Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Алиева Милена Арифовна

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Содержание

Содержание

Цель

Цель

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне

Задание

Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 9,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,7 раза больше скорости браконьерской лодки.

Задание

Задание

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

Порядок выполнения

Порядок выполнения

1. Формула для выбора варианта: `(1132226430%70)+1` = 21 вариант.

Порядок выполнения

2. Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Порядок выполнения

Порядок выполнения

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Порядок выполнения

Порядок выполнения

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{3.7v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{3.7v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{3.7v}$$ – в первом случае

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{3.7v}$$ – во втором

Порядок выполнения

Порядок выполнения

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{9.4}{4.7}$ и $x_2 = \frac{9.4}{2.7}$, задачу будем решать для двух случаев. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и - v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $r\frac{d\theta}{dt}$.

Порядок выполнения

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{13.69v^2 - v^2} = \sqrt{12.69}v$$

Из чего можно вывести:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{12.69}v$$

Порядок выполнения

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{12.69}v \end{cases}$$

Порядок выполнения

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \dfrac{9.4}{4.7} \end{cases} \tag{1}$$

Порядок выполнения

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \dfrac{9.4}{2.7} \end{cases} \tag{2}$$

Порядок выполнения

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{12.69}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Порядок выполнения

Порядок выполнения

3. Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека DifferentialEquations. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку Plots. Загрузим дополнительно эти библиотеки.

Порядок выполнения

Установим Julia, настроим работу в Jupyter notebook (рис. (**fig:001?**)):

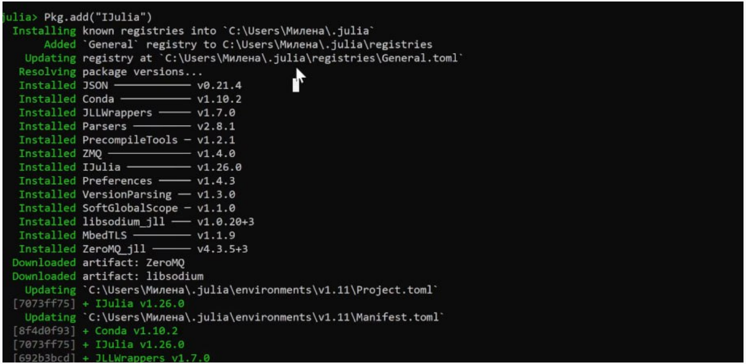

Рис. 1: Настройка Julia

Порядок выполнения

4. Далее разработаем код для решения дифференциального уравнения и построения изображения:

Код:

```
using Plots
using DifferentialEquations

# расстояние от лодки до катера
const a = 9.4
const n = 3.7

# расстояние начала спирали
const r0 = a/(n + 1)  # начальное расстояние для первого случая
```

Порядок выполнения

```
# интервал времени
const T = (0, 2*pi)    # интервал времени для первого случая
const T_2 = (-pi, pi)  # интервал времени для второго случая

# функция, описывающая изменение радиуса в зависимости от времени
function F(u, p, t)
    return u / sqrt(n*n - 1)  # уравнение ОДУ
end
```

Порядок выполнения

Порядок выполнения

```
# задача ОДУ для первого случая
problem = ODEProblem(F, r0, T)

# решение задачи ОДУ
result = solve(problem, abstol=1e-8, reltol=1e-8)
@show result.u  # вывод значений радиуса
@show result.t   # вывод значений времени

# генерация случайных индексов для выбора углов
dxR = rand(1:size(result.t)[1])
rAngles = [result.t[dxR] for i in 1:size(result.t)[1]]  # выбор случайных угл
```

Порядок выполнения

```
# создание первого холста
plt = plot(proj=:polar, aspect_ratio=:equal, dpi = 1000, legend=true, bg=:whi

# параметры для первого холста
plot!(plt, xlabel="theta", ylabel="r(t)", title="Задача о погоне - случай 1",
plot!(plt, [rAngles[1], rAngles[2]], [0.0, result.u[size(result.u)[1]]], labe
scatter!(plt, rAngles, result.u, label="", mc=:blue, ms=0.0005)  # точки пути
plot!(plt, result.t, result.u, xlabel="theta", ylabel="r(t)", label="Путь кат
scatter!(plt, result.t, result.u, label="", mc=:green, ms=0.0005)  # точки пу

# сохранение первого холста в файл
savefig(plt, "lab02_01.png")
```

Порядок выполнения

```
# задача ОДУ для второго случая
problem = ODEProblem(F, r0_2 , T_2)
result = solve(problem, abstol=1e-8, reltol=1e-8)
dxR = rand(1:size(result.t)[1])  # генерация случайных индексов для второго с
rAngles = [result.t[dxR] for i in 1:size(result.t)[1]]  # выбор случайных угл

# создание второго холста
plt1 = plot(proj=:polar, aspect_ratio=:equal, dpi = 1000, legend=true, bg=:wh
```

Порядок выполнения

```
# параметры для второго холста
plot!(plt1, xlabel="theta", ylabel="r(t)", title="Задача о погоне - случай 2"
plot!(plt1, [rAngles[1], rAngles[2]], [0.0, result.u[size(result.u)[1]]], lab
scatter!(plt1, rAngles, result.u, label="", mc=:blue, ms=0.0005)  # точки пут
plot!(plt1, result.t, result.u, xlabel="theta", ylabel="r(t)", label="Путь ка
scatter!(plt1, result.t, result.u, label="", mc=:green, ms=0.0005)  # точки п

# сохранение второго холста в файл
savefig(plt1, "lab02_02.png")
```

Порядок выполнения

Порядок выполнения

5. Получим два изображения - для первого и для второго случаев (рис. (fig:002?)), (рис. (fig:003?)):

Порядок выполнения

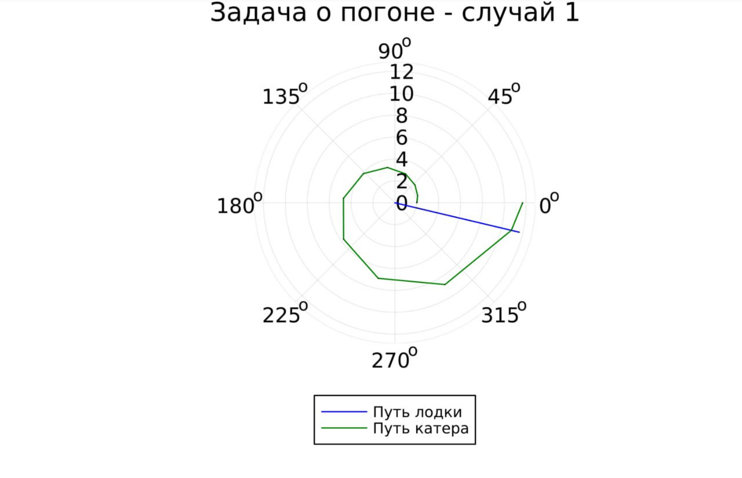

Рис. 2: Изображение для первого случая

Порядок выполнения

Рис. 3: Изображение для второго случая

Выводы

Выводы

В процессе выполнения лабораторной работы №2 я научилась строить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне