2011-(05)maj-11: dag 29

- Mer om grafer
  - Fortsättning på (hörn)färgning av grafer
    - Kromatiska polynomet, $P_G(\lambda)$
  - Matchning i grafer
    - Fullständig och maximal matchning
    - Bipartita grafer
    - Halls sats (giftermålssatsen)
      - Utökande alternerande stigar
    - Maximal matchning i bipartita grafer
    - Distinkta representater (tramsversalerna)
  - Övnings-KS 5

Tentaanmälan senast söndag.

Om kromatiska polynomet för en graf $G = (V, E)$:

$P_G(\lambda)$ — antalet sätt att hörnfärga grafen G med λ färger.

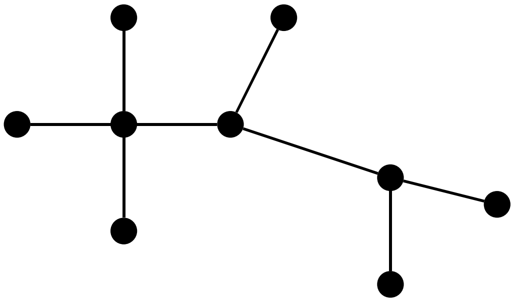
Exempel:

G ett träd $T = (V, E)$

$P_T(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n-1}$, $|V| = n$

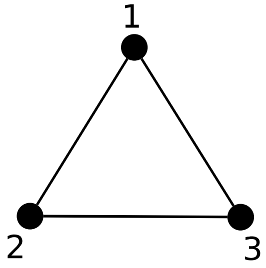
första hörnet

de andra (bara en granne bland
resten färgadem ty inga cykler).



Exempel: C_3:

$$P_{C_3}(\lambda) = \underset{1}{\lambda}(\lambda \underset{2}{-} 1)(\lambda \underset{3}{-} 2)$$

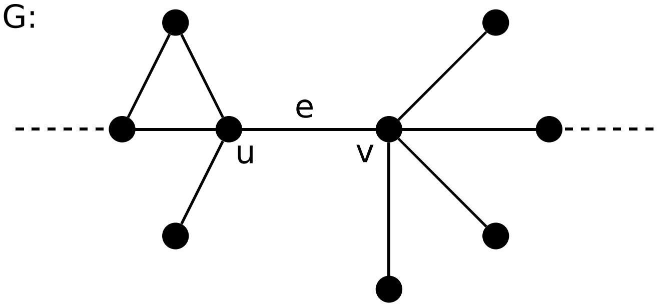


Rekursion för att finna $P_G(\lambda)$:

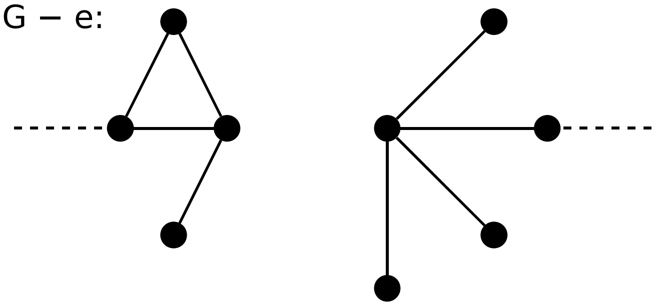
Låt $e \in E$ i $G = (V, E)$

Låt $G - e$: G med e borttagen
G/e: G med e kontraherad

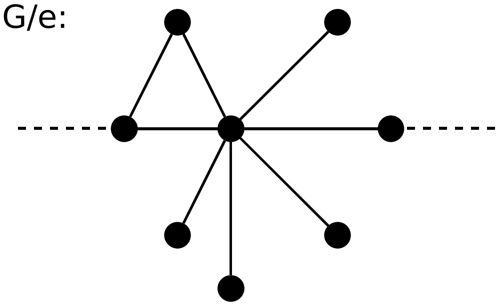
G:



G − e:



G/e:



$$\text{Då } P_{G-e}(\lambda) = \underset{\text{u, v olika färg.}}{\underset{\uparrow}{P_G(\lambda)}} + \underset{\text{u, v samma färg.}}{\underset{\nwarrow}{P_{G/e}(\lambda)}} \qquad \text{(additionsprincipen)}$$

Så

$$\begin{cases} P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda) \\ P_{(V,\emptyset)}(\lambda) = \lambda^{|V|} \end{cases}$$

ger en rekursion över antalet kanter i grafen.

Med induktion (över antalet kanter) kan då visas:

$$\begin{cases} P_G(\lambda) \text{ är ett polynom i } \lambda. \\ \quad \text{höstagradstermen:} \quad \lambda^{|V|} \\ \quad \text{nästagradstermen:} \quad -|E|\lambda^{|V|-1} \\ \quad \text{koefficienterna är heltal, alternerande } \geq 0, \leq 0. \end{cases}$$

$\chi(G)$: det minsta $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ så att $P_G(\lambda) \neq 0$.

Exempel:

$$P_{C_n}(\lambda) = \underset{\text{Linjärt träd}}{P_{T_n}(\lambda)} - P_{C_{n-1}}(\lambda) =$$

$$= \underbrace{\lambda}_{\lambda - 1 + 1}(\lambda - 1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(\lambda) =$$

$$= (\lambda - 1)^n + (\lambda - 1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(\lambda)$$

Det vill säga

$$\begin{aligned} P_{C_n}(\lambda) - (\lambda - 1)^n &= -(P_{C_{n-1}}(\lambda) - (\lambda - 1)^{n-1}) = \\ &= (-1)^{n-3}(P_{C_n}(\lambda) - (\lambda - 1)^3) = \\ &= (-1)^{n-3}(\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) - (\lambda - 1)^3) = \\ &= (-1)^n(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Så:

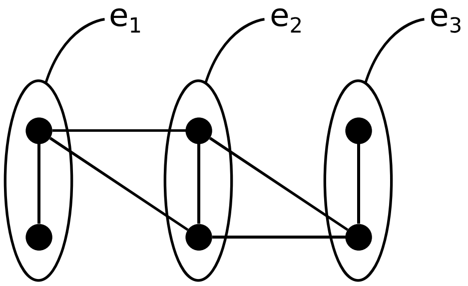
$$P_{C_n}(\lambda) = (\lambda - 1)^n + (-1)^n(\lambda - 1)$$

$$P_{C_n}(0) = 0 = P_{C_n}1$$

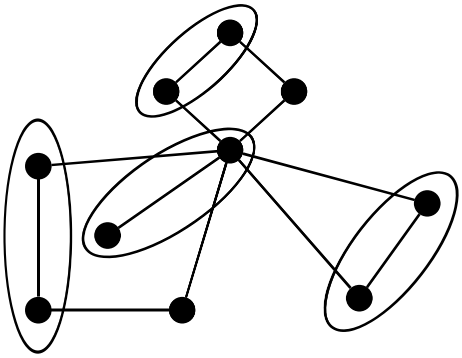
$$P_{C_n}(2) = 1^n + (-1)^n \cdot 1^n = 1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ jämnt} \\ 0 & n \text{ udda} \end{cases}$$

Matchning i grafen $G = (V, E)$

en delmängd M till E ($M \subseteq E$) med parvis disjunkta kanter ($\delta(v) \leq 1$).



Fullständig matchning, alla hörn ingår i en kant $M = \{e_1, e_2, e_3\}$.



Maximal matchning
$|M|$ maximal

Vi talar här om matchning i bipartita grafer, $G = (X \sqcup Y, E)$.

För dem kallar vi en matchning fullständig om $|M| = |X| \leq |Y|$.

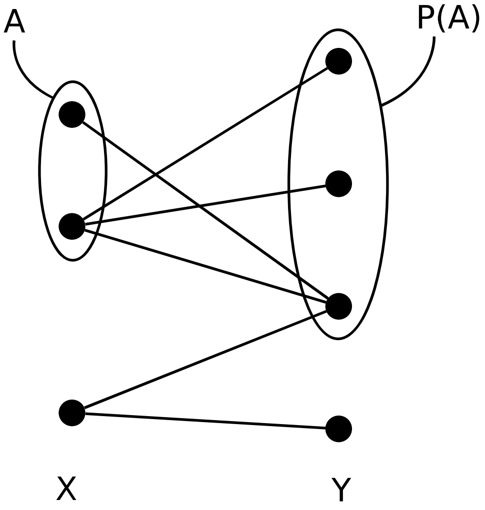
Halls sats: (giftermålssatsen)

En bipartit graf $G = (X \sqcup Y, E)$ har en fullständig matchning omm

$|P(A)| \geq |A|$ för alla $A \subseteq X$

där

$P(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E, \text{något } x \in X\}$



Bevis för Halls sats:

⇒: Klart
(P(A) innehåller alla som de i A matchas med).

⇐: Det räcker att visa att (om villkoret är uppfyllt) om en matchning M har $m = |M| < |X|$, finns en matchning M' med $|M'| = m + 1$.

Vi skall finna en utökande alternerande stig i G.

Låt $x_0 \in X$ vara omatchat (i M).

$|P(\{x_0\})| \geq |\{x_0\}| = 1$, så det finns en kant till x_0y, i M annars
$x_1y_1 \in M$, $x_1 \neq x_0$. $|P(\{x_0, x_1\}| \geq |\{x_0, x_1\}| = 2$ så det finns $y_2 \neq y_1$,
så att $x_0y_2 \in E$ eller $x_1y_2 \in E$ och $\notin M$.

Man finner olika $y_1, y_2, \ldots$ med en alternerande stig $x_0, \ldots, y_i$.

varannan kant i M, varannan inte.

Tar slut med att något y_n är omatchat.

Byt matchat–omatchat i stigen $x_0, \ldots, y_n$!
Ger M' med $|M'| = m + 1$.

Sats:

En maximal matchning M av en bipartit graf har storlek $|M| = |X| - \delta(G)$

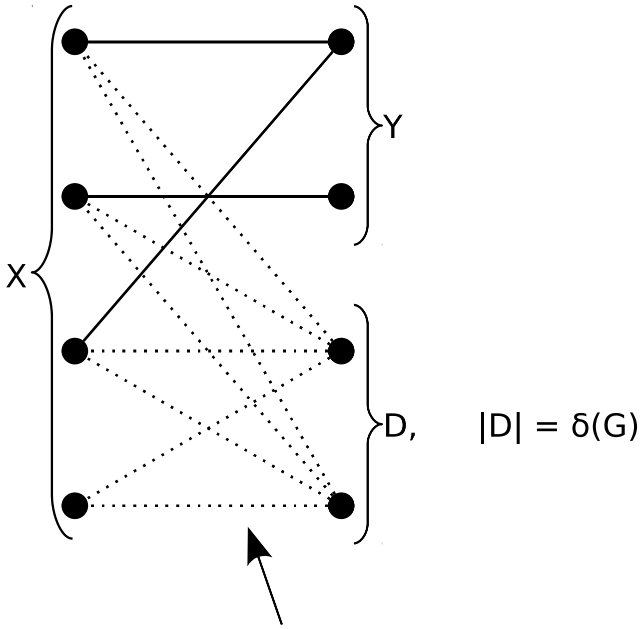
$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X}\{|A| - |P(A)|\} \geq 0, \quad \text{G:s defekt (G:s underskott)}$$

Ty:

$\delta(G) \geq 0$, ty $A \neq \emptyset$ ger $|A| - |P(A)| = 0$

$\delta(G) = 0$ omm villkoret i Halls sats är uppfyllt.

Om $\delta(G) > 0$: Utvidga G till $G^* = (X \cup (Y \cup D), E^*)$ enligt



Kanter till alla $x \in X$

Då är $A \neq \emptyset$

$$|P^*(A)| = |P(A)| + |D| =$$

$$= |P(A)| + \delta(G) \geq$$

$$\geq |A| - \delta(G) + \delta(G) = |A|$$

G^* har en fullständig matchning M^* (Halls sats) som ger en matchning med $|M| \geq |X| - \delta(G)$ i G och minst $\delta(G)$ är omatchad:

$$|A_0| = |P(A_0)| + \delta(G), \quad \text{något } A_0 \subseteq X$$

Sats:

En matchning M i en bipartit graf G är maximal omm det inte finns en utökande alternerande stig för M i G. (Ger en algoritm för att finna maximal matchning.)

Ty:

⇒: Klart (en utökande alternerande stig utökar matchningen).

⇐: Om M inte är maximal, låt M* vara det, |M*| > |M|.
Vi skall visa att det finns en utökande alternerande stig.

Låt F = M Δ M*

Symmetrisk differens, det vill säga kanter i exakt en av M och M*.

Betrakta G' = (X ⊔ Y, F), valenser 0, 1, 2 (inga andra) inte två kanter i M eller två kanter i M* till ett hörn.

G':s komponenter är alternerande stigar eller cykler, någon av dem har fler kanter från M*. En utökande alternerande stig för M.