2011-(04)apr-14: dag 23

Boolesk algebra

- Booleska funktioner
- Disjunktiv och konjunktiv normalform
- Logiska grindar och kretsar
- Minimering, Karnaughdiageran

Grafteori

- Grafer, exempel
- Grafteoretiska grundbegrepp
- Bipartita grafer
- Grannmatris och incidensmatris
- Isomorfi mellan grafer
- Valens (grad), reguljära grafer
- Vägar, stigar och sånt
- Eulervägar och -kretsar, Hamiltonstigar och -cykler
- Sammanhängande grafer, komponenter

0-ställiga (en. nullary) konnektiv: $\bot$ $\top$

1-ställiga (en. unary) konnektiv: $\neg$

2-ställiga (en. binary) konnektiv: $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$

Två olika skrivsätt:

$\cdot$	$+$	$\overline{}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$=$
$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\top$	$\bot$	$\equiv$

(eller $\Leftrightarrow$)

Idag först mer om boolesk /bo:lsk/ algebra

Ett exempel till: $\mathbb{B}_n = \{0, 1\}^n = \{\underbrace{00\ldots0}_{\times n},\ 00\ldots1,\ \ldots,\ 11\ldots1\}$

$+, \cdot$ definieras komponentvis:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\overline{0} = 1$

$\overline{1} = 0$

$+$ är inte likadan som i $\mathbb{Z}_2$.

Exempel:

$n = 3$

$010 + 011 = 011$

Booliska funktioner

$f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$ ($f : \mathbb{B}_n \to \mathbb{B}$)

Exempel:

Sentenser (med bara atomära sentenser bland n givna)

Exempel:

$\neg(A \to \neg B)$

definierar funktionen

$f(1, 1) = 1$
$f(1, 0) = 0$
$f(0, 1) = 0$
$f(0, 0) = 0$

En boolesk funktion beskrivs fullständigt av en sanningsvärdestabell.

Exempel:

x	y	z	$f(x, y, z)$		
1	1	1	1	xyz	1 på denna rad, 0 för övriga
1	1	0	1	$xy\overline{z}$	1 på denna rad, 0 för övriga
1	0	1	1	$x\overline{y}z$	1 på denna rad, 0 för övriga
1	0	0	0		
0	1	1	0		
0	1	0	0		
0	0	1	1	$\overline{x}\overline{y}z$	1 på denna rad, 0 för övriga
0	0	0	0		

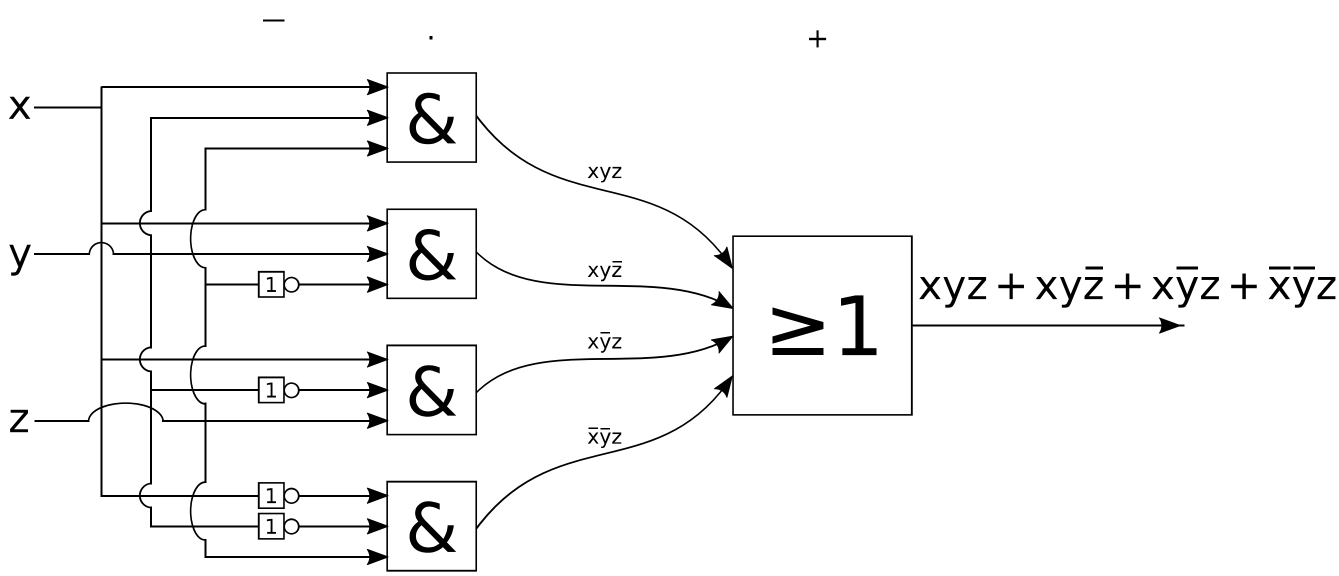
“Så” $f(x, y, z) = xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + \overline{x}\overline{y}z$

På samma sätt kan varje boolesk funktion skrivas på disjunktiv normalform (dnf).

Dualt: konjunktiv normalform (knf)

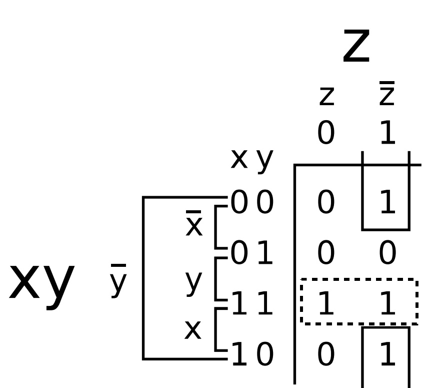
$$f(x, y, z) = (\bar{x} + y + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + y + z)$$

$f(x, y, z)$ kan “realiseras” med en logisk krets:



Uttycket kan förenklas till en mindre, disjunktiv form.

Karnaugh-diagram



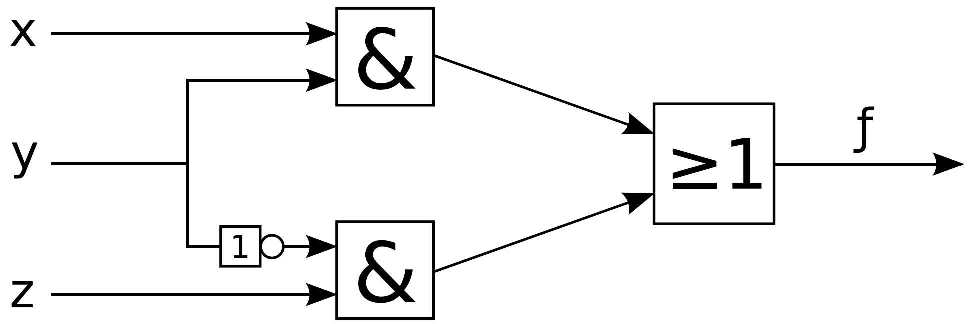
För ihop 1:orna i rektanglar med sida 1, 2 eller 4 (2^n). Rektanglarna ska vara Så stora som möjligr som får vara överlappande.

Endast en skillnad per rad i xy, gäller även i kolonnerna.

I diagrammet till vänster finns, det två ihopförningar, de heldragna bilder en rektangel.

Här är $f(x, y, z) = xy + \bar{y}\bar{z}$

Alltså:
En enklare krets för $f(x, y, z)$:



Ett exempel till:

Förenkla $f(x, y, z, w) = (\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{w})_{(1)} + (\bar{x}\,\bar{y}\,z\,\bar{w})_{(2)} + (\bar{x}\,y\,\bar{z}\,w)_{(3)} + (x\,y\,\bar{z}\,\bar{w})_{(4)} +$

$$+ (x\,y\,\bar{z}\,w)_{(5)} + (x\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{w})_{(6)} + (x\,\bar{y}\,\bar{z}\,w)_{(7)} + (x\,\bar{y}\,z\,\bar{w})_{(8)}$$

Karnaughdiagram:

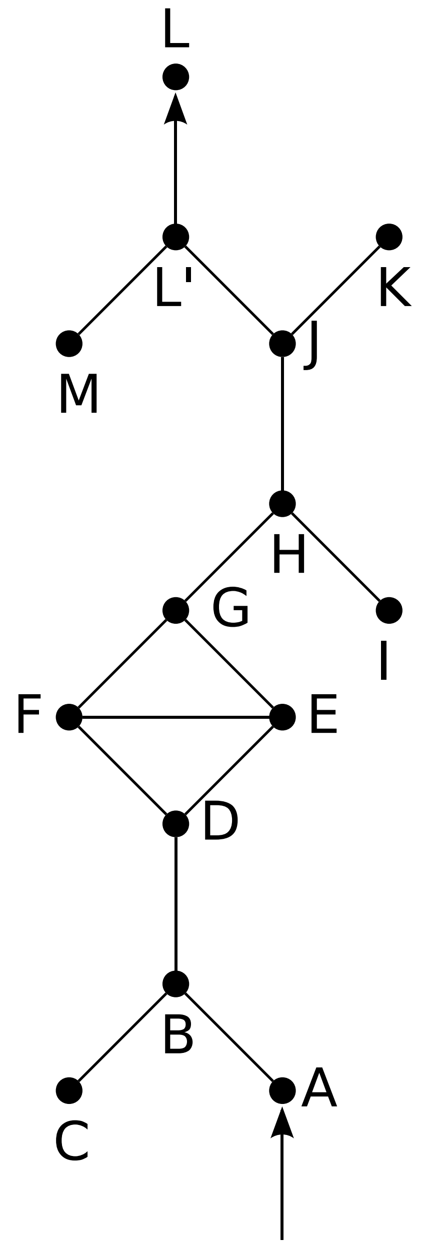
xy \ zw	00	01	11	10
00	$1_{(1)}$	0	0	$1_{(2)}$
01	0	$1_{(3)}$	0	0
11	$1_{(4)}$	$1_{(5)}$	0	0
10	$1_{(6)}$	$1_{(7)}$	0	$1_{(8)}$

“så” $f(x, y, z, w) =$
$= \boxed{x\bar{z}} + \boxed{\bar{y}\bar{w}} + \boxed{y\bar{z}w}$

[U1.5]

En schematisk karta för labyrinten

Ett exempel på en graf.



En graf

“Teoretisk”, abstrakt

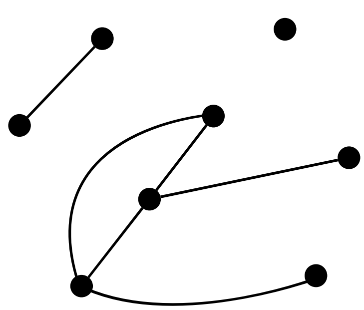
G = (V, E)

V — En ändlig mängd, hörn (noder, vertex)

E — En mängd av 2-delmängder till V, kanter (edge), (par av olika hörn).

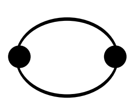
De hörnen är då grannar.

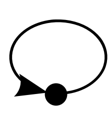
“Praktiskt”



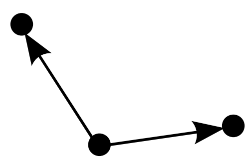
Enkla, oriktade grafer

Inga:





Inte:



Varianter av grafer:

Oändlig mängder (hörn)

Riktade kanter

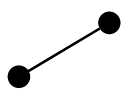
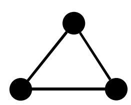
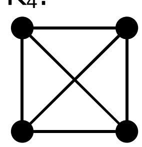
Viktade kanter

Öglor

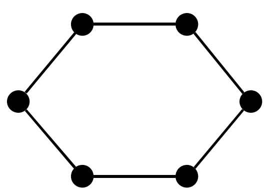
Multipla kanter

Standardnamn för vissa grafer:

K_n, fullständiga grafen med n hörn, $n \geq 1$
Alla möjliga kanter finns.

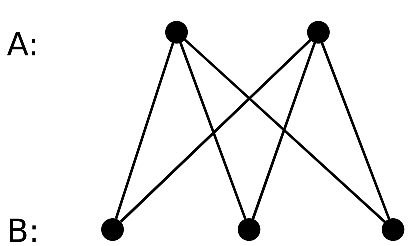
K_1:  K_2:  K_3:  K_4:  …

C_n, cykliska grafen med n hörn, $n \geq 3$

C_6:  ($C_3 = K_3$)

$K_{m,n}$, fullständiga bipartita grafen, $m, n \geq 1$

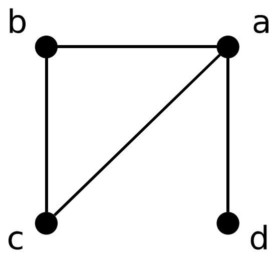
$V = A \cup B$



$= K_{2,3}$

Små grafer ges lätt av en bild, men man kan även använda grannlista

(en. adjecant list) eller grannmatris (en. adjecant matrix).



a	b	c	d
b	a	b	a
d	c		b
	d		

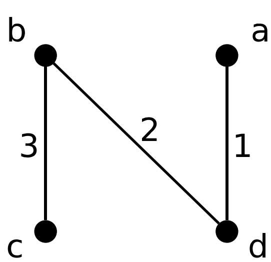
$$
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & d \\
\hline
a & 0 & 1 & 0 & 1 \\
b & 1 & 0 & 1 & 1 \\
c & 0 & 1 & 0 & 0 \\
d & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

För enkel oriktad:
Symmetrisk 0/1-matris,
0:or på diagonalen.

$G = (V, E)$

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \{ij\} \in E \\ 0 & \text{annars} \end{cases}
$$

Ett sätt till: incidentmatris



$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
a & 1 & 0 & 0 \\
b & 0 & 1 & 1 \\
c & 0 & 0 & 1 \\
d & 1 & 1 & 0
\end{array}
$$

Exakt 2 1:or i varje kolonn
(ty tvp hörn per kant).