Fourierserieutveckling:

$f(t)$ är definierad och styckvis kontinuerlig i intervallet]d; d+T[.

$$f(t) \sim \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right)$$

$$a(0) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t)\,dt$$

$$a(n) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$b(n) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

f sägs har den fundamentala perioden T om det finns ett minsta tal, T, så att $f(t + T) = f(t)$ för alla reella t.

f:s grundfrekvens $\Phi = 1/T$. Grundfrekvensen talar om hur många perioder (grundsvängningar) som förlöper per tidsenhet.

Grundvinkelfrekvensen $\Omega = 2\pi\Phi = 2\pi/T$.

Koefficienterna a(n) och b(n) talar om hur mycket vi har av vinkelfrekvensen $\omega_n = n\Omega$.

$$f(t) \sim \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(n) \cdot \cos \Omega t + b(n) \cdot \sin \Omega t \right)$$

a och b kallas Fourierkoefficienter.

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Detta kan används för att skriva om

$$a(n) \cdot \cos \Omega t + b(n) \cdot \sin \Omega t$$

till

$$a(n)\left(\frac{e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}}{2}\right) + b(n)\left(\frac{e^{in\Omega t} - e^{-in\Omega t}}{2i}\right) =$$

$$= \left(\frac{a(n) - ib(n)}{2}\right) e^{in\Omega t} + \left(\frac{a(n) + ib(n)}{2}\right) e^{-in\Omega t}$$

Sätt:

$$c(\pm n) = \frac{a(n) \mp ib(n)}{2} \quad , n \in \mathbb{Z}_+$$

$$c(0) = \frac{a(0)}{2}$$

Du kan vi skriva om

$$f(t) \sim \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a(n) - ib(n)}{2}\right) e^{in\Omega t} + \left(\frac{a(n) + ib(n)}{2}\right) e^{-in\Omega t} \right)$$

till

$$f(t) \sim c(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c(n) e^{in\Omega t} + c(-n) e^{-in\Omega t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) e^{in\Omega t}$$

Notera att

$$c(n) = \frac{a(n) - ib(n)}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} \left(\cos n\Omega t - i \sin n\Omega t\right) f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) e^{-in\Omega t} dt \quad ,$$

$$c(-n) = \frac{a(n) + ib(n)}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} \left(\cos(n\Omega t) + i \sin(n\Omega t)\right) f(t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) e^{in\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) e^{-i(-n)\Omega t} dt$$

samt att

$$c(0)=\frac{a(0)}{2}=\frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{i0\Omega t}$$

Detta innebär att

$$c(m)=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-im\Omega t}dt \quad \text{för alla heltal m.}$$

Alltså:

$$f(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\Omega t} \quad \text{där} \quad c(n)=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-in\Omega t}dt$$

eller

$$f(t)\sim\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c(n)e^{in\Omega t}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-in\Omega t}dt\right)$$

Vi kan beteckna den T-periodiska tillförordningen (=funktionen) $\mathcal{F}_T$, som ger

$$\mathcal{F}_T\{f(t)\}=c(n)$$

Vi kan även beteckna inversen:

$$\mathcal{F}_T^{-1}\{c(n)\}=f(t)$$

Korrespondansen kan skrivas:

$$f(t)\ \underset{\mathcal{F}_T^{-1}}{\overset{\mathcal{F}_T}{\rightleftarrows}}\ c(n)$$

Endast periodiska funktioner kan skrivs som Fourierserier, om man vill skriva om en operiodisk funktion på intervallet]–∞; ∞[måste man inställlet använda en Fourierintegral:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \quad \text{(Fourierintegral av f)}$$

där

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt \quad \text{(Fouriertransform av f)}$$

Mnemonik:

En *integral* är en summa av en *serie* med infinitesimala steg.

Frekvensspektrat $A(\omega)=\left|\hat{f}(\omega)\right|$.

En signal (funktion) som bara har frekvenser inom ett begränsat intervall sägs vara bandbegränsad.

$A(\omega)=\left|\hat{f}(\omega)\right|$ är ett mått på “hur mycket” av av frekvensen ω som förekommer i signalen $f(t)$.

$F(\omega)$ kan betäkna $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$, på samma sätt kan $G(\omega)$ betäkna $\mathcal{F}(g(t))(\omega)$, och så vidare.

Daulitet, linjäritet samt derivering och transformering (inte kopplat till varandra) tas upp; detta är sammafattat på sida 2 i modulsammafattning 3 del 2.

Även inverstransformen, $\mathcal{F}^{-1}$, är linjär.

Skalnings egenskap hos FT:

Om $f(t)$ har har FT:en $\hat{f}(\omega)$ och $a \neq 0$ är en reell konstant sådan att $\mathcal{F}(f(at))$ existerar så är:

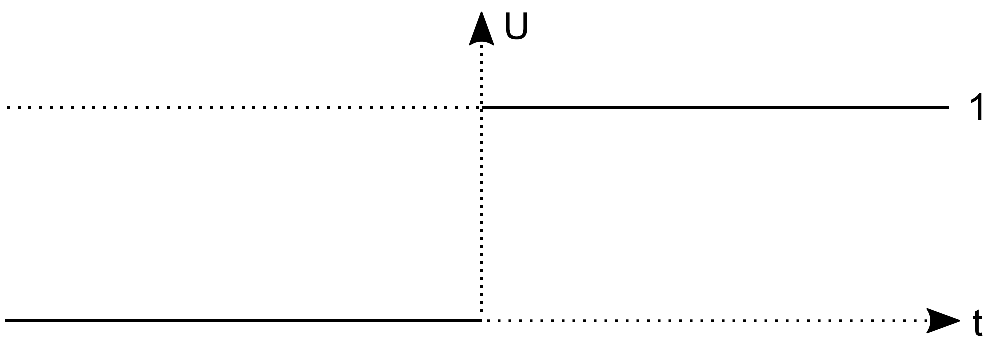
$$\mathcal{F}(f(at))(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

signum $\pm\alpha$ = sign $\pm\alpha$ = **sgn** $\pm\alpha = \pm 1, \quad \alpha > 0$
signum $0 = 0$, Bör dock oftast i matematisken hanteras som odefinerat!!

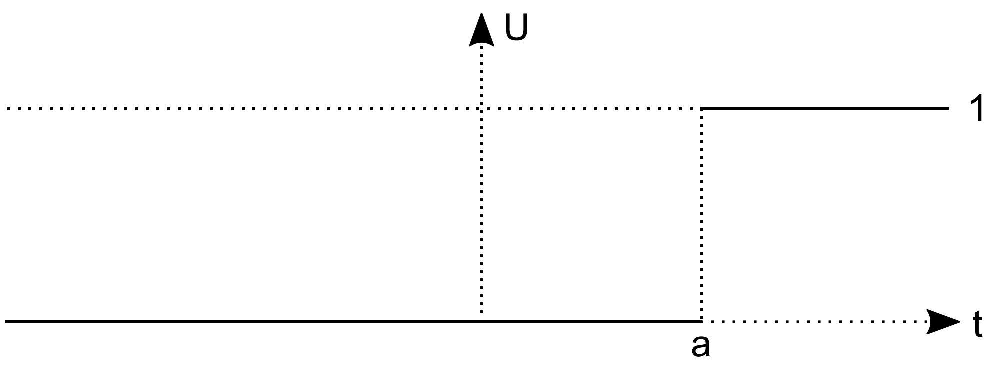
Heavisidefunktionen:

Egen kallad “Unit step function”.

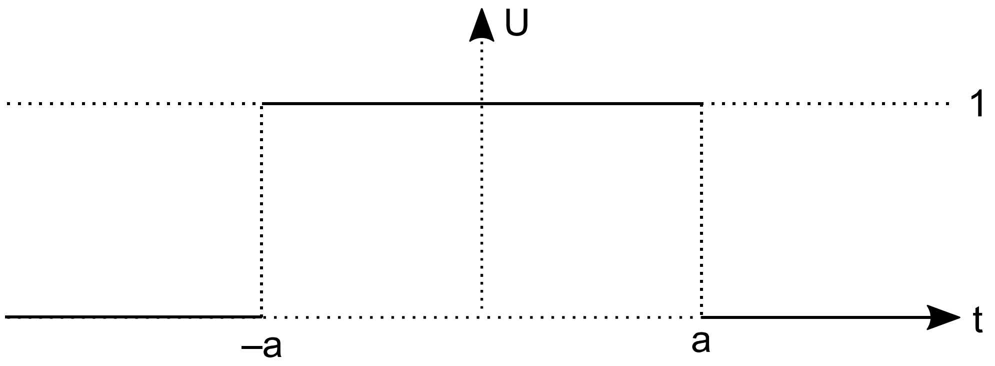
$$U(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



$U(t - a)$, $a > 0$



U(t + a) – U(t – a)



|t| = t U(t) + (–t) U(-t)

Använda beteckningar:

U(t)
H(t)
Θ(t)
men framför allt
$\mathcal{U}$(t), vilket jag inte använder på grund av tekniska svårigheter.

Dirac-pulser finns sammanfattat på sida 4 i modulsammafattning 3 del 2.