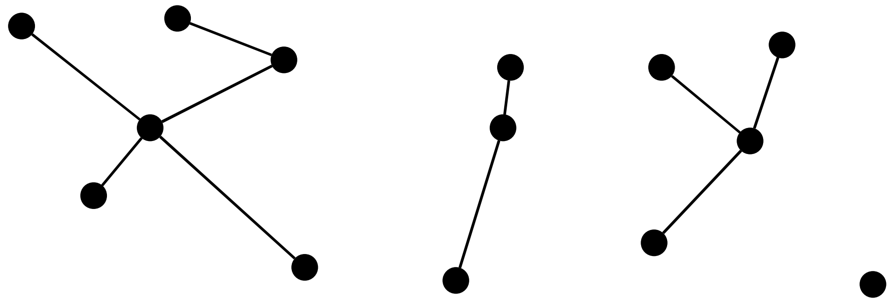
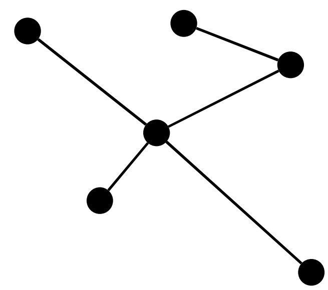
2011-(05)maj-03: dag 26

Skog:

En graf utan cykler kallas “skog”



Varje komponent i en skog kallas träd:



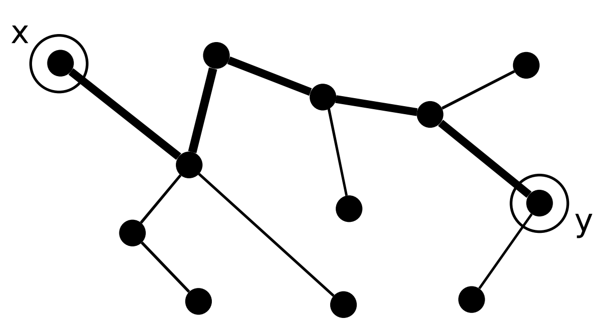
Ett träd är sammanhängande① och icke-cykliskt②.

Träd brukar betecknas T = (V, E) (eller T(V, E))

Sats:

Om T = (V, E) är ett träd:

③ För alla x, y ∈ V finns en unik stig mellan x och y.



④ Om en kant i ett träd tages bort, så delas trädet upp i två träd; grafen har då två komponenter istället för en.

⑤ |E| = |V| − 1 (om V ≠ ∅)

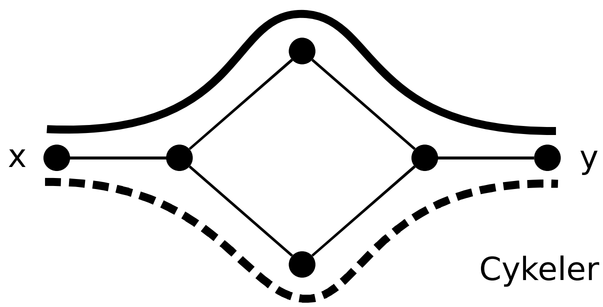
Anledning:

③ Kan används som en alternativ definition av träd.

③ ⇒ ① Enligt definition av sammanhängande.

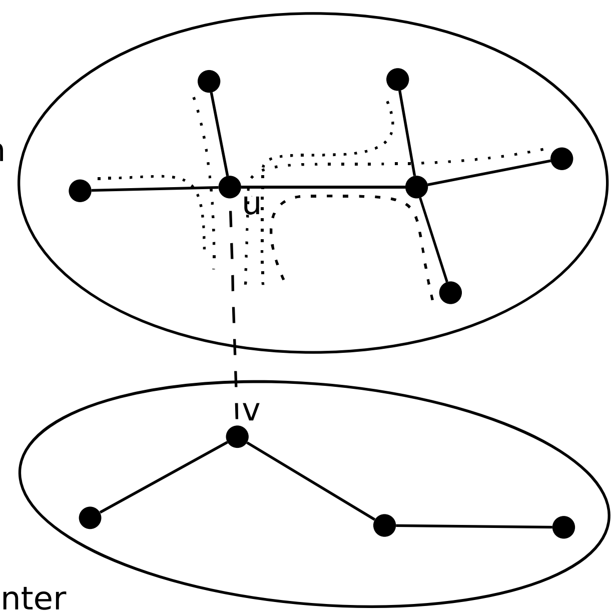
③ ⇒ ② Ty en cykel skulle ge 2 olika stigar mellan x och y på cykeln.

①, ② ⇒ ③ Från x till y finns minst en stig, om det finns två olika stigar så finns det en cykel.



Cykeler ger två stigar.

④ Om vi tar bort en godtycklig kant (här {uv}) så bildas två komponenter (de hörn vars stig till v passerar u, och de som inte gör det). Komponenterna är fortfarande träd eftersom ingen cykel har bildas.



⑤ Visas med induktion över $|E|$

Bas: Om $|E| = 0$, $|V| = 1$
(en hörn och ingenting mer) OK!

Steg: Antag sant för träd med färre kanter än $|E|$.

Tag bort en kant i $T = (V, E)$, då får man $T_1 = (V_1, E_1)$ och $T_2 = (V_2, E_2)$ enligt ④.

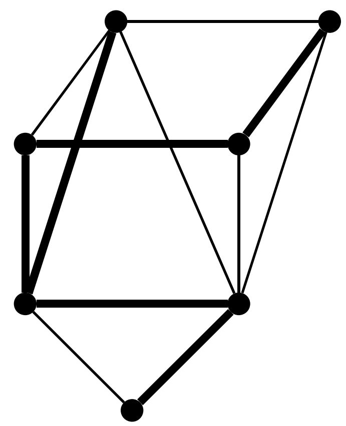
$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = \{\text{induktions antagende}\} = |V_1| - 1 + |V_2| - 1 +$
$+ 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = |V| - 1$

∎

Varje sammanhängande graf har minst ett (upp)spännande träd.
Det vill säga ett träd som innehåller en del av kanterna.

$T = (V, E') = E' \subseteq E$

Exempel (G är smalt och tjockt, T är tjockt):



Tag bort en kant i en graf så länge det går.

— eller —

Starta utan kanter och läg till kanter så länge det går utan att det bildas cykler.

För en viktad sammanhängande graf (kant e har vikten $\omega(e)$) kan man finna ett minimalt spännande träd, ett spännande träd med minimal viktsumma, med Kruskals algoritm.

Kruskals algoritm:

Lägg i vaje steg till den lättaste kanten som inte ger någon cykel med de redan valda.

Kruskals algoritm är en girig algoritm, det vill säga att den optimerar varje steg istället för att göra Brute Force (testa alla existerande varianter) eller planera i förväg.

Bevis:

Algoritmen ger ett spännande träd, T, med kanter, valda i ordningen e_1, e_2, …. Om T inte är minimalt, låt T_1 vara ett minimalt spännande träd med så många $e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}$ gemensamma med T_1 men inte e_k.

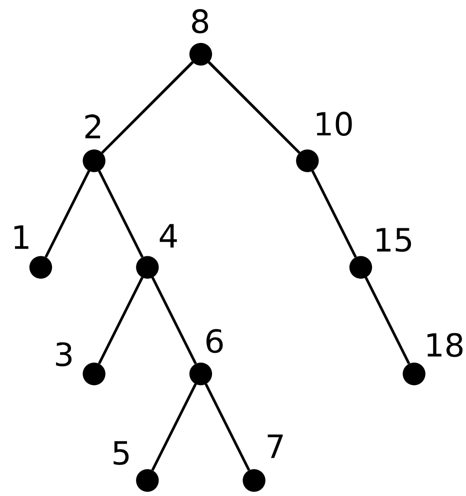
Om e_k läggs till T_1 fås en cykel med något e'_k som inte ligger i T.
$\omega(e'_k) \geq \omega(e_k)$ såsom T bildades, annars hade vi ju valt e'_k (såsom T valdes).

Om vi i T_1 ersätter e'_k med e_k så får vi et träd T_2 med vikt ≤ T_1 och en kant mer gemensam med T.

Det vill säga T_2:s vikt = T_1:s eftersom T_1 hade minimal vikt.

Motsäger valet av T_1, så T_1 = T.

Binära rotade träd



Viktiga för sortering.

Ett träd har ett hörn som utsetts till rot, varje hörn har högst två barn. Ett barn är grannar som inte leder mot roten. Grannar som leder mot roten kallas förfädrar, den första av dem kallas förälder.

Typisk användning:

Lagring och sökning av ordnad data.

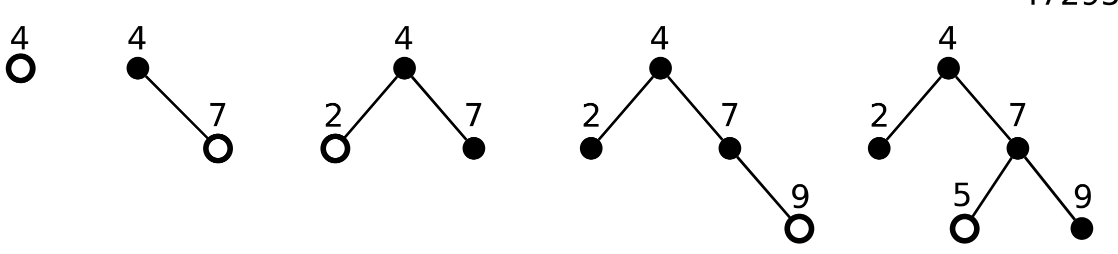
Element vid ett hörn:

Större än alla till vänster, mindre än alla till höger.

Ett lagringsträd skapas lätt rekursivt:

Om trädet är tomt:	skapa rot för trädet
annars:	talet > rot lägg till höger
	talet < rot lägg till vänster (något förenklat!)

47295

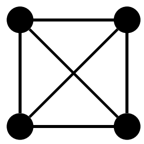


Planära grafer

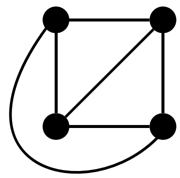
Om en graf är ritad i ett plan *eller på en sfär* utan att några kanter korsar, så kallas grafen plan

En planär graf är en graf som är isomorf med någon plan graf.

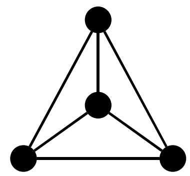
Exempel på isomorfa planära grafer (K_4):



inte plan

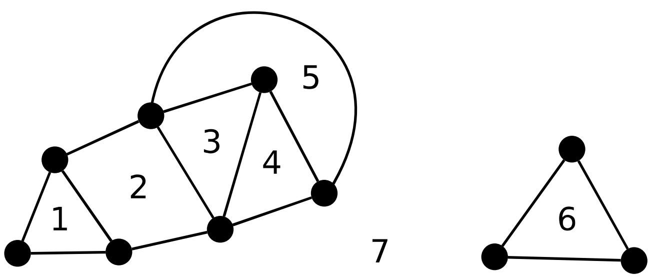


plan



plan

En plan graf definierar området i planet. Vi kallar dem ytor (fasetter i boken).
Om den plana grafen är ritad i ett plan fås en obegränsad yta.



v = 10 — hörn
e = 14 — kanter
r = 7 — ytor
c = 2 — komponenter

Sats:

För en plan graf med v hörn, e kanter, r ytor och c komponenter gäller:

$$v - e + r - c = 1$$

(mnemonik: verk!, naturligtvis med !)

Om grafen är sammanhängande (c = 1):

Eulers polyederformel:

$$v - e + r = 2$$

Bevis:

Induktion över e.

Bas:

Om $e = 0$; $c = v$, $r = 1$ OK!

Steg:

Antag att påståendet stämmer med $e = k$.
Låt G ha $e = k + 1$.

Tag bort en kant från G, få G'.

Två fall:

1) Samma yta på båda sidor om borttagna kanten.

Då har G' fler komponenter än G.

$v' = v$ $\quad$ $e' = e - 1 = k$
$r' = r$ $\quad$ $c' = c + 1$

Så:

$$v' - e' + r' - c' = v - (e - 1) + r - (c + 1) =$$
$$= \{\text{induktions antagande}\} = v - e + r - c$$

2) Olika ytor jämte bortagna kanten.

$v' = v$ $\quad$ $e' = e - 1$
$r' = r - 1$ $\quad$ $c' = c$

Så:

$$v' - e' + r' - c' = v - (e - 1) + (r - 1) - c =$$
$$= v - (e - 1) + r - (c + 1) = \text{som i fall 1.}$$

Satsen ger nödvändiga villkor för planaritet:

Om G, sammanhängande, är enkel (inga ölgor eller multipla kanter),
så begränsas varje uta av minst tre kanter (om e ≥ 2 !).

Så: $$2e = \sum_{\text{områden}} \underbrace{(\text{antalet kanter kring området})}_{\geq 3} \geq 3r$$

Så: $$e \geq \frac{3}{2} r \qquad r \leq \frac{2}{3} e \qquad \Rightarrow \qquad e = v - e + r \leq v - \frac{1}{3} e$$

$$\boxed{3v \geq e + 6}$$

Så K_5 är ej planär!

$v = 5, \qquad e = 10$

$15 \ngeq 16$