2011-(03)mar-24: dag 17

Mer om permutationer

- Produkter, inverser
- Permutationsmatriser
- Cayleys sats
- Permutationers ordning
  - mgm av cykellängderna
- Konjugering
  - En ekvivalensrelation på S_n
  - Permutationers typ (cykelstruktur)
- Permutations paritet
  - Transpositioner
  - $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \cdots} = (-1)^{n - c(\pi)}$
  - Hälften jämna, hälften udda i S_n, $n \geq 2$
  - Determinanter

Mer om permutationer idag.

Exempeln från sist $\pi, \sigma \in S_b$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Cykelnotation: $(1\ 4)(2\ 5\ 3)(6)$

Inte nödvändig, bara ett element.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Cykelnotation: $(1\ 3\ 5\ 4)(2\ 6)$

$$\pi\sigma = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \sigma \\ \pi \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Oftare (produkt av cykelnotation = cykel):

$$\pi\sigma = \underbrace{(1\ 4)(2\ 5\ 3)}\underbrace{(1\ 3\ 5\ 4)(2\ 6)} = (1\ 2\ 6\ 5)(3)(4)$$

$$\sigma\pi = (1\ 3\ 5\ 4)(2\ 6)(1\ 4)(2\ 5\ 3) = (1)(2\ 4\ 3\ 6)(5)$$

och $\pi^{-1} = (1\ 4)(2\ 3\ 5)(6)$

Skurkarna (texten saknas):

Låt $X = \{ä, v, u, t, m\}$ vara de åtalade. Permutationerna $\pi : X \to X$ ges av att $\pi(i) = j$ betyder att personen i åtalas för brotte som person j "heter".

(En permutation (bijektion) enligt förutsättningen: var och en namne till en annans brott)

så surjektiv, där med injektiv.

$\pi(i) \neq i \ \forall\, i \in X$ (enligt text)
Så π har inga 1-cykler, det vill säga kan vara [5], [2 3] (men inte [1 4]).

$\pi(\pi(\pi(n))) = m$, $\pi(\pi(\pi(m))) = v$, så n, m, v i samma cykel, inte en 3-cykel ty $\pi^3(n) \neq n$, så π har en 5-cykel:

$(n\ .\ .\ m\ .)$, så $(n\ v\ .\ m\ .)$ så $(n\ v\ ä\ m\ t)$

$\because\ \pi(t) \neq m$ (enligt sista stycket)

Ett sätt till att beskriva permutationer:

$\pi \in S_n$ motsvarar $\underset{n \times n}{\mathbf{M}_\pi}$ med $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \pi(j) = i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$

$$\mathbf{M}_\pi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \text{kolonn } j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 1 \\ 1 & & 0 \\ 0 & & \vdots \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{rad } \pi(j) \\ \\ \\ \text{rad } \pi(i) \\ \\ \end{array}$$

så $\mathbf{M}_\pi e_j = e_{\pi(j)}$ där $e_k =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{rad } k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Och $\underbrace{\mathbf{M}_\pi \mathbf{M}_\sigma}_{n\times n} \underbrace{e_j}_{n\times 1} = \mathbf{M}_\pi e_{\sigma(j)} = e_{\pi(\sigma(j))} = e_{(\pi\sigma)(j)} = \mathbf{M}_{\pi\sigma} e_j$ så $\mathbf{M}_\pi \mathbf{M}_\sigma = \mathbf{M}_{\pi\sigma}$

Multiplikation i S_n motsvarar matrismultiplikation.

$\mathbf{M}_\pi^t = \mathbf{M}_\pi^{-1}$ (ortogonal matris) $= \mathbf{M}_{\pi^{-1}}$

Cayleys sats:

Varje grupp G är isomorf med en delgrupp till S_G.

Ty: $\varphi : G \to S_G$ så att för $g, h \in G : \varphi(g)(h) = gh$ då

$(\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2))(h) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(h)) =$

$= \varphi(g_1)(g_2h) = g_1(g_2h) =$

$= (g_1g_2)(h) = \varphi(g_1g_2)h$ så

$\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2) = \varphi(g_1g_2)$

φ injektiv ty $g_1h = g_2h \Rightarrow g_1 = g_2$

så $G \cong \varphi(G) = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$

Isomorfi, skrivs ibland $G \approx \varphi(G)$.

(Speciellt kan varje ändlig grupp representeras med matriser.)

Ordningen för $\pi \in S_n$ är lätt att se av π:s cykelstruktour.

Exempel: $S_{12} \ni \pi = (1\ 7\ 4\ 11)(2\ 9\ 6)(3\ 5\ 8\ 12\ 10)$

$o(\pi) = ?$

$4, 3, 5 \mid o(\pi)$ I varje cykel skall man gå ett helt antal varv.

“så” $o(\pi) = \text{mgm}(4, 3, 5) = 60$

Konjugering i S_n

$\alpha, \beta \in S_n$ är konjugerade om det finns $\sigma \in S_n$ så att $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$
(det vill säga $\sigma\alpha = \beta\sigma$).

En ekvivalensrelation på S_n (reflexiv, symmetrisk och transitiv).

Exempel:

$\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ är konjugerad till $\beta = (1\ 3)(2\ 4\ 5)$.

$\sigma = (1\ 5\ 3\ 4)$ ger $\sigma\alpha\sigma^{-1} = (1\ 5\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 4\ 3\ 5) = (1\ 3)(2\ 4\ 5)$

Sats: $\alpha, \beta \in S_n$ är konjugerande omm de har samma cykelstruktur.

Samma antal i-cykler, alla i.

Ty: $\Rightarrow$: Om $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$ och α innehåller cykeln $(x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_i)$,
innehåller β cykeln $(\sigma(x_1)\ \ \sigma(x_2)\ \ \ldots\ \ \sigma(x_i))$.

$\Leftarrow$: Om $(x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_i)$ i α motsvarar $(y_1\ \ y_2\ \ \ldots\ \ y_i)$ i β.

(Samma resonemang åt andra hållet.)

Så tar vi σ så att $\sigma(x_1) = y_1$, $\sigma(x_2) = y_2$, …, det ger $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}$.

$$
\begin{tikzcd}
x_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma"] & x_2 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\sigma"] & \cdots \arrow[r, "\alpha"] & x_i \arrow[d, "\sigma"] \arrow[lll, bend right, "\alpha"'] \\
y_1 \arrow[r, "\beta"'] & y_2 \arrow[r, "\beta"'] & \cdots \arrow[r, "\beta"'] & y_i \arrow[lll, bend left, "\beta"]
\end{tikzcd}
$$

Klasser av konjugerade element i S_n svarar precis mot partitioner av heltalet n.

Exempel: Alla element i S_5 konjugerade med (1 4)(2 5 3)
är de med cykelstruktur [2 3].

Exempel: $\underbrace{\sigma\pi}_{\beta} = \sigma\underbrace{(\pi\sigma)}_{\alpha}\sigma^{-1}$, så $\sigma\pi$ och $\pi\sigma$ är konjugerade.

En grövre uppdelning av S_n: jämna och udda.

En transposition: en permutation av typ $[1^{n-2}\ 2]$, det vill säga (ij) $i \neq j$.

Om $\pi \in S_n$ så finns transpositioner $\tau_1, \ldots, \tau_r$ så att $\pi = \tau_r\, \tau_{r'\,1} \ldots \tau_2\, \tau_1$
ty $(x_1\ x_2 \ldots x_k) = (x_1\ x_k)(x_1\ x_{k-1})\ldots(x_1\ x_2)$.

π är en jämn/udda permutation om r är jämnt/udda då $\pi = \tau_r\, \tau_{r-1} \ldots \tau_1$;
$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^r$.

Sats:

Om $\pi \in S_n$, $\pi = \tau_r\, \tau_{r-1} \ldots \tau_1 = \tau'_r \ldots \tau'_1$ (τ_i, τ'_i transpositioner)
så har r och r' samma paritet. (Båda jämna eller båda udda.)