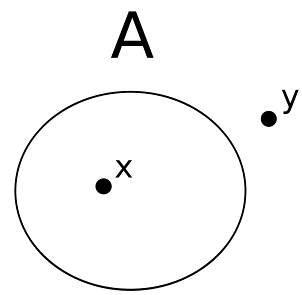
2011-(02)feb-02: dag 5

Flera beteckningar för mängdbegrepp

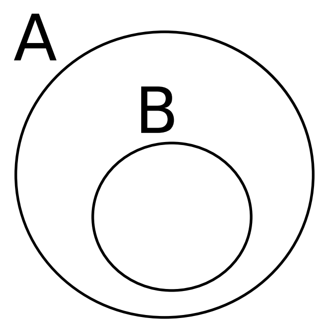
$x \in A$ — x är ett element i A.

$y \notin A$ — y är inte ett element i A.



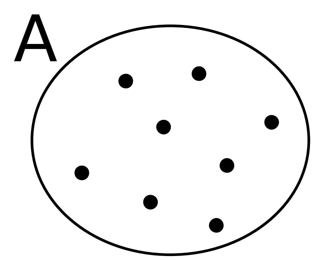
$A \subseteq B$ — A är en delmängd till B; A kan vara B.
$x \in A \Rightarrow x \in B$ ($x \in B \ \forall \ x \in A$)
$\exists\, x \in B : x \in A$

$A \subset B$ — A är en delmängd (äkta delmängd) till B;
A kan inte vara B.
$\exists\, x \in B : x \in A, \ \exists\, x \in B : x \notin A$



$|A|$ — Antalet element i A
A:s kardinalitet (ordning)

$|\emptyset| = 0$ — $|\{\emptyset\}| = 1$



$|A| = 7$

Operationer på mängder

$A \cup B$ — Unionen av A och B
$\{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$

$A \cap B$ — Snittet (skärningen) av A och B
$\{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$

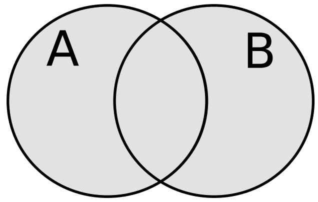
$A \setminus B$ — Differansmängden (differansen mellan A och B)
$\{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$

A^C Komplementmängden
(komplementet till A)

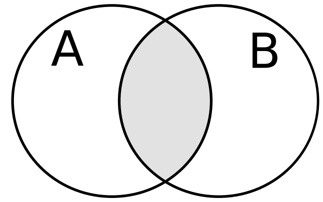
$\{x \mid x \notin A\}$

Skrivs även
∁A eller ∁A (den innan
i sans-teckensnitt istället
för sans-serif)

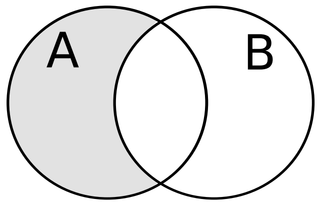
$A \cup B$



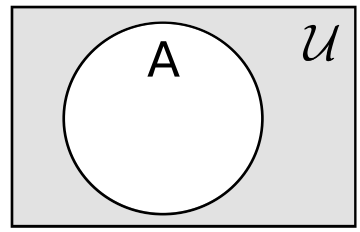
$A \cap B$



$A \setminus B$



A^C



$\mathcal{P}(A)$ Potensmängden till A
Mängden av alla A:s
delmängder.

$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$

Exempel:

$\mathcal{P}(\{\emptyset, 1, \pi\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\pi\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, \pi\}, \{1, \pi\}, \{\emptyset, 1, \pi\}\}$

Kan även skivas:

$P(A)$
$\wp(A)$
2^A

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

$C \subseteq A, A \subseteq B \Rightarrow C \subseteq B$

Associativa lagen: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup D)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap D)$

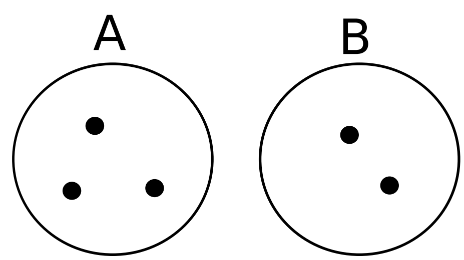
Kommutativa lagen: $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

Distributiva lagen: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgans lag:	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Identitetslagar:	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$ $A \cap \mathcal{U} = A$ $A \cup \varnothing = A$
Absorptionslagen:	$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$
Dubbelt komplement:	$(A^c)^c = A$
Inverslagar:	$A \cup A^c = \mathcal{U}$ $A \cap A^c = \varnothing$
Dominanslagar:	$A \cap \varnothing = \varnothing$ ($A \cap B = B$ omm $B \subseteq A$) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ ($A \cup B = B$ omm $B \supseteq A$)

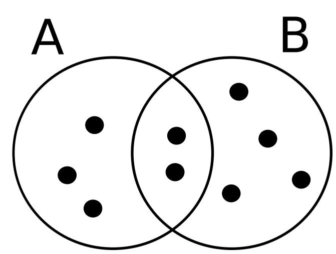
Om A, B disjunkta ($A \cap B = \varnothing$):

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$



I allmänhet: (ej disjunkta eller disjunkta)

$$\underset{9}{|A \cup B|} = \underset{5}{|A|} + \underset{6}{|B|} - \underset{2}{|A \cap B|}$$



Exempel: Hur många tal x, $1 \le x \le 1000$ är delbara med minst en av 4 och 7?

Låt $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le 1000,\ 4|x\}$ $\qquad |A| = \dfrac{1000}{4} = 250$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le 1000,\ 7|x\}$ $\qquad |B| = \left\lfloor \dfrac{1000}{7} \right\rfloor = 142$

$A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \le x \le 1000,\ \text{mgm}(4; 7) = 28|x\}$

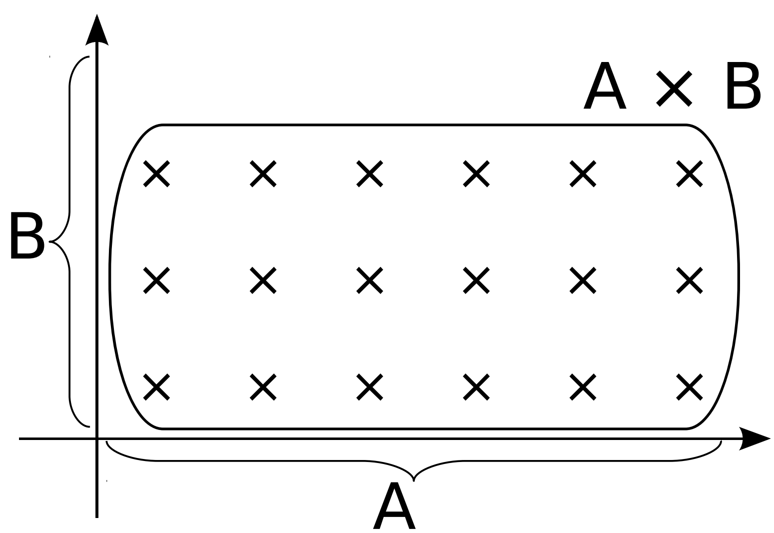
$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{28} \right\rfloor = 35$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 250 + 142 - 35 = 357$$

Produktmängden:

$A \times B = \{(a; b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ $\qquad \times$ Kartesisk produkt

Mängden av alla par med vänsterelement från A och högerelement från B.
Paren är ordnade, $(a; b) \neq (b; a)$.



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ — svarar mot punkter i planet

Induktionsbevis

För att visa ett påstående $P(n)\ \forall\ n \in \mathbb{N}$
räcker det att visa:

1) $P(0)$ — bas (0 är lägsta talet i mängden)

$P(k) \Rightarrow P(k+1) \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$ — steg

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{n}$$

2) För alla $k \in \mathbb{N}$

$(P(m)\ \forall\ m \in \mathbb{N},\ m < k) \Rightarrow P(k)$

Ty: Antag att 1) eller 2) gäller, men $P(n)$ falskt för någpt $n \in \mathbb{N}$.

Då finns ett minst $n_0 \in \mathbb{N}$ med $P(n_0)$ falskt.

Fall 1) $n_0 = 0$?

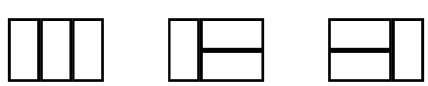
Nej, $P(0)$ sann annars (basen) n_0) $k + 1$, något $k \in \mathbb{N}$,
där $P(k)$ sann (m minst), steget get $P(n_0)$ sann.

2) $P(m)$ sant för alla $m \in \mathbb{N}$, $m < n_0$ (n_0 minsta m, P falskt),
så $P(m_0)$ sann. Omöjligt i båda fallen så påståendet stämmer.

Rekursion

Exempel: På hur många olika sätt kan en $2\times n$ gång läggas med 2×1 plattor?

Kalla antalet p_n.

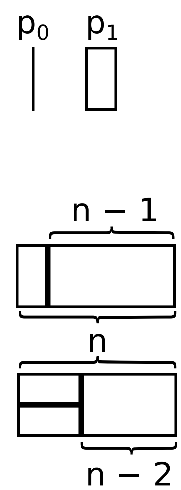
p_3  $p_3 = 3$

p_2  $p_2 = 2$

Svårt att finna en "formel", lätt med <u>rekursion</u>.

$p_0 = p_1 = 1$

$p_2, p_3, p_4, p_5 = 2, 3, 5, 8$



Man kommer fram till en funktion
med hjälp av tidigare värden.

$P_n = F_{n+1}$, F_n är Fibonaccitalen.

$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \ldots$

steg

Rekursion: Om $G(n; f)$ är definierad för alla $n \in \mathbb{N}$ och
$f : \{0, 1, \ldots, n-1\} \to X$

så finns precis en funktion $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1)

$$\begin{cases} f(0) & \text{given} & \text{bas} \\ f(k+1) & \text{bestäms av } k, f(k) & \text{steg} \end{cases}$$

2)

$$f(n) = G(n; f) \geq 0, 1, \ldots, n-1$$

Exempel: Visa med induktion att

$$P(n) : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Antag sant för $m < k$, visa att definitionen är sann för $m = k$

$k = 0, 1, \ldots$
$k = 2, 3, \ldots$

Om funktionen säger att $f : X \to Y$ (X och Y är mängder)
Exakt en pil från varje $x \in X$. (Injektiv)

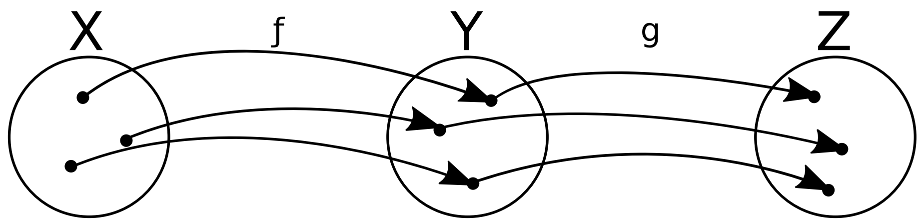
X är f:s domän, defintionsmängd
Y är f:s kodomän, målmängd (värdemängd)

(ibland: $f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$)

Sammansättning av funktioner (konkatenering, konkatination[inkorrekt])

$f : X \to Y, \quad g : Y \to Z$

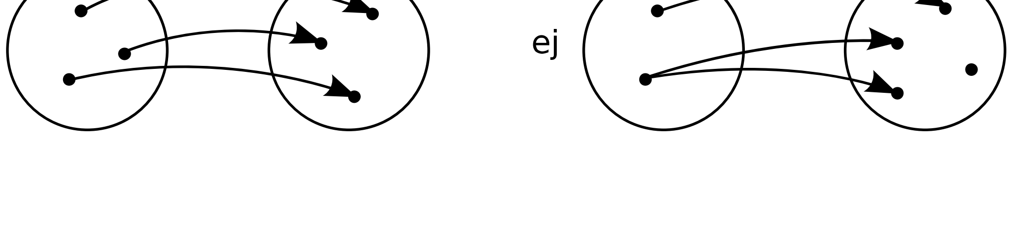
$g \circ f : X \to Z$ definieras av $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
(skrivs ibland (alltid av läraren), men bör inte skrivas, gf)



Viktiga typer av funktioner

Injektion: alla $y \in Y$ är bilder av högst ett $x \in X$

[⇔ ekvivalent $y = f(x)$ högstt en lösning $x \in X$
för alla $y \in Y$ ⇔ ($f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)]



Surjektion:

Samma sak fast minst ett istället för högst ett.

Bijektion:

Exakt ett, med andra ord surjektion och injektion samtidigt.

Surjektion:

Givet $z \in Z$ så finns $y \in Y$ med

$z = g(x)$, men $y = f(x)$, något $x \in X$ (f surjektiv)

så $z = g(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ så $g \circ f$ surjektiv.