Matematyka - poziom rozszerzony

Zbiór zadań przygotowujący do matury z matematyki na poziomie rozszerzonym

Marek Smolarczyk

v. 1.5.3.

2 kwietnia 2017

Spis treści

Rozdział 1

Wyrażenia algebraiczne

1.1 Zadania zamknięte

1.2 Zadania otwarte

Zadanie 1.1. Kran A napełnia całą wannę w 4 minuty, a kran B w 6 minut. Ile sekund zajmie napełnienie całej wanny, jeśli odkręcimy oba krany jednocześnie?

Zadanie 1.2. Jan maluje cały płot w 48 minut, podczas gdy Tomek robi to w 1 godzinę. Ile czasu zajmie pomalowanie całego płotu, jeśli przez pierwsze 12 minut Jan i Tomek pracują razem, a resztę czasu Jan pracuje sam?

Zadanie 1.3. Wiedząc, że $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$, wyznacz wartości liczb a, b.

Zadanie 1.4. Udowodnij, że równanie $x^2 - y^2 = 2014$ nie posiada rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 1.5. Udowodnij, że równanie $x^3 - 8y^3 = 10$ nie posiada rozwiązań w liczbach naturalnych.

Zadanie 1.6. Znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 3xyz$$

w liczbach naturalnych, takie że $x \leqslant y \leqslant z$.

Zadanie 1.7. Pierwsza świeca spala się równomiernie w czasie 4 h, a druga w 5 h. Po jakim czasie od jednoczesnego zapalenia świec jedna z nich będzie 3 razy dłuższa od drugiej?

Rozdział 2

Funkcje

2.1 Zadania otwarte

Zadanie 2.1. Czy istnieje funkcja jednocześnie parzysta i nieparzysta? Jeśli tak, to podaj przykład, a jeśli nie, to udowodnij dlaczego taka funkcja nie istnieje.

Zadanie 2.2. Czy istnieje funkcja okresowa, której okresem jest każda liczba rzeczywista $t > 0$? Jeśli tak, to podaj przykład, a jeśli nie, to udowodnij dlaczego taka funkcja nie istnieje.

Zadanie 2.3. Wyznacz dziedzinę funkcji $\log_{x^2-4x+1}(x^2+3x)$.

Zadanie 2.4. Wyznacz zbiór wartości funkcji $2 \cdot |5x^2 - 2|$ określonej na przedziale zamkniętym $\langle -1, 1\rangle$.

Zadanie 2.5. Wykonaj wykres funkcji $f(x) = |log_2(3x+6)|$ i wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $f(x) = k - 1$ ma dwa pierwiastki przeciwnych znaków.

Zadanie 2.6. Wykonaj wykres funkcji $f(x) = |3^{|x-1|} - 2|$ i wyznacz ilość rozwiązań równania $f(x) = k$ w zależności od parametru k.

Zadanie 2.7. Niech $f(x) = |x^2 - 3|x| + 2|$. Wyznacz ilość rozwiązań równania $f(x) = k$ w zależności od parametru k.

Zadanie 2.8. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^2 - x + \log x$ określona dla $x \geqslant 1$ jest różnowartościowa.

Rozdział 3

Wielomiany

3.1 Zadania zamknięte

Zadanie 1. Reszta z dzielenia wielomianu $x^3 - 4x^2 + x - 3$ przez $2x - 1$ wynosi

a) $-\frac{5}{2}$ b) -5 c) -9 d) $-\frac{27}{8}$

Zadanie 3.1. Ile różnych rozwiązań w zależności od parametru m może mieć równanie $x^3 - 2mx^2 - 6x + 12m = 0$?

a) Jedno lub dwa rozwiązania

b) Tylko dwa rozwiązania

c) Dwa lub trzy rozwiązania

d) Tylko trzy rozwiązania

Zadanie 3.2. Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - (k + 3)x + 9$. Wartość k wynosi

a) 9 b) -15 c) 3 d) -6

Zadanie 3.3. Wielomiany $W(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24$ oraz $Q(x) = (a - b)x^4 + 2x^3 + (2b - 1)x^2 - 38x + 6a - b$ są równe dla wartości parametrów

a) takie wartości nie istnieją

b) $a = -3$, $b = -6$

c) $a - -3$, $b = -4$

d) $a = -5$, $b = -6$

Zadanie 3.4. Resztą z dzielenia wielomianu $-x^3 - 3x^2 + kx + 8$ przez dwumian $x - 1$ jest równa 10. Wartość parametru k wynosi

a) 4 b) -4 c) 6 d) -6

Zadanie 3.5. Wielomian stopnia trzeciego $W(x)$ jest funkcją nieparzystą i $W(1) = 0$. Ile różnych pierwiastków może mieć ten wielomian?

a) Tylko jeden pierwiastek

b) Jeden lub trzy pierwiastki

c) Tylko trzy pierwiastki

d) Taki wielomian nie istnieje

Zadanie 3.6. Dany jest wielomian $W(x) = x^4 - 7x^2 + 6x$. Zaznacz prawdziwe stwierdzenie.

a) Równanie $W(x) = 0$ ma dwa rozwiązania dodatnie.

b) Równanie $W(x) = 0$ ma dwa rozwiązania ujemne.

c) Równanie $W(x) = 0$ ma tylko dwa rozwiązania.

d) $W(x)$ nie da się zapisać w postaci iloczynu czterech czynników stopnia pierwszego.

Zadanie 3.7. Wiadomo, że wielomian $W(x) = x^3 + ax^2 - ax - 1$ jest podzielny przez dwumian $x + 1$. Zatem reszta z dzielenia tego wielomianu przez dwumian $x + 2$ jest równa

a) $x + 1$ b) -3 c) 1 d) 7

3.2 Zadania otwarte

Zadanie 3.8. Wielomian $x^3 + bx^2 + cx + 4$ ma trzy pierwiastki rzeczywiste równe x_1, x_2, x_3. Wiedząc, że reszta z dzielenia tego wielomianu przez trójmian $x^2 + 2$ wynosi $-6x + 8$, wyznacz wartość wyrażenia $x_1(x_2 + x_3 + 1) + x_2(x_3 + 1) + x_3$.

Zadanie 3.9. Wyznacz resztę z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez trójmian $(x - 5)(x + 1)$ wiedząc, że $W(5) = 10$ i $W(-1) = 4$.

Zadanie 3.10. Pan Jan posiada $60m$ płotu i chce ogrodzić swoją posesję, tak żeby wybudowane ogrodzenie było w kształcie prostokąta. Na południowej stronie działki stoi już brama o długości dwóch metrów, która ma stanowić wejście na ogrodzoną posesję. Wyznacz funkcję f, która dla długości wschodniej części płotu w metrach, zwróci pole powierzchni ogrodzonej działki (w m^2). Podaj wymiary płotu, dla którego pole powierzchni ogrodzonej działki będzie największe.

Zadanie 3.11. Pierwiastki wielomianu $2x^3 + x^2 - 13x + 6$ są liczbami wymiernymi. Wyznacz te pierwiastki i zapisz dany wielomian w postaci iloczynu czynników maksymalnie pierwszego stopnia.

Zadanie 3.12. Liczby a, b, c są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 - 23x + 60$. Oblicz wartość wyrażenia $(a + 1)(b + 1)(c + 1)$.

Zadanie 3.13. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których pierwiastkiem trójmianu $8x^2 + (2m + 1)x + 2m - 1$ jest właśnie wartość m.

Zadanie 3.14. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których suma odwrotności dwóch różnych pierwiastków równania

$$(m + 2)x^2 + 2mx + 1 = 0$$

jest mniejsza od 8.

Zadanie 3.15. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których mniejszy z pierwiastków równania

$$(m - 2)x^2 + (2m + 1)x + 1 = 0$$

jest mniejszy niż 1, ale większy od -2.

Zadanie 3.16. Znajdź wielomian $W(x)$, który jest podzielny przez trójmian $x^2 - 1$, jego pierwiastkiem jest liczba 3, a jego wykres przecina oś rzędnych w punkcie $(0, 6)$.

Rozdział 4

Funkcje wymierne

4.1 Zadania zamknięte

Zadanie 4.1. Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ jest

a) przedział $\langle -\frac{1}{2}; +\infty)$

b) przedział $\langle -\frac{9}{4}; +\infty)$

c) zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

d) zbiór $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$

4.2 Zadania otwarte

Zadanie 4.2. Wyznacz dziedzinę, zbiór wartości, przedziały monotoniczności oraz pierwiastki funkcji

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$$

Zadanie 4.3. Dla danych wartości parametru m wyznacz przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = \frac{mx - 1}{x + 1}$$

Zadanie 4.4. Znajdź wszystkie rozwiązania równości

$$\frac{x^3 + 3x^2 + x - 5}{x - 1} = 1$$

Zadanie 4.5. Rozwiąż nierówność

$$\frac{x^3+4x^2+4x+2}{x+2} > \frac{2x+2}{x^2+3x+2}$$

Zadanie 4.6. Rozwiąż nierówność

$$\frac{x^4-1}{x-1} \geqslant 1 + \frac{x+x^2}{x^3+1}$$

Zadanie 4.7. Rozwiąż nierówność

$$\frac{x^3+(1-m)x^2+(1-m)x-m}{2x-m} \geqslant 0$$

traktując x jako zmienną, a m jako parametr.

Zadanie 4.8. Przedstaw w postaci ilorazu dwóch wielomianów funkcję homograficzną, której dziedziną jest suma przedziałów $(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty)$, asymptotą poziomą jest $y=-1$, a wykres tej funkcji przecina oś odciętych w punkcie $(-3,0)$.

Zadanie 4.9. Znajdź rozwiązania nierówności

$$\frac{x-2}{x+1} > |2x-3|$$

Zadanie 4.10. *(Wymaga znajomości rachunku różniczkowego)* Znajdź ilość rozwiązań równania

$$\frac{x^2+x+8}{2x+5} = a^2-4a$$

w zależności od wartości parametru a.

Zadanie 4.11. Funkcja $f(x)$ określona jest wzorem $f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$, dla $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Rozwiąż nierówność $f(x)>f(1-x)$.

Zadanie 4.12. Wyznacz wszystkie liczby naturalne spełniające nierówność

$$\frac{x^2-25}{(x^2+2)(2-x)} \geqslant 0$$

Zadanie 4.13. Rozwiązaniem nierówności

$$\frac{4x-4a}{x+3} \geqslant ax$$

jest zbiór $(-\infty;-3) \cup \langle 1;4\rangle$. Wyznacz wartość parametru a.

Zadanie 4.14. Największą wartością funkcji $f(x) = \frac{ax+1}{x-1}$ w przedziale $\langle -4;-1\rangle$ jest -1.5. Policz a.

Zadanie 4.15. Rozwiąż równanie

$$x = \left|\frac{2x-3}{3x+2}\right|$$

Zadanie 4.16. Rozwiąż nierówność

$$\frac{|6x^2+9x-6|}{|x-\frac{1}{2}|} > -x$$

Zadanie 4.17. Na placu zabaw znajdują się dwie prostokątne piaskownice. Pierwsza ma powierzchnię $10m^2$, a druga $9m^2$ i jest o $2m$ węższa i o $2m$ dłuższa od pierwszej. Oblicz wymiary piaskownic.

Rozdział 5

Planimetria

5.1 Zadania zamknięte

5.2 Zadania otwarte

Zadanie 5.1. Jak znaleźć odległość między dwoma punktami, do których nie możemy dojść? Załóżmy, że stoimy przy rzecze, a po jej przeciwnej stronie stoją dwa drzewa. Jak musimy postępować, aby zmierzyć odległość między tymi drzewami, bez przechodzenia przez rzekę? Zakładamy, że potrafimy zmierzyć odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami po naszej stronie rzeki, oraz wyznaczać dokładne kąty proste.

Zadanie 5.2. Mamy dane dwa współśrodkowe okręgi o promieniach długości 3 i 1. Cięciwa AB większego okręgu jest styczna do mniejszego okręgu. Ile wynosi pole koła o średnicy AB?

Zadanie 5.3. W trójkąt ABC o bokach $|AC| = 13, |BC| = 15, |AB| = 14$ wpisano półokrąg, tak, że jego środek leży na boku AB i jest on styczny do boków AC i BC. Oblicz długość promienia tego półokręgu.

Rozdział 6

Trygonometria

6.1 Zadania zamknięte

Zadanie 6.1. Jeżeli α, β, γ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta, to zachodzi

a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$

b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\gamma$

c) $\sin(\alpha + \beta) = -\sin\gamma$

d) $\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$

Rozdział 7

Granice

7.1 Zadania otwarte

Zadanie 7.1. W zbiorniku znajduje się 100 l płynu, który jest mieszaniną soli z wodą o stężeniu 10%. Zostaje otwarty zawór, znajdujący się na dnie zbiornika, który w ciągu minuty odprowadza 10 l płynu. W tym samym czasie odręcamy również kran, który wlewa czystą wodę do zbiornika w tempie 10 l/min. Zakładając, że płyn jest przez cały czas dokładnie mieszany, policz po jakim czasie stężenie procentowe mieszniny spadnie do 1%.

Rozdział 8

Rachunek różniczkowy

8.1 Zadania zamknięte

Zadanie 8.1. Funkcja $f(x) = 3x^3 + x - 3$ jest

a) rosnąca w przedziale $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$ i malejąca w $(-\infty; -\sqrt{3}\rangle \cup \langle \sqrt{3}; +\infty)$

b) rosnąca w przedziale $(-\infty; -\sqrt{3}\rangle \cup \langle \sqrt{3}; +\infty)$ i malejąca w $\langle -\sqrt{3}; \sqrt{3} \rangle$

c) rosnąca w przedziale $(-\infty; -\frac{1}{3}\rangle \cup \langle \frac{1}{3}; +\infty)$ i malejąca w $\langle -\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \rangle$

d) rosnąca w całej swojej dziedzinie

Zadanie 8.2. Równanie $(\sin^2 2x)' = 0$ ma w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$

a) dokładnie dwa rozwiązania

b) dokładnie cztery rozwiązania

c) dokładnie pięć rozwiązań

d) nieskończenie wiele rozwiązań

Zadanie 8.3. Znajdź wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $f(x) = x^5 - 10x^2 + ax$ jest różnowartościowa.

Zadanie 8.4. Udowodnij, że funkcja $f(x) = x^2 - x + \log x$ określona dla $x \in \mathbb{R}_+$ jest różnowartościowa.

Odpowiedzi i rozwiązania

d) d)