Homogena linjära system
Med konstanta koefficienter

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}=\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t}=\mathbf{A}\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{K}=\vec{0}$$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden
• Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer
• För få linjärt oberoende egenvektorer

Komplex egenvärden

[z.c.8.2.2.]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-2=\lambda^2-5\lambda+4$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$

Bestäm en egenvektor till varje egenvärde.

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\lambda_1=1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \qquad \vec{v_1}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=4 \qquad \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\vec{v_2}=\vec{0} \qquad \vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=C_1\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{4t}$$

[z.c.8.2.19.]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=9x-3y\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$3\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt} \quad \text{men även} \quad \begin{vmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$\because \ \lambda_{1,2} = 0$$

Bestäm en egenvektor till varje egenvärde.

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \ \Leftrightarrow \ \vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

Ansätt andra lösningen $\vec{X_2}=(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}$

$$(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}+\vec{L}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{A}\vec{L}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{A}\vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{L}=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}t+(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}$$

t^1: $\qquad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}=\vec{0}$

t^0: $\qquad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=\vec{L}$

$\vec{L}$ är en egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\vec{P}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+C_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

[z.c.8.2.36.]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+5y \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+6y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(6-\lambda)+10=(\lambda-5)^2+9$$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 3i$

$$\begin{pmatrix} 4-5-3i & 5 \\ -2 & 6-5-3i \end{pmatrix}\vec{v_1}=\begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \iff \vec{v_1}=\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}=e^{(5+3i)t}\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2 \end{pmatrix}=e^{5t}(\cos 3t+i\sin 3t)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases} \vec{X_1}=\Re\vec{Z}=e^{5t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos 3t+\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 3t\right)=e^{5t}\begin{pmatrix} \cos 3t+3\sin 3t \\ 2\cos 3t \end{pmatrix} \\ \vec{X_2}=\Im\vec{Z}=e^{5t}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 3t+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin 3t\right)=e^{5t}\begin{pmatrix} \sin 3t-3\cos 3t \\ 2\sin 3t \end{pmatrix} \\ \vec{X}=C_1\vec{X_1}+C_2\vec{X_2} \end{cases}$$

[z.c.8.3.13.]

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{X}=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}e^t$$

Bestäm en fundamentalmatris **Φ**(t) !

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{X}$$

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+1$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

Bestäm en komplex egenvektor!

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix}1-(1+i) & -1\\ 1 & 1-(1+i)\end{pmatrix}\vec{v}_1=\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}=e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=e^t\underbrace{(\cos t+i\sin t)}_{\text{cis } t=e^t}\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{X}_1=\Re\vec{Z}=e^t\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\sin t\right)=e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\\ \vec{X}_2=\Im\vec{Z}=e^t\left(\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin t\right)=e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}\end{cases}$$

Fundamentalmatrisen: $\mathbf{\Phi}(t)=e^t\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}$

$$\vec{X}_p\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}=\mathbf{\Phi}(t)\int\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{U}=\int e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}dt=\int\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_p=e^t\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\mathbf{\Phi}(t)\vec{C}+\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}=e^t\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}\vec{C}+e^t\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$