

Matematyka - poziom rozszerzony

Zbiór zadań przygotowujący do matury z matematyki na
poziomie rozszerzonym

Marek Smolarczyk

v. 1.1.1.

27 lutego 2017

Spis treści

1	Funkcje	1
1.1	Zadania zamknięte	1
1.2	Zadania otwarte	1
2	Wielomiany	3
2.1	Zadania zamknięte	3
2.2	Zadania otwarte	5
3	Planimetria	7
3.1	Zadania zamknięte	7
3.2	Zadania otwarte	7
4	Rachunek różniczkowy	9
4.1	Zadania zamknięte	9
	Odpowiedzi i rozwiązania	11

Rozdział 1

Funkcje

1.1 Zadania zamknięte

1.2 Zadania otwarte

Zadanie 1.1. Czy istnieje funkcja jednocześnie parzysta i nieparzysta? Jeśli tak, to podaj przykład, a jeśli nie, to udowodnij dlaczego taka funkcja nie istnieje.

Zadanie 1.2. Czy istnieje funkcja okresowa, której okresem jest każda liczba rzeczywista $t > 0$? Jeśli tak, to podaj przykład, a jeśli nie, to udowodnij dlaczego taka funkcja nie istnieje.

Rozdział 2

Wielomiany

2.1 Zadania zamknięte

Zadanie 2.1. Reszta z dzielenia wielomianu $x^3 - 4x^2 + x - 3$ przez $2x - 1$ wynosi

- a) $-\frac{5}{2}$ b) -5 c) -9 d) $-\frac{27}{8}$

Zadanie 2.2. Ile różnych rozwiązań w zależności od parametru m może mieć równanie $x^3 - 2mx^2 - 6x + 12m = 0$?

- a) Jedno lub dwa rozwiązania
b) Tylko dwa rozwiązania
c) Dwa lub trzy rozwiązania
d) Tylko trzy rozwiązania

Zadanie 2.3. Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - (k + 3)x + 9$. Wartość k wynosi

- a) 9 b) -15 c) 3 d) -6

Zadanie 2.4. Wielomiany $W(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$ oraz $Q(x) = (a - b)x^4 + 2x^3 + (2b - 1)x^2 - 38x + 6a - b$ są równe dla wartości parametrów

- a) takie wartości nie istnieją
- b) $a = -3, b = -6$
- c) $a = -3, b = -4$
- d) $a = -5, b = -6$

Zadanie 2.5. Resztą z dzielenia wielomianu $-x^3 - 3x^2 + kx + 8$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 10. Wartość parametru k wynosi

- a) 4
- b) -4
- c) 6
- d) -6

Zadanie 2.6. Wielomian stopnia trzeciego $W(x)$ jest funkcją nieparzystą i $W(1) = 0$. Ile różnych pierwiastków może mieć ten wielomian?

- a) Tylko jeden pierwiastek
- b) Jeden lub trzy pierwiastki
- c) Tylko trzy pierwiastki
- d) Taki wielomian nie istnieje

Zadanie 2.7. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$. Zaznacz prawdziwe stwierdzenie.

- a) Równanie $W(x) = 0$ ma dwa rozwiązania dodatnie.
- b) Równanie $W(x) = 0$ ma dwa rozwiązania ujemne.
- c) Równanie $W(x) = 0$ ma tylko dwa rozwiązania.
- d) $W(x)$ nie da się zapisać w postaci iloczynu czterech czynników stopnia pierwszego.

Zadanie 2.8. Wiadomo, że wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - ax - 1$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$. Zatem reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 2$ jest równa

- a) $x + 1$
- b) -3
- c) 1
- d) 7

2.2 Zadania otwarte

Zadanie 2.9. Wielomian $x^3 + bx^2 + cx + 4$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste równe x_1, x_2, x_3 . Wiedząc, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez trójmian $x^2 + 2$ wynosi $-6x + 8$, wyznacz wartość wyrażenia $x_1(x_2 + x_3 + 1) + x_2(x_3 + 1) + x_3$.

Zadanie 2.10. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $(x - 5)(x + 1)$ wiedząc, że $W(5) = 10$ i $W(-1) = 4$.

Zadanie 2.11. Pan Jan posiada $60m$ płotu i chce ogrodzić swoją posesję, tak żeby wybudowane ogrodzenie było w kształcie prostokąta. Na południowej stronie działki stoi już brama o długości dwóch metrów, która ma stanowić wejście na ogrodzoną posesję. Wyznacz funkcję f , która dla długości wschodniej części płotu w metrach, zwróci pole powierzchni ogrodzonej działki (w m^2). Podaj wymiary płotu, dla którego pole powierzchni ogrodzonej działki będzie największe.

Zadanie 2.12. Pierwiastki wielomianu $2x^3 + x^2 - 13x + 6$ są liczbami wymiernymi. Wyznacz te pierwiastki i zapisz dany wielomian w postaci iloczynu czynników maksymalnie pierwszego stopnia.

Rozdział 3

Planimetria

3.1 Zadania zamknięte

3.2 Zadania otwarte

Zadanie 3.1. Jak znaleźć odległość między dwoma punktami, do których nie możemy dojść? Załóżmy, że stoimy przy rzece, a po jej przeciwnej stronie stoją dwa drzewa. Jak musimy postępować, aby zmierzyć odległość między tymi drzewami, bez przechodzenia przez rzekę? Zakładamy, że potrafimy zmierzyć odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami po naszej stronie rzeki, oraz wyznaczać dokładne kąty proste.

Rozdział 4

Rachunek różniczkowy

4.1 Zadania zamknięte

Zadanie 4.1. Funkcja $f(x) = 3x^3 + x - 3$ jest

- a) rosnąca w przedziale $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$ i malejąca w $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup \langle \sqrt{3}; +\infty)$
- b) rosnąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup \langle \sqrt{3}; +\infty)$ i malejąca w $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$
- c) rosnąca w przedziale $(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup \langle \frac{1}{3}; +\infty)$ i malejąca w $\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \rangle$
- d) rosnąca w całej swojej dziedzinie

Odpowiedzi i rozwiązania

2.1. d)

2.2. c)

2.3. a)

2.4. d)

2.5. c)

2.6. c)

