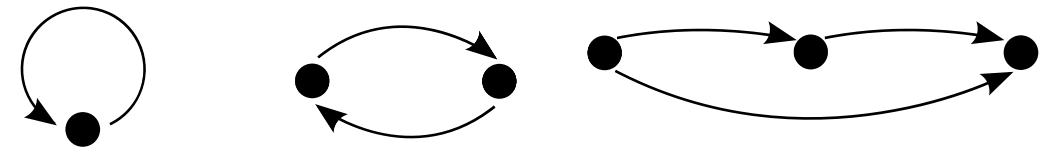
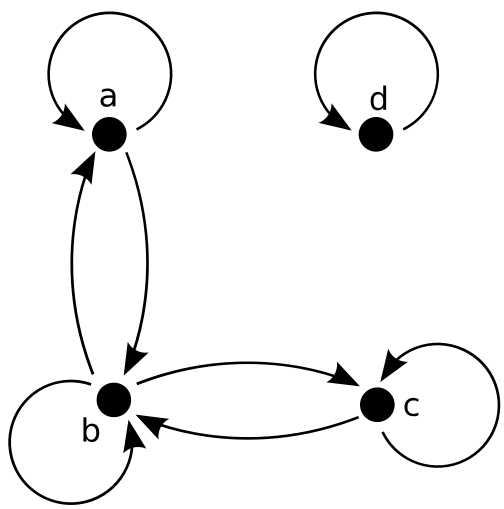
2011-(02)feb-16: dag 9

1a)

Reflexiv Symmetrisk Transitiv

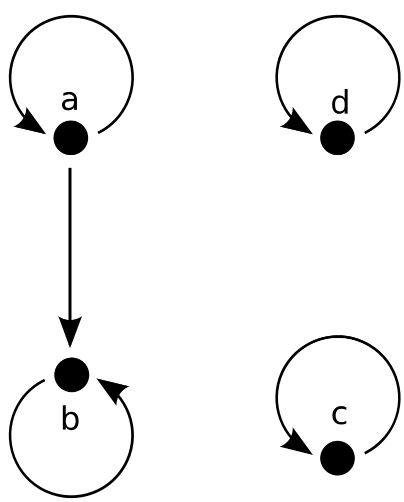




$\mathcal{R}$ = {(a; a), (b; b), (c; c), (d; d), (a; b), (b; a), (b; c), (c; b)}

Inte transitiv ty a$\mathcal{R}$b, b$\mathcal{R}$c, men inte a$\mathcal{R}$c.

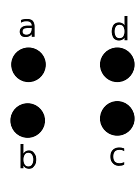
b)



$\mathcal{R}$ = {(a; a), (b; b), (c; c), (d; d), (a; b)}

Transitiv ty x$\mathcal{R}$y och y$\mathcal{R}$z ⇒ x$\mathcal{R}$z.
(uppstår om x = y = z eller om x = y = a, z = b)

c)



$\mathcal{R} = \varnothing$
Icke-reflexiv, symmetrisk och transitiv.

2) A är en mängd. Vilka binära relationer är både ekvivalensrelationen och partialordningen?

Ekvivalensrelationen:

Reflexiv,	symmetrisk,	transitiv	
$x\mathcal{R}x$	$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$	$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$	$\forall\ x, y, z \in A$

Partialordningen:

Reflexiv	antisymmetrisk	transistiv	
$x\mathcal{R}x$	$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$	$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$	$\forall\ x, y, z \in A$

Låt $a\mathcal{R}b$ då $b\mathcal{R}a$ (symmetrisk) så $a = b$ (antisymmetrisk)
och $a = b \Rightarrow a\mathcal{R}b$ (reflexiv) så $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a = b$,
så likhet är enda (eventuellt möjliga),
men = relationen är reflexiv, symmetrisk, antisymmetrisk och transitiv.
Så enda möjliga relationen är likhetsrelationen.

Ekvivalensklasser: $[x] = \{y \mid y \in A,\ y\ \mathcal{R}\ x\}$
$[x] = \{x\}$

3)

$2646000 = 2645 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^4 \cdot 5^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2$

$= 2 \cdot 1323 = 2 \cdot 3 \cdot 441 = 2 \cdot 3^2 \cdot 147 =$
$= 2 \cdot 3^3 \cdot 49 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2$

Varje delare har formen $2^{e_1} \cdot 3^{e_2} \cdot 5^{e_3} \cdot 7^{e_4}$,
med $0 \le e_1 \le 4$, $0 \le e_1, e_2 \le 3$, $0 \le e_4 \le 2$.

Alla olika e ger olika delare.

Multiplicationsprincipen:

Svar: $5{\cdot}4{\cdot}4{\cdot}3 = 240$ delare.

4)

$1,\dots,9$ $0,\dots,9$ $0,\dots,9$ $1,3,5,7,9$

$\_\_\ \_\_\ \_\_\ \_\_$

Svar: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot ?$

Istället $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$ stycken.

Ental Tusental

5)

Sökta antalet = totala antalet − antalet
sätt med L och O brevid varandra =

$= 13! - 2 \cdot 13 \cdot 11! =$

Övriga 11 persner på övriga stolar.

LO
OL

Vilken stol sitter L på

$= 13 \cdot 10 \cdot 11! =$ Massor!

Sats:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \forall\, n \geq 0$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \text{om } 0 < k < n$$

Välj ut $x_0 \in X$ (n-mängd) $\binom{n}{k}$ = antalet k-mängder till X = $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Exempel:

$$\binom{4}{3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} + 1 = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} + 1 + 1 = 4$$

Pascals triangel

$$\begin{array}{lccccccccccc}
0 & & & & & & 1 & & & & & \\
1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

0

1

$\ddots$

$\binom{4}{3}$

Sats: $$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binominalsatsen: $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

7a) Additionsprincipen

$$\binom{15}{2}\binom{11}{3} + \binom{15}{3}\binom{11}{2} + \binom{15}{4}\binom{11}{1} = \dots = 57365 \text{ sätt}$$

b) Totala antalet − specifika antalet

Specifikia $$\binom{14}{1}\binom{10}{2} + \binom{14}{2}\binom{10}{1} + \binom{14}{3}\binom{10}{0}$$

eller $$\binom{24}{3} - \binom{14}{0}\binom{10}{3} = 1904$$

57365 − 1904 = 55461