SF1637 (SF1633 för andra än CL)

Diff & Trans III CL2

Hans Tranberg
KTH Matematik

Literatur:

Differential Equavations with Boundary-Value Problems 7:th ed. (7, inte 8)
[Zill / Cullen]

Mathematics Handbook BETA
[Råde / Westergren]

Introduktion till differentialekvationer (diff.ekv.)
Första ordnings ordinära diff.ekv. (ODE)

Modeller med första ordningens ODE.

[Z.C.1.3.10]

```
               ┌───────────┐
3 gal/min      ├───────────┤
2 lb/gal       │300 gal    │ 2 gal/min
─────────→     │50 lb      │ ─────────→
               └───────────┘
```

A(t) är mängden salt i tanken vid tiden *t* i pounds.

$$\frac{dA}{dt}\,\mathrm{lb/min} = 3\,\mathrm{gal/min}\cdot 2\,\mathrm{lb/gal} - 2\,\mathrm{gal/min}\cdot\frac{A(t)}{300+t(3-2)}\,\mathrm{lb/gal}$$

$$\frac{dA}{dt} + 2\cdot\frac{A(t)}{300+t} = 6, \quad A(0) = 50$$

Innehåll:

Högre ordningens ODE.

System av första ordningens ODE.

Plana autonoma system och stabilitet.

Laplacetransformer (för CBIOT & CKEMV)

Fouriertransformer (för CL)

Båge är integraler.

Partiella diff.ekv. (PDE) och randvärdesproblem i rektangulära koordinater.

Ortogonala funktioner och fourierserier.

Modul 1:

Första & andra ordningens ODE
KS 1

Modul 2:

Högre ordningens ODE
System av linjära ODE
Autonoma system. Stabilitet
KS 2

Modul 3:

Laplacetransformer (för BIO & K)
Fouriertransformer (för CL)
PDE. Fourierserier
Inlämningsuppgift 1 (i grupper om max 3)

CL har första salen på schemat.

Två-delad tentamen:

Del 1 är avseed för betyg E och består av 3 uppgifter.

Godkänd modul ger godkänd uppgift.
3 godkända moduler ger godkänt.
5 av 9 poäng ger godkänd KS.

Del 2 för högre betyg. 20 poäng.
8-9 KS-poäng ger bonuspoäng till del 2.

Exempel

Befolkningsmängden är P(t).

Relativa tillväxthastigheten är $\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt}$

Modell 1:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = a > 0$$

$$P(t) = Ce^{at}$$

Växer konstant.
Överbefolkning!

Modell 2:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = a - bP(t)$$

$$\frac{dP}{dt} = aP(t) - bP^2(t) = \{\text{Sätt}\} = 6P(t) - P^2(t)$$

Inget sker vid $P=0$ och $P=6$.

Stationära lösningar: $\frac{dP}{dt} = 0$

P=0, P=6

P > 6 ger minskning. Negativ derivata.
0 < P < 6 ger ökning. Positiv derivata.

Utvandring!

Modell 3:

$$\frac{dP}{dt}=aP(t)-bP^2(t)-h=\{\text{Sätt}\}=6P(t)-P^2(t)-8$$

h har storheten personer / tid.

P > 6 ger minskning. Negativ derivata.
2 < P < 6 ger ökning. Positiv derivata.
P < 2 ger minskning. Negativ derivata.

Första ordningens ODE:

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y)$$

• Separabla

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$$

• Linjära

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Separabla

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$$

1. h(y) = 0 : y = konstant

2. h(y) ≠ 0 : $\frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}=g(x)$

Integrera med avseende på *x*.

Linjära

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Multiplicera med $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx}\cdot\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}\cdot P(x)y=e^{\int P(x)dx}\cdot f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)=e^{\int P(x)dx}\cdot f(x)$$

Integrera med avseende på x.

Exempel

$$\frac{dx}{dt}=x^2-x \qquad \text{separabel}$$

1) Stationära lösningar:

$$\frac{dx}{dt}=0;\ \ x=0,\ \ x=1$$

2) $x \neq 0,\ \ x \neq 1$

$$\frac{1}{x^2-x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$$

$$\int\frac{dx}{x^2-x}=?$$

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1} \quad (*)$$

Handpåläggning

$$A=\left(\frac{1}{x-1}\right)_{x=0}=-1$$

$$B=\left(\frac{1}{x}\right)_{x-1=0}=1$$

$$\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

Integration av (*) ger:

$$-\ln|x|+\ln|x-1|=t+\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=t+\ln|C|$$