Matematyka - poziom rozszerzony

Zbiór zadań przygotowujący do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym

Marek Smolarczyk

v. 1.7.1.

5 czerwca 2017

Spis treści

1 Wyrażenia algebraiczne **1**
1.1 Zadania zamknięte 1
1.2 Zadania otwarte 1

2 Funkcje **3**
2.1 Zadania otwarte 3

3 Wielomiany **5**
3.1 Zadania zamknięte 5
3.2 Zadania otwarte 7

4 Funkcje wymierne **9**
4.1 Zadania zamknięte 9
4.2 Zadania otwarte 9

5 Ciągi liczbowe **13**
5.1 Zadania zamknięte 13
5.2 Zadania otwarte 13

6 Planimetria **17**
6.1 Zadania zamknięte 17
6.2 Zadania otwarte 17

7 Trygonometria **19**
7.1 Zadania zamknięte 19
7.2 Zadania otwarte 19

8 Granice **21**
8.1 Zadania otwarte 21

9 Rachunek różniczkowy **23**
9.1 Zadania zamknięte 23
9.2 Zadania otwarte 23

Odpowiedzi i rozwiązania **25**

Rozdział 1

Wyrażenia algebraiczne

1.1 Zadania zamknięte

1.2 Zadania otwarte

Zadanie 1.1. Kran A napełnia całą wannę w 4 minuty, a kran B w 6 minut. Ile sekund zajmie napełnienie całej wanny, jeśli odkręcimy oba krany jednocześnie?

Zadanie 1.2. Jan maluje cały płot w 48 minut, podczas gdy Tomek robi to w 1 godzinę. Ile czasu zajmie pomalowanie całego płotu, jeśli przez pierwsze 12 minut Jan i Tomek pracują razem, a resztę czasu Jan pracuje sam?

Zadanie 1.3. Wiedząc, że $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, wyznacz wartości liczb a, b.

Zadanie 1.4. Udowodnij, że równanie $x^2 - y^2 = 2014$ nie posiada rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 1.5. Udowodnij, że równanie $x^3 - 8y^3 = 10$ nie posiada rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 1.6. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 3xyz$$

w liczbach naturalnych, takie że $x \leqslant y \leqslant z$.

Zadanie 1.7. Pierwsza świeca spala się równomiernie w czasie 4 h, a druga w 5 h. Po jakim czasie od jednoczesnego zapalenia świec jedna z nich będzie 3 razy dłuższa od drugiej?

Rozdział 2

Funkcje

2.1 Zadania otwarte

Zadanie 2.1. Czy istnieje funkcja jednocześnie parzysta i nieparzysta? Jeśli tak, to podaj przykład, a jeśli nie, to udowodnij dlaczego taka funkcja nie istnieje.

Zadanie 2.2. Czy istnieje funkcja okresowa, której okresem jest każda liczba rzeczywista $t > 0$? Jeśli tak, to podaj przykład, a jeśli nie, to udowodnij dlaczego taka funkcja nie istnieje.

Zadanie 2.3. Wyznacz dziedzinę funkcji $\log_{x^2-4x+1}(x^2+3x)$.

Zadanie 2.4. Wyznacz zbiór wartości funkcji $2 \cdot |5x^2 - 2|$ określonej na przedziale zamkniętym $\langle -1, 1 \rangle$.

Zadanie 2.5. Wykonaj wykres funkcji $f(x) = |log_2(3x + 6)|$ i wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $f(x) = k - 1$ ma dwa pierwiastki przeciwnych znaków.

Zadanie 2.6. Wykonaj wykres funkcji $f(x) = |3^{|x-1|} - 2|$ i wyznacz ilość rozwiązań równania $f(x) = k$ w zależności od parametru k.

Zadanie 2.7. Niech $f(x) = |x^2 - 3|x| + 2|$. Wyznacz ilość rozwiązań równania $f(x) = k$ w zależności od parametru k.

Zadanie 2.8. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^2 - x + \log x$ określona dla $x \geqslant 1$ jest różnowartościowa.

Rozdział 3

Wielomiany

3.1 Zadania zamknięte

Zadanie 1. Reszta z dzielenia wielomianu $x^3 - 4x^2 + x - 3$ przez $2x - 1$ wynosi

a) $-\frac{5}{2}$ b) -5 c) -9 d) $-\frac{27}{8}$

Zadanie 3.1. Ile różnych rozwiązań w zależności od parametru m może mieć równanie $x^3 - 2mx^2 - 6x + 12m = 0$?

a) Jedno lub dwa rozwiązania

b) Tylko dwa rozwiązania

c) Dwa lub trzy rozwiązania

d) Tylko trzy rozwiązania

Zadanie 3.2. Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - (k+3)x + 9$. Wartość k wynosi

a) 9 b) -15 c) 3 d) -6

Zadanie 3.3. Wielomiany $W(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$ oraz $Q(x) = (a - b)x^4 + 2x^3 + (2b - 1)x^2 - 38x + 6a - b$ są równe dla wartości parametrów

a) takie wartości nie istnieją

b) $a = -3$, $b = -6$

c) $a - -3$, $b = -4$

d) $a = -5$, $b = -6$

Zadanie 3.4. Resztą z dzielenia wielomianu $-x^3 - 3x^2 + kx + 8$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 10. Wartość parametru k wynosi

a) 4 b) -4 c) 6 d) -6

Zadanie 3.5. Wielomian stopnia trzeciego $W(x)$ jest funkcją nieparzystą i $W(1) = 0$. Ile różnych pierwiastków może mieć ten wielomian?

a) Tylko jeden pierwiastek

b) Jeden lub trzy pierwiastki

c) Tylko trzy pierwiastki

d) Taki wielomian nie istnieje

Zadanie 3.6. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$. Zaznacz prawdziwe stwierdzenie.

a) Równanie $W(x) = 0$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

b) Równanie $W(x) = 0$ ma dwa rozwiązania ujemne.

c) Równanie $W(x) = 0$ ma tylko dwa rozwiązania.

d) $W(x)$ nie da się zapisać w postaci iloczynu czterech czynników stopnia pierwszego.

Zadanie 3.7. Wiadomo, że wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - ax - 1$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$. Zatem reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 2$ jest równa

a) $x + 1$ b) -3 c) 1 d) 7

3.2 Zadania otwarte

Zadanie 3.8. Wielomian x^3+bx^2+cx+4 ma trzy pierwiastki rzeczywiste równe x_1, x_2, x_3. Wiedząc, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez trójmian x^2+2 wynosi $-6x+8$, wyznacz wartość wyrażenia $x_1(x_2+x_3+1)+x_2(x_3+1)+x_3$.

Zadanie 3.9. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $(x-5)(x+1)$ wiedząc, że $W(5)=10$ i $W(-1)=4$.

Zadanie 3.10. Pan Jan posiada $60m$ płotu i chce ogrodzić swoją posesję, tak żeby wybudowane ogrodzenie było w kształcie prostokąta. Na południowej stronie działki stoi już brama o długości dwóch metrów, która ma stanowić wejście na ogrodzoną posesję. Wyznacz funkcję f, która dla długości wschodniej części płotu w metrach, zwróci pole powierzchni ogrodzonej działki (w m^2). Podaj wymiary płotu, dla którego pole powierzchni ogrodzonej działki będzie największe.

Zadanie 3.11. Pierwiastki wielomianu $2x^3+x^2-13x+6$ są liczbami wymiernymi. Wyznacz te pierwiastki i zapisz dany wielomian w postaci iloczynu czynników maksymalnie pierwszego stopnia.

Zadanie 3.12. Liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3-2x^2-23x+60$. Oblicz wartość wyrażenia $(a+1)(b+1)(c+1)$.

Zadanie 3.13. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których pierwiastkiem trójmianu $8x^2+(2m+1)x+2m-1$ jest właśnie wartość m.

Zadanie 3.14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$(m+2)x^2+2mx+1=0$$

jest mniejsza od 8.

Zadanie 3.15. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których mniejszy z pierwiastków równania

$$(m-2)x^2+(2m+1)x+1=0$$

jest mniejszy niż 1, ale większy od -2.

Zadanie 3.16. Znajdź wielomian $W(x)$, który jest podzielny przez trójmian $x^2 - 1$, jego pierwiastkiem jest liczba 3, a jego wykres przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 6)$.

Rozdział 4

Funkcje wymierne

4.1 Zadania zamknięte

Zadanie 4.1. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ jest

a) przedział $\langle -\frac{1}{2}; +\infty)$

b) przedział $\langle -\frac{9}{4}; +\infty)$

c) zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

d) zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

4.2 Zadania otwarte

Zadanie 4.2. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności oraz pierwiastki funkcji

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

Zadanie 4.3. Dla danych wartości parametru m wyznacz przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \frac{mx - 1}{x + 1}$$

Zadanie 4.4. Znajdź wszystkie rozwiązania równości

$$\frac{x^3 + 3x^2 + x - 5}{x - 1} = 1$$

Zadanie 4.5. Rozwiąż nierówność

$$\frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{x + 2} > \frac{2x + 2}{x^2 + 3x + 2}$$

Zadanie 4.6. Rozwiąż nierówność

$$\frac{x^4 - 1}{x - 1} \geqslant 1 + \frac{x + x^2}{x^3 + 1}$$

Zadanie 4.7. Rozwiąż nierówność

$$\frac{x^3 + (1 - m)x^2 + (1 - m)x - m}{2x - m} \geqslant 0$$

traktując x jako zmienną, a m jako parametr.

Zadanie 4.8. Przedstaw w postaci ilorazu dwóch wielomianów funkcję homograficzną, której dziedziną jest suma przedziałów $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, asymptotą poziomą jest $y = -1$, a wykres tej funkcji przecina oś odciętych w punkcie $(-3, 0)$.

Zadanie 4.9. Znajdź rozwiązania nierówności

$$\frac{x - 2}{x + 1} > |2x - 3|$$

Zadanie 4.10. *(Wymaga znajomości rachunku różniczkowego)* Znajdź ilość rozwiązań równania

$$\frac{x^2 + x + 8}{2x + 5} = a^2 - 4a$$

w zależności od wartości parametru a.

Zadanie 4.11. Funkcja $f(x)$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$, dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Rozwiąż nierówność $f(x) > f(1 - x)$.

Zadanie 4.12. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność

$$\frac{x^2 - 25}{(x^2 + 2)(2 - x)} \geqslant 0$$

Zadanie 4.13. Rozwiązaniem nierówności

$$\frac{4x-4a}{x+3} \geqslant ax$$

jest zbiór $(-\infty;-3) \cup \langle 1;4 \rangle$. Wyznacz wartość parametru a.

Zadanie 4.14. Największą wartością funkcji $f(x) = \frac{ax+1}{x-1}$ w przedziale $\langle -4;-1 \rangle$ jest -1.5. Policz a.

Zadanie 4.15. Rozwiąż równanie

$$x = \left| \frac{2x-3}{3x+2} \right|$$

Zadanie 4.16. Rozwiąż nierówność

$$\frac{|6x^2+9x-6|}{|x-\frac{1}{2}|} > -x$$

Zadanie 4.17. Na placu zabaw znajdują się dwie prostokątne piaskownice. Pierwsza ma powierzchnię $10m^2$, a druga $9m^2$ i jest o $2m$ węższa i o $2m$ dłuższa od pierwszej. Oblicz wymiary piaskownic.

Rozdział 5

Ciągi liczbowe

5.1 Zadania zamknięte

5.2 Zadania otwarte

Zadanie 5.1. Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = n(n+1)$, dla $n > 0$. Udowodnij, że suma pierwszych n wyrazów tego ciągu wyraża się wzorem

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Zadanie 5.2. Ciąg (a_n) dany jest wzorem rekurencyjnym

$$a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n \, , \text{ dla } n > 0$$

Wyznacz wartość a_6 jeśli $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i $a_3 = 4$.

Zadanie 5.3. Ciąg (a_n) dany jest wzorem rekurencyjnym

$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \, , \text{ dla } n \geqslant 0$$

Wyznacz wartość a_{999} jeśli $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.
Wskazówka: wypisz kilka początkowych wyrazów ciągu.

Zadanie 5.4. Suma pierwszych n wyrazów ciągu (a_n) wyraża się wzorem $\frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n$. Pokaż, że jest to ciąg arytmetyczny i wyznacz wartość jedenastego wyrazu ciągu.

Zadanie 5.5. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $a_{10} = 20$ i $a_{50} = -10$. Wyznacz a_{200}.

Zadanie 5.6. Ciąg $(2x,\ 3x-1,\ 6x-4)$ jest ciągiem arytmetycznym. Znajdź wartość x. Wyznacz różnicę tego ciągu.

Zadanie 5.7. Wykaż, że suma n kolejnych liczb nieparzystych, zaczynając od 1, jest kwadratem liczby naturalnej.

Zadanie 5.8. Ciąg arytmetyczny dany jest wzorem $a_n = -1 + 4(n-1)$, dla $n > 0$. Znajdź sumę wszystkich wyrazów a_i, takich że $i < 100$ oraz i jest podzielne przez 2 lub 5.

Zadanie 5.9. Niech $S_n = 2^n - 1$. Pokaż, że ciąg (S_n) jest ciągiem sum częściowych szeregu geometrycznego.

Zadanie 5.10. Ciąg sum częściowych ciągu (c_n) jest ciągiem arytmetycznym o pierwszym wyrazie równym $s_1 = -1$. Wyznacz ciąg (c_n).

Zadanie 5.11. Dany jest ciąg (g_n), taki że $g_1 = g_2 = 1$ i (g_n) dla $n > 1$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 2. Pokaż, że jego ciąg sum częściowych (S_n) dla $n > 0$ jest również ciągiem geometrycznym.

Zadanie 5.12. Ciąg $(5x - 12,\ x,\ 8 - x)$ jest ciągiem geometrycznym. Znajdź wszystkie możliwe ilorazy tego ciągu.

Zadanie 5.13. Ciąg (a, b, c) jest ciągiem arytmetycznym i suma jego wyrazów wynosi 33. Wyznacz ten ciąg wiedząc, że $(a-5, b-1, c+8)$ jest ciągiem geometrycznym.

Zadanie 5.14. Ciąg dany jest wzorem $c_n = \frac{16}{2^n}$, dla $n > 0$. Wyznacz sumę wszystkich c_i, takich że $2|i$ lub $3|i$.

Zadanie 5.15. Kolejne kąty wewnętrzne pięciokąta tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy $10°$. Wyznacz miarę największego kąta.

Zadanie 5.16. Mamy dane dwa ciągi liczbowe (a_n) oraz (x_n) takie, że $a_n = a^{x_n}$, dla $n \geqslant 1$, $a > 1$. Pokaż, że (a_n) jest ciągiem geometrycznym wtedy i tylko wtedy, gdy (x_n) jest ciągiem arytmetycznym.

Zadanie 5.17. Niech S oznacza sumę ciągu geometrycznego (a_n). Pokaż, że jeśli iloraz ciągu spełnia

$$q = \frac{S}{1+S}$$

to pierwszy wyraz ciągu jest równy ilorazowi.

Zadanie 5.18. Wykaż, że suma n pierwszych wyrazów ciągu geomerycznego wyraża się wzorem

$$S_n = a_1 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right)$$

Zadanie 5.19. Znajdź wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^4 - 5x^2 + m = 0$ ma cztery różne pierwiastki, które tworzą ciąg arytmetyczny.

Zadanie 5.20. Rozwiąż dla x

$$a \cdot a^x \cdot a^{x^2} \cdots = a^2$$

Zadanie 5.21. Ciąg (a_n) jest skończonym ciągiem geometrycznym o 50 wyrazach. Suma wyrazów, których indeks daje resztę 1 przy dzieleniu przez 5 jest 10 razy mniejszy od sumy wyrazów, których indeks daje resztę 2 przy dzieleniu przez 5. Policz a_1 jeśli

$$\log_{10} a_1 + \cdots + \log_{10} a_{50} = 5$$

Zadanie 5.22. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny i jego ciąg sum częściowych wyraża się wzorem $S_n = -2n^2 + 4n$. Policz sumę wyrazów nieskończonego ciągu (b_n) jeśli

$$b_n = \frac{3^{a_{2n}}}{(-3)^{a_n}}$$

Zadanie 5.23. Wyznacz przedziały monotoniczności ciągu (a_n) danego wzorem $a_n = n(-1)^n + 3^n$.

Zadanie 5.24. Rozpatrujemy dwa ciągi liczbowe (a_n) i (b_n) dane wzorami: $a_n = 3\frac{n+1}{n}$, $b_n = na_{3n} - a_n$. Pokaż, że $b_n > 0$ dla każdego $n \geqslant 1$ oraz że ciąg (b_n) jest roznący.

Rozdział 6

Planimetria

6.1 Zadania zamknięte

6.2 Zadania otwarte

Zadanie 6.1. Jak znaleźć odległość między dwoma punktami, do których nie możemy dojść? Załóżmy, że stoimy przy rzece, a po jej przeciwnej stronie stoją dwa drzewa. Jak musimy postępować, aby zmierzyć odległość między tymi drzewami, bez przechodzenia przez rzekę? Zakładamy, że potrafimy zmierzyć odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami po naszej stronie rzeki, oraz wyznaczać dokładne kąty proste.

Rozdział 7

Trygonometria

7.1 Zadania zamknięte

Zadanie 7.1. Jeżeli α, β, γ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta, to zachodzi

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\gamma$

c) $\sin(\alpha + \beta) = -\sin\gamma$

d) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$

7.2 Zadania otwarte

Zadanie 7.2. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $\cos(2x) + 2\sin(x) = \frac{3}{2}$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 7.3. Rozwiąż równanie $-\cos^3 x - 3\sin^2 x + 6 = 5\cos x$ dla liczb rzeczywistych.

Zadanie 7.4. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $\sin x |\cos x| = 0,25$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Zadanie 7.5. Dane jest równanie $\sin x \cdot \cos x = a^2 - 1$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których dane równanie nie ma rozwiązań.

Zadanie 7.6. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$\sin(15^\circ + 2x) + \sin(15^\circ - 2x) = \sqrt{3}\sin 15^\circ$$

Zadanie 7.7. Dany jest trójkąt prostokątny, taki że suma cosinusów jego kątów ostrych równa się $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Policz iloczyn sinusów kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 7.8. Rozwiąż równanie $\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2x = -\cos x$.

Zadanie 7.9. Rozwiąż nierówność

$$\frac{2\sin x - 1}{\sin^2 x} < 0$$

Zadanie 7.10. Rozwiąż nierówność $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x < 2\sin 2x$.

Zadanie 7.11. Oblicz $3\operatorname{ctg}\alpha$ wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Zadanie 7.12. Kąt α jest ostry oraz

$$\frac{16}{\sin^2\alpha} + \frac{16}{\cos^2\alpha} = 9.$$

Policz iloczyn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

Zadanie 7.13. Znajdź wartość wyrażenia

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$$

wiedząc, że $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = 4$ i α jest kątem ostrym.

Zadanie 7.14. Udowodnij tożsamość

$$\tan^2(x) - \sin^2(x) = \tan^2(x)\sin^2(x)$$

Rozdział 8

Granice

8.1 Zadania otwarte

Zadanie 8.1. Wyznacz wartość a jeśli

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-an+2a)^3}{3n^3-n^2+n-3} = -\frac{10}{9}$$

Zadanie 8.2. Oblicz granice

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{\sqrt{3n^2+4n}-n}$$

Zadanie 8.3. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}+2^n-3}{4^n-3^n+2\cdot 2^n}$$

Zadanie 8.4. Niech $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{10-2n}\right)^\alpha$. Dla jakich $\alpha > 0$ granica

$$\lim_{n\to+\infty} a_n n^2$$

jest skończona?

Zadanie 8.5. Zbadaj czy ciąg $(a_n) \,:\, a_n = n + (-1)^n$ posiada granicę.

Zadanie 8.6. Wiedząc, że

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

policz bardziej skomplikowaną granicę

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\cdot 5^n+5}$$

Zadanie 8.7. Oblicz granicę

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[x]{2}-1)$$

Zadanie 8.8. W zbiorniku znajduje się 100 l płynu, który jest mieszaniną soli z wodą o stężeniu 10%. Zostaje otwarty zawór, znajdujący się na dnie zbiornika, który w ciągu minuty odprowadza 10 l płynu. W tym samym czasie odkręcamy również kran, który wlewa czystą wodę do zbiornika w tempie 10 l/min. Zakładając, że płyn jest przez cały czas dokładnie mieszany, policz po jakim czasie stężenie procentowe mieszaniny spadnie do 1%.

Rozdział 9

Rachunek różniczkowy

9.1 Zadania zamknięte

Zadanie 9.1. Funkcja $f(x) = 3x^3 + x - 3$ jest

a) rosnąca w przedziale $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$ i malejąca w $(-\infty; -\sqrt{3}\rangle \cup \langle \sqrt{3}; +\infty)$

b) rosnąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{3}\rangle \cup \langle \sqrt{3}; +\infty)$ i malejąca w $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$

c) rosnąca w przedziale $(-\infty; -\frac{1}{3}\rangle \cup \langle \frac{1}{3}; +\infty)$ i malejąca w $\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \rangle$

d) rosnąca w całej swojej dziedzinie

Zadanie 9.2. Równanie $(\sin^2 2x)' = 0$ ma w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$

a) dokładnie dwa rozwiązania

b) dokładnie cztery rozwiązania

c) dokładnie pięć rozwiązań

d) nieskończenie wiele rozwiązań

9.2 Zadania otwarte

Zadanie 9.3. Znajdź wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f(x) = x^5 - 10x^2 + ax$ jest różnowartościowa.

Zadanie 9.4. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^2 - x + \log x$ określona dla $x \in \mathbb{R}_+$ jest różnowartościowa.

Zadanie 9.5. Dane są dwie parabole o równaniach $y = x^2+1$ i $y = -x^2-2$. Wyznacz równania wszystkich takich prostych, że są one jednocześnie styczne do wykresów obu parabol.

Zadanie 9.6. Wykaż, że wielomian $\frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 8x + 6$ nie posiada pierwiastków rzeczywistych.

Odpowiedzi i rozwiązania

d) d)