2011-(02)feb-23: dag 11

Mer kombinatorik

Genererande funktioner

Ett exempel

Principen om inklusion/exklusion (sållprincipen)

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n+1} \alpha_n$

där $\alpha_i = \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_i \le n} \left(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i} \right)$

Uppdelning av mängder

Stirlingtal (av andra slaget) $S(n; k)$

Antalet surjektioner $f : X \to Y$

Partitioner av partial tal

Först om generarande funktioner.
(för att studera talföljder)

Exempel:

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Deras genererande funktion:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

Tag rekursiva ekvationen och multiplicera med x^{n+2} och $\sum_{n=1}^{\infty}$

$$\underbrace{F_2 x^2 + F_3 x^3 + \ldots}_{g(x) - F_1 x - F_0} = \underbrace{F_1 x^2 + F_2 x^3 + \ldots}_{x\left(g(x) - F_0\right)} + \underbrace{F_0 x^2 + F_1 x^3 + \ldots}_{x^2 \cdot g(x)}$$

$$(x^2 + x - 1)\, g(x) = -x$$

så

$$g(x) = \frac{-x}{x^2 + x - 1} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} & x^2 + x - 1 = 0 \\ \psi = -\dfrac{1}{\phi} = & x = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ = -1 - \phi & \phi = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618 \\ \phi - \psi = \sqrt{5} & \\ & \phi = \dfrac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1{,}618 \end{array} \right\}$$

$$= \frac{-x}{(x - \phi)(x - \psi)} =$$

$$=\frac{\left(\frac{-\phi}{\phi-\psi}\right)}{x-\phi}+\frac{\left(\frac{-\psi}{\psi-\phi}\right)}{x-\psi}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\phi-\psi}\right)}{1-\frac{x}{\phi}}+\frac{\left(\frac{1}{\psi-\phi}\right)}{1-\frac{x}{\psi}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1+\psi x}-\frac{1}{1+\phi x}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-\psi)^n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-\phi)^n x^n\right)$$

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$$

F_n är koefficient för x^n:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

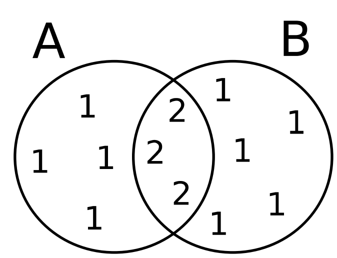
Principen om exklusion/inklusion (sållprincipen)

Additionsprincipen:

$|A \cup B| = |A| + |B|$ omm $A \cap B = \emptyset$

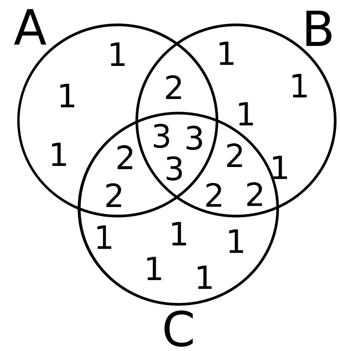
Mer allmänt:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



För tre mängder:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$



Exempel:

I en klass med 47 elever tycker i mängden B om bullar 25 stycken; G om glass, 20 stycken; och T om tårta 19 stycken.

B och G:	8	stycken
B och T:	12	stycken
G och T:	5	stycken
Alla tre:	1	styck

Hur många i klassen trycker inte om någondera?

$$|B \cup G \cup T| = \underset{25}{|B|} + \underset{20}{|G|} + \underset{19}{|T|} - \underset{8}{|B \cap G|} - \underset{12}{|B \cap T|} - \underset{5}{|G \cap T|} + \underset{1}{|B \cap G \cap T|} = 40$$

Resten, de sökta: 7 strycken.

Allmänt: (A_i ändliga)

Sats:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| - \left(|A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_1 \cap A_n| + |A_2 \cap A_3| + \ldots + \right.$$

$$\left. + |A_2 \cap A_n| + \ldots + |A_{n-1} \cap A_n|\right) + \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n| =$$

$$= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n+1} \alpha_n$$

där $\alpha_i = \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_i \le n} \left(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}\right)$

Bevis:

Låt x ingå i precis k stycken av $A_1 \ldots A_n$. Hur många gäner räknas det?

Jo, $k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \ldots + (-1)^{k+1}\binom{k}{k} =$

$$= 1 - \left(\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \ldots + (-1)^k \binom{k}{k}\right) =$$

$$= 1 - (1-1)^k = \begin{cases} 0 & k=0 \\ 1 & k=1, 2, \ldots \end{cases}$$

Exempel:

n personer tar i tumult en hatt var. Vad är sannolikheten att någon får sin egen hatt?

("I tumult": lika fördelat i S_n = {bijektioner av {1, 2, ..., n}})

Sökta sannolikheten:

$$P = \frac{1}{|S_n|}\left|\{f \in S_n \mid f(i) \neq i \ \text{ alla } i = 1, 2, \ldots, n\}\right|$$

Låt $A_i = \{f \in S_n \mid f(i) = i\}$, $|A_i| = (n-1)!$

$$P = \frac{1}{n!}\left(|S_n| - |A_i \cup \ldots \cup A_n|\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(n! - \left[|A_1| + \ldots + |A_n| - \left(|A_1 \cap A_2| + \ldots\right) + \left(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \ldots\right) + \ldots\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(n \cdot (n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}=$$

$$=\left\{\frac{n!}{k!}=\frac{1}{k'!},\ \ k'=n-k\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\approx e^{-1},$$

fel: $\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi},\ \ -1<\xi<0$

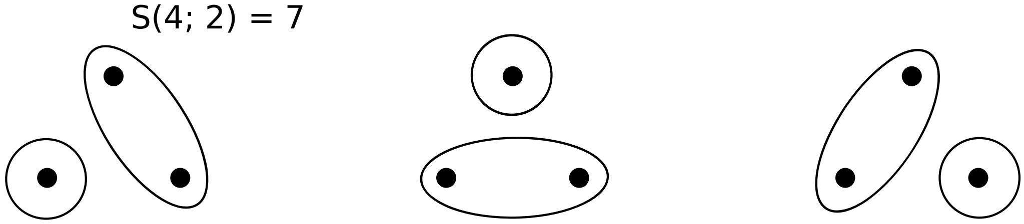
Uppdelning av mängder

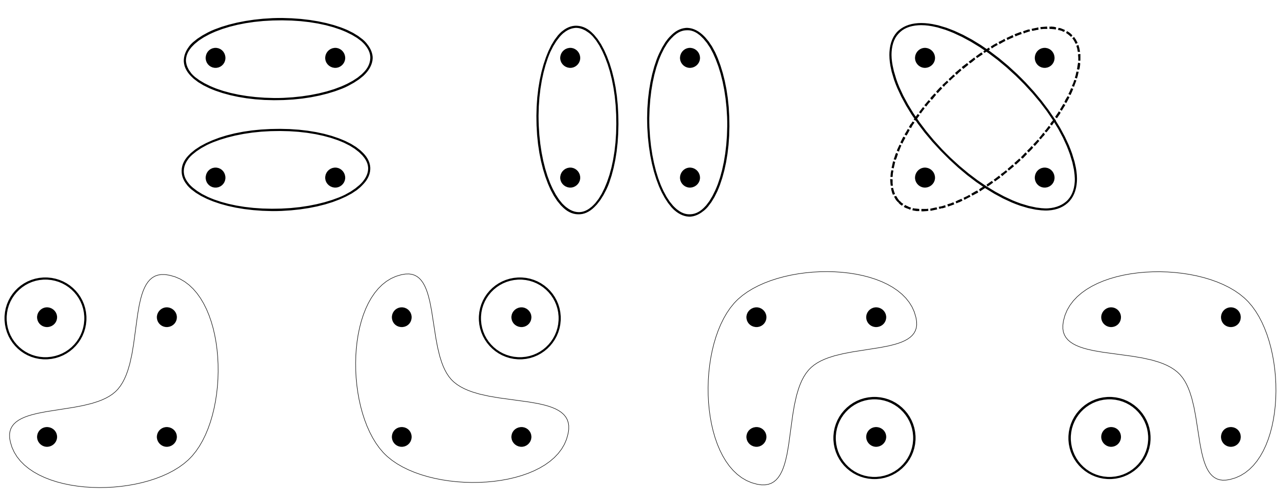
Definition:

Stirlingtalen (av 2:a slaget)

S(n; k) är antalet uppdelningar av en n-mängd (särskiljbara element) i k (särskiljbara) högar ($\neq \emptyset$).

Exempel: S(3; 2) = 3
S(4; 2) = 7





Sats:

$$\begin{cases} S(n;k) = S(n-1;k-1) + k \cdot S(n-1;k) & 1 < k < n \\ S(n;1) = S(n;n) - 1 & n \geq 1 \end{cases}$$

Ty: (rad 2 klart)

rad 1:

Välj ett element x_0. Då finns 2 typer av uppdelningar:

1) x_0 ensam i sin hög.
$S(n-1;k-1)$ stycken.

2) x_0 med andra, alla övriga kan fördelas på
$S(n-1;k)$ sätt och x_0:s hög kan väljas på k sätt.

S(n; k) kan sättas in i "Stirlings triangel".

k:

n:								1
1	1	2						
2	1	1	3					
3	1	3	1	4				
4	1	7	6	1	5			
5	1	15	25	10	1	6		
6	1	31	50	65	15	1	7	
7	1	63	301	350	140	21	1	

Sats: Antalet surjektioner

$X \to Y$

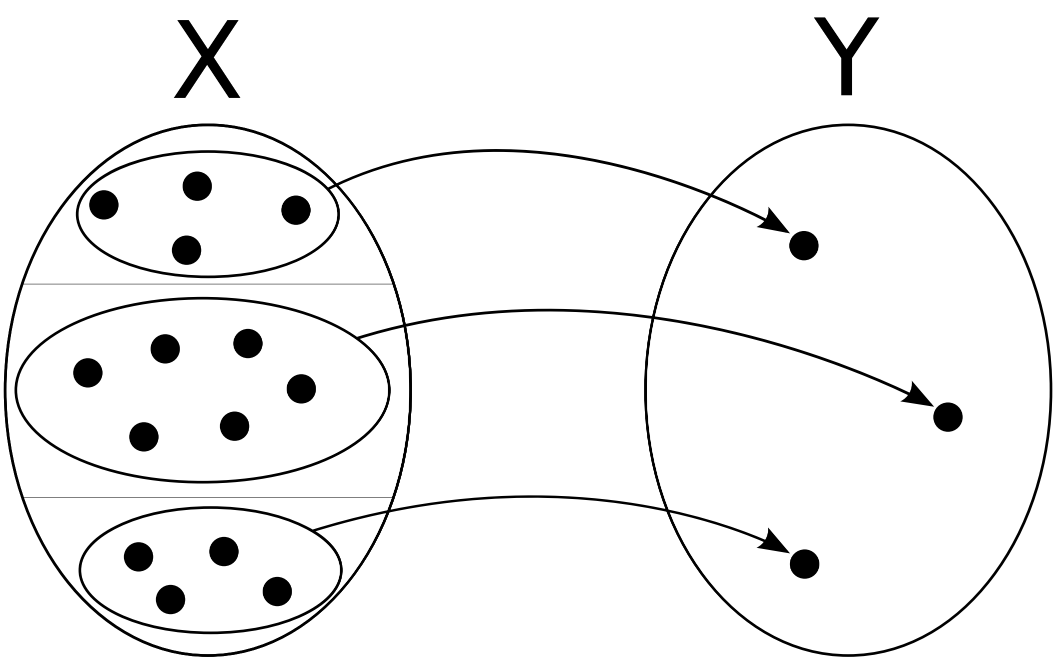
k-mängd

n-mängd

är $k! \cdot S(n; k)$

Ty:

Varje partition i k delar motsvarar precis k! surjektioner.



$X_i = \{x \in X \mid f(x) = y_i\}$

k! bijektioner

$\{X_i\} \to Y$

Exempel:

På hur många sätt kan 8 gäster fördelas på 5 hotellrum om inget rum lämnas tomt?

Tydligen söks antalet surjektioner

{gäster} → {hotellrum}

så:

$5!\cdot S(8; 5) = S(7; 4) + 5\cdot S(7; 5) = \{\text{se triangeln}\} =$
$= 350 + 5\cdot 140 = 1050$ sätt

Så antalet sätt:

$120\cdot 1050 = 126000$

På hur många sätt går det om H och D inte får dela?

Jo, alla fördelningar utom dem där del delar rum.

H och D delar i $5!\cdot S(7; 5) = 120\cdot 140 = 16800$ fall.

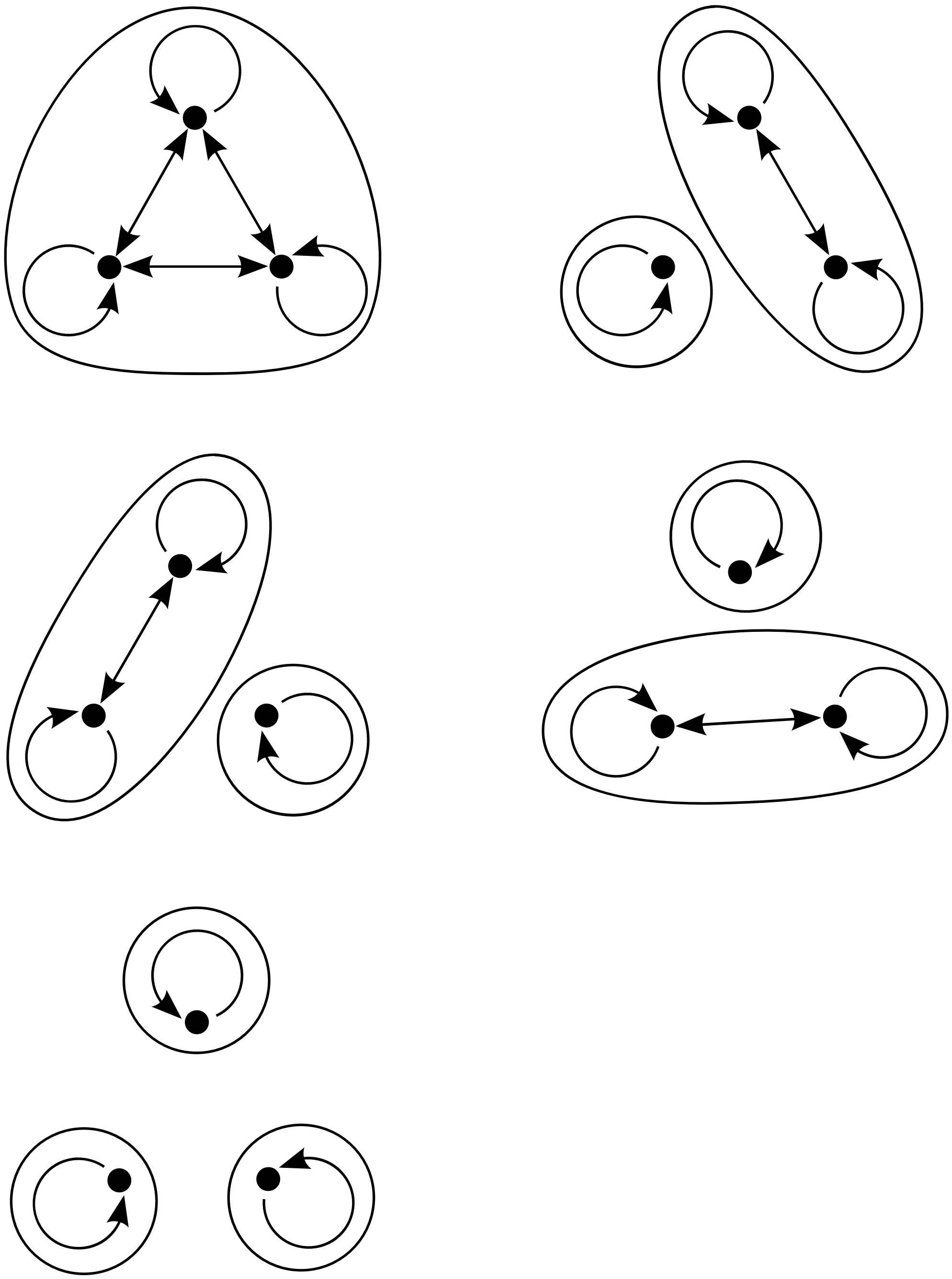
Sökta antalet: $126000 - 1600 = 105200$

Varje partition i en mängd motsvarar precis en ekvivalensrelation på mängden.
Så antalet ekvivalensrelationer är

$$\sum_{k=1}^{n} S(n;\, k) = n\text{:e radsummand i “Stirlings triangel”}.$$

Exempel:

$n = 3$:



Exempel:

Varför gäller:

$$k^n = \sum_{i=1}^{\min(k;\,n)} S(n;\, i)(k)_i \quad ?$$

Exempel:

$n = 5,\ \ k = 3$

$HL = S(5;\,1)(3)_1 + S(5;\,2)(3)_2 + S(5;\,3)(3)_3 =$

$= 1 \cdot 3 + 15 \cdot 3 \cdot 2 + 25 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$

$= 243 = 35$

VL: Antalet funktioner

n-mängd $\rightarrow$ k-mängd

$S(n;\, i)(k)_i$ antalet funktioner som tar precis i strycken värden.