Linjär av första ordningen:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \quad (*)$$

Lös först den homogena differentialekvationen.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)=0$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx+P(x)dx=0\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx+\int P(x)dx=\int 0\,dx$$

$$\int \frac{y'}{y}dx+\int P(x)dx=C_0$$

$$\ln|y|+C_1+\int P(x)dx=C_0$$

$$\ln|y|+\int P(x)dx=C$$

$$\ln|y|+\int P(x)dx=\ln|C|$$

$$|y|+e^{\int P(x)dx}=|C|$$

$$y=\pm Ce^{-\int P(x)dx}$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

— eller —

$$\ln|y|-\ln|C|=-\int P(x)dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int P(x)dx$$

$$\left|\frac{y}{C}\right|=\frac{y}{\pm C}=\frac{y}{C}=e^{-\int P(x)dx}$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

Variation av parametrar:

$y_1(x) \triangleq e^{-\int P(x)dx}$, $u(x)y_1(x) \triangleq y$

Insättning i (*) ger:

$$\frac{du}{dx}y_1+u\frac{dy_1}{dx}+Puy_1=f$$

$$\frac{du}{dx}y_1+0_{(\dagger)}=f$$

(†):

$$u\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy}{dx},\ \ Puy_1=Py$$

$$\frac{dy}{dx}+Py=0 \qquad \text{(Den homogena differentialekvationen)}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{f}{y_1} \qquad (y_1 \text{ är exponentiell, alltså } \neq 0)$$

$$u=C=\int \frac{f}{y_1}dx+D$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx+D\right)$$

Allmänna lösningen:

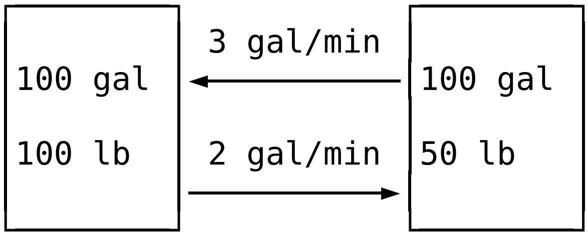
$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx+D\right)$$

$$y=De^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$y = \underset{y_h}{\uparrow} + \underset{y_p}{\uparrow}$$

1. Homogen lösning: y_1
2. Ansats: $y = u(x)y_1$
3. Insättning och hyfsning.

[z.c.3.3.7.]



$$\frac{dx_1}{dt} = 3\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_2(t)}{100-t}\,\text{lb/gal} - 2\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_1(t)}{100+t}\,\text{lb/gal}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_1(t)}{100-t}\,\text{lb/gal} - 3\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_2(t)}{100+t}\,\text{lb/gal}$$

$x_1(0) = 100$, $x_2(0) = 50$

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = \frac{d}{dt}0 = 0$$

$x_1 + x_2 = \text{konstant} = x_1(0) + x_2(0) = 100 + 50 = 150$

Systemet är slutet.

Eliminera x_1: $x_1 = 150 - x_2$

$$\frac{dx_2}{dt} = -3\frac{x_2(t)}{100-t} + 2\frac{150 - x_2(t)}{100+t}$$

$$\frac{dx_2}{dt} + \left(\frac{3}{100-t} + \frac{2}{100+t}\right) x_2(t) = \frac{300}{100+t}$$

Resten av lösningen finns på Internet.

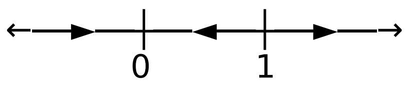
1. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet dem stationära lösningarna till den automona differentialekvationen $\frac{dy}{dx}=y(y-1)$.

Bestäm dem startvärden y_0 för vilka $\lim_{x\to\infty} y(x)$ är ändliga.

$$\frac{dy}{dx}=y(y-1)$$

Stationära lösningarna:

$$y(y-1)=0 \iff \begin{cases} y_1=0 \\ y_2=1 \end{cases}$$



Stabilt vid 0, instabilt vid 1.

2. En tank innehåller 300 liter vatten i vilket 1800 gram salt har lösts. En annan saltlösning med koncentrationen 5 gram per liter pumpas in med hastigheten 2 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp. Bestäm saltmängden som funktion av tiden.

$$\frac{dA(t)}{dt}=2\cdot 5-3\cdot\frac{A(t)}{300-t(3-2)}$$

$$\frac{dA(t)}{dt}+\frac{3}{300-t(3-2)}A(t)=10$$

$$e^{\int \frac{3}{300-t}dt}=e^{-3\ \ln(300-t)}=(300-t)^{-3}=\text{“Integrerande faktor”}$$

$$(300-t)^{-3}\frac{dA(t)}{dt}+3(300-t)^{-4}A(t)=10(300-t)^{-3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)(300-t)^{-3}\right)=10(300-t)^{-3}$$

Med integration fås:

$$A(t)(300-t)^{-3}=5(300-t)^{-2}+C$$

t = 0:

$$1800\cdot 300^{-3}=5\cdot 300^{-2}+C$$

$$A(t) = 5(300 - t) + \frac{(300-t)^3}{300^2}$$

$\because$

$$1800 \cdot 300^{-3} = 5 \cdot 300^{-2} + C$$

$$C = 1800 \cdot 300^{-3} - 5 \cdot 300^{-2} = 6 \cdot 300^{-2} - 5 \cdot 300^{-2} =$$

$$= \frac{6-5}{300^2} = \frac{1}{300^2}$$

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = y(y - 1)$.
Dock behöver ej konstantlösningarna anges. Bestäm därefter den lösningen som uppfyller villkoret:

a) $y(0) = 2$
b) $y(0) = ½$

Ange lösningens existensintervall och vad som händer då x växer.

[z.c.3.3.7.]

Bestäm den allmänna lösningen till

$y' + 3x^2 y = x^2 \qquad (y = y(x))$

Lösning (linjär):

Multiplicera med integrerande faktorn.

$$e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} e^{x^3} + 3x^2 e^{x^3} y = x^2 e^{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{x^3}\right) = x^2 e^{x^3}$$

$$y e^{x^3} = \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$y = \frac{1}{3} + \underbrace{C e^{-x^3}}_{\text{transient term, } \to 0}$$

[uppgift 13 på modullappen]

En kaka tas ut ur ugnen.

105°C efter 10 minuter
65°C efter 30 minuter

Vid vilken tidpunkt är temperaturen 30°C?

Avsvalningshastigheten är propotionell mot temperaturens differential $T - T_0$, då T är kakan temperatur och $T_0 = 25°C$ är rumstemperaturen.

Lösning:

Låt $T(t)$ vara kakans temperatur vid tiden t.

T uppfyller relationen

$$\frac{dT}{dt}=k\left(T-T_0\right),\ \ T_0=25$$

Vi löser ekvationen! (linjär)

$$\frac{dT}{dt}-kT=-kT_0$$

Multiplicera med den integrerande faktorn $e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$.

$$\frac{dT}{dt}\cdot e^{-kt}-ke^{-kt}T=-kT_0e^{-kt}\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\left(Te^{-kt}\right)=-kT_0e^{-kt}$$

Integrera!

$$Te^{-kt}=\int\left(tkT_0e^{-kt}\right)dt=T_0e^{-kt}+C\Rightarrow T=T_0+Ce^{kt}$$

$t \to \infty \Rightarrow T \to 0$
$\therefore k < 0$

Givet att:
$105 = T(10) = T_0 + Ce^{10k}$
$65 = T(30) = T_0 + Ce^{30k}$

$(T_0 = 25)$
$Ce^{10k} = 105 - 25 = 80$
$Ce^{30k} = 65 - 25 = 40$

$$\frac{Ce^{30k}}{Ce^{10k}}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}=e^{20k} \qquad \left(k=\frac{-\ln 2}{20}\right)$$

$$80=Ce^{10k}=C\sqrt{e^{30k}}=C\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C=80\sqrt{2}$$

Alltså:

$$T(t)=25+80\sqrt{2}\,e^{\frac{-\ln 2}{20}t}$$

Vi får:

$$35=25+\sqrt{2}\,80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$10=\sqrt{2}\,80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$1=8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}=8$$

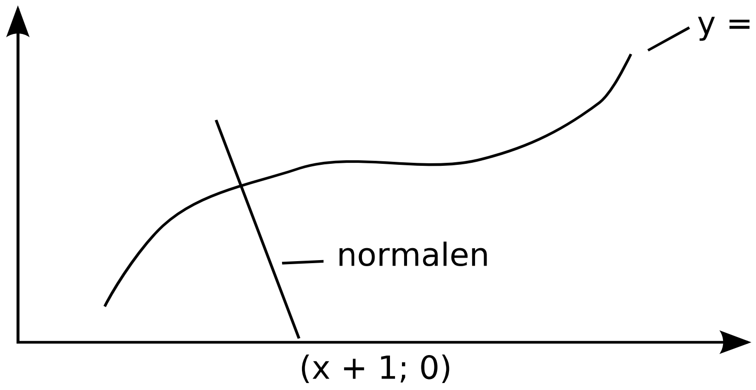
$$\frac{t}{20}-\frac{1}{2}=\mathrm{lb}\,8=3$$ (lb är samma sak som $\log_2$)

$$t-10=60$$

$$t=70$$

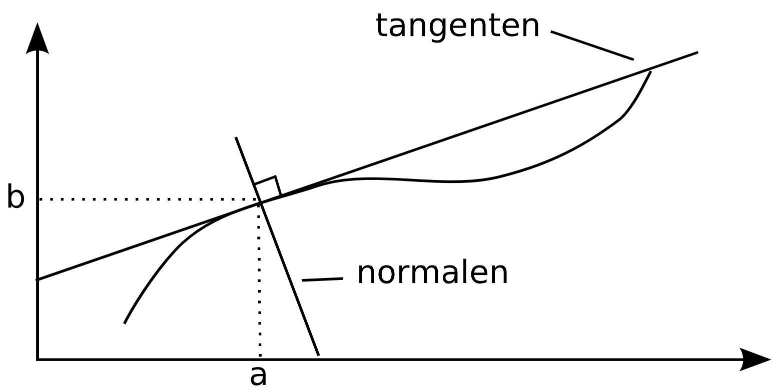
[uppgift 15 på modullappen]

Vilka kurvor $y = y(x)$ i planet har egenskapen att normalet till en godtycklig punkt $(x; y)$ på kurvan skär x-axeln i punkten $(x + 1; 0)$?



Lösning:

Hitta först en ekvation för normalen till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(a; b)$.



Lutningen på tangenten multiplicerat med lutningen på normalen = –1.
Normalen har lutningen $-1/f'(a)$, så en ekvation för normalen är:

$$0 = -\frac{1}{f'(x)} + y$$

det vill säga

$$y' = \frac{1}{y}$$

Separabel!

Vi löser ekvationen:

$y' = \frac{1}{y}$ som vi skriver $y\,dy = dx$

Integrera!

$\frac{y^2}{2} = x + C$

$y = \pm\sqrt{2x + 2C}$

X > –C

Varje val av C ger en sådan kurva.

[uppgift 5 på modullappen]

Bestäm lösningen till

$xy' + y + xy^2 = 0, \qquad y(1) = 1$

Bestäm existensintervallet.

Lösning:

Vi skriver lösningen på formen:

$y' + \frac{1}{y} y + y^2 = 0$

Bernoullsk!:

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^{\alpha}$

Dividera med y^2

$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = -1 \quad (*)$

$u \triangleq \frac{1}{y} = y^{1-2}$

Då $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{y}y'$

(*) blir

$$-\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}\cdot u=-1$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}\cdot u=1$$ Linjärt!

Multiplicera med den integrerande faktorn

$$e^{-\int \frac{1}{x}dx}=e^{-\ln|x|}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx}-\frac{1}{x^2}\cdot u=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}u\right)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}u=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C=\ln x+C \Leftrightarrow u=x(\ln x+C)$$

Gå tillbaka till y.

$$y=\frac{1}{u}=\frac{1}{x(\ln x+C)}$$

Begynnelsevillkor ger

$$1=y(1)=\frac{1}{C} \Leftrightarrow C=1$$

Alltså

$$y=\frac{1}{x(\ln x+1)}$$

Lösningen existerar för x sådant att
$x > 0$ och $x(\ln x + 1) > 0$.

Vi måste ha $\ln x + 1 > 0$, det vill säga
$\ln x > -1$
$x > e^{-1}$

Alltså:

Existensintervallet är $]e^{-1}; \infty[$.

Endast en del i intervallet ska vara med.