrage est alors donnée par l'achat d'un actif risqué en  $t = 0$  ( $\Delta = 1$ ) car la valeur du portefeuille en  $t = 1$  est

- dans l'état "up",  $X_1^{0,1} = S_0(u - R) > 0$ ,
- dans l'état "down",  $X_1^{0,1} = S_0(d - R) \geq 0$ .

Supposons  $u \leq R$ , alors une stratégie d'arbitrage est donnée par la vente d'un actif risqué en  $t = 0$  ( $\Delta = -1$ ). En effet, la valeur du portefeuille est

- dans l'état "up",  $X_1^{0,-1} = S_0(R - u) \geq 0$ ,
- dans l'état "down", est  $X_1^{0,-1} = S_0(R - u) > 0$ . □

**Remarque 2.3.1** *Pour créer un arbitrage, on a de nouveau acheté celui qui rapporte le plus et vendu celui qui rapporte le moins. Finalement, si l'une des inégalités dans  $d < R < u$  n'était pas vérifiée, un des actifs rapporterait toujours plus que l'autre et l'hypothèse d'AOA' ne serait plus vérifiée.*

Introduisons  $\tilde{X}$ , la **valeur actualisée** du portefeuille  $X$  définie pour  $i = 0, 1$  par :

$$\boxed{\tilde{X}_i^{x,\Delta} := \frac{X_i^{x,\Delta}}{R^i} .}$$

On a alors  $\tilde{X}_0^{x,\Delta} = x$  et  $\tilde{X}_1^{x,\Delta} = \Delta \tilde{S}_1 + (x - \Delta S_0)$  et la condition d'autofinancement du portefeuille se réécrit en terme de portefeuille actualisé de la manière suivante :

$$\boxed{\tilde{X}_1^{x,\Delta} - \tilde{X}_0^{x,\Delta} = \Delta(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0) .}$$

**Définition 2.3.2** *On appelle **probabilité risque neutre** toute probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  qui rende martingale toute stratégie autofinancante simple réactualisée , i.e. telle que :*

$$\tilde{X}_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_1^{x,\Delta}] \quad \text{ou de manière équivalente} \quad X_0 = \frac{1}{R} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_1^{x,\Delta}] .$$

**Remarque 2.3.2** *Deux probabilités sont dites équivalentes lorsqu'elles ont les même ensembles négligeables, i.e. qu'elles chargent les mêmes états du monde ( i.e. qu'elles ont chacune une densité de Radon-Nikodym l'une par rapport à l'autre). Ici, cela signifie simplement que  $\mathbb{Q}(\omega_d) > 0$  et  $\mathbb{Q}(\omega_u) > 0$ .*

**Remarque 2.3.3** Dire que  $\tilde{X}^{x,\Delta}$  est une martingale sous  $\mathbb{Q}$  signifie que l'espérance de ses valeurs futures est égale à elle même, autrement dit que ce portefeuille est un jeu équitable (nous verrons une définition plus générale de la notion de martingale au chapitre suivant).

**Proposition 2.3.2** Si  $d < R < u$ , alors il existe une probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ .

**Démonstration :** Prenons un portefeuille autofinçant  $(x, \Delta)$ , et notons pour simplifier  $X_1^u$  et  $X_1^d$  ses valeurs en  $t = 1$  dans les états "up" et "down". Alors, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} X_1^u &= \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R &= xR + (u - R)\Delta S_0 \\ X_1^d &= \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R &= xR + (d - R)\Delta S_0 \end{cases}$$

Nous obtenons le même système que précédemment et l'on obtient :

$$x = \frac{1}{R} \left( \frac{u - R}{u - d} X_1^d + \frac{R - d}{u - d} X_1^u \right).$$

Introduisons donc la probabilité  $\mathbb{Q}$  définie sur  $\Omega$  par :

$$\mathbb{Q}(\omega_u) := \frac{R - d}{u - d} := q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(\omega_d) := \frac{u - R}{u - d} = 1 - q.$$

Comme  $d < R < u$ ,  $q \in ]0, 1[$  et  $\mathbb{Q}$  est bien une probabilité et elle est équivalente à  $\mathbb{P}$ . Notre équation se réécrit alors :

$$X_0 = x = \frac{1}{R} \left( \mathbb{Q}(\omega_d) X_1^d + \mathbb{Q}(\omega_u) X_1^u \right) = \frac{1}{R} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_1^{x,\Delta}].$$

□

**Remarque 2.3.4** Le terme "risque neutre" provient de la théorie économique : si les intervenants n'ont pas d'aversion au risque, ils vont s'accorder pour évaluer la valeur d'un portefeuille comme l'espérance actualisée des flux qu'il génère. L'introduction de cette probabilité permet de faire comme si les agents étaient neutres au risque, mais attention ce n'est pas le cas !!!

**Proposition 2.3.3** S'il existe une probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ , alors il y a AOA'.

**Démonstration :** Soit  $\Delta \in \mathbb{R}$  tel que  $X_1^{0,\Delta} \geq 0$ . Comme  $\mathbb{Q}$  est une probabilité risque neutre, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1^{0,\Delta}] = R \cdot 0 = 0,$$

et  $X_1^{0,\Delta}$  est une variable aléatoire positive d'espérance nulle donc elle est nulle  $\mathbb{Q}$  p.s., et, comme  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  sont équivalentes (elles ont les mêmes négligeables),  $\mathbb{P}(X_1^{0,\Delta} > 0) = 0$ .  $\square$

Nous avons finalement montré que

$$AOA' \Rightarrow d < R < u \Rightarrow \text{il existe une proba risque neutre} \Rightarrow AOA',$$

et donc toutes ces implications sont des équivalences :

$$AOA' \Leftrightarrow d < R < u \Leftrightarrow \text{il existe une proba risque neutre}$$

## 2.4 Evaluation et couverture d'un produit dérivé

Comme tout produit dérivé est duplicable par une stratégie de portefeuille simple et que la valeur réactualisée de toute stratégie de portefeuille simple est martingale sous la probabilité risque neutre, en AOA, le prix du produit dérivé est donné par :

$$C_0 = \frac{1}{R} (q C_1^d + (1 - q) C_1^u) = \frac{1}{1 + r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[C_1]$$

**Remarque 2.4.1** La probabilité risque neutre n'est pas reliée aux probabilités historiques  $p$  de monter ou de descendre  $1 - p$ , et donc

$$\text{"Le prix d'une option est indépendant de la tendance réelle } p \text{ du sous-jacent"}$$

Ceci s'explique en partie par le fait que le sous-jacent fait partie du portefeuille de duplication du produit dérivé.

**Remarque 2.4.2** Comme tout produit dérivé est duplicable, la valeur réactualisée de tout produit dérivé est martingale sous la probabilité risque neutre.

**Remarque 2.4.3** On a juste besoin de connaître  $r$ ,  $u$  et  $d$ , pour trouver le prix du produit dérivé, mais encore faut-il estimer les paramètres. Connaître  $u$  et  $d$  revient à connaître ce que l'on nommera par la suite la volatilité de l'actif.

**Remarque 2.4.4** Dans le portefeuille de couverture de l'option, la quantité d'actif risqué est donnée par :

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u - d)S_0} \left( = \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d} \right)$$

qui s'apparente à la variation du prix de l'option en réponse à la variation du prix du sous-jacent.

**Proposition 2.4.1** *Comme le marché est complet (tout actif est duplicable par une stratégie de portefeuille simple), il y a unicité de la probabilité risque neutre.*

**Démonstration :** En effet, prenons deux probabilités risque neutre  $\mathbb{Q}_1$  et  $\mathbb{Q}_2$ . Pour tout  $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$  est un produit dérivé car il est  $\mathcal{F}_1$ -mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille autofinçant  $(x, \Delta)$  et l'on a

$$\mathbb{Q}_1(\mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbf{1}_{\mathcal{B}}] = Rx = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[\mathbf{1}_{\mathcal{B}}] = \mathbb{Q}_2(\mathcal{B}).$$

Donc  $\mathbb{Q}_1$  et  $\mathbb{Q}_2$  sont indistinguables. □

**Exemple : Pricing d'un call et d'un put à la monnaie**

Prenons  $S_0 = 100$ ,  $r = 0.05$ ,  $d = 0.9$  et  $u = 1.1$ .

**1.** Quel est le prix et la stratégie de couverture d'un call à la monnaie i.e.  $K = S_0 = 100$  ?

On construit la probabilité risque neutre :

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = 0.75.$$

On en déduit le prix et la stratégie de couverture :

$$C_0 = \frac{.75 * 10 + .25 * 0}{1.05} = \frac{7.5}{1.05} \sim 7.14 \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u - d)S_0} = \frac{10 - 0}{20} = 0.5$$

=> stratégie : achat de 1/2 actif risqué et placement de  $(7.14 - 50)$  dans l'actif sans risque.

**2.** Qu'en est-il du Put à la monnaie ?

Connaissant la probabilité risque neutre, on calcule le prix et la stratégie de couverture :

$$P_0 = \frac{.75 * 0 + .25 * 10}{1.05} = \frac{2.5}{1.05} \sim 2.38 \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{P_1^u - P_1^d}{(u - d)S_0} = \frac{0 - 10}{20} = -0.5$$

=> stratégie : vente de 1/2 actif risqué et placement de  $(50 - 2.38)$  dans l'actif sans risque.

**3.** Vérifie t'on la relation de parité call put ?

$$C_0 - P_0 = \frac{7.5}{1.05} - \frac{2.5}{1.05} = \frac{5}{1.05} = 100 - \frac{100}{1.05} = 100 - \frac{100}{R} = S_0 - KB(0, T)$$

□

## Chapitre 3

# Modèle binomial à n périodes

L'étude de ce modèle, nommé également modèle de Cox Ross Rubinstein, va permettre de ré-obtenir des résultats similaires au cas du modèle à 1 période et à donner de bonnes intuitions sur les résultats que l'on obtiendra beaucoup plus difficilement dans l'étude des modèles en temps continu.

### 3.1 "Rappels" de probabilité : Processus discret et Martingale

**Définition 3.1.1** On appelle **processus discret**  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$  toute collection de  $n$  v.a.

**Définition 3.1.2** On appelle **filtration**  $(\mathcal{F}_k)_{1 \leq k \leq n}$  toute collection croissante de tribu. i.e.

$$\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_{k+1}, \quad \forall k \leq n.$$

**Définition 3.1.3** le processus discret  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$ , est dit **adapté** à la filtration  $\mathcal{F}$  (ou  $\mathcal{F}$ -adapté) si pour tout  $k \leq n$ ,  $Y_k$  est  $\mathcal{F}_k$ -mesurable.

**Proposition 3.1.1** Si  $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$  est  $\mathcal{F}$ -adapté, la v.a.  $Y_i$  est  $\mathcal{F}_k$ -mesurable pour tout  $i \leq k$ .

**Démonstration :** En terme d'information, si  $Y_i$  est connue avec l'information donnée par  $\mathcal{F}_i$ , elle sera connue avec l'information donnée par  $\mathcal{F}_k \supset \mathcal{F}_i$ . En effet, l'image réciproque de tout Borélien  $\mathcal{B}$  par  $Y_i$  est dans  $\mathcal{F}_i$  et donc dans  $\mathcal{F}_k$ .  $\square$

**Définition 3.1.4** La **filtration engendrée** par un processus discret  $(Y_i)_{0 \leq i \leq k}$  est la plus petite filtration qui rende ce processus  $\mathcal{F}$ -adapté. Par analogie avec les tribus engendrées,

$$\mathcal{F}_k^Y := \sigma(Y_1, \dots, Y_k).$$

**Remarque 3.1.1** Suite à une proposition vue dans le chapitre précédent, une variable aléatoire est  $\mathcal{F}_k^Y$ -mesurable si et seulement si elle s'écrit comme une fonction (borélienne) de  $(Y_1, \dots, Y_k)$ .

**Définition 3.1.5** Un processus discret  $(M_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une  **$\mathcal{F}$ -martingale** sous  $\mathbb{P}$  s'il vérifie :

- $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[|M_i|] < \infty \quad \forall i \leq n$ ,
- $M$  est  $\mathcal{F}$ -adapté,
- $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_{i+1}/\mathcal{F}_i] = M_i$ .

**Remarque 3.1.2** Si l'égalité précédente est remplacée par une inégalité on parle de **sur-martingale** ( $\leq$ ) ou de **sous-martingale** ( $\geq$ ). Une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale un jeu perdant, et une sous-martingale un jeu gagnant.

**Remarque 3.1.3** Si  $M$  est une  **$\mathcal{F}$ -martingale** sous  $\mathbb{P}$ , alors,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_k/\mathcal{F}_i] = M_i \quad \forall i \leq k$$

et en particulier on a :  $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_p] = M_0$ .

## 3.2 Modélisation du marché

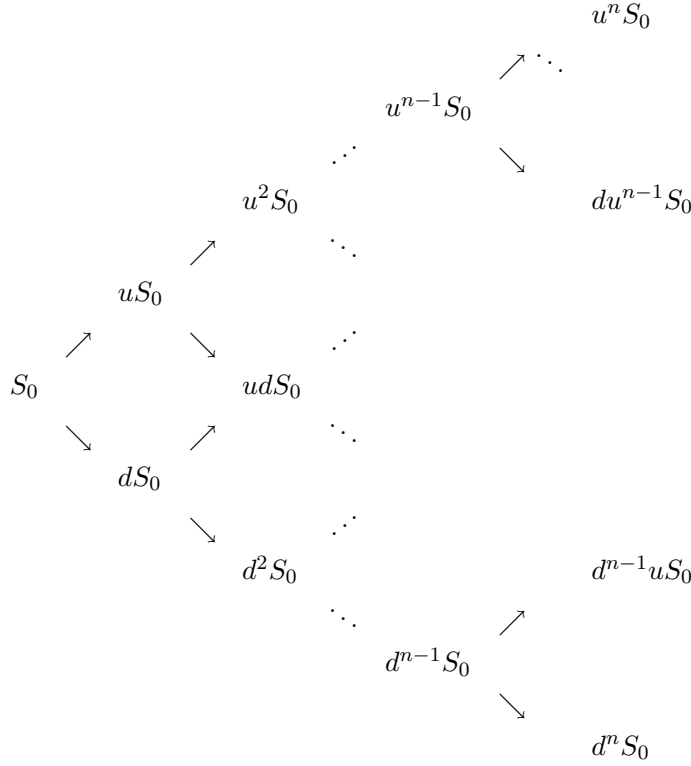
On reprend la même modélisation que dans le chapitre précédent mais dans un monde à  $n$  périodes. On considère un intervalle de temps  $[0, T]$  divisé en  $n$  périodes  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Le marché est composé de 2 actifs,

- un **actif sans risque**  $S_t^0$  :

$$1 \rightarrow (1+r) \rightarrow (1+r)^2 \rightarrow \dots \rightarrow (1+r)^n$$

- et un **actif risqué**  $S_t$  :





L'arbre est **recombinant** : à l'instant  $t_i$ , l'actif peut prendre  $i+1$  valeurs différentes.

**Ensemble des états du monde :**  $\Omega$  est l'ensemble des trajectoires possibles pour l'actif risqué. C'est l'ensemble des  $n$ -uplets  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  tel que chaque  $\omega_i$  prenne deux valeurs possibles  $\omega_i^d$  ou  $\omega_i^u$ .

$$\Omega := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \forall i \leq n \quad \omega_i = \omega_i^d \text{ ou } \omega_i = \omega_i^u\}$$

On se donne une **probabilité historique**  $\mathbb{P}$  de survenance de chacun des états du monde et l'on suppose que la probabilité de monter et de descendre est la même dans tout noeud de l'arbre, i.e. pour tout  $i$

$$\mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

**Hypothèse cruciale :**

Les rendements  $Y_i := \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$  sont indépendants.

Par indépendance des tirages, on en déduit donc :

$$\mathbb{P}(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^u\}} \cdot (1-p)^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}$$

et l'on peut écrire de manière équivalente la valeur de l'actif à l'instant  $t_i$  comme :

$$S_{t_i} = S_0 \cdot \prod_{k=1}^i Y_k,$$

avec les  $Y_k$  des variables aléatoires **indépendantes** sur  $\Omega$  qui prennent la valeur  $u$  avec une probabilité  $p$  et la valeur  $d$  avec une probabilité  $1 - p$ . Alors on a bien sûr :

$$\mathbb{P}(Y_i = u) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y_i = d) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

L'information disponible à tout date  $t_i$  est donnée par la **filtration**  $(\mathcal{F}_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$  :

$$\mathcal{F}_{t_i} := \sigma(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i) = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_i) = \sigma(S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_i})$$

Une variable aléatoire  $\mathcal{F}_{t_i}$ -mesurable est donc naturellement une variable donnée par toute l'information accumulée jusqu'à l'instant  $t_i$ . Elle s'écrit donc comme un fonction de  $(S_{t_1}, \dots, S_{t_i})$  ou de manière équivalente comme une fonction de  $(Y_1, \dots, Y_i)$ .

**Définition 3.2.1** *Un **produit dérivé** (ou actif contingent)  $C_T$  est une variable aléatoire  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et s'écrit donc, avec  $\phi$  une application borélienne, sous la forme*

$$C_T = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}).$$

On cherche comme précédemment à trouver le prix et le portefeuille de couverture d'un produit dérivé qui seront encore donnés par le prix et la stratégie de son portefeuille de duplication. Avant de montrer que l'actif est duplicable, étudions les propriétés des stratégies de portefeuille simple dans ce modèle.

### 3.3 Stratégie de portefeuille

**Définition 3.3.1** *Une **stratégie de portefeuille simple**  $X^{(x, \Delta)}$  est la donnée d'un capital initial  $x$  et d'un processus discret  $(\Delta_0, \dots, \Delta_{n-1})$  qui est  $\mathcal{F}$ -adapté.*

La stratégie consiste à tout instant  $t_i$  en l'investissement dans une quantité  $\Delta_i$  d'actif risqué. Le processus  $\Delta$  est  $\mathcal{F}_-$ adapté, car **la quantité d'argent à investir dans l'actif à l'instant  $t_i$  est déterminée avec l'information accumulée jusqu'à l'instant  $t_i$ .**

Le portefeuille ne subit aucune entrée ou sortie d'argent (**condition d'autofinancement**). Entre les instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$ , le portefeuille  $X^{x, \Delta}$  est constitué d'une quantité  $\Delta_i$  d'actifs risqué et d'une quantité  $(X_i^{x, \Delta} - \Delta_i S_{t_i}) / (1 + r)^i$  actifs sans-risque. La valeur du portefeuille à l'instant  $t_i$  est donc donnée par :

$$X_{t_i}^{x, \Delta} = \Delta_i S_{t_i} + \frac{(X_{t_i}^{x, \Delta} - \Delta_i S_{t_i})}{(1 + r)^i} (1 + r)^i.$$

Or, sur chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1})$ , le portefeuille ne bénéficie d'aucune entrée ou sortie d'argent, donc :

$$X_{t_{i+1}}^{x,\Delta} = \Delta_i \mathbf{S}_{t_{i+1}} + \frac{(X_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i} (1+r)^{i+1}$$

Donc, en introduisant les **processus actualisés** :

$$\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} := \frac{X_{t_i}^{x,\Delta}}{(1+r)^i} \text{ et } \tilde{S}_{t_i} := \frac{S_{t_i}}{(1+r)^i},$$

ces deux relations se réécrivent :

$$\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i \tilde{\mathbf{S}}_{t_i} + (\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i \tilde{S}_{t_i}) \mathbf{1}, \text{ et } \tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} = \Delta_i \tilde{S}_{t_{i+1}} + (\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i \tilde{S}_{t_i}).$$

Par différence, on obtient donc la relation que l'on appelle **relation d'autofinancement** :

$$\tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} - \tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i (\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i}),$$

qui se réécrit également :

$$\tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} = x + \sum_{k=0}^i \Delta_k (\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}).$$

**Remarque 3.3.1** *Le processus valeur du portefeuille  $X^{x,\Delta}$  est bien sûr  $\mathcal{F}$ -adapté.*

### 3.4 Arbitrage et Probabilité risque neutre

**Définition 3.4.1** *Une **opportunité d'arbitrage simple** est une stratégie de portefeuille simple qui, partant d'une richesse nulle en  $t = 0$  est en  $T = t_n$  toujours positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive. C'est donc la donnée de  $\Delta \in \mathbb{R}$  satisfaisant*

$$X_T^{0,\Delta} \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}[X_T^{0,\Delta} > 0] > 0$$

L'absence d'opportunités d'arbitrage simple (AOA') (sur stratégie de portefeuille simple) s'écrit donc :

$$\forall \Delta \in \mathbb{R}, \quad \left\{ X_T^{0,\Delta} \geq 0 \Rightarrow X_T^{0,\Delta} = 0 \quad \mathbb{P} \text{ p.s.} \right\}$$

**Proposition 3.4.1** *Sous l'hypothèse d'AOA', on a  $d < 1 + r < u$ .*

**Démonstration :** Supposons par exemple  $1 + r \leq d$  et considérons la stratégie de portefeuille  $(0, \Delta)$ , où  $\Delta_0 = 1$  et  $\Delta_i = 0$  pour  $i \geq 1$  : on achète l'actif risqué en  $t_0$ , on le revend en  $t_1$  et on place le gain dans l'actif sans risque. Cette stratégie est  $\mathcal{F}$ -adaptée car déterministe et la valeur du portefeuille en  $T = t_n$  est donnée par :

$$\tilde{X}_T^{0, \Delta} = 0 + \sum_{k=0}^i \Delta_k (\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}) = \tilde{S}_{t_1} - \tilde{S}_{t_0}$$

Comme  $S_{t_1}$  peut prendre 2 valeurs, la valeur du portefeuille en  $T$  peut prendre 2 valeurs qui sont

$$(1+r)^n S_0 \left( \frac{u}{1+r} - 1 \right) > 0, \quad \text{et} \quad (1+r)^n S_0 \left( \frac{d}{1+r} - 1 \right) \geq 0$$

avec respectivement des probabilités  $p$  et  $1-p$  toutes deux strictement positives si bien que notre stratégie crée un arbitrage. Le cas  $u \leq 1+r$  est traité similairement en vendant l'actif risqué ( $\Delta_0 = -1$ ).  $\square$

**Remarque 3.4.1** *Comme dans le modèle à une période, si  $R > u$  l'actif sans risque rapporte toujours plus que le l'actif risqué donc arbitrage, et si  $R < d$ , l'actif risqué rapporte toujours plus que l'actif sans risque, donc arbitrage...*

**Remarque 3.4.2** *En fait, sous l'hypothèse AOA', il y a AOA' sur tous les sous-arbres. Par contraposée, si il existe une stratégie d'arbitrage sur un sous arbre, il faut considérer la stratégie globale qui ne fait rien si elle ne croise pas le noeud de départ du sous-arbre, et qui utilise la stratégie gagnante jusqu'à la fin du sous arbre puis place les gains dans l'actif sans risque sinon. Comme la probabilité de passer par chaque noeud est strictement positive, cette stratégie est un arbitrage.*

En s'inspirant des résultats du modèle à 1 période, introduisons la **probabilité  $\mathbb{Q}$  sur  $\Omega$**  identique sur chaque sous arbre à une période à celle obtenue dans l'étude du modèle à une période. On définit donc  $\mathbb{Q}$  de la manière suivante :

$$\mathbb{Q}(\omega_1, \dots, \omega_n) = q^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^u\}} (1-q)^{\#\{j, \omega_j = \omega_j^d\}} \quad \text{avec} \quad q := \frac{(1+r) - d}{u - d}$$

**Remarque 3.4.3** *On a alors les relations suivantes :*

$$\mathbb{Q}(S_{t_i} = u S_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = u) = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(S_{t_i} = d S_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = d) = 1 - q$$

**Définition 3.4.2** *Une **probabilité risque neutre** est une probabilité équivalente à la probabilité historique  $\mathbb{P}$  sous laquelle toute stratégie de portefeuille simple réactualisée est martingale.*

On se propose de montrer que  $\mathbb{Q}$  est une probabilité risque neutre.

**Proposition 3.4.2**  $\tilde{S}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale sous  $\mathbb{Q}$ .

**Démonstration :**  $\tilde{S}$  est intégrable  $\mathcal{F}$ -adapté et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t_{k+1}}/\mathcal{F}_{t_k}] &= \frac{1}{1+r} (q u \tilde{S}_{t_k} + (1-q) d \tilde{S}_{t_k}) \\ &= \frac{1}{1+r} \left( \frac{(1+r)-d}{u-d} u + \frac{u-(1+r)}{u-d} d \right) \tilde{S}_{t_k} \\ &= \tilde{S}_{t_k} .\end{aligned}$$

□

**Proposition 3.4.3** La valeur réactualisée  $\tilde{X}^{x,\Delta}$  de toute stratégie de portefeuille simple  $(x, \Delta)$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale sous  $\mathbb{Q}$ .

**Démonstration :**  $\tilde{X}^{x,\Delta}$  est intégrable  $\mathcal{F}$ -adapté et

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{X}_{k+1}^{x,\Delta} - \tilde{X}_k^{x,\Delta} / \mathcal{F}_{t_k}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Delta_k (\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}) / \mathcal{F}_{t_k}] = \Delta_k \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}) / \mathcal{F}_{t_k}] = 0$$

□

**Remarque 3.4.4** Ce résultat nous indique que si les actifs de base réactualisés sont martingales sous une certaine probabilité, les stratégies de portefeuilles simples le sont aussi. Ceci est du à la condition d'autofinancement et surtout au fait que **la quantité d'actif risqué entre  $t_k$  et  $t_{k+1}$  est  $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurable.** (On dit que la valeur actualisée du portefeuille est une transformée de martingale). Donc, on vient de voir que :

"Tout actif de base réactualisé est martingale sous une probabilité  $\mathbb{Q}$ "

$\Updownarrow$

"Toute stratégie de portefeuille simple réactualisée est martingale une probabilité  $\mathbb{Q}$ "

**Théorème 3.4.1** Si  $d < 1+r < u$ , il existe une probabilité risque neutre ( $\mathbb{Q}$ ).

**Démonstration :** Nous venons de voir que  $\mathbb{Q}$  rendait toute stratégie de portefeuille simple réactualisée est martingale. De plus  $\mathbb{Q}$  est bien une probabilité qui est équivalente à  $\mathbb{P}$ . En effet, comme  $d < R < u$ ,  $q$  et  $(1-q)$  sont dans  $]0, 1[$  et donc chaque  $\mathbb{Q}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  est dans  $]0, 1[$  et tous les états du monde ont une probabilité strictement positive d'arriver. □

La valeur à tout date  $t_i$  d'une stratégie de portefeuille simple de valeur finale  $X_T^{x,\Delta}$  s'écrit :

$$X_{t_i}^{x,\Delta} = \frac{1}{(1+r)^{n-i}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_T^{x,\Delta} / \mathcal{F}_i]$$

Donc, si l'on arrive à construire un portefeuille de couverture pour tout produit dérivé, en AOA, sa valeur à tout instant  $t_i$  sera donnée par l'espérance sous la probabilité risque-neutre de son flux final actualisé. Avant cela, remarquons que l'existence d'une probabilité risque neutre va encore impliquer l'hypothèse AOA' comme dans le modèle à une période.

**Proposition 3.4.4** *L'existence d'une probabilité risque neutre implique l'hypothèse AOA'.*

**Démonstration :** Exactement comme dans le cas du modèle à une période,

$$X_T^{0,\Delta} \geq 0 \text{ et } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_T^{0,\Delta}] = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(X_T^{0,\Delta} = 0) = 1$$

donc  $X_T^{0,\Delta}$  est nulle  $\mathbb{Q}$ -p.s. et donc  $\mathbb{P}$ -p.s. □

On a donc, comme dans le modèle à une période :

$$AOA' \Leftrightarrow d < R < u \Leftrightarrow \text{il existe une probabilité risque neutre}$$

### 3.5 Duplication d'un produit dérivé

**Théorème :**

$$\boxed{\text{Tout produit dérivé } C \text{ est duplicable par une stratégie de portefeuille simple } (x, \Delta)}$$

Le marché est dit **complet**.

#### ANALYSE DU PROBLEME

Nous recherchons une stratégie de portefeuille simple de duplication  $(x, \Delta)$  de notre produit dérivé de valeur  $C_T$  en  $T$ . Comme  $C_T$  est  $\mathcal{F}_{t_n}$ -adapté, la valeur du produit dérivé se réécrit  $\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$  et on cherche donc  $(x, \Delta)$  tel que :

$$X_{t_n}^{x,\Delta} = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$$

Comme nous venons de le voir, toute stratégie de portefeuille simple est martingale sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  donc la valeur  $X_{t_k}^{x,\Delta}$  du portefeuille de duplication satisfait :

$$X_{t_k}^{x,\Delta} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) / \mathcal{F}_{t_k}]$$

Donc, la richesse initiale  $x$  de notre portefeuille de duplication est nécessairement :

$$x := \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})]$$

Remarquons que  $\frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})/\mathcal{F}_{t_k}]$ , en tant que variable aléatoire  $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurable, se réécrit sous la forme  $V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_k})$  avec  $V_k$  une fonction déterministe (i.e. non aléatoire). On note donc :

$$V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) := \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})/\mathcal{F}_{t_k}]$$

Dans le calcul du portefeuille à une période, nous avons vu que la quantité d'actif risqué du portefeuille de duplication s'apparentait à la variation de la valeur du produit dérivé en réponse à la variation du sous-jacent. Nous proposons donc le processus de couverture  $\Delta$  défini pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  par :

$$\Delta_k := \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u.S_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d.S_{t_k})}{u.S_{t_k} - d.S_{t_k}}.$$

L'investissement initial  $x$  est déterministe et, pour  $k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\Delta_k$  est  $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurable en tant que fonction de  $(S_{t_1}, \dots, S_{t_k})$ . Donc  $\Delta$  est  $\mathcal{F}$ -adapté et  $(x, \Delta)$  définit bien une stratégie de portefeuille simple.

## RESOLUTION DU PROBLEME

On se propose donc de montrer que la stratégie de portefeuille  $(x, \Delta)$  définie précédemment duplique notre produit dérivé, soit :  $X_{t_n}^{x, \Delta} = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) = V_n(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$ . Pour cela, montrons, par récurrence sur  $k \in \{1, \dots, n\}$ , la relation :

$$X_{t_k}^{x, \Delta} = V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_k})$$

Par construction, la relation est vraie pour  $k = 0$ , montrons donc " $k \Rightarrow k+1$ ".

Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned}
X_{t_k}^{x,\Delta} &= V_k(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) / \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{(1+r)^{n-(k+1)}} \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) / \mathcal{F}_{t_{k+1}} \right] / \mathcal{F}_{t_k} \right] \\
&= \frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_{k+1}}) / \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{(1+r)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u S_{t_k}) \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=u\}} + V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d S_{t_k}) \mathbf{1}_{\{X_{k+1}=d\}} / \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{(1+r)} \{ \mathbb{Q}(X_{k+1} = u) \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u S_{t_k}) + \mathbb{Q}(X_{k+1} = d) \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d S_{t_k}) \} \\
&= \frac{1}{(1+r)} \{ q \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u S_{t_k}) + (1-q) \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d S_{t_k}) \}.
\end{aligned}$$

La condition d'autofinancement du portefeuille s'écrit :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = \tilde{X}_{t_k}^{x,\Delta} + \Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}).$$

En "désactualisant", on obtient donc

$$\begin{aligned}
X_{t_{k+1}}^{x,\Delta} &= q \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u S_{t_k}) + (1-q) \cdot V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d S_{t_k}) + \\
&\quad \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, u S_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d S_{t_k})}{u S_{t_k} - d S_{t_k}} (S_{t_{k+1}} - (1+r) S_{t_k}).
\end{aligned}$$

En remplaçant  $S_{t_{k+1}}$  par  $Y_{k+1} S_{t_k}$  et  $q$  par  $\frac{1+r-d}{u-d}$ , on en déduit

$$X_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, Y_{k+1} S_{t_k}) \frac{Y_{k+1} - d}{u - d} + V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, d S_{t_k}) \frac{u - Y_{k+1}}{u - d}.$$

Comme  $Y_{k+1}$  ne prend que les valeurs  $d$  ou  $u$ , on vérifie alors

$$X_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, Y_{k+1} S_{t_k}) = V_{k+1}(S_{t_1}, \dots, S_{t_k}, S_{t_{k+1}}),$$

ce qui conclut la récurrence et donc la preuve.  $\square$

### 3.6 Evaluation et couverture d'un produit dérivé

Comme tout produit dérivé est duplicable, on en déduit que, sous AOA, la valeur à tout instant  $t_k$  d'un produit dérivé  $C_T := \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$  est donnée par

$$C_{t_k} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) / \mathcal{F}_{t_k}],$$



et, en particulier, son prix en 0 est donné par

$$C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})].$$

**Proposition 3.6.1** *Comme le marché est complet (tout actif est duplicable par une stratégie de portefeuille simple), il y a unicité de la probabilité risque neutre.*

**Démonstration :** Comme dans le modèle à une période, prenons deux probabilités risque neutre  $\mathbb{Q}_1$  et  $\mathbb{Q}_2$ . Pour tout  $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$  est un produit dérivé car il est  $\mathcal{F}_1$ -mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille autofinçant  $(x, \Delta)$  et l'on a

$$\mathbb{Q}_1(\mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbf{1}_{\mathcal{B}}] = Rx = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[\mathbf{1}_{\mathcal{B}}] = \mathbb{Q}_2(\mathcal{B}).$$

Donc  $\mathbb{Q}_1$  et  $\mathbb{Q}_2$  sont indistinguables.  $\square$

**Remarque 3.6.1** *Comme dans le modèle à une période, le prix de l'actif ne dépend que de la forme du payoff, de  $u$ ,  $r$  et  $d$ . Donc le prix de dépend pas de la proba réelle  $p$  qu'a le prix de monter ou de descendre !!!*

**Remarque 3.6.2** *Nous avons également déterminé le portefeuille de couverture qui permet à tout instant de se couvrir contre les variations de l'option. La quantité d'actif risqué à prendre dans le portefeuille de couverture s'interprète de nouveau comme la variation du prix de l'option en réponse à une variation du cours du sous-jacent. En temps continu, on obtiendra naturellement le portefeuille de duplication comme dérivée de la valeur du produit dérivé par rapport à la valeur du sous-jacent.*

**Comment utiliser ce type d'arbre dans la pratique ?** Si nous considérons un produit dérivé dont la valeur ne dépend que de la valeur finale, on peut calculer sa valeur sur chacun des noeuds à maturité. On revient alors progressivement en arrière dans l'arbre pour passer de ses valeurs aux noeuds de l'instant  $t_{i+1}$  à ses valeurs aux noeuds de l'instant  $t_i$  en actualisant sous la probabilité risque neutre. L'intérêt d'utiliser un arbre recombinaut à  $n$  périodes et que l'on a seulement  $n+1$  valeurs possible en  $T$  au lieu de  $2^n$  si l'arbre n'était pas recombinaut. Pour connaître son prix en 0, on doit donc faire  $n!$  calculs au lieu de  $2^n * 2^{n-1} * \dots * 2 = 2^{n(n+1)/2}$ . Pour  $n = 10$  par exemple on obtient 11 valeurs possibles et  $11! \sim 4 \cdot 10^7$  avec un **arbre recombinaut**, et 2048 valeurs possibles soit  $7 \cdot 10^{19}$  calculs sinon.

**A RETENIR :**

- Le prix de l'actif s'écrit toujours comme l'espérance actualisée de sa valeur

finale sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ .

- La probabilité risque neutre rend les actifs réactualisés martingales et de manière équivalente les stratégies de portefeuille simple réactualisées martingales.

Si l'on fait tendre le nombre  $n$  de périodes vers l'infini, et pour un choix judicieux de la forme de  $u$  et  $d$ , ce modèle converge vers un modèle en temps continu appelé modèle de Black-Scholes (cf TD). Afin de manipuler des objets similaires en temps continu, il nous faut développer la théorie des processus en temps continu que l'on appelle calcul stochastique.

# Chapitre 4

## Calcul stochastique

Dans toute la suite on se place sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

### 4.1 Processus et Martingale

#### 4.1.1 Processus

**Définition 4.1.1** *Un **processus (aléatoire)**  $X$  sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  est une famille de v.a. aléatoires  $(X_t)_{t \in [0, T]}$ . C'est donc une fonction de 2 variables :*

$$X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

**Remarque 4.1.1**  $t \in [0, T]$  représente le temps mais on aurait pu également prendre  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}^2 \dots$  De même, l'espace d'arrivée pourrait être bien plus complexe que  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 4.1.2** *On peut voir un processus comme une fonction qui à  $\omega \in \Omega$  associe une fonction de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $t \mapsto X_t(\omega)$ , appelée **trajectoire** du processus.*

**Définition 4.1.2** *On dit que  $X$  est un **processus continu (p.s.)** si il est continu trajectoire par trajectoire, i.e.  $t \mapsto X_t(\omega)$  est  $C^0$  pour presque tout  $\omega$ .*

#### 4.1.2 Espaces $\mathcal{L}^p$

**Notation :** Pour tout  $p \in \mathbb{R}^+$ , nous noterons :

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ X \text{ v.a. t.q. } \|X\|_p := \mathbb{E}[|X|^p]^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

$$\mathcal{L}^p(\Omega, [0, T]) := \left\{ (\theta_s)_{0 \leq s \leq T} \text{ processus t.q. } \|\theta\|'_p := \mathbb{E} \left[ \int_0^T |\theta_s|^p ds \right]^{1/p} < \infty \right\}$$

**Proposition 4.1.1** *Pour  $p \geq 1$  les espaces  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_p$  et  $\mathcal{L}^p(\Omega, [0, T])$  muni de  $\|\cdot\|'_p$  sont des espaces de Banach (i.e. complets).*

Nous passerons sur la démonstration mais vous avez déjà vu que l'espace  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  était complet et  $\mathcal{L}^p(\Omega, [0, T])$  l'est également pour les mêmes raisons. Au lieu de considérer des fonctions d'une variable  $\omega$ , il suffit de considérer des fonctions de deux variables  $(t, \omega)$ .  $\square$

### 4.1.3 Filtration

**Définition 4.1.3** *Une **Filtration**  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$  est une collection croissante de tribus (sous-tribus de  $\mathcal{A}$ ), i.e.  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \forall s \leq t$ .*

**Remarque 4.1.3**  $\mathcal{F}_t$  représente la quantité d'information disponible à l'instant  $t$ ; il est logique que cette quantité augmente avec le temps.

**Définition 4.1.4** *Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est dit  **$\mathcal{F}$ -adapté** si, pour tout  $t$ , la variable aléatoire  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.*

**Proposition 4.1.2** *Si  $X$  est  $\mathcal{F}$ -adapté, la v.a.  $X_s$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable pour tout  $s \leq t$ .*

**Démonstration** : Le résultat est naturel lorsque l'on raisonne en terme d'information, la tribu  $\mathcal{F}_t$  est plus grande que la tribu  $\mathcal{F}_s$ , donc, si  $X_s$  est connue avec l'information  $\mathcal{F}_s$ , il l'est avec l'information  $\mathcal{F}_t$ . Maintenant, analytiquement, soit  $\mathcal{B}$  un Borélien de  $\mathbb{R}$ , alors l'image réciproque de  $\mathcal{B}$  par  $X_s$ ,  $X_s^{-1}(\mathcal{B})$  est un élément de  $\mathcal{F}_s$  et est donc un élément de  $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_s$ .  $\square$

**Définition 4.1.5** *La **filtration engendrée** par un processus  $X$ , notée  $\mathcal{F}^X$  est la suite croissante de tribus  $\mathcal{F}_t^X$  engendrées par  $(X_s)_{s \leq t}$  i.e.,  $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \leq t)$*

**Remarque 4.1.4**  $\mathcal{F}^X$  est la plus petite filtration qui rende  $X$  adapté.

Une tribu est dite complète lorsqu'elle contient l'ensemble des négligeables  $\mathcal{N}$  de  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  qui est défini par

$$\mathcal{N} := \{N \subset \Omega, \exists A \in \mathcal{A} / N \subset A, \mathbb{P}(A) = 0\}$$

**Définition 4.1.6** *Une filtration  $\mathcal{F}$  est **complète** lorsque tout  $\mathcal{F}_t$  contient l'ensemble des négligeables  $\mathcal{N}$  (ce qui équivaut à  $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$ ).*

**Remarque 4.1.5** Pour compléter une filtration  $\mathcal{F}$ , il suffit de remplacer  $\mathcal{F}_t$  par  $\sigma(A \cup N, (N, A) \in \mathcal{N} \times \mathcal{F}_t)$  ou plus simplement remplacer  $\mathcal{F}_0$  par  $\sigma(A \cup N, (N, A) \in \mathcal{N} \times \mathcal{F}_0)$ . La filtration complétée engendrée par un processus  $X$  est généralement appelée **filtration naturelle** du processus.

Si  $\mathcal{F}$  est complète, à  $t$  fixé, on a

$$X_t = Y_t \text{ p.s.} \quad \Rightarrow \quad \{X_t \text{ } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \Leftrightarrow Y_t \text{ } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\}$$

On montre alors que, si une tribu  $\mathcal{F}_t$  est complète, alors, toujours à  $t$  fixé :

$$\{X_t^n \xrightarrow{p.s.} X_t \text{ et } \forall n, X_t^n \text{ } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\} \quad \Rightarrow \quad \{X_t \text{ } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\}$$

Le résultat reste vrai pour une convergence dans  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  avec  $p \geq 1$ , car on peut alors extraire un sous suite qui converge p.s. vers la même limite et donc la limite reste mesurable :

$$\{X_t^n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} X_t \text{ et } \forall n X_t^n \text{ } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\} \quad \Rightarrow \quad \{X_t \text{ } \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\}$$

Dans toute la suite, nous allons considérer des filtrations complètes  
et parlerons donc de filtration naturelle de processus.

#### 4.1.4 Martingale

**Définition 4.1.7** Un processus aléatoire  $M$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale si

- $M$  est  $\mathcal{F}$ -adapté,
- pour tout  $t \leq T$ ,  $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , i.e.  $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ ,
- $\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s$  pour tout  $s \leq t$ .

Une **sur-martingale** et une **sous-martingale** sont des processus qui vérifient les deux premières propriétés et pour tout  $s \leq t$  respectivement  $\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] \leq M_s$  et  $\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] \geq M_s$ .

**Remarque 4.1.6** une martingale est un jeu équitable, une sur-martingale un jeu perdant, et une sous-martingale un jeu gagnant.

**Proposition 4.1.3** Toute martingale  $M$  vérifie :

$$\forall t \leq T \quad \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0].$$

**Démonstration** : On a pour tout  $t \leq T$ ,  $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_0]] = \mathbb{E}[M_0]$ . □

**Proposition 4.1.4** Soit  $M$  une  $\mathcal{F}$ -martingale et  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **convexe** mesurable, alors si  $\phi(M)$  est intégrable, c'est une sous-martingale.

**Démonstration :**  $\phi(M)$  est intégrable et adapté et l'inégalité de Jensen conditionnelle nous donne :

$$\mathbb{E}[\phi(M_t)/\mathcal{F}_s] \geq \phi(\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s]) = \phi(M_s).$$

□

**Proposition 4.1.5** Soit  $M$  une  $\mathcal{F}$ -martingale de carré intégrable (i.e.  $\mathbb{E}[M_t^2] < \infty$  pour tout  $t$ ), alors, pour  $s \leq t$ , on a :

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s]$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2/\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2/\mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[M_t M_s/\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[M_s^2/\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2/\mathcal{F}_s] - 2M_s \mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] + M_s^2 \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2/\mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

On retrouve donc que  $M^2$  est une  $\mathcal{F}$ -sous-martingale.

□

**Proposition 4.1.6 Stabilité  $\mathcal{L}^p$  des martingales**

Soit  $p \geq 1$  et  $(M^n)$  une suite de  $\mathcal{F}$ -martingales, telles que, pour tout  $n$  et  $t$ ,  $M_t^n \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ . Si, pour tout  $t$  fixé dans  $[0, T]$  la v.a.  $M_t^n$  converge vers la v.a.  $M_t$  au sens de la convergence dans  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ , alors le processus limite  $M$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale et pour tout  $t$ ,  $M_t \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ .

**Démonstration :** Il faut montrer 3 choses :

- (1)  $M$  est  $\mathcal{F}$ -adapté;
  - (2) pour tout  $t \in [0, T]$ ,  $M_t \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  (alors  $M_t \in \mathcal{L}^1(\Omega) \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ );
  - (3) pour  $0 \leq s \leq t \leq T$ , on a :  $\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s$ .
- (1) Pour tout  $n$ ,  $M_t^n$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable, donc  $M_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable. (car la filtration  $\mathcal{F}$  est complète)
- (2) Pour tout  $t$  fixé,  $M_t^n$  converge vers  $M_t$  dans  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ , donc  $M_t$  est dans  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ .
- (3) Pour  $0 \leq s \leq t \leq T$ , on a :

$$\|M_s^n - \mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s]\|_p = \|\mathbb{E}[M_t^n - M_t/\mathcal{F}_s]\|_p \leq \|M_t^n - M_t\|_p \longrightarrow 0$$

Or  $M_s^n - \mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s]$  converge vers  $M_s - \mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s]$  dans  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ , d'où  $\mathbb{E}[M_t/\mathcal{F}_s] = M_s$  p.s.

□

### 4.1.5 Processus Gaussien

**Définition 4.1.8** *Un vecteur de v.a.  $(X_1, \dots, X_n)$  est un **vecteur Gaussien** si et seulement si toute combinaison linéaire des  $X_i$  est Gaussienne (i.e.  $\langle a, X \rangle$  est une v.a. Gaussienne pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$ ).*

Voici deux propositions très utiles dans la manipulation des vecteurs Gaussiens.

**Proposition 4.1.7** *Si le vecteur  $(X_1, X_2)$  est Gaussien, les v.a.  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes si et seulement si  $\text{cov}(X_1, X_2) = 0$ .*

**Proposition 4.1.8** *Tout vecteur de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes est un vecteur Gaussien.*

**Remarque 4.1.7** *Attention, il est possible de trouver des variables aléatoires Gaussiennes non indépendantes de covariance nulle.*

La version continue des vecteurs Gaussiens sont les processus Gaussiens.

**Définition 4.1.9** *Un processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est appelé **processus Gaussien** si pour tout  $n$  et tout  $t_1 \leq \dots \leq t_n$  le vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est Gaussien.*

## 4.2 Mouvement Brownien

### *Historiquement :*

- **1828** : Robert Brown, botaniste observe le mouvement du pollen en suspension dans l'eau.
- **1877** : Delsaux explique que ce mouvement irrégulier est du aux chocs du pollen avec les molécules d'eau (changements incessants de direction),
- **1900** : Louis Bachelier dans sa thèse "Théorie de la spéculation" modélise les cours de la bourse comme des processus à accroissements indépendants et Gaussiens (problème : le cours de l'actif, processus Gaussien, peut être négatif)
- **1905** : Einstein détermine la densité du MB et le lie aux EDPs. Schmolushowski le décrit comme limite de promenade aléatoire.
- **1923** : Etude rigoureuse du MB par Wiener, entre autre démonstration de l'existence.

Un Mouvement Brownien généralement noté  $B$  pour Brown ou  $W$  pour Wiener.

**Définition 4.2.1** *Un Mouvement Brownien (standard) est un processus  $B$  vérifiant :*

- $B_0 = 0$   $\mathbb{P}$ -p.s. ;
- $B$  est continu, i.e.  $t \mapsto B_t(\omega)$  est  $C^0$  pour presque tout  $\omega$  ;
- $B$  est à accroissements indépendants :  $B_t - B_s$  est indépendant de  $\mathcal{F}_s^B := \sigma(B_s, s \leq t)$  ;
- les accroissements sont stationnaires, Gaussiens et pour  $s \leq t$  :  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ .

**Remarque 4.2.1** *Pour information, dans la définition, la quatrième propriété peut être remplacée par "les accroissements sont stationnaires centrés de carré intégrable avec  $\text{Var}(B_1) = 1$ ". Cette hypothèse plus faible implique, grâce à la continuité de  $B$ , que les accroissements sont Gaussiens. En effet, on a  $B_t - B_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (B_{s+(t-s)i/n} - B_{s+(t-s)(i-1)/n})$  somme composée de v.a. aléatoires indépendantes de même loi car le processus est stationnaire. Grâce à la continuité du  $B$ , on obtient qu'elles sont d'espérance nulle et de variance  $(t-s)/n$ . On a alors envie de conclure grâce au Théorème Centrale Limite mais les termes de la somme dépendent de  $n$  et la démonstration nécessite une généralisation du TCL, un théorème du type Lindebergh, qui est possible par contrôle des moments des v.a. aléatoires. Lorsque l'on cherche un processus stationnaire, continu à accroissements indépendants et de variance finie, il est donc naturel de considérer un Mouvement Brownien qui sera donc un outil très utile pour modéliser les fluctuations des cours des actifs dans un marché financier.*

**Théorème 4.2.1** *Le Mouvement Brownien existe!!!*

**Démonstration :** Ce résultat non évident est admis. La plus grosse difficulté réside dans l'obtention de la continuité du Mouvement Brownien. Le Mouvement Brownien peut être vu comme limite de marches aléatoires sur des pas de temps de plus en plus courts.  $\square$

**Proposition 4.2.1** *Si  $B$  est un Mouvement Brownien et  $\mathcal{F}$  sa filtration naturelle, les processus  $(B_t)$ ,  $(B_t^2 - t)$  et  $(e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}})$  (Brownien Exponentiel) sont des  $\mathcal{F}$ -martingales.*

**Démonstration :** Ces trois processus sont adaptés à  $\mathcal{F}$ . Ils sont intégrables car  $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , donc son espérance, sa variance et sa transformée de Laplace sont finies. Reste à vérifier la dernière condition. Pour le premier, on a :

$$\mathbb{E}[B_t/\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_s/\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_t - B_s/\mathcal{F}_s] = B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s] = B_s + 0 = B_s$$

Pour le deuxième, comme  $B$  est une martingale, on a :

$$\mathbb{E}[B_t^2 - B_s^2/\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2/\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = \text{Var}[B_t - B_s] = t - s$$



Et la condition sur le dernier s'obtient grâce à la transformée de Laplace d'une Gaussienne :

$$\mathbb{E} \left[ e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}} / \mathcal{F}_s \right] = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \mathbb{E} \left[ e^{\lambda(B_t - B_s)} e^{\lambda B_s} / \mathcal{F}_s \right] = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} e^{\lambda B_s} \mathbb{E} \left[ e^{\lambda(B_t - B_s)} \right] = e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}$$

□

Pour démontrer qu'un processus est un mouvement Brownien, au lieu de revenir à sa définition, il est souvent plus aisé d'utiliser la caractérisation suivante :

**Théorème 4.2.2** *Caractérisation du Mouvement Brownien*

*Un processus  $B$  est un Mouvement Brownien ssi c'est un processus Gaussien continu centré de fonction de covariance  $\text{cov}(X_s, X_t) = s \wedge t$ .*

**Démonstration :**

**Sens direct :** Pour  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ , le vecteur  $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$  est composé de v.a. Gaussiennes indépendantes, donc il est Gaussien et toute combinaison linéaire des  $B_{t_i}$  qui se réécrit comme combinaison linéaire de ces v.a. et est Gaussienne. Par conséquent, le processus  $B$  est Gaussien. Il est continu par hypothèse, centré car  $\mathbb{E}[B_t] = \mathbb{E}[B_t - B_0] = 0$  et de fonction de covariance, pour  $s \leq t$  :

$$\text{Cov}(B_s, B_t) = \mathbb{E}[B_s B_t] = \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] + \mathbb{E}[B_s^2] = B_s \mathbb{E}[B_t - B_s] + \text{Var}[B_s - B_0] = 0 + s = s$$

**Réciproquement**, on va montrer les propriétés de la définition du MB une à une :

- $\mathbb{E}[B_0^2] = \text{Var}[B_0] = 0$  donc  $B_0 = 0$  p.s.
- $B$  est continu par hypothèse
- Prenons  $r_1 \leq \dots \leq r_n \leq s \leq t$ , le vecteur  $(B_{r_1}, \dots, B_{r_n}, B_t - B_s)$  est Gaussien. Or  $\text{cov}(B_t - B_s, B_{r_i}) = r_i \wedge s - r_i \wedge t = 0$ , donc  $B_t - B_s$  est indépendante de tout vecteur  $(B_{r_1}, \dots, B_{r_n})$  et donc de  $\mathcal{F}_s^B = \sigma(B_r, r \leq s)$ .
- Pour  $s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  est Gaussienne et est donc déterminée par son espérance  $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$  et sa variance :

$$\text{Var}[B_t - B_s] = \text{Var}(B_t) + \text{Var}(B_s) - 2 \text{cov}(B_t, B_s) = t + s - 2s \wedge t = t - s.$$

Donc  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$  et, la loi de  $B_t - B_s$  ne dépendant que de  $t - s$ , les accroissements sont stationnaires. □

**Remarque 4.2.2** *Le résultat indiquant que montrer l'indépendance entre  $B_t - B_s$  et  $\sigma(B_s, s \leq t)$  est équivalent à montrer que tout vecteur de la forme  $(B_{r_1}, \dots, B_{r_n})$  se démontre à l'aide du théorème de la classe monotone. Le lecteur intéressé pourra se reporter au Livre de Briane-Pages.*

**Proposition 4.2.2** *Si  $B$  est un Mouvement Brownien, les processus  $\frac{1}{a}B_{a^2t}$ ,  $tB_{1/t}$  + valeur nulle en 0, et  $B_{t+t_0} - B_{t_0}$  sont des Mouvements Browniens.*

**Démonstration :** On utilise la caractérisation en tant que processus Gaussien. Ce sont des processus Gaussiens. On a la continuité facilement sauf pour  $tB_{1/t}$  (faite en TD)  $\square$

**Remarque 4.2.3** *Le fait que le processus  $\frac{1}{a}B_{a^2t}$  soit encore un Mouvement Brownien est la **propriété fractale** du Mouvement Brownien. Son comportement est stable par changement d'échelle. Il traduit également que les trajectoires du Mouvement Brownien ont une longueur infinie.*

Citons quelques propriétés du Mouvement Brownien sans les démontrer simplement pour mieux comprendre la manière dont il se comporte :

(1) Si  $B$  est un Mouvement Brownien, alors :

$$\frac{B_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad p.s.$$

Ce résultat, difficile à montrer pour  $t \in \mathbb{R}$ , est obtenu naturellement sur les suites à valeur dans  $\mathbb{N}$  :

$$\frac{B_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (B_i - B_{i-1}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[B_i - B_{i-1}] = 0 \quad p.s.$$

grâce à la loi de grands nombres, les  $B_i - B_{i-1}$  étant indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

(2) Le Mouvement Brownien a ses trajectoires continues mais elles ne sont dérivables nulle part.

(3) Si  $B$  est un Mouvement Brownien, alors, on a :

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty$$

Ainsi, le Mouvement Brownien passe par tous les points de l'espace presque sûrement.

(4) Le Mouvement Brownien repasse presque sûrement en tout point une infinité de fois.

(5) Le Mouvement Brownien est un processus markovien :

$$\forall s \leq t \quad B_t / \mathcal{F}_s \stackrel{loi}{\sim} B_t / B_s$$

En conclusion, le Mouvement Brownien oscille énormément. Il est continu et imprévisible dans le sens où ses accroissements sont indépendants du passé. Cet outil sera donc idéal pour modéliser la partie aléatoire de l'évolution d'un actif sur un marché.

### 4.3 Variation totale et Variation quadratique

**Définition 4.3.1** On définit la variation infinitésimale d'ordre  $p$  d'un processus  $X$  sur  $[0, T]$  associée à une subdivision  $\Pi_n = (t_1^n, \dots, t_n^n)$  de  $[0, T]$  par :

$$V_T^p(\Pi_n) := \sum_{i=1}^n |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}|^p$$

Si  $V_T^p(\Pi_n)$  a une limite dans un certain sens (convergence  $\mathcal{L}^p$ , convergence p.s.) lorsque  $\pi_n := \|\Pi_n\|_\infty := \max_{i \leq n} |t_{i+1}^n - t_i^n| \rightarrow 0$ , la limite ne dépend pas de la subdivision choisie et nous l'appellerons variation d'ordre  $p$  de  $X$  sur  $[0, T]$ . En particulier :

- si  $p = 1$ , la limite s'appellera **variation totale de  $X$  sur  $[0, T]$**  ;
- si  $p = 2$ , la limite s'appellera **variation quadratique de  $X$  sur  $[0, T]$**  notée  $\langle X \rangle_T$ .

**Remarque 4.3.1** Pourquoi la limite ne dépend pas de la subdivision choisie ?

Supposons que la variation infinitésimale d'ordre  $p$  a une limite lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Considérons deux subdivisions différentes. Alors la nouvelle subdivision composée de l'union des 2 précédentes converge également et les deux subdivisions précédentes sont des subdivisions extraites de celle-ci qui convergent donc vers la même limite.

**Remarque 4.3.2** Si la variation totale d'un processus existe presque sûrement alors elle vaut :

$$V_T^1 := \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| \quad p.s.$$

où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des subdivisions possibles de  $[0, T]$ . Réciproquement, si ce sup est fini, le processus admet une variation totale. Ce résultat est dû à la décroissance en  $\Pi$  de la variation infinitésimale : si  $\Pi \subset \Pi'$  alors  $V_T^1(\Pi) \geq V_T^1(\Pi')$  qui vient naturellement de l'inégalité triangulaire  $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$ . **La variation totale d'un processus s'interprète comme la longueur de ses trajectoires.**

**Proposition 4.3.1** La variation quadratique sur  $[0, T]$  du mouvement Brownien existe dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  (la variation infinitésimale converge en  $\|\cdot\|_2$ ) et vaut  $T$ . De plus, si la subdivision  $\Pi_n$  satisfait  $\sum_{n=1}^\infty \pi_n < \infty$ , on a la convergence au sens presque sûr. On a donc :

$$\boxed{\langle B \rangle_T = T}$$

**Démonstration :** La variation infinitésimale d'ordre 2 du Mouvement Brownien est donnée par :

$$V_T^2(\Pi_n) := \sum_{i=1}^n |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}|^2$$

On rappelle que si  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  alors  $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$  et  $\text{Var}[X^2] = 2\sigma^4$ . On a donc :

$$\mathbb{E}[V_T^2(\Pi_n)] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2] = \sum_{i=1}^n (t_i^n - t_{i-1}^n) = T$$

Et en notant  $\pi_n := \max |t_{i-1}^n - t_i^n|$ , on obtient :

$$\text{Var}[V_T^2(\Pi_n)] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[(B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2] = 2 \sum_{i=1}^n (t_i^n - t_{i-1}^n)^2 \leq 2T\pi_n \xrightarrow{\pi_n \rightarrow 0} 0$$

Donc  $\|V_T^2(\Pi_n) - T\|_2 = \sqrt{\text{Var}[V_T^2(\Pi_n)]} \rightarrow 0$  quand  $\pi_n \rightarrow 0$ . Pour obtenir la convergence presque sûre, il faut utiliser l'inégalité de Markov qui donne pour tout  $\epsilon$  :

$$\mathbb{P}[\|V_T^2(\Pi_n) - T\| > \epsilon] \leq \frac{\text{Var}[V_T^2(\Pi_n)]}{\epsilon} \leq \frac{2T\pi_n}{\epsilon}$$

Donc si  $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$ , on a pour tout  $\epsilon$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[\|V_T^2(\Pi_n) - T\| > \epsilon] < \infty$  ce qui (par Borel-Cantelli) entraîne la convergence presque sûre de  $V_T^2(\Pi_n)$  vers  $T$ .

**Proposition 4.3.2** *Pour toute subdivision  $\Pi_n$  satisfaisant  $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$ , la variation infinitésimale d'ordre 1 sur  $[0, T]$  du mouvement Brownien associée à cette subdivision converge presque sûrement vers  $+\infty$ . Donc, la variation totale du mouvement Brownien vaut  $+\infty$  p.s. :*

$$V_T^1 = \sup_{\Pi_n} V_T^1(\Pi_n) = \infty \quad p.s.$$

**Démonstration :** Soit  $\Pi_n$  une suite de subdivision de  $[0, T]$  satisfaisant  $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n < \infty$ . Alors, sur presque tout chemin  $\omega$ , on a la relation :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \leq \sup_{|u-v| \leq \pi_n} |B_u(\omega) - B_v(\omega)| V_T^1(\Pi_n)(\omega)$$

Le terme de gauche tend vers  $T$  car on a la convergence p.s. de la variation quadratique. Le premier terme à droite tend vers 0 car le Mouvement Brownien a ses trajectoires uniformément continues sur  $[0, T]$  en tant que fonctions continues sur un compact. Donc le deuxième terme de droite tend nécessairement vers l'infini.  $\square$

En conclusion, la variation quadratique du mouvement Brownien est non nulle, elle vaut  $T$  dans  $\mathcal{L}^2$ , mais que sa variation totale est infinie presque sûrement.

**Remarque 4.3.3** *La variation totale du Mouvement Brownien trajectoire par trajectoire est simplement la longueur de son chemin. Le résultat obtenu est donc cohérent avec la propriété fractale du Mouvement Brownien. Un Mouvement Brownien oscille en permanence et donc la longueur de ses trajectoires est infinie. Ceci est également lié au fait que les trajectoires du MB, bien que continues ne sont pas régulières.*

En effet, lorsqu'une fonction  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable à dérivées bornées, pour toute subdivision  $\Pi_n$  de  $[0, T]$ , il existe  $s_i \in ]t_{i-1}, t_i]$  tel que :

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i^n) - f(t_{i-1}^n)| = \sum_{i=1}^n f'(s_i^n) |t_i^n - t_{i-1}^n| \leq \|f'\|_\infty T$$

Donc, cette fonction est à variation totale finie :

$$\sup_{\Pi} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$$

On obtient également qu'elle est à variation quadratique nulle :

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|^2 \leq \|f'\|_\infty \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \leq \|f'\|_\infty T \pi_n \rightarrow 0$$

Donc, les trajectoires du Mouvement Brownien ne sont pas dérivables à dérivées bornées. On peut même montrer que **les trajectoires du Mouvement Brownien ne sont dérivables nulle part.**

De la même façon que l'on dit qu'une fonction est à variation bornée sur  $[0, T]$  si :

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$$

on peut s'intéresser à la notion de processus à variation bornée :

**Définition 4.3.2** *Un processus  $X$  est un processus à variation bornée sur  $[0, T]$  s'il est variation bornée trajectoire par trajectoire :*

$$\sup_{\Pi_n} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| < \infty \quad p.s.$$

**Proposition 4.3.3** *Un processus est à variation bornée si et seulement s'il est la différence de deux processus croissants.*

**Démonstration :** S'il est à variation bornée, notons pour tout  $t \leq T$

$$X_t^* := \sup_{\Pi(t)} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| < \infty$$

où les  $\Pi(t)$  sont des subdivisions de  $[0, t]$ . Alors  $X_t$  se réécrit :

$$X_t = \frac{X_t + X_t^*}{2} - \frac{X_t^* - X_t}{2} := X_t^+ - X_t^-$$

Les processus  $X_t^+$  et  $X_t^-$  sont croissants car, pour  $s \leq t$ ,  $|X_t - X_s| \geq X_t^* - X_s^*$ .

**Réciproquement**, si  $X$  est de la forme  $X^+ - X^-$  avec  $X^+$  et  $X^-$  croissants, on a, pour toute subdivision de  $[0, T]$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |X_{t_i} - X_{t_{i-1}}| &= \sum_{i=1}^n (X_{t_i}^+ - X_{t_{i-1}}^+) + \sum_{i=1}^n (X_{t_{i-1}}^- - X_{t_i}^-) \\ &= X_t^+ - X_0^+ + X_0^- - X_t^- = X_t - X_0 \end{aligned}$$

Donc  $X$  est à variation bornée. □

**Proposition 4.3.4** *Si  $X$  est un processus à variation bornée à trajectoires continues, sa variation quadratique est nulle presque sûrement :  $\langle X \rangle_T = 0$ .*

**Démonstration :** Comme nous l'avons vu précédemment, pour presque tout  $\omega$  :

$$V_T^2(\Pi_n)(\omega) \leq \sup_{|u-v| \leq \pi_n} |X_u(\omega) - X_v(\omega)| V_T^1(\Pi_n)(\omega)$$

Comme  $X$  est continue sur le compact  $[0, T]$ , le  $\sup$  tend vers 0 et la variation totale de  $X$  est finie donc sa variation quadratique est nulle p.s. □

**Remarque 4.3.4** *Malheureusement les résultats que nous obtenons sont des convergences dans  $\mathcal{L}^2$  ou des convergences presque sûre. A une modification presque sûre prêt, la limite ne dépend pas du type de convergence considéré mais ces convergences ne sont pas équivalentes. L'outil adéquat pour définir la variation quadratique est la convergence en probabilité mais cet outil est peu intuitif et difficile à manipuler.*

Finalement le tableau récapitulatif à retenir est le suivant :

	Variation totale	Variation quadratique
Mouvement Brownien	$\infty$	$T$
Processus continu à var. bornée	$< \infty$	0

Par construction de la variation quadratique,  $\langle \alpha X \rangle = \alpha^2 \langle X \rangle$ , si bien qu'il est naturel de prolonger l'application  $X \mapsto \langle X, X \rangle := \langle X \rangle$  en une application bilinéaire.

**Définition 4.3.3** Soient  $X$  et  $Y$  deux processus tels que  $X$ ,  $Y$  et  $X + Y$  ont des variations quadratiques finies dans  $\mathcal{L}^2$ . On définit alors la covariation quadratique entre les processus  $X$  et  $Y$  comme :

$$\langle X, Y \rangle := \frac{1}{2} (\langle X + Y \rangle - \langle X \rangle - \langle Y \rangle)$$

Par construction, cette définition rend l'application  $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle$  bilinéaire :

$$\text{Relation de bilinéarité : } \langle X + Y, X + Y \rangle = \langle X, X \rangle + 2 \langle X, Y \rangle + \langle Y, Y \rangle$$

$$\text{Relation scalaire } \langle \alpha X, \beta Y \rangle = \alpha \beta \langle X, Y \rangle$$

**Démonstration :** Par construction,  $2 \|\sum \Delta X_i \Delta Y_i - \langle X, Y \rangle\|_2$  converge vers 0 car il est borné par :

$$\left\| \sum \Delta (X_i + Y_i)^2 - \langle X + Y \rangle \right\|_2 + \left\| \sum \Delta X_i^2 - \langle X \rangle \right\|_2 + \left\| \sum \Delta Y_i^2 - \langle Y \rangle \right\|_2$$

□

**Remarque 4.3.5**  $\langle X, Y \rangle$  s'identifie à la limite dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  de  $\sum_{i=1}^n |X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}| |Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n}|$ .

**Proposition 4.3.5** Soit  $X$  un processus à variation bornée continu ayant une variation quadratique dans  $\mathcal{L}^2$  (qui est donc nulle) et  $Y$  un processus à variation quadratique finie dans  $\mathcal{L}^2$ , alors  $X + Y$  est à variation finie dans  $\mathcal{L}^2$  et l'on a :

$$\langle X + Y \rangle = \langle Y \rangle$$

Ce qui revient à dire que :

$$\langle X, Y \rangle = 0$$

**Démonstration :** On a la relation

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum \Delta X_i \Delta Y_i \right)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[ \left( \sum \Delta X_i^2 \right) \left( \sum \Delta Y_i^2 \right) \right] \leq \left\| \sum \Delta X_i^2 \right\|_2 \left\| \sum \Delta Y_i^2 \right\|_2$$

Ce qui donne  $\langle X, Y \rangle = 0$  à la limite. □

**Remarque 4.3.6** Nous venons de voir que la variation quadratique du Mouvement Brownien sur  $[0, T]$  est  $T$ . Or, si vous vous souvenez, nous avons vu que le processus  $(B_t^2 - t)$  est une martingale. Ceci n'est pas un hasard, il existe un résultat plus général que nous ne démontrerons pas mais qui permet de caractériser les martingales de carré intégrables. Il s'agit de la décomposition de Doob-Meyer.

#### **Théorème 4.3.1 Décomposition de Doob Meyer**

Si  $M$  est une martingale continue de carré intégrable ( $\mathbb{E}(M_t^2) < \infty$  pour tout  $t$ ), alors  $\langle M \rangle$  est l'unique processus croissant continu nul en 0 tel que  $M^2 - \langle M \rangle$  soit une martingale.

## 4.4 Intégrale stochastique

On veut donner un sens à la variable aléatoire :

$$\int_0^T \theta_s dB_s$$

Lorsque l'on intègre une fonction  $g$  par rapport à une fonction  $f$  dérivable, si  $g$  est régulière, on définit son intégrale comme :

$$\int_0^T g(s) df(s) = \int_0^T g(s) f'(s) ds$$

Si jamais  $f$  n'est pas dérivable mais simplement à variation bornée, on s'en sort encore en définissant l'intégrale par :

$$\int_0^T g(s) df(s) = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i))$$

L'intégrale alors définie s'appelle intégrale de Stieljes. Dans notre cas, le Mouvement Brownien n'est pas à variation bornée donc, **on ne peut pas définir cette limite trajectoire par trajectoire**. Par contre, comme il est à variation quadratique finie, il est naturel de définir l'intégrale par rapport au Mouvement Brownien comme une **limite dans  $\mathcal{L}^2$  (convergence au sens de  $\|\cdot\|_2$ )** de cette variable aléatoire.

$$\int_0^T \theta_s dB_s = \lim_{\pi_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Attention, la convergence est au sens de la convergence des variables aléatoires dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ . Pour cela nous allons donc devoir **imposer au processus  $\theta$  d'être  $\mathcal{L}^2(\Omega, [0, T])$** . On demandera également à l'intégrand  $\theta$  **d'être  $\mathcal{F}$ -adapté** afin que  $\theta_{t_i}$  soit indépendant de  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ . En effet, dans les applications en finance,  $\theta_t$  représentera la quantité d'actif risqué contenue dans notre portefeuille à l'instant  $t$  et  $dB_t$  la variation infinitésimale de cet actif risqué. Il est donc naturel de vouloir imposer que  $\theta$  soit  $\mathcal{F}$ -adapté. S'il ne l'était pas, on pourrait tout de même définir une intégrale par rapport au mouvement Brownien mais elle serait très différente car la variation quadratique du Mouvement Brownien est non nulle. Sur un exemple simple par exemple, comme approximations de  $\int_0^T B_t dB_t$ , nous aurions entre autre le choix entre les 2 approximations suivantes :

$$\sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}] \quad \text{ou} \quad \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_{i+1}} [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]$$

L'écart entre nos deux intégrales est alors égal à :

$$\sum_{i=0}^{n-1} [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}]^2 \xrightarrow{\mathcal{L}^2} T$$



Nous allons construire l'intégrale stochastique ou l'approximation est faite au point le plus à gauche afin que l'intégré soit indépendant de l'intégrant. C'est l'intégrale au sens d'Ito (et non Stratonovich ou anticipante). Enfin, pour des raisons techniques, nous allons demander de la régularité aux processus que nous manipulons. Nous leur demanderons d'être presque sûrement Continus A Droite avec Limite A Gauche (CADLAG).

Finalement, nous allons donc construire l'intégrale stochastique sur l'ensemble

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T]) = \left\{ (\theta_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus CADLAG } \mathcal{F}\text{-adapté tq } \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T \theta_s^2 ds \right) \right] < \infty \right\}$$

Construisons tout d'abord l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires.

**Définition 4.4.1** *Un processus  $(\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  est appelé **processus élémentaire** s'il existe une subdivision  $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$  et un processus discret  $(\theta_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  tel que tout  $\theta_i$  est  $\mathcal{F}_{t_i}$ -adapté et dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  tel que :*

$$\theta_t(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i(\omega) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}]}(t)$$

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des processus élémentaires qui est un sous espace de  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ .

**Définition 4.4.2** *Avec les même notations, l'intégrale stochastique entre 0 et  $t \leq T$  d'un processus élémentaire  $\theta \in \mathcal{E}$  est la variable aléatoire définie par :*

$$\int_0^t \theta_s dB_s := \sum_{i=0}^k \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \theta_i (B_t - B_{t_k}) \quad \text{sur } ]t_k, t_{k+1}],$$

soit

$$\boxed{\int_0^t \theta_s dB_s = \sum_{i=0}^n \theta_i (B_{t \wedge t_{i+1}} - B_{t \wedge t_i}).}$$

On associe donc à  $\theta \in \mathcal{E}$  le processus  $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$ .

**Remarque 4.4.1** *On définit naturellement  $\int_s^t \theta_u dB_u := \int_0^t \theta_u dB_u - \int_0^s \theta_u dB_u$ .*

**Proposition 4.4.1 Propriétés de l'intégrale Stochastique sur  $\mathcal{E}$**

*Sur l'ensemble des processus élémentaires  $\mathcal{E}$ , l'intégrale stochastique satisfait les propriétés :*

(1)  $\theta \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$  est linéaire

- (2)  $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$  est continue p.s.  
(3)  $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté.  
(4)  $\mathbb{E} [\int_0^t \theta_s dB_s] = 0$  et  $\text{Var} (\int_0^t \theta_s dB_s) = \mathbb{E} [\int_0^t \theta_s^2 ds]$ .  
(5) propriété d'Isométrie :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_s^2 ds \right]$$

- (6) De manière plus générale, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \int_s^t \theta_u dB_u / \mathcal{F}_s \right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v dB_v \right)^2 / \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^t \theta_v^2 dv / \mathcal{F}_s \right]$$

- (7) On a même le résultat plus général :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v dB_v \right) \left( \int_s^u \phi_v dB_v \right) / \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^{t \wedge u} \theta_v \phi_v dv / \mathcal{F}_s \right]$$

- (8)  $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale.

- (9) Le processus  $(\int_0^t \theta_s dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale.

- (10) la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

- (11) La covariation quadratique entre 2 intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t \wedge u} \theta_s \phi_s ds$$

**Démonstration :**

- (1) La linéarité de l'intégrale est immédiate.  
(2) La continuité de l'intégrale stochastique se lit sur sa deuxième écriture par la continuité des trajectoires du Mouvement Brownien.  
(3) La v.a.  $\int_0^t \theta_s dB_s$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable comme somme de v.a.  $\mathcal{F}_t$ -mesurables, donc l'intégrale stochastique est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté.  
(4) Prenons  $t = t_k$  quitte à rajouter un point à la suite  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ . Alors, le calcul de l'espérance de  $\int_0^t \theta_s dB_s$  donne :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_s dB_s \right] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E} [\theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E} [\theta_i \mathbb{E} [B_{t_{i+1}} - B_{t_i} / \mathcal{F}_{t_i}]] = 0$$

Le calcul de la variance, un peu plus lourd, s'écrit :

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right) &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right)^2 \right] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{E} [\theta_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E} [\theta_i \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 \mathbb{E} [(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 / \mathcal{F}_{t_i}] + 2 \sum_{i < j} \mathbb{E} [\theta_i \theta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mathbb{E}[B_{t_{j+1}} - B_{t_j} / \mathcal{F}_{t_i}]] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i^2 (t_{i+1} - t_i) + 0 = \int_0^t \theta_s^2 ds
\end{aligned}$$

On aurait pu éviter le calcul et utiliser le résultat plus général énoncé dans (6)

(5) La propriété d'isométrie est celle que l'on vient d'écrire.

(6) Quitte à rajouter 2 points à la suite  $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ , on peut supposer que  $s = t_j$  et  $t = t_k$  et alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_u dB_u / \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) / \mathcal{F}_{t_j} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) / \mathcal{F}_{t_j} \right] + \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E} [\theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) / \mathcal{F}_{t_j}] \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E} [\theta_i \mathbb{E}[B_{t_{i+1}} - B_{t_i} / \mathcal{F}_{t_i}] / \mathcal{F}_{t_j}] \\
&= \int_0^s \theta_u dB_u + 0
\end{aligned}$$

Le deuxième calcul, un peu plus lourd, s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_u dB_u \right)^2 / \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=j}^{k-1} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right)^2 / \mathcal{F}_{t_j} \right] \\
&= \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E} [\theta_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 / \mathcal{F}_{t_j}] + 2 \sum_{i < l} \mathbb{E} [\theta_i \theta_l (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) (B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) / \mathcal{F}_{t_j}] \\
&= \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E} [\theta_i^2 \mathbb{E} [(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 / \mathcal{F}_{t_i}] / \mathcal{F}_{t_j}] + 2 \sum_{i < l} \mathbb{E} [\theta_i \theta_l (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \mathbb{E} [B_{t_{l+1}} - B_{t_l} / \mathcal{F}_{t_i}] / \mathcal{F}_{t_j}] \\
&= \sum_{i=j}^{k-1} \mathbb{E} [\theta_i^2 (t_{i+1} - t_i) / \mathcal{F}_{t_j}] + 0 \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_s^t \theta_u^2 du / \mathcal{F}_s \right]
\end{aligned}$$

(7) Pour  $\theta$  et  $\phi$  dans  $\mathcal{E}$ , et  $u \leq t$  on a :

$$\begin{aligned}
& 2 \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v dB_v \right) \left( \int_s^u \phi_v dB_v \right) / \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t (\theta_v + \phi_v \mathbf{1}_{v \leq u}) dB_v \right)^2 / \mathcal{F}_s \right] - \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v dB_v \right)^2 / \mathcal{F}_s \right] - \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^u \phi_v dB_v \right)^2 / \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \int_s^t (\theta_v + \phi_v \mathbf{1}_{v \leq u})^2 dv / \mathcal{F}_s \right] - \mathbb{E} \left[ \int_s^t \theta_v^2 dv / \mathcal{F}_s \right] - \mathbb{E} \left[ \int_s^u \phi_v^2 dv / \mathcal{F}_s \right] \\
&= 2 \mathbb{E} \left[ \int_s^u \theta_v \phi_v dv / \mathcal{F}_s \right]
\end{aligned}$$

(8) On a vu que le processus  $(\int_0^t \theta_s dB_s)_{t \leq T}$  est  $\mathcal{F}$ -adapté. La propriété d'isométrie nous donne que  $\int_0^t \theta_s dB_s$  est dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  et donc dans  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ . La première partie de la propriété 6 nous donne la propriété de martingale de l'intégrale stochastique. En fait c'est simplement une transformée de martingale.

(9) Le processus  $M$  défini par  $(\int_0^t \theta_s dB_s)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds)_{0 \leq t \leq T}$  est  $\mathcal{F}$ -adapté comme somme discrète de processus  $\mathcal{F}$ -adaptés. Chaque  $M_t$  est dans  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  comme somme de 2 éléments de  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ . La 2ème partie de la propriété (6) nous donne la propriété de martingale de  $M$ .

(10) Si on admet que la variation quadratique est telle que  $M^2 - \langle M \rangle$  soit martingale (Doob-Meyer), le résultat du dessus nous permet de conclure directement.

(11) Le résultat vient directement de la définition de la covariation quadratique par les mêmes calculs que dans (8).

**Exemple :**  $\int_0^t dB_s = B_t - B_0 = B_t$

Finalement, l'intégrale stochastique d'un élément de  $\mathcal{E}$  est une martingale continue de carré intégrable. Nous noterons  $\mathcal{M}^2([0, T])$  l'ensemble des martingales continues de carré intégrable :

$$\mathcal{M}^2([0, T]) := \left\{ M \text{ } \mathcal{F} - \text{martingales telles que } \mathbb{E}[M_t^2] < \infty \quad \forall t \in [0, T] \right\}$$

Pour le moment, l'intégrale stochastique est une fonction de  $\mathcal{E} \times [0, T]$  dans  $\mathcal{M}^2([0, T])$ . On va maintenant, comme annoncé, étendre la définition de l'intégrale stochastique à des processus adaptés ayant un moment d'ordre 2, i.e. à :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T]) = \left\{ (\theta_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus CADLAG } \mathcal{F}\text{-adapté tq } \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T \theta_s^2 ds \right) \right] < \infty \right\}$$

**Lemme 4.4.1** *L'ensemble des processus élémentaires  $\mathcal{E}$  est dense dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$  au sens de la convergence en norme quadratique. Autrement dit, pour tout  $\theta \in \mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ , il existe une suite  $\theta^n$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  telle que*

$$\|\theta^n - \theta\|_2' = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds \right]^{1/2} \longrightarrow 0$$

Ce lemme sera admis. Il s'agit d'une généralisation de la densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions avec un contrôle global sur l'ensemble des trajectoires. Pas super comme remarque.

**Théorème 4.4.1** *Il existe une unique application linéaire  $I$  de  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$  dans  $\mathcal{M}^2([0, T])$  qui coïncide avec l'intégrale stochastique sur l'ensemble des processus élémentaires  $\mathcal{E}$  et vérifie la propriété d'isométrie :*

$$\forall t \leq T \quad \mathbb{E}[I(\theta)_t^2] = \mathbb{E} \left( \int_0^t \theta_s^2 ds \right).$$

**Démonstration :**

**Approximation :** Soit  $\theta$  un processus élément de  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ . D'après le lemme admis, il existe une suite  $\theta^n$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  telle que :

$$\|\theta - \theta^n\|_2' = \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds \right]^{1/2} \longrightarrow 0$$

**Convergence :** La propriété d'isométrie entre 0 et  $t \leq T$  sur l'intégrale stochastique du processus  $(\theta^{n+p} - \theta^n)$  de  $\mathcal{E}$  nous donne :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n) dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n)^2 ds \right] \leq \mathbb{E} \left[ \int_0^T (\theta_s^{n+p} - \theta_s^n)^2 ds \right]$$

ce qui s'écrit en terme de norme :

$$\left\| \int_0^t \theta_s^{n+p} dB_s - \int_0^t \theta_s^n dB_s \right\|_2 \leq \|\theta^{n+p} - \theta^n\|_2'$$

Comme  $\theta^n$  converge dans  $\mathcal{L}^2(\Omega, [0, T])$ , elle est de Cauchy et donc  $\int_0^t \theta_s^n dB_s$  est de Cauchy dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ . Or  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  muni de  $\|\cdot\|_2$  est un espace de Banach (donc complet), par conséquent la suite  $\int_0^t \theta_s^n dB_s$  converge dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ . En notant  $\int_0^t \theta_s dB_s$  sa limite, on a donc :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s dB_s - \int_0^t \theta_s^n dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds \right]$$

**Unicité :** Cette propriété implique que la limite ne dépend pas de la suite approximante choisie, en effet, si j'avais 2 suites approximantes  $\theta_n$  et  $\phi_n$ , la condition d'isométrie donnerait :

$$\left\| \int_0^t \theta_s^n dB_s - \int_0^t \phi_s^n dB_s \right\|_2 = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s^n - \phi_s^n)^2 ds \right]^{1/2} \leq \|\theta^n - \phi^n\|_2' \rightarrow 0$$

Donc les deux suites approximantes donnent la même limite dans  $L^2(\Omega)$  qui sont donc égales p.s.

**Convergence dans  $\mathcal{M}^2([0, T])$  :** Le processus limite  $M$  est un élément de  $\mathcal{M}^2([0, T])$  car chaque  $M_t$  s'écrit comme limite dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  de  $M_t^n$  avec  $M^n$  une suite de martingales  $\mathcal{F}$ -adaptées telles que  $\mathbb{E}[|M_t^n|^2] < \infty$  pour tout  $t$ . (application de la proposition 4.1.6 avec  $p = 2$ ).

**Linéarité et Isométrie :** La linéarité est immédiate, reste à prouver la propriété d'isométrie qui s'écrit en passant à la limite la propriété d'isométrie sur les éléments de  $\mathcal{E}$  :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s^n dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s^n)^2 ds \right] \Rightarrow \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_s^2 ds \right]$$

□

**Remarque 4.4.2** On peut voir notre transformation comme un prolongement d'isométrie entre deux espaces complets : l'espace  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$  muni de la norme  $\|\cdot\|_2'$  et l'espace  $\mathcal{M}^2([0, T])$  muni de la norme  $\|M\| = \mathbb{E}[M_T^2]$ .

**Proposition 4.4.2** Sur  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ , l'intégrale stochastique satisfait les mêmes propriétés que celles énoncées dans  $\mathcal{E}$  :

(1)  $\theta \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$  est linéaire

- (2)  $t \mapsto \int_0^t \theta_s dB_s$  est continue p.s.  
(3)  $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus  $\mathcal{F}$ -adapté.  
(4)  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_s dB_s \right] = 0$  et  $\text{Var} \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right) = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_s^2 ds \right]$ .  
(5) propriété d'Isométrie :

$$\boxed{\mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t \theta_s^2 ds \right]}$$

- (6) De manière plus générale, on a :

$$\mathbb{E} \left[ \int_s^t \theta_u dB_u / \mathcal{F}_s \right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v dB_v \right)^2 / \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^t \theta_v^2 dv / \mathcal{F}_s \right]$$

- (7) On a même le résultat plus général :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_s^t \theta_v dB_v \right) \left( \int_s^u \phi_v dB_v \right) / \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E} \left[ \int_s^{t \wedge u} \theta_v \phi_v dv / \mathcal{F}_s \right]$$

- (8)  $\left(\int_0^t \theta_s dB_s\right)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale.  
(9) Le processus  $\left( \left( \int_0^t \theta_s dB_s \right)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds \right)_{0 \leq t \leq T}$  est une  $\mathcal{F}$ -martingale.  
(10) la variation quadratique de l'intégrale stochastique est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

- (11) La covariation quadratique entre 2 intégrales stochastiques est donnée par :

$$\left\langle \int_0^t \theta_s dB_s, \int_0^u \phi_s dB_s \right\rangle = \int_0^{t \wedge u} \theta_s \phi_s ds$$

**Démonstration :** On a déjà vu (1) (3), (5) et (8).

(2) La propriété d'isométrie donne la continuité dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  mais nous allons admettre la continuité presque sûre.

(4) est un cas particulier de (6).

(6) La première est la propriété de martingale de l'intégrale stochastique et la deuxième la propriété de martingale du processus donné par la propriété (9).

(7) On l'obtient à partir de (6) comme on l'avait obtenu dans  $\mathcal{E}$  en considérant  $\theta^2$ ,  $\phi^2$  et  $(\theta + \phi)^2$ .

(9) On l'obtient grâce à la proposition (4.1.6) avec  $p = 1$ .

(10) est obtenu par Doob-Meyer.

(11) est une conséquence de (10). □

**Remarque 4.4.3** *L'intégrale stochastique est une limite dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  et est donc définie à une modification presque sûre près.*

**Cas particulier ou le processus  $\theta$  n'est pas aléatoire.**

**Proposition 4.4.3** *Si le processus  $\theta$  n'est pas aléatoire mais simplement une fonction  $f$  du temps, en plus des propriétés précédentes, l'intégrale stochastique alors appelée **intégrale de Wiener** est Gaussienne :*

$$\int_0^t f(s)dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t f^2(s)ds\right)$$

**Démonstration :** En effet,  $\int_0^t f(s)dB_s$  s'écrit comme une limite dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  de v.a. de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \int_0^t f(s)dB_s$$

Or  $\sum_{i=0}^{n-1} f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$  est Gaussienne comme combinaison linéaire d'éléments du vecteur Gaussien  $B_{t_1}, \dots, B_{t_n}$ . Donc  $\int_0^t f(s)dB_s$  est Gaussienne comme limite dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  de v.a. Gaussiennes. En effet, la convergence dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  entraîne la convergence de l'espérance, de la variance et donc de la fonction caractéristique des v.a. gaussiennes.  $\square$

De plus, toute combinaison linéaire de  $\int_0^t f(s)dB_s$  est également une intégrale de Wiener qui est Gaussienne. Donc l'intégrale de Wiener  $\int_0^t f(s)dB_s$  est un **processus Gaussien** caractérisé par

$$\text{cov}\left(\int_0^t f(s)dB_s, \int_0^u g(s)dB_s\right) = \int_0^{t \wedge u} f(s)g(s)ds$$

On démontre également que la v.a.  $\int_s^t f(u)dB_u$  est indépendante de la tribu  $\mathcal{F}_s$  (cf TD).

**Cas particulier où le processus  $\theta$  est de la forme  $f(B)$**

Pour l'instant, nous avons vu que, lorsqu'une suite de processus élémentaires  $\theta^n$  converge vers  $\theta$  dans  $\mathcal{L}^2(\Omega, [0, T])$ , alors l'intégrale stochastique de  $\theta$  est la limite dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  des intégrales stochastiques des  $\theta^n$ . Le candidat le plus naturel pour approcher l'intégrale stochastique de  $f(B)$  est alors :

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Mais, à quelles conditions, a t'on la convergence voulue ?



**Proposition 4.4.4** *Si  $f$  est une fonction dérivable à dérivée bornée, on a :*

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{i}{n}T})(B_{\frac{(i+1)}{n}T} - B_{\frac{i}{n}T}) \xrightarrow{\mathcal{L}^2} \int_0^T f(B_s)dB_s$$

La convergence a lieu dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$ .

**Démonstration :** Avant toute chose, il faut justifier que l'intégrale stochastique a un sens, i.e. que  $f(B) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0, T])$ . Le processus  $f(B)$  est bien  $\mathcal{F}$ -adapté et CADLAG car le mouvement Brownien est  $\mathcal{F}$ -adapté et continu p.s. . On a, pour tout  $t \leq T$  :

$$|f(B_t)| \leq |f(B_0)| + \|f'\|_{\infty} \cdot |B_t - B_0| = |f(0)| + \|f'\|_{\infty} \cdot |B_t|$$

La constante  $|f(0)|$  est bien sûr dans  $\mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0, T])$  et on a :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^T |B_s|^2 ds \right] = \int_0^T \mathbb{E}[|B_s|^2] ds = \int_0^T s ds = \frac{T^2}{2} < \infty$$

Donc  $f(B_t) \in \mathcal{L}^2_{\mathcal{F}}(\Omega, [0, T])$  et  $\int_0^T f(B_s)dB_s$  est bien définie.

L'intervalle  $[0, T]$  est découpé en  $n$  intervalles  $]t_i, t_{i+1}]$  avec  $t_i = iT/n$  et on introduit le processus

$$B_s^n := \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s) \quad \text{tel que} \quad \int_0^T f(B_s^n) dB_s := \sum_{i=0}^{n-1} f(B_{\frac{i}{n}T})(B_{\frac{(i+1)}{n}T} - B_{\frac{i}{n}T})$$

Alors  $\int_0^T f(B_s) dB_s$  sera la limite dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  de  $\int_0^T f(B_s^n) dB_s$  si  $f(B)$  est la limite dans  $\mathcal{L}^2(\Omega, [0, T])$  de  $f(B^n)$ . Or on a :

$$\begin{aligned} \|f(B) - f(B^n)\|'_2 &= \mathbb{E} \left[ \int_0^T (f(B_s) - f(B_s^n))^2 ds \right]^{1/2} = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f(B_s) - f(B_{t_i}))^2 ds \right]^{1/2} \\ &\leq \|f'\|_{\infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbb{E}[(B_s - B_{t_i})^2] ds \right)^{1/2} = \|f'\|_{\infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (s - t_i) ds \right)^{1/2} \\ &= \|f'\|_{\infty} \left( n \int_0^{T/n} u du \right)^{1/2} = \frac{T\|f'\|_{\infty}}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

□

**Exemple :** Que vaut  $\int_0^T B_s dB_s$  ?

En reprenant le processus  $B_s^n := \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$ , la proposition précédente nous donne la convergence dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  de  $\int_0^T B_s^n dB_s$  vers  $\int_0^T B_s dB_s$ . Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} 2 \int_0^T B_s^n dB_s &= 2 \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) ds = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) - \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \\ &= B_T^2 + \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \end{aligned}$$

Le deuxième terme converge dans  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  vers la variation quadratique sur  $[0, T]$  du Mouvement Brownien qui vaut  $T$  donc on obtient finalement :

$$B_T^2 = \int_0^T 2B_s dB_s + T$$

On retrouve donc que  $B_T^2 - T$  est une martingale. Par rapport à l'intégrale classique, il y a un terme en plus, (le  $T$ ) qui vient du fait que la variation quadratique du Mouvement Brownien est non nulle.

**Heuristiquement**, on peut se dire qu'une petite variation du Mouvement Brownien  $dB_t$  équivaut à une variation en  $\sqrt{dt}$  car sa variation quadratique est en  $dt$  et que l'on considère des convergence en norme quadratique.

$$dB_t \sim \sqrt{dt} \Rightarrow (dB_t)^2 \sim dt$$

Donc, les termes en  $dB_t^2$  ne sont pas négligeables dans les développements de Taylor et l'on garde un terme en plus. La formulation de ce résultat est la formule d'Ito. De manière moins heuristique, on peut retenir :

$$dB_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$$

## 4.5 Formule d'Ito

Voici l'outil qui permet de calculer les intégrales stochastiques sans repasser par des suites approximantes.

**Théorème 4.5.1** *Toute fonction  $f \in C^2(\mathbb{R})$  à dérivée seconde bornée vérifie p.s. :*

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds, \forall t \leq T$$

*La notation infinitésimale de cette relation est :*

$$df(B_s) = f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} f''(B_s) ds$$

**Démonstration :** (source : polycopié de Francis Comets) Fixons  $t \leq T$  et considérons de nouveau la partition de  $[0, t]$  en  $n$  intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  avec  $t_i = it/n$ . Trajectoire par trajectoire, la formule de Taylor couplée à la continuité p.s. de  $B$  nous donne :

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \sum_{i=1}^n [f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}})] \\ &= \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \end{aligned}$$

où les  $\theta_i$  sont des variables aléatoires à valeur dans  $]t_{i-1}, t_i[$ . Comme  $f'$  est dérivable à dérivée bornée, la proposition 4.4.4 nous donne :

$$\left\| \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \int_0^t f'(B_s) dB_s \right\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Il reste à contrôler le dernier terme :

$$U_n := \sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

Nous allons successivement remplacer  $\theta_i$  par  $t_{i-1}$  puis  $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$  par  $t_i - t_{i-1}$ . Introduisons :

$$V_n := \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \quad \text{et} \quad W_n := \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})(t_i - t_{i-1})$$

On a alors, par l'inégalité de Schwartz :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|U_n - V_n|] &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_i |f''(B_{t_{i-1}}) - f''(B_{\theta_i})| \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \sup_i |f''(B_{t_{i-1}}) - f''(B_{\theta_i})|^2 \right]^{1/2} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \right)^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Pour toute trajectoire,  $s \mapsto f''(B_s(\omega))$  est continue sur un compact, donc uniformément continue et le sup converge donc vers 0. La convergence vers 0 de l'espérance est assurée par le théorème de Lebesgue car  $f''$  est bornée. Le deuxième terme est la variation quadratique du mouvement Brownien qui converge vers  $t$ . Donc on a  $\|U_n - V_n\|_1 \rightarrow 0$ . Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|V_n - W_n|^2] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n f''(B_{t_{i-1}})((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ (f''(B_{t_{i-1}})((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 - (t_i - t_{i-1})))^2 \right] \\ &\leq \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n \text{Var}((B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2) \\ &= \|f''\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n 2(t_i - t_{i-1})^2 = 2\|f''\|_\infty^2 \frac{t^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

On a ainsi  $\|V_n - W_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Enfin, par définition de l'intégrale de Lebesgue, comme  $f''$  est bornée, on a :

$$\left\| W_n - \int_0^t f''(B_s) ds \right\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La convergence  $\mathcal{L}^2$  impliquant la convergence  $\mathcal{L}^1$ , on a finalement la convergence dans  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  de

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=1}^n f'(B_{t_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(B_{\theta_i})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2$$

vers

$$\int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

Ceci entraîne donc l'égalité presque sûre entre les deux v.a. On intervertit ensuite le " $\forall t$ " et le "p.s." grâce à la continuité de chacun des processus.  $\square$

**Remarque 4.5.1** *Lorsque l'on a une égalité entre processus qui est vrai presque sûrement pour tout  $t$ , elle n'est pas forcément vrai pour tout  $t$  presque sûrement. En effet, pour tout  $t$ , l'ensemble où l'égalité n'est pas vérifiée est négligeable, mais l'union sur  $t \in \mathbb{R}$  de ces ensembles n'est pas forcément négligeable. Par contre, lorsque les processus sont continus, l'union (dénombrable) sur  $t \in \mathbb{Q}$  de ces ensembles reste négligeable et s'étend à l'union sur  $t \in \mathbb{R}$  par continuité.*

Donc, ce qu'il faut retenir est que lorsque que l'on dérive par rapport au Mouvement Brownien, comme " $dB_t$  se comporte comme  $\sqrt{dt}$ ", il faut garder un terme en plus dans le développement de Taylor.

**Exemple :** On retrouve  $B_T = \int_0^T dB_t$  et  $B_T^2 = 2 \int_0^T B_s dB_s + T$

#### Généralisation

Avoir la dérivée seconde bornée est très contraignant, car on ne peut pas souvent appliquer cette formule. On aimerait pouvoir généraliser cette formule aux cas où la fonction  $f$  est seulement dérivable deux fois. Le problème est que l'on n'est alors pas sûr que  $f'(B)$  soit dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$  et que donc l'intégrale stochastique soit bien définie.

En fait on peut généraliser la définition d'intégrale stochastique au cas où au lieu de prendre  $\theta$  dans  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ , on considère des processus  $\theta$  qui sont toujours CADLAG et  $\mathcal{F}$ -adaptés mais qui satisfont simplement la condition :

$$\int_0^T |\theta_s|^2 ds < \infty \quad p.s.$$

Lors de la généralisation, on perd le caractère martingale de l'intégrale stochastique, elle devient ce que l'on appelle une **Martingale locale**. Il lui manque juste de bonnes conditions d'intégrabilité pour être une vraie martingale. On peut alors généraliser la formule d'Ito en obtenant

**Théorème 4.5.2** *Toute fonction  $f \in C^2(\mathbb{R})$  vérifie p.s. :*

$$f(B_T) = f(B_0) + \int_0^T f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^T f''(B_s) ds$$

Sans vouloir plus détailler, dites vous simplement que, les conditions d'intégrabilité mises à part, vous pouvez appliquer la formule d'Ito lorsque la fonction est seulement  $C^2$  mais que l'intégrale stochastique obtenue n'est pas forcément une vraie martingale.

## 4.6 Processus d'Ito

Introduisons une nouvelle classe de processus par rapport auxquels nous pourrions encore définir une intégrale stochastique.

**Définition 4.6.1** *Un processus d'Ito est un processus de la forme*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s \quad (4.6.1)$$

avec  $X_0$   $\mathcal{F}_0$ -mesurable,  $\theta$  et  $\varphi$  deux processus  $\mathcal{F}$ -adaptés vérifiant les conditions d'intégrabilité :

$$\int_0^T |\theta_s|^2 ds < \infty \quad p.s. \quad \text{et} \quad \int_0^T |\varphi_s| ds < \infty \quad p.s.$$

On note de manière infinitésimale :

$$dX_t = \varphi_s ds + \theta_s dB_s$$

L'étude que nous avons menée jusqu'à maintenant nécessitait des conditions d'intégrabilité plus fortes sur les processus  $\theta$  et  $\varphi$ . Afin de pouvoir présenter ici la démonstration de certains résultats de cette partie, nous aurons besoin d'imposer les conditions d'intégrabilités **(CI)** suivantes :

$$(CI) \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^T |\theta_s|^2 ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[ \int_0^T |\varphi_s|^2 ds \right] < \infty$$

**Proposition 4.6.1** *Si  $M$  est une martingale continue qui s'écrit sous la forme  $M_t := \int_0^t \varphi_s ds$  avec  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, [0, T])$ , alors  $\mathbb{P}$ -p.s. :*

$$\forall t \leq T \quad M_t = 0$$

**Démonstration :** Par définition  $M_0 = 0$  et comme  $M$  est une martingale :

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n M_{\frac{it}{n}} - M_{\frac{(i-1)t}{n}} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \left( M_{\frac{it}{n}} - M_{\frac{(i-1)t}{n}} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s ds \right)^2 \right]$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\left( \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s ds \right)^2 \leq \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} 1^2 ds \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s^2 ds = \frac{t}{n} \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s^2 ds$$

Soit en sommant terme à terme :

$$\mathbb{E}[M_t^2] \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{t}{n} \int_{\frac{(i-1)t}{n}}^{\frac{it}{n}} \varphi_s^2 ds \right] = \frac{t}{n} \mathbb{E} \left[ \int_0^t \varphi_s^2 ds \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On en déduit que  $M_t$  est nul p.s. pour tout  $t$ , puis on intervertit le " $\forall t$ " et le "p.s." grâce à la continuité de  $M$ .  $\square$

**Corollaire 4.6.1** *La décomposition en processus d'Ito vérifiant les conditions (CI) est **unique** (à une modification p.s. près).*

**Démonstration :** Supposons qu'un processus d'Ito se décompose de deux manières différentes :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s^1 ds + \int_0^t \theta_s^1 dB_s = X_0 + \int_0^t \varphi_s^2 ds + \int_0^t \theta_s^2 dB_s$$

alors, pour tout  $t \leq T$ , on a la relation :

$$\int_0^t (\varphi_s^1 - \varphi_s^2) ds = \int_0^t (\theta_s^2 - \theta_s^1) dB_s$$

Donc ce processus est une martingale continue (terme de droite) qui s'écrit sous la forme d'une intégrale de Lebesgue (terme de gauche). Grâce aux conditions d'intégrabilité imposées, la proposition 4.6.1 nous indique que ce processus est nul presque surement. Trajectoire par trajectoire, l'application  $t \mapsto \int_0^t (\varphi_s^1 - \varphi_s^2) ds$  étant l'application nulle, par différentiation  $\varphi^1 = \varphi^2$  p.s.. De plus, la propriété d'Isométrie de l'intégrale stochastique nous indique que :

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s^2 - \theta_s^1)^2 ds \right] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t (\theta_s^2 - \theta_s^1) dB_s \right] = \mathbb{E}[0] = 0$$

Donc on a également  $\theta^2 = \theta^1$  p.s. .  $\square$

**Corollaire 4.6.2** *Un processus d'Ito vérifiant les conditions (CI) est une martingale si et seulement si "sa partie en  $ds$ "  $\varphi$  est nulle.*

**Démonstration :** Si la "partie en  $ds$ " est nulle, le processus d'Ito est une intégrale stochastique vérifiant les conditions d'intégrabilité pour être une martingale.

Réciproquement, si un processus d'Ito  $X$  donné par (4.6.1) vérifiant (CI) est une martingale, le processus défini par  $X_t - X_0 - \int_0^t \theta_s dB_s$  est une martingale continue qui s'écrit  $\int_0^t \varphi_s ds$  avec  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, [0, T])$ . Donc la proposition 4.6.1 nous indique que  $\int_0^t \varphi_s ds$  est nul pour tout  $t$  presque sûrement et  $\varphi = 0$ .  $\square$

Ces résultats se généralise au cas où les processus  $\varphi$  et  $\theta$  ne vérifient pas les conditions d'intégrabilité (CI).

**Proposition 4.6.2 :**

1. Si  $M$  est une martingale locale continue qui s'écrit sous la forme  $M_t := \int_0^t \varphi_s ds$  avec  $\varphi$  un processus à variations bornées ( $\int_0^T |\varphi_s| ds < \infty$  p.s.), alors p.s. :

$$\forall t \leq T \quad M_t = 0$$

2. La décomposition en processus d'Ito est **unique** (à une modification p.s. près).

3. Un processus d'Ito est une martingale locale si et seulement si "sa partie en  $ds$ "  $\varphi$  est nulle.

On a vu que la variation quadratique de l'intégrale stochastique  $\int_0^t \theta_s dB_s$  est donnée par  $\int_0^t \theta_s^2 ds$ . Lorsque que l'on ajoute à un processus, un processus à variation finie (de variation quadratique nulle), on ne modifie pas sa variation quadratique. Donc, la variation quadratique d'un processus d'Ito est égale à la variation quadratique de sa partie martingale.

**Proposition 4.6.3** La variation quadratique sur  $[0, t]$  d'un processus d'Ito  $X$  donné par (4.6.1) vaut :

$$\langle X \rangle_t = \left\langle \int_0^t \theta_s dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s^2 ds$$

**Proposition 4.6.4** La covariation quadratique entre 2 processus d'Ito  $X_1$  et  $X_2$  donnés par :

$$dX_t^i = \varphi_s^i ds + \theta_s^i dB_s$$

vaut :

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \int_0^t \theta_s^1 \theta_s^2 ds$$

**Démonstration :** Par définition, la covariation quadratique est donnée par :

$$\begin{aligned}\langle X^1, X^2 \rangle &:= \frac{1}{2} (\langle X^1 + X^2 \rangle - \langle X^1 \rangle - \langle X^2 \rangle) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_0^t (\theta_s^1 + \theta_s^2)^2 ds - \int_0^t (\theta_s^1)^2 ds - \int_0^t (\theta_s^2)^2 ds \right) \\ &= \int_0^t \theta_s^1 \theta_s^2 ds\end{aligned}$$

□

**Définition 4.6.2** La notion d'intégrale stochastique par rapport à un processus d'Ito se définit de la manière naturelle suivante. Pour  $\phi$  élément de  $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2(\Omega, [0, T])$ , satisfaisant de bonnes conditions d'intégrabilité, on définit :

$$\boxed{\int_0^t \phi_s dX_s := \int_0^t \phi_s \theta_s dB_s + \int_0^t \phi_s \varphi_s ds}$$

La formule d'Ito se généralise aux processus d'Ito.

**Théorème 4.6.1** Soit  $f$  une fonction  $C^2$ , on a alors :

$$\begin{aligned}f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \varphi_s ds + \int_0^t f'(X_s) \theta_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \theta_s^2 ds\end{aligned}$$

La notation infinitésimale de cette relation est donc :

$$df(X_t) = f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} f''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

**Démonstration :** La démo revient comme dans le cas du Mouvement Brownien à faire un développement de Taylor :

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^n f'(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(X_{\theta_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

Le premier terme va converger vers l'intégrale stochastique  $\int_0^t f'(X_s) dX_s$  et le deuxième vers le terme  $\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$  par définition de la variation quadratique. □

Une des conséquence de la formule d'Ito est la formule d'intégration par partie :

**Proposition 4.6.5 Formule d'intégration par partie** Soient  $X$  et  $Y$  deux processus d'Ito, on a :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t d\langle X, Y \rangle_s$$



Soit en notation infinitésimale :

$$d(XY)_t = X_s dY_s + Y_s dX_s + d\langle X, Y \rangle_s$$

**Démonstration :** En appliquant la formule d'Ito à  $X_t^2$  et à  $Y_t^2$ , on obtient :

$$dX_t^2 = 2X_s dX_s + \frac{2}{2} d\langle X \rangle_s \quad \text{et} \quad dY_t^2 = 2Y_s dY_s + \frac{2}{2} d\langle Y \rangle_s$$

Et en l'appliquant à  $(X + Y)^2$ , on obtient :

$$d(X + Y)_t^2 = 2(X_s + Y_s) d(X_s + Y_s) + \frac{2}{2} d\langle X + Y \rangle_s$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} d(XY)_t &= \frac{1}{2} (d(X + Y)_t^2 - dX_t^2 - dY_t^2) \\ &= X_s dY_s + Y_s dX_s + \frac{1}{2} (d\langle X + Y \rangle_s - d\langle X \rangle_s - d\langle Y \rangle_s) \\ &= X_s dY_s + Y_s dX_s + d\langle X, Y \rangle_s \end{aligned}$$

□

#### La formule d'Ito sous toutes ses formes

1. Pour le Mouvement Brownien avec  $f \in C^2(\mathbb{R})$  :

$$f(W_t) = f(W_0) + \int_0^t f'(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ds$$

2. Pour un processus d'Ito avec  $f \in C^2(\mathbb{R})$  :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

3. Pour un processus d'Ito avec  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$  fonction du temps et de l'espace :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s$$

4. Pour un processus d'Ito multidimensionnel avec  $f \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$  :

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d\langle X_i, X_j \rangle_s$$

Pour démontrer ces formules de plus en plus générales, la méthode est toujours la même : faire un développement de Taylor et ne pas négliger les termes provenant de la dérivée seconde par rapport au Brownien ou au processus d'Ito dans le développement de Taylor car  $dB_t$  se comporte comme  $\sqrt{dt}$  et  $dX_t$  se comporte comme  $\theta_t \sqrt{dt}$ .

## 4.7 Equation Différentielle Stochastique

Tout comme on définit dans un cadre déterministe la notion d'équation différentielle, on va définir ici la notion d'équation différentielle stochastique. Typiquement, une équation différentielle stochastique (EDS) est donnée par :

$$X_0 = x \quad dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (4.7.1)$$

(avec  $\mu$  et  $\sigma$  des applications boréliennes)

**Définition 4.7.1** *Un processus  $X$  est solution de cette EDS si c'est un **processus  $\mathcal{F}$ -adapté** (ou  $\mathcal{F}$  est la filtration naturelle du MB  $W$ ) satisfaisant*

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)|ds + \int_0^t \sigma^2(s, X_s)ds < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P} - p.s$$

*et qui vérifie*

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \mathbb{P} - p.s$$

Ces équations n'ont pas toujours de solution. Pour assurer l'existence et l'unicité d'une solution, on a besoin de 2 types de conditions.

Une première qui assure l'unicité de la solution grâce au caractère contractant (Lip-schitz) des fonctions  $\mu$  et  $\sigma$  :

**Condition 1** : Il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $(t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ , on ait :

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|$$

Et une deuxième qui assure que le processus n'explose pas en temps fini afin qu'il soit bien défini sur tout  $\mathbb{R}^+$

**Condition 2** : Il existe  $L > 0$  tel que pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , on ait :

$$|\mu(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2)$$

**Théorème 4.7.1** *Considérons l'EDS (4.7.1). Si  $\mu$  et  $\sigma$  satisfont les conditions 1 et 2, alors l'EDS admet une unique solution.*

La démonstration de ce théorème utilise, comme toujours pour démontrer l'existence et l'unicité de solutions d'équations différentielles, le théorème du point fixe.

**Remarque 4.7.1** *Dans le cas particulier où  $\mu$  et  $\sigma$  sont seulement des fonctions de  $x$  et non de  $t$  (EDS autonome), la condition 2 est une conséquence de la condition 1.*

## Chapitre 5

# Modèle de Black Scholes

Le premier modèle d'évolution des actifs financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle a le nom de modèle de Black Scholes. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle Log-normal. Ils ont obtenu le prix nobel d'économie en 1997 pour ces travaux ce qui n'a pas empêché, leur fond d'investissement "Long Term Capital Market" de faire faillite en 1998.

### 5.1 Hypothèses sur le marché

Nous reprenons ici les hypothèses faites au début du cours :

1. Les actifs sont divisibles à l'infini ;
2. Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant ;
3. On peut emprunter et vendre à découvert ;
4. Les échanges ont lieu sans coûts de transaction ;
5. On peut emprunter et prêter au même taux constant  $r$ .

### 5.2 Modélisation probabiliste du marché

Nous considérons un marché constitué d'un actif sans risque  $S^0$  et d'un actif risqué  $S$  sur la période  $[0, T]$ .

**L'actif sans risque :** Dans le modèle discret à  $n$  périodes, lorsque l'on discrétise l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  intervalles de longueur  $T/n$ , que l'on considère un taux sans risque  $r_n$  de la forme  $rT/n$ , la valeur de l'actif sans risque à l'instant  $pT/n$  a la forme suivante :  $(1+rT/n)^p$ . Donc, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $S_t^0$  se comporte comme  $e^{rt}$ . La dynamique retenue pour l'évaluation de l'actifs sans risque en continu est donc naturellement :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad \text{et} \quad S_0^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad S_t^0 = e^{rt}$$

**L'actif risqué** aura la dynamique donnée par l'EDS de Black-Scholes où  $\sigma > 0$  :

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dW_t) \quad (5.2.1)$$

Ce modèle est le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser l'évolution d'un actif risqué tout en imposant qu'ils soient positifs. Comme nous allons le voir, cela revient à supposer que les rendements des actifs sont normaux. Cet actif a une tendance donnée par  $\mu$  et une volatilité donnée par  $\sigma$  toutes les deux constantes.

Décrivons maintenant  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  : L'**ensemble des états du monde**  $\Omega$  sera un sous ensemble de  $\mathbb{R}^+ \times ]0, T]$ .

Pour tout  $t \in [0, T]$ , la tribu  $\mathcal{F}_t$  représente l'information disponible à la date  $t$ , l'aléa provient seulement de  $S$ , donc

$$\mathcal{F}_t := \sigma(S_r, r \leq t)$$

**La probabilité historique**  $\mathbb{P}$  est la probabilité de survenance de chaque état du monde, elle est telle que  $W$  soit un Mouvement Brownien sous  $\mathbb{P}$ .

Essayons de résoudre l'EDS de Black Scholes :

**Théorème 5.2.1** *L'EDS (5.2.1) admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad \mathbb{P} - p.s.$$

**Démonstration :** Vérifions tout d'abord que la solution proposée vérifie l'EDS en appliquant la formule d'Ito à  $f(t, W_t)$  avec

$$f : (t, x) \mapsto S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} df(t, W_t) &= f_x(t, W_t) dW_t + f_t(t, W_t) dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, W_t) d\langle W \rangle_t \\ &= \sigma f(t, W_t) dW_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) f(t, W_t) dt + \frac{\sigma^2}{2} f(t, W_t) dt \end{aligned}$$

Ce qui se réécrit donc :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

Donc  $S$ , processus  $\mathcal{F}$ -adapté est bien solution de l'EDS 5.2.1. Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais, dans notre cas, nous pouvons également la démontrer : soit  $Y$  un processus solution de l'EDS 5.2.1. Remarquons que  $S_t$  ne s'annule jamais si bien que l'on peut appliquer la formule d'Ito pour déterminer la dynamique de  $\frac{1}{S_t}$  :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{2} \frac{2}{S_t^3} d\langle S \rangle_t \\ &= -\frac{1}{S_t} (\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{S_t} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

Donc la formule d'intégration par partie donne la dynamique de  $Y_t/S_t$  :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t} dY_t + d\left\langle \frac{1}{S}, Y \right\rangle_t \\ &= \frac{Y_t}{S_t} ((\sigma^2 - \mu) dt - \sigma dW_t) + \frac{Y_t}{S_t} (\mu dt + \sigma dW_t) - \sigma Y_t \frac{\sigma}{S_t} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarquez que l'on aurait pu obtenir directement le résultat en appliquant la formule d'Ito à la fonction  $(y, s) \mapsto y/s$ . On a donc :

$$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{Y_0}{S_0} + \int_0^t 0 dW_s = 1$$

Donc les processus  $Y$  et  $S$  sont égaux presque sûrement et l'EDS admet une unique solution.  $\square$

**Remarque 5.2.1** On obtient comme dynamique pour le sous-jacent la forme qui avait été obtenue en TD lorsque l'on faisait tendre le nombre de périodes de l'arbre binomial à  $n$  périodes vers l'infini.

**Remarque 5.2.2** Comme nous avons supposé  $\sigma > 0$ , La fonction  $g$  telle que  $S_t = g(W_t)$  est inversible, et donc les aléas du marché sont complètement décrits par le mouvement Brownien  $W$  :

$$\boxed{\mathcal{F}_t := \sigma(S_r, r \leq t) = \sigma(W_r, r \leq t)}$$

**Définition 5.2.1** Un *produit dérivé (ou actif contingent)* est une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

Comme dans le cas du modèle discret, nous allons chercher à donner un prix en  $t$  à un produit dérivé connu en  $T$  et trouver une manière pour dupliquer exactement ce produit dérivé.

La méthode va être similaire à celle utilisée dans le cas discret :

- On va chercher à construire une probabilité risque neutre qui rende tout actif de base réactualisé martingale.
- On va définir ce que l'on appelle une stratégie de portefeuille simple autofinancante.
- On va vérifier que toute stratégie de portefeuille simple autofinancante réactualisée reste martingale sous la probabilité risque neutre.
- On en déduira l'absence d'opportunités d'arbitrage entre stratégies de portefeuille simple (AOA').
- Nous allons chercher à dupliquer tout produit dérivé par une stratégie de portefeuille simple.
- On en déduira que la définition économique naturelle du prix de l'option en  $t$  s'écrit à un facteur d'actualisation près comme l'espérance sous cette proba risque neutre du flux final.
- Le portefeuille de duplication nous donnera la stratégie de couverture de l'option.

### 5.3 Probabilité risque neutre

#### Ecart sur les changements de probabilité

On cherche à construire une probabilité  $\hat{\mathbb{P}}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  équivalente à  $\mathbb{P}$ . Si  $\hat{\mathbb{P}}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$ , alors le théorème de Radon Nikodym assure l'existence d'une variable aléatoire  $Z_T$   $\mathcal{F}_T$ -mesurable telle que  $d\hat{\mathbb{P}} = Z_T d\mathbb{P}$ , i.e. :

$$\forall \mathcal{A}_T \in \mathcal{F}_T \quad \hat{\mathbb{P}}(\mathcal{A}_T) = \int_{\mathcal{A}_T} Z_T d\mathbb{P}$$

Dire que  $\hat{\mathbb{P}}$  et  $\mathbb{P}$  sont équivalentes revient à dire qu'elles chargent les mêmes ensembles et donc que  $Z_T$  ne s'annule jamais, i.e.  $Z_T > 0$ . Alors, la densité de Radon Nikodym de  $\mathbb{P}$  par rapport à  $\hat{\mathbb{P}}$  est  $1/Z_T$ .

Pour que  $(\Omega, \mathcal{F}_T, \hat{\mathbb{P}})$  soit toujours un espace probabilisé, il faut de plus

$$\hat{\mathbb{P}}(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T] = 1$$

La formule de Bayes nous assure que pour toute v.a.  $X_T$ ,  $\mathcal{F}_T$ -mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T]$$

On associe naturellement à la v.a.  $Z_T$ , le processus martingale  $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$  défini par :

$$Z_t := \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T / \mathcal{F}_t]$$

Alors, pour tout  $t$  et toute variable aléatoire  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_t / \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t X_t]$$

En fait,  $Z_t$  est la densité de Radon Nikodym (définie à une modification p.s. près) de  $\widehat{\mathbb{P}}$  restreint à  $\mathcal{F}_t$  par rapport à  $\mathbb{P}$  restreint à  $\mathcal{F}_t$ . On note :

$$Z_t = \left. \frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t}$$

Si l'on considère un processus  $X$   $\mathcal{F}$ -adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T / \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \frac{Z_T}{Z_t} X_T / \mathcal{F}_t \right] = \frac{1}{Z_t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [Z_T X_T / \mathcal{F}_t]$$

En effet, pour toute variable aléatoire  $Y_t$   $\mathcal{F}_t$ -mesurable bornée, on a :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T Y_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T Y_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T / \mathcal{F}_t] Y_t] = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} \left[ \frac{1}{Z_t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T / \mathcal{F}_t] Y_t \right]$$

□

### Retour à notre problème

Dans toute la suite, tout comme dans le cas discret, on notera  $\widetilde{Y}$ , la valeur actualisée d'un processus  $Y$  définie donc par

$$\widetilde{Y}_t := \frac{Y_t}{S_t^0} = e^{-rt} Y_t$$

Déterminons la dynamique des actifs risqués et sans risque réactualisés sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ . L'actif sans risque réactualisé  $\widetilde{S}_t^0$  est constant égal à 1 donc

$$d\widetilde{S}_t^0 = 0$$

Pour l'actif risqué réactualisé, il faut appliquer la formule d'Ito :

$$d\widetilde{S}_t = \frac{1}{S_t^0} dS_t + S_t d \left( \frac{1}{S_t^0} \right) + d \left\langle S, \frac{1}{S_t^0} \right\rangle_t = \widetilde{S}_t [(\mu - r) dt + \sigma dW_t]$$

**Définition 5.3.1** Dans le modèle de Black Scholes,  $\lambda := \frac{\mu - r}{\sigma}$  est ce que l'on appelle la *prime de risque*.

Donc, si l'on introduit le processus défini pour  $t \in [0, T]$ ,

$$\widehat{W}_t := W_t + \lambda t,$$

alors la dynamique de  $\widetilde{S}$  est donnée par :

$$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

Donc, si l'on arrive à construire une probabilité  $\widehat{\mathbb{P}}$ , équivalente à  $\mathbb{P}$  sous laquelle  $\widehat{W}_t = W_t + \lambda t$  est un Mouvement Brownien, cette probabilité rendra l'actif risqué réactualisé martingale et sera un très bon candidat pour notre probabilité risque neutre. L'outil qui va nous permettre de démontrer l'existence de cette probabilité est le théorème de Girsanov :

### **Théorème 5.3.1** *Théorème de Girsanov*

*Il existe une probabilité  $\widehat{\mathbb{P}}$  équivalente à la probabilité historique  $\mathbb{P}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  par :*

$$\left. \frac{d\widehat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_T} := Z_T := e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2}T}$$

*sous laquelle le processus  $\widehat{W}_t$  défini par  $\widehat{W}_t := W_t + \lambda t$  est un Mouvement Brownien sur  $[0, T]$ .*

**Démonstration :**  $\widehat{W}$  est continu p.s. et  $\widehat{W}_0 = 0$ , c'est donc un MB sur  $[0, T]$  si et seulement si pour tout  $n$ , pour tout  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$ , les v.a  $\widehat{W}_{t_i} - \widehat{W}_{t_{i-1}}$  sont indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ . Ceci revient à montrer que pour tout  $u_1, \dots, u_n$  de  $\mathbb{R}^n$ , on a l'égalité entre fonction caractéristique :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} \left[ e^{i \sum_{j=1}^n u_j (\widehat{W}_{t_j} - \widehat{W}_{t_{j-1}})} \right] = \prod_{j=1}^n e^{-\frac{u_j^2}{2} (t_j - t_{j-1})}$$



Ceci se démontre de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} \left[ e^{i \sum_{j=1}^n u_j (\widehat{W}_{t_j} - \widehat{W}_{t_{j-1}})} \right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \prod_{j=1}^n e^{iu_j [(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + \lambda(t_j - t_{j-1}))]} e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2} T} \right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \prod_{j=1}^n e^{(iu_j - \lambda)(W_{t_j} - W_{t_{j-1}}) + (i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})} \right] \\
&= \prod_{j=1}^n e^{(i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ e^{(iu_j - \lambda)(W_{t_j} - W_{t_{j-1}})} \right] \\
&= \prod_{j=1}^n e^{(i\lambda u_j - \frac{\lambda^2}{2})(t_j - t_{j-1})} e^{\frac{(iu_j - \lambda)^2}{2}(t_j - t_{j-1})} \\
&= \prod_{j=1}^n e^{-\frac{u_j^2}{2}(t_j - t_{j-1})}
\end{aligned}$$

□

Maintenant que nous avons un candidat pour notre probabilité risque neutre, regardons si elle rend les portefeuilles autofinancants réactualisés martingales.

## 5.4 Portefeuilles autofinancants

Une stratégie de portefeuille consiste à l'investissement à tout instant  $t \in [0, T]$  dans une quantité dénotée  $\varphi_t$  d'actif risqué  $S$  et d'une quantité  $\varphi_t^0$  d'actif sans risque  $S^0$ . La **valeur du portefeuille** est donc donnée par :

$$X_t^{x, \varphi} = \varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t$$

Dans le cas discret, nous avons vu que la condition d'autofinancement, qui signifie qu'à chaque date on ré-alloue les richesses entre les différents actifs sans ajout ni retrait d'argent, s'écrivait :

$$X_{t_{i+1}}^{x, \phi} - X_{t_i}^{x, \phi} = \varphi_i^0 (S_{t_{i+1}}^0 - S_{t_i}^0) + \varphi_i (S_{t_{i+1}} - S_{t_i})$$

Le prolongement continu de **la condition d'autofinancement** est donc naturellement :

$$\boxed{dX_t^{x, \varphi} = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t}$$

**Définition 5.4.1** Une *stratégie de portefeuille simple autofinancante*  $X^{x, \varphi}$  est la donnée d'un capital de départ  $x$  et d'une stratégie continue d'investissement dans

*l'actif risqué, soit un processus  $\mathcal{F}$ -adapté  $(\varphi_t)_{0 \leq t \leq T}$  qui doit vérifier certaines conditions d'intégrabilité :*

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} \left[ \int_0^T |\varphi_s \tilde{S}_t|^2 dt \right] < \infty$$

A chaque instant  $t$ , la quantité  $\varphi_t^0$  est déterminée à l'aide de la condition d'auto-financement du portefeuille. Cette condition se lit simplement **"La variation de la valeur du portefeuille est égale à la variation de la valeur des actifs multipliée par la quantité d'actifs détenus"**. Intuitivement, que les actifs soient écrits dans n'importe quel numéraire (autre monnaie, normalisé par  $S^0$ , par  $S$ ), tant que ce numéraire est bien déterminé à l'instant  $t$  par l'information  $\mathcal{F}_t$  dont l'on dispose sur le marché en  $t$ , la condition d'autofinancement devrait être vérifiée. En effet, **la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire**, et la formulation mathématique de ce résultat est la suivante :

**Proposition 5.4.1** *Pour tout processus d'Ito  $Y$   $\mathcal{F}$ -adapté (appelé numéraire) "qui ne s'annule pas", la condition d'autofinancement se réécrit :*

$$d\left(\frac{X^{x,\varphi}}{Y}\right)_t = \varphi_t^0 d\left(\frac{S^0}{Y}\right)_t + \varphi_t d\left(\frac{S}{Y}\right)_t$$

**Démonstration :** Appliquons la formule d'intégration par partie aux processus  $X^{x,\varphi}$  et  $U := \frac{1}{Y}$  :

$$\begin{aligned} d(U X^{x,\varphi})_t &= U_t dX_t^{x,\varphi} + X_t^{x,\varphi} dU_t + d\langle X^{x,\varphi}, U \rangle_t \\ &= U_t(\varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t) + (\varphi_t^0 S_t^0 + \varphi_t S_t) dU_t + d\langle \varphi^0 S^0 + \varphi S, U \rangle_t \\ &= \varphi_t^0 (U_t dS_t^0 + S_t^0 dU_t + d\langle S^0, U \rangle_t) + \varphi_t (U_t dS_t + S_t dU_t + d\langle S, U \rangle_t) \\ &= \varphi_t^0 d(U S^0)_t + \varphi_t d(U S)_t \end{aligned}$$

La difficulté vient du passage de la deuxième à la troisième ligne, qui nécessite la relation :

$$d\langle \varphi^0 S^0 + \varphi S, U \rangle_t = \varphi_t^0 d\langle S^0, U \rangle_t + \varphi_t d\langle S, U \rangle_t$$

Cette relation vient du fait que la covariation entre 2 processus d'Ito fait uniquement intervenir linéairement leurs parties Browniennes. Or grâce à la condition d'autofinancement, on a :

$$d(\varphi^0 S^0 + \varphi S)_t = \varphi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t$$

Donc la partie Brownienne de  $\varphi^0 S^0 + \varphi S$  est la somme de celles de  $S^0$  (qui est nulle) et de  $S$  ce qui donne le résultat.  $\square$

En particulier la relation d'autofinancement écrite dans le numéraire cash  $S^0$  donne :

$$d\tilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\tilde{S}_t \Rightarrow \tilde{X}_t^{x,\varphi} = x + \int_0^t \varphi_r d\tilde{S}_r$$

et donc la dynamique de la valeur réactualisée de mon portefeuille  $\tilde{X}_t^{x,\varphi}$  sous la probabilité  $\hat{\mathbb{P}}$  est

$$d\tilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\tilde{S}_t = \sigma \varphi_t \tilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

ce qui justifie la forme que l'on a donné à notre condition d'intégrabilité pour rendre  $\tilde{X}$  martingale.

**Remarque 5.4.1** *Le résultat indiquant que la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire est très utile. Dans notre cas, nous resterons dans le numéraire cash, mais selon le problème auquel on est confronté, il peut être judicieux de changer de numéraire. Nous allons prouver l'existence d'une proba risque neutre qui rend martingales les actifs écrits dans le numéraire cash mais on pourrait également choisir de rendre martingales les actifs écrits dans un numéraire différent. En particulier, lorsque les taux ne sont plus supposés constants, le numéraire cash n'est pas toujours le plus adapté, il est plus pratique d'écrire les actifs dans le numéraire Zéro-coupon, on parle alors de Probabilité forward neutre. L'article introduisant le concept de changement de numéraire est du à El-Karoui - Geman - Rochet (1995).*

Le résultat est donc comme dans le cas discret : "Si l'actif risqué réactualisé est un processus d'Ito martingale sous  $\hat{P}$ , toute stratégie de portefeuille autofinancée réactualisée l'est également"

**Proposition 5.4.2** *La probabilité  $\hat{\mathbb{P}}$  construite précédemment est une probabilité risque neutre. La valeur en  $t$  de toute stratégie autofinancante  $(x, \varphi)$  de flux final  $X_T^{x,\varphi} = h_T$  est :*

$$X_t^{x,\varphi} = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h_T / \mathcal{F}_t]$$

**Démonstration :** Les dynamiques de  $\tilde{S}$  et de  $\tilde{X}^{x,\varphi}$  sous  $\hat{\mathbb{P}}$  sont données par

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\widehat{W}_t \Rightarrow d\tilde{X}_t^{x,\varphi} = \varphi_t d\tilde{S}_t = \sigma \varphi_t \tilde{S}_t d\widehat{W}_t$$

Donc grâce aux conditions d'intégrabilités de  $\varphi$ ,  $\tilde{X}^{x,\varphi}$  est une martingale sous  $\hat{\mathbb{P}}$  et donc :

$$X_t^{x,\varphi} = e^{rt} \tilde{X}_t^{x,\varphi} = e^{rt} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[\tilde{X}_T^{x,\varphi} / \mathcal{F}_t] = e^{rt} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT} X_T^{x,\varphi} / \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h_T / \mathcal{F}_t]$$

□

**Proposition 5.4.3** *L'existence d'une probabilité risque neutre  $\widehat{\mathbb{P}}$  implique l'AOA' entre stratégies de portefeuille simple autofinancantes.*

**Démonstration :** Si  $X_T^{0,\varphi} \geq 0$ , comme  $\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[X_T^{0,\varphi}] = e^{rT} 0$ ,  $X_T^{0,\varphi} = 0$  sauf sur un ensemble de mesure nulle pour  $\widehat{\mathbb{P}}$  qui est également un ensemble de mesure nulle pour  $\mathbb{P}$ .  $\square$

Nous venons donc de voir que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage entre portefeuilles simples est bien vérifiée dans le cadre du modèle de Black-Scholes.

La valeur en  $t$  de toute stratégie de portefeuille simple s'écrit comme l'espérance sous la proba risque neutre  $\widehat{\mathbb{P}}$  de son flux terminal actualisé, donc, si un produit dérivé est duplicable, pour éviter les arbitrages, on définit économiquement son prix comme l'espérance sous  $\widehat{\mathbb{P}}$  de son flux terminal actualisé.

Il est important de bien visualiser la dynamique de l'actif sans risque réactualisé ou non sous les différentes probabilités :

	Probabilité historique	Probabilité risque neutre
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\widehat{W}_t$
Actif risqué réactualisé	$d\widetilde{S}_t = (\mu - r) S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t d\widehat{W}_t$

## 5.5 Duplication d'un produit dérivé

Tout d'abord, remarquons le caractère Markovien du processus  $S$  :

**Proposition 5.5.1** *Considérons un produit dérivé de la forme  $h(S_T)$ . Alors il existe une fonction  $v : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :*

$$v(t, S_t) := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)/\mathcal{F}_t]$$

**Démonstration :** Dans le modèle de Black Scholes, la valeur du sous-jacent en  $t$  est :

$$S_t = S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma W_t}$$

On en déduit que :

$$S_T = S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) - \sigma(W_T - W_t)}$$

Donc l'espérance conditionnelle se réécrit :

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}[h(S_T)/\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left[h\left(S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) - \sigma(W_T - W_t)}\right)/\mathcal{F}_t\right]$$

Or la v.a.  $S_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable et la variable aléatoire  $W_T - W_t$  est indépendante de  $\mathcal{F}_t$ . On en déduit grâce aux propriétés des espérances conditionnelles que :

$$e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} [h(S_T)/\mathcal{F}_t] = v(t, S_t)$$

avec la fonction  $v$  définie par :

$$v : (t, x) \mapsto e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} \left[ h \left( x e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) - \sigma(W_T - W_t)} \right) \right]$$

□

**Proposition 5.5.2** *Si l'on suppose que  $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ , alors il existe une stratégie autofinancante  $(x, \varphi)$  qui duplique le produit dérivé, i.e. telle que  $\forall t \in [0, T]$ ,  $X_t^{x, \varphi} = v(t, S_t)$  et les quantités  $x$  et  $\varphi$  sont données par :*

$$x := e^{-rT} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} [h(S_T)] \quad \varphi_t := \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t)$$

En AOA, le prix en  $t$  du produit de flux final  $h(S_T)$  est donc  $e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} [h(S_T)/\mathcal{F}_t]$ .

De plus le prix de l'option  $v(t, S_t)$  est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x) + r x v_x(t, x) + v_t(t, x) - r v(t, x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T, x) = h(x) \quad (5.1)$$

Réciproquement, si l'EDP précédente admet une solution  $v^*$  (dont la dérivée partielle  $\partial_x v^*(t, x)$  est bornée), alors  $v^*(t, S_t)$  est le prix de l'option de flux terminal  $h(S_T)$ .

### Démonstration :

#### 1. Duplication du produit dérivé

Supposons que  $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ , et construisons le portefeuille de couverture. Considérons le processus défini sur  $[0, T]$  par :

$$U_t := e^{-rt} v(t, S_t) = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} [e^{-rT} h(S_T)/\mathcal{F}_t]$$

Par construction, ce processus est une martingale sous  $\widehat{\mathbb{P}}$ , en effet, pour tout  $s \leq t$  :

$$\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} [U_t/\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} [\mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} [e^{-rT} h(S_T)/\mathcal{F}_t]/\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}} [e^{-rT} h(S_T)/\mathcal{F}_s] = U_s$$

Remarquons que l'on peut réécrire :

$$U_t = u(t, \tilde{S}_t) \quad \text{avec} \quad u : (t, x) \mapsto e^{-rt} v(t, e^{rt} x)$$

Alors  $u \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$  et la formule d'Ito nous donne

$$\begin{aligned} dU_t &= u_x(t, \tilde{S}_t) d\tilde{S}_t + u_t(t, \tilde{S}_t) dt + \frac{1}{2} u_{xx}(t, \tilde{S}_t) d\langle \tilde{S} \rangle_t \\ &= \sigma \tilde{S}_t u_x(t, \tilde{S}_t) d\widehat{W}_t + \left( u_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{\sigma^2}{2} \tilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \tilde{S}_t) \right) dt \end{aligned}$$

Le processus  $U$  est un processus d'Ito martingale donc sa partie en  $dt$  est nulle et l'on obtient finalement :

$$U_t = U_0 + \int_0^t u_x(r, \tilde{S}_r) d\tilde{S}_r$$

Considérons maintenant la stratégie de portefeuille donnée par :

$$x := U_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)] \quad \text{et} \quad \varphi_t := u_x(t, \tilde{S}_t) = v_x(t, S_t)$$

Par construction,  $U$  est une vraie martingale donc  $(x, \phi)$  est une stratégie de portefeuille et grâce à la condition d'autofinancement, la valeur actualisée de ce portefeuille est :

$$\tilde{X}_t^{x, \varphi} = x + \int_0^t \varphi_r d\tilde{S}_r = U_0 + \int_0^t u_x(r, \tilde{S}_r) d\tilde{S}_r = U_t$$

Donc le portefeuille  $X^{x, \varphi}$ , qui vérifie de bonnes conditions d'intégrabilité car  $U$  est une martingale, est bien un portefeuille de duplication car il vérifie :

$$X_t^{x, \varphi} = e^{rt} U_t = v(t, S_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) / \mathcal{F}_t]$$

## 2.EDP d'évaluation

Le processus  $U$  est une martingale sous  $\hat{\mathbb{P}}$  donc la partie en  $dt$  de sa décomposition en processus d'Ito est nulle ce qui s'écrit :

$$u_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \tilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \tilde{S}_t) = 0$$

Or par définition de  $u$ , on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= -r e^{-rt} v(t, e^{rt} x) + e^{-rt} v_t(t, e^{rt} x) + r x v_x(t, e^{rt} x) \\ \text{et } u_{xx}(t, x) &= e^{rt} v_{xx}(t, e^{rt} x) \end{aligned}$$

Donc l'EDP en  $u$  se réécrit comme une EDP en  $v$  de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) + r S_t v_x(t, S_t) + v_t(t, S_t) - r v(t, S_t) = 0$$

avec la condition terminale  $v(T, S_T) = h(S_T)$ . L'idée pour obtenir l'EDP en tout  $x$  est que le mouvement Brownien  $W_t$  diffuse sur tout  $\mathbb{R}$ , donc  $S_t$  diffuse sur tout  $\mathbb{R}^+$  et par conséquent  $v$  est solution sur  $\mathbb{R}^+$  de :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x) + r x v_x(t, x) + v_t(t, x) - r v(t, x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T, x) = h(x)$$

## 3. Réciproque

Si  $v^*$  est solution de l'EDP précédente. Introduisons le processus  $U_t^* := e^{-rt} v^*(t, S_t)$  et  $u^*$  la fonction associée. Alors la dynamique de  $U^*$  est donnée par

$$dU_t^* = \sigma \tilde{S}_t u_x^*(t, \tilde{S}_t) d\tilde{W}_t + \left( u_t^*(t, \tilde{S}_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 \tilde{S}_t^2 u_{xx}^*(t, \tilde{S}_t) \right) dt$$

Comme  $v^*$  est solution de l'EDP, le terme en  $dt$  est nul et l'on obtient que :

$$U_t^* = U_0 + \int_0^t u_x^*(r, \tilde{S}_r) d\tilde{S}_r$$

Donc, la dérivée  $v_x^*$  bornée assurant les conditions d'intégrabilité suffisantes car l'actif risqué réactualisé a des moments à tout ordre (cf TD 4),  $U^*$  est une martingale sous  $\hat{\mathbb{P}}$ . On en déduit que, pour tout  $t \in [0, T]$  :

$$v^*(t, S_t) = e^{rt} U_t^* = e^{rt} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[U_T^* / \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) / \mathcal{F}_t]$$

Donc  $v^*(t, S_t)$  est bien le prix en  $t$  du produit dérivé  $h(S_T)$ .  $\square$

**Remarque 5.5.1** Supposer que  $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$  n'est pas restrictif. On pourrait penser qu'il est nécessaire que la fonction payoff  $h$  soit régulière mais en fait, grâce à des intégrations par partie, on peut renvoyer l'opérateur de dérivation sur la densité du sous-jacent qui est suffisamment régulière.

**Remarque 5.5.2** Le résultat indiquant que le prix Black Scholes de payoff  $h(S_T)$ , donné par  $v(t, x) := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) / S_t = x]$ , est solution de l'EDP (5.5.1) est un résultat très important connu sous le nom plus général de formule de Feynman-Kac. Une espérance conditionnelle sur un processus Markovien peut se réécrire comme solution d'une EDP, créant ainsi des liens entre le monde déterministe et le monde probabiliste.

**Remarque 5.5.3** En fait tout produit dérivé est duplicable. Ceci est dû au fait que la dimension du Brownien est égale à celle de l'actif sans risque. Il y a autant d'aléa sur le marché que d'actifs possibles pour le couvrir.

**Proposition 5.5.3** La probabilité risque neutre est unique.

**Démonstration :** Par définition, la probabilité risque neutre rend tout portefeuille autofinçant réactualisé martingale. Supposons que l'on ait deux probas risques neutres  $\hat{\mathbb{P}}_1$  et  $\hat{\mathbb{P}}_2$ . Pour tout  $\mathcal{B}$  élément de  $\mathcal{F}_T$ ,  $\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$  est une v.a.  $\mathcal{F}_T$  mesurable donc elle est duplicable par une stratégie de portefeuille  $(x, \varphi)$  qui est martingale sous  $\hat{\mathbb{P}}_1$  et  $\hat{\mathbb{P}}_2$  et l'on a :

$$\hat{\mathbb{P}}_1(\mathcal{B}) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}_1}[\mathbf{1}_{\mathcal{B}}] = e^{rT} x = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}_2}[\mathbf{1}_{\mathcal{B}}] = \hat{\mathbb{P}}_2(\mathcal{B})$$

$\square$