Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Алиева Милена Арифовна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 9,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,7 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

3 Выполнение лабораторной работы

1. Формула для выбора варианта: `(1132226430%70)+1` = 21 вариант.

2. Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0, x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_{k0} ($\theta = x_{k0} = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{3.7v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{3.7v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{3.7v} \text{ – в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{3.7v} \text{ – во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{9.4}{4.7}$ и $x_2 = \frac{9.4}{2.7}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и - v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $r\frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{13.69v^2 - v^2} = \sqrt{12.69}v$$

Из чего можно вывести:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{12.69}v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{12.69}v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \dfrac{9.4}{4.7} \end{cases} \tag{1}$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \dfrac{9.4}{2.7} \end{cases} \tag{2}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{12.69}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

3. Решить дифференциальное уравнение, расписанное в постановке задачи лабораторной работы, поможет библиотека DifferentialEquations. Итоговые изображения в полярных координатах будут строиться через библиотеку Plots. Загрузим дополнительно эти библиотеки.

Установим Julia, настроим работу в Jupyter notebook (рис. 3.1):

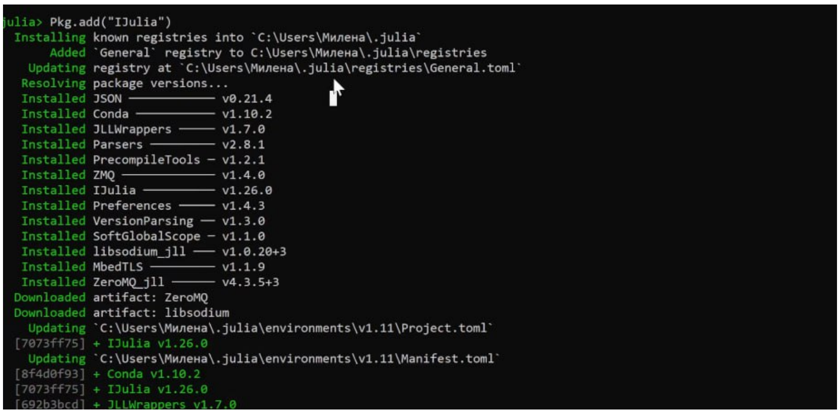

Рис. 3.1: Настройка Julia

4. Далее разработаем код для решения дифференциального уравнения и построения изображения:

Код:

```
using Plots
using DifferentialEquations

# расстояние от лодки до катера
const a = 9.4
const n = 3.7

# расстояние начала спирали
const r0 = a/(n + 1)  # начальное расстояние для первого случая
const r0_2 = a/(n - 1) # начальное расстояние для второго случая

# интервал времени
const T = (0, 2*pi)    # интервал времени для первого случая
const T_2 = (-pi, pi)  # интервал времени для второго случая
```

```
# функция, описывающая изменение радиуса в зависимости от времени
function F(u, p, t)
    return u / sqrt(n*n - 1)  # уравнение ОДУ
end

# задача ОДУ для первого случая
problem = ODEProblem(F, r0, T)

# решение задачи ОДУ
result = solve(problem, abstol=1e-8, reltol=1e-8)
@show result.u  # вывод значений радиуса
@show result.t   # вывод значений времени

# генерация случайных индексов для выбора углов
dxR = rand(1:size(result.t)[1])
rAngles = [result.t[dxR] for i in 1:size(result.t)[1]]  # выбор случайных углов

# создание первого холста
plt = plot(proj=:polar, aspect_ratio=:equal, dpi = 1000, legend=true, bg=:white)

# параметры для первого холста
plot!(plt, xlabel="theta", ylabel="r(t)", title="Задача о погоне - случай 1", leg
plot!(plt, [rAngles[1], rAngles[2]], [0.0, result.u[size(result.u)[1]]], label="Г
scatter!(plt, rAngles, result.u, label="", mc=:blue, ms=0.0005)  # точки пути лод
plot!(plt, result.t, result.u, xlabel="theta", ylabel="r(t)", label="Путь катера"
scatter!(plt, result.t, result.u, label="", mc=:green, ms=0.0005)  # точки пути к

# сохранение первого холста в файл
savefig(plt, "lab02_01.png")
```

```
# задача ОДУ для второго случая
problem = ODEProblem(F, r0_2 , T_2)
result = solve(problem, abstol=1e-8, reltol=1e-8)
dxR = rand(1:size(result.t)[1])  # генерация случайных индексов для второго случа
rAngles = [result.t[dxR] for i in 1:size(result.t)[1]]  # выбор случайных углов

# создание второго холста
plt1 = plot(proj=:polar, aspect_ratio=:equal, dpi = 1000, legend=true, bg=:white)

# параметры для второго холста
plot!(plt1, xlabel="theta", ylabel="r(t)", title="Задача о погоне - случай 2", le
plot!(plt1, [rAngles[1], rAngles[2]], [0.0, result.u[size(result.u)[1]]], label="
scatter!(plt1, rAngles, result.u, label="", mc=:blue, ms=0.0005)  # точки пути лс
plot!(plt1, result.t, result.u, xlabel="theta", ylabel="r(t)", label="Путь катера
scatter!(plt1, result.t, result.u, label="", mc=:green, ms=0.0005)  # точки пути

# сохранение второго холста в файл
savefig(plt1, "lab02_02.png")
```

5. Получим два изображения - для первого и для второго случаев (рис. 3.2), (рис. 3.3):

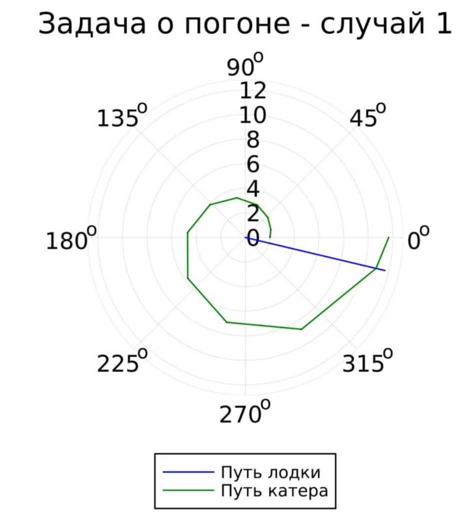

Рис. 3.2: Изображение для первого случая

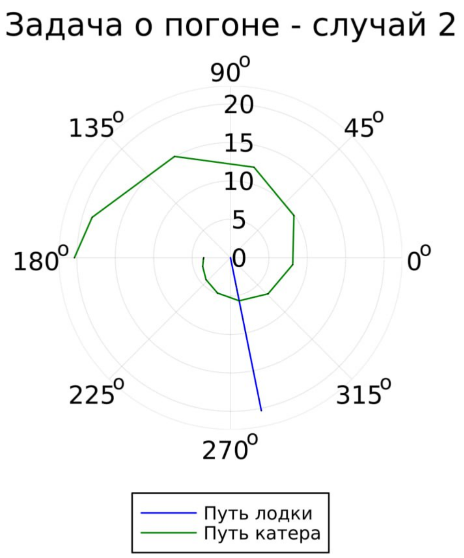

Рис. 3.3: Изображение для второго случая

4 Выводы

В процессе выполнения лабораторной работы №2 я научилась строить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.