2011-(03)mar-29: dag 18

Idag övning, men först en sak från föreläsning.

Sats:

Om $\pi \in S_n$ och $\pi = \tau_r \tau_{r-1} \ldots \tau_1 = \tau'_{r'} \ldots \tau'_2 \tau'_1$
(där π:na är transpositioner, det vill säga = (ij), $i \neq j$).

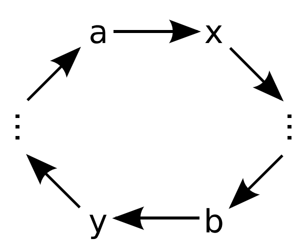
Så har r och r' samma paritet (det vill säga båda udda eller båda jämna).

Ty:

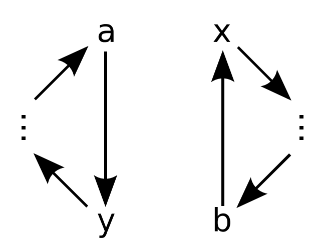
Om $\sigma \in S_n$, τ en transposition i S_n, ($\tau = ab$)
Låt $c(\sigma)$ vara antalet cykler i σ.
Vad blir $c(\sigma\tau)$?

1) a, b i samma cykler i σ:

i σ:



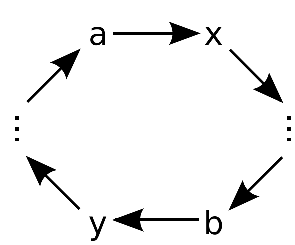
i στ:



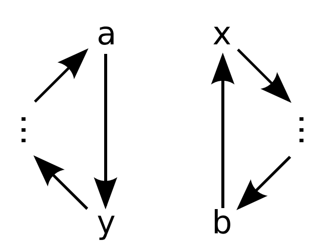
så $c(\sigma\tau) = c(\sigma) + 1$

2) a, b i olika cykler i σ:

i σ:



i στ:



så $c(\sigma\tau) = c(\sigma) - 1$

Så $c(\pi) = c(\mathrm{id}\ \tau_r \ \ldots\ \tau_2\ \tau_1) = c(\mathrm{id}\ \tau'_r\ \ldots\ \tau'_2\ \tau'_1)$
ger att r och r' har samma paritet.

Oberservera att tecknet för π, $\operatorname{sgn} \pi =$

$$= (-1)^r = \begin{cases} 1 & \pi \text{ jämn} \\ -1 & \pi \text{ udda} \end{cases}$$

$\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \operatorname{sgn} \sigma$

$\operatorname{sgn} \pi^{-1} = \operatorname{sgn} \pi$

$\operatorname{sgn}(\sigma\alpha\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn} \alpha$ samma paritet i hela konjugatklassen (det vill säga samma cykelstruktur).

$\operatorname{sgn}(x_1 \ldots x_\kappa) = (-1)^{k-1}$

$$(x_1 \ldots x_k) = \underbrace{(x_1 x_k)(x_1 x_{k-1}) \ldots (x_1 x_2)}_{k-1 \text{ styck}}$$

Om π har typ $\left[1^{\alpha_1}\ 2^{\alpha_2}\ \ldots\ k^{\alpha_k}\right]$ är $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \cdots} = (-1)^{n - c(\pi)}$

1) $\varphi, \psi \in S_n$ $\quad \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) I cykeform: $\varphi = (1\ 6\ 4\ 5\ 2)(3\ 8\ 7)$,
$\psi = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 8\ 5)(6)$

b) $\varphi\psi$ i tvåradsform:

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \varphi \\ \psi \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

i cykelform:

$$\varphi\psi = (1\ 6\ 4\ 5\ 2)(3\ 8\ 7)(1\ 7\ 3\ 4)(2\ 8\ 5) = (1\ 3\ 5)(2\ 7\ 8)(4\ 6)$$

$$\psi\varphi = (1\ 7\ 3\ 4)(2\ 8\ 5)(1\ 6\ 4\ 5\ 2)(3\ 8\ 7) = (1\ 6)(2\ 7\ 4)(3\ 5\ 8)$$

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5\ 4\ 6)(3\ 7\ 8)$$

(eller $(2\ 5\ 4\ 6\ 1)(7\ 8\ 3)$)

c)

$$\mathbf{M}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \\ 1 & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & 1 & \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_\psi = \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \cdots \\ 0 & \\ 0 & \\ 1 & \\ 0 & \end{pmatrix},$$

rad 6 rad 7

$$\mathbf{M}_{\varphi\psi} = \begin{pmatrix} 0 & \\ 0 & \\ 1 & \\ 0 & \cdots \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \\ 0 & \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\varphi \mathbf{M}_\psi$$

2) $\pi \in S_9$: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 9 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

a) $o(\pi)$?

π i cykelform: $\underbrace{(1\ 7\ 2)}_{3}\underbrace{(3\ 6\ 9\ 8)}_{4}\underbrace{(4\ 5)}_{2}$

Så $o(\pi) = \text{mgm}(3, 4, 2) = 12$

b) π som en produkt av transpositioner: (varje cykel för sig)

$\pi = (1\ 2)(1\ 7)(3\ 8)(3\ 9)(3\ 6)(4\ 5)$, 6 stycken transpositioner.

Så $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^6 = 1$, π är en jämn permutation.
Kan också ses:

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{\alpha_2 + \alpha_4 + \cdots} = (-1)^{1+1} = 1$$

$$= (-1)^{n - c(\pi)} = (-1)^{n-3} = 1$$

3) $\pi = (1\ 7\ 2)(3\ 6\ 9\ 8)(4\ 5)$ från förra uppgiften.
$\sigma = (1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4)$

Vi söker χ, ψ så att $\pi\chi = \sigma$, $\psi\pi = \sigma$.

$$\chi = \pi^{-1}\sigma = \underbrace{(1\ 2\ 7)(3\ 8\ 9\ 6)(4\ 5)}_{\pi^{-1}}(1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4) = (1\ 4\ 7)(2\ 5\ 8)(3\ 6\ 9)$$

$$\psi = \sigma\pi^{-1} = (1\ 5\ 3\ 9\ 6\ 8)(2\ 4)(1\ 2\ 7)(3\ 8\ 9\ 6)(4\ 5) = (1\ 4\ 3)(2\ 7\ 5)(6\ 9\ 8)$$

$\chi\psi$ konjugerade, $\psi = \pi\chi\pi^{-1}$

4) “Patiensen”

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 6 & 11 \\ 5 & 10 & 4 \\ 9 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 12 \end{matrix} \longrightarrow \cdots$$

a) $\pi(i) = j$ om kortet i position i hamnar i position j.

$\pi \in S_{12}$ $\pi = (1)(2\ 4\ 10\ 6\ 5)(3\ 7\ 8\ 11\ 9)(12)$

Upprepat n gånger fås π^n, första gången vi kommer tillbaka
till något läge är efter $o(\pi)$ gånger, det vill säga 5 gånger.

b) Med positionerna $0, 1, 2, \ldots, 11$ istället.

$\pi = (0)(1\ 3\ 9\ 5\ 4)(2\ 6\ 7\ 10\ 8)(11)$

Det vill säga $\pi(i) = 3i \pmod{11}$ (förutom för (11))

så $o(\pi) = o(3)$ i $U(\mathbb{Z}_{11})$

$|U(\mathbb{Z}_{11})| = 10$ så $o(3) = 1, 2, 5$ eller 10.

$3^1 = 3,\ 3^2 = 9,\ 3^5 = 1$

$o(\pi) = o(3) = 5$

c) m rader, n kolonner

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & \cdots & 2n-1 \\ 2n & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (m-1)n & \cdots & \cdots & \cdots & (mn-1) \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{cccc} 0 & m & \cdots & (n-1)m \\ 1 & m+1 & \cdots & \vdots \\ 2 & m+2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m-1 & 2m+1 & \cdots & nm-1 \end{array}$$

"Tydligen" $\pi(i) = ni \pmod{mn-1}$ $\quad m \mapsto 1$

Ty $0 \mapsto 0$, ökar med n för varje steg till $m-1 \mapsto (m-1)n$

Så $o(\pi) = o(n)$ i $U(\mathbb{Z}_{mn-1})$.

d) Riffelblanding av en kortlek

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ & \\ 2 & 3 \\ & \\ 4 & 5 \\ & \\ \vdots & \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{cc} 0 & 26 \\ \swarrow & \\ 1 & 27 \\ \swarrow & \\ 2 & 28 \\ \swarrow & \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \quad \mapsto \quad \begin{array}{c} 0 \\ 26 \\ 1 \\ 27 \\ 3 \\ 28 \\ \vdots \end{array}$$

Fallet med samma kort överst och underst hela tiden:

$m = 25$, $n = 2$ ovan, det vill säga $\pi(i) = 2i \pmod{51}$

Antalet gånger riffelblandningen måste upprepas för att ge samma läge.

$$o(\pi) = o(2) \text{ i } U(\mathbb{Z}_{51}) = \{x \in \mathbb{Z}_{51} \mid \text{sgd}(x; \underbrace{51}_{= 3\cdot 17}) = 1\}$$

$$|U(\mathbb{Z}_{51})| = \overset{= \mathbb{Z}_{51}}{|x|} \underbrace{- |A| - |B| + |A \cap B|}_{-|A \cup B|} = 51 - 17 - 3 + 1 = 32$$

A — de som är delbara med 3
B — de som är delbara med 17

$o(2)$ i $U(\mathbb{Z}_{51})$ är alltså 1, 2, 4, 8, 16 eller 32.

$2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^4 = 16$, $2^8 = 256 = 1 \pmod{51}$

så $o(2) = 8$ och
8 riffelblandningar av denna typ leder tillbaks.

Fall 2:

Inget kort orörligt. Fallet $m = 22$, $n = 2$.
(Fiktiva kort överst och underst.)

Antalet upprepningar till ursprungsläget:

Detta fall: $o(2)$ i $U(\mathbb{Z}_{54-1}) = U(\mathbb{Z}_{53})$ {53, primtal}

$o(2) \setminus |U(\mathbb{Z}_{53})| = 52 = 2^2 \cdot 13$

Så $o(2) = 1, 2, 4, 13, 26, 52$
$o(2) = 52$