Angående uppgift 3 i inlämningen imorgon; se sida 605 (14 kap.) i Zill-Cullen.

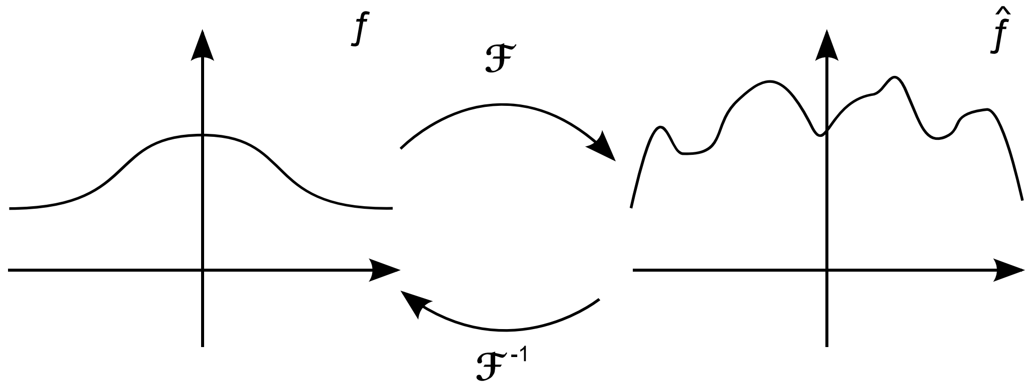
Förra gången:

$f(t)$ är absolut integrerbar

$$\hat{f}=\mathcal{F}(f(t))(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$$

Om $f$ och $f'$ är styckvis kontinuerliga i varje ändligt intervall så gäller:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f(t)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$




Vi beräknade $\mathcal{F}\underbrace{\left(e^{-a|t|}\right)}_{a>0}=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

Egenskaper hos Fouriertransformer (FT):

FT är linjär.

Om $f$ och $g$ är absolut kontinuerliga så är

$$\mathcal{F}\left(af(T)+bg(t)\right)(\omega)=a\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega)+b\mathcal{F}\left(g(t)\right)(\omega)$$

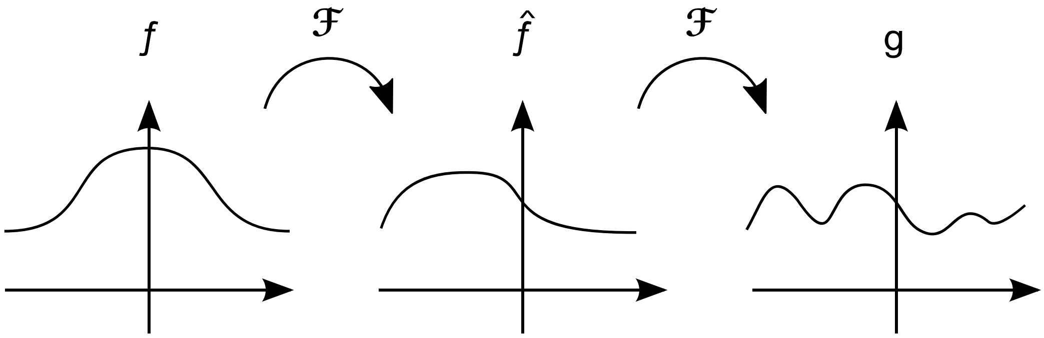
Vilket följer från integralens injäritet.

Exempel: $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{2}e^{-|t|}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{1^2+\omega^2}=\dfrac{1}{1+\omega^2}$

Dualitet.     Motsvarande exemplet.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(\omega) \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{i\omega t}\, dt$$

Saknar elementär primitiv funktion.




ƒ och g är relaterade.

$$g(t) = \mathcal{F}\left(\hat{f}(\omega)\right)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{it\omega}\, d\omega = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-i(-t)\omega} d\omega\right) = 2\pi\ f(-t)$$

$$\therefore\ \ \mathcal{F}\left(\hat{f}(\omega)\right)(t) = 2\pi\ f(-t)$$

där $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$

I vårt exempel:

Vi vet att $\dfrac{1}{1+\omega^2} = \mathcal{F}\left(\dfrac{1}{2} e^{-|t|}\right)$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{2} e^{-|t|}\right)\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-|t|} = \pi e^{-|t|}$$

Dualitet:     $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = 2\pi f(-1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}\, d\omega = ?$$

$$\pi e^{-|t|} \underbrace{\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)}_{\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)\right)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+\omega^2}\, d\omega$$

Tag t = 0

$$\pi=\pi e^0=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^0}{1+\omega^2}\, d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}\, d\omega$$

Derivering och transformering:

$\mathcal{F}(f'(t))(\omega)=i\omega \hat{f}(\omega)$ där $\hat{f}$ är FT av f.

På samma sätt:

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}(t)\right)(\omega)=(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

[4.14]

Finn en partikulärlösning till

$$y'' - y = e^{-|t|}$$

Lösning: Fouriertransformera bägge leden:

$\mathcal{F}(y'' - y) = \mathcal{F}(e^{-|t|})$

$\mathcal{F}(y'') = (i\omega)^2 \cdot \mathcal{F}(y)$

$Y(\omega) \triangleq \mathcal{F}(y)(\omega)$

$$\underbrace{(i\omega)^2}_{-\omega^2} \cdot Y(\omega)-Y(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$-Y(\omega)(\omega^2+1)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$Y(\omega)=-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}$$

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}\Big(\underbrace{Y(\omega)}_{-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}}\Big)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(1+\omega^2)^2}e^{i\omega t}dt \qquad \text{(Svår integral!)}$$

Man kan visa att $\mathcal{F}\left(|t|e^{-|t|}\right)(\omega)=\dfrac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}$

(Se Beta)

Vi vet att $\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$

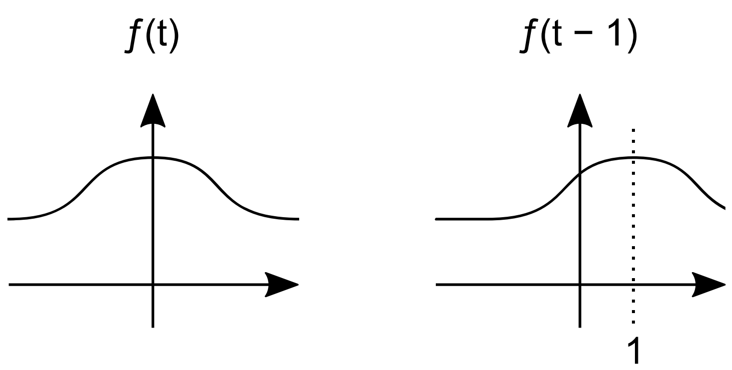
$$\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}+\frac{2}{1+\omega^2}=\frac{2(1-\omega^2)+2(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}=\frac{4}{(1+\omega^2)^2}=-2\left(-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}+\frac{2}{1+\omega^2}\right)\right)=-\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}\right)+\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[|t|e^{-|t|}+e^{-|t|}\right]=-\frac{1}{2}(|t|+1)e^{-|t|}$$

Exempel:

Om $f(t)$ har TF, $\hat{f}(\omega)$ , vad är då FT för $f(t-1)$?




$$\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)(\omega)=\left\{s\overset{\Delta}{=}t-1\,\middle|\,t=s+1\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{i\omega(s+1)}\,ds=e^{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{i\omega s}\,ds=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)(\omega)=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

Frekvensspektra för ƒ(t) och ƒ(t – 1) är samma.

$\left|\hat{f}(\omega)\right|$ = “frekvensspektrum”

$$\left|\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)\right|=\left|e^{i\omega}\hat{f}(\omega)\right|=\underbrace{\left|e^{i\omega}\right|}_{1}\cdot\left|\hat{f}(\omega)\right|=\left|\hat{f}(\omega)\right|$$

$\left|\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)\right|$ är frekvensspektrumet för ƒ(t – 1).