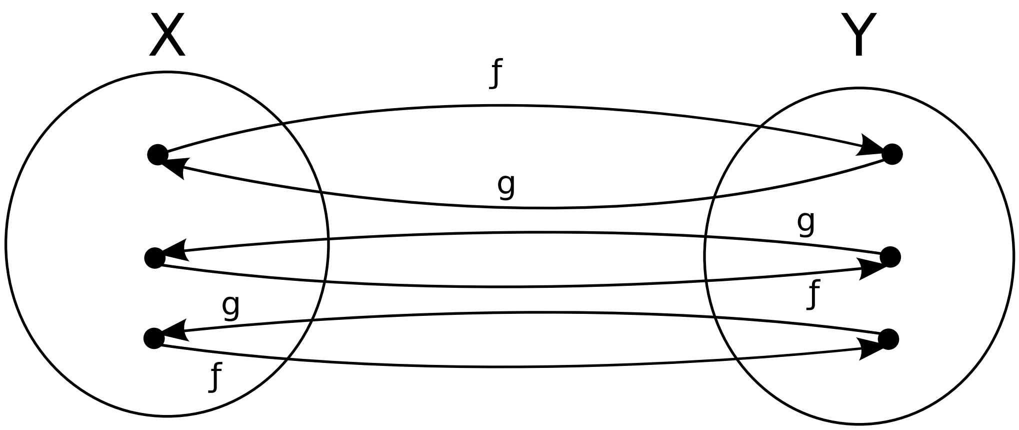
2011-(02)feb-09: dag 7

Först mer om funktioner

En inversfunktion till $f : X \to Y$ är en funktion $g : Y \to X$ så att

$f \circ g = id_Y$ och $g \circ f = id_X$ ($id_Y(y) = y$ för alla y i Y)



Inversfunktionen skrivs f^{-1}.

f kallas invertabel (eller inverterbar) om f^{-1} existerar.

Om f är invertabel:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(x_1))}_{x_1} = \underbrace{f^{-1}(f(x_2))}_{x_2}$$

Så f injektiv.

För $y \in Y$ gäller $f(f^{-1}(y)) = y$, y godtyckligt, så f surjektiv.

Det vill säga f är en bijektion.

Och omvänt f bijektion:

Definiera g: $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$

("vänd pilarna")

Sats: $f : X \to Y$ är invertabel omm den är en bijektion.

Man ser att om f, g är invertabla $\begin{cases} f : X \to Y \\ g : Y \to Z \end{cases}$

så är $g \circ f : X \to Z$ invertabel och $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Om X är ändlig och $f : X \to Y$ är en bijektion så är tydligen $|X| = |Y|$, de har samma kardinalitet. $|X| = n$ betyder att det finns en bijektion $f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \to X$.

Också för oändliga mängder. Vi säger att X och Y har samma kardinalitet, $|X| = |Y|$ omm det dinns en bijektion $f : X \to Y$.

Definition:

X är <u>uppräknelig</u> om det finns en bijektion $f : \mathbb{N} \to X$.

Observera att $\mathbb{N} = \{\mathbf{0}, 1, 2, \ldots\}$ är lika stor som $\mathbb{Z}_+ = \{\mathbf{1}, 2, \ldots\}$ ty en bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$ ges av $f(x) = x + 1$.

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}_+|$

Och $\mathbb{N} = A \cup B$, $A = \{0, 2, 4, \ldots\}$, $B = \{1, 3, 5, \ldots\}$

$A \cap B = \emptyset$ (disjunkta)

$|A \cup B| = |A| = |B| > 0$

$|A| = |B| = |\mathbb{N}|$

$f(x) = x + 1$ $\quad g : \mathbb{N} \to A$ $\quad g(x) = 2x$

$\mathbb{R}$, de reella talem, är inte uppräknelig; den är överuppräknelig.

Ty: Antag att $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ är en bijektion.

$f(1) = \ldots,\underline{a_{11}}a_{12}a_{13}\ldots$ decimalbråk som inte slutar med 999… $(\overline{9})$
$f(2) = \ldots,a_{21}\underline{a_{22}}a_{23}\ldots$
$f(3) = \ldots,a_{31}a_{32}\underline{a_{33}}\ldots$
$\vdots$

Betrakta $x = 0,g(a_{11})g(a_{22})g(a_{33})$

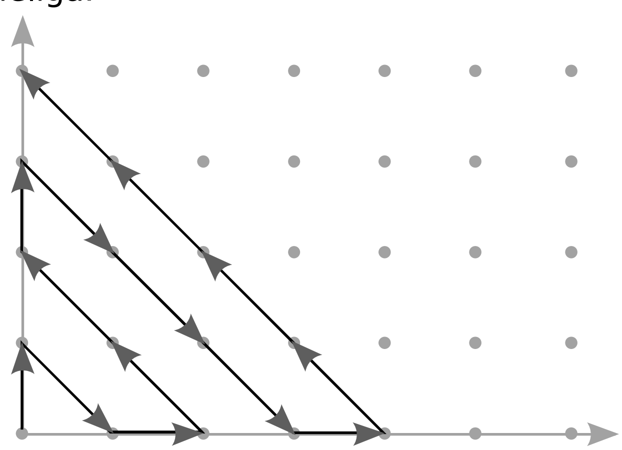
$g(0) = 1$
$g(d) = 0, \quad d = 1, 2, 3, \ldots, 9$

då $x \neq f(n)$ för alla n ty olika n:e decimal.
f inte surjektiv.

Motsägelse!

Men $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, de rationella tlen är uppräkneliga.

$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$



Oavsett vilken punkt som väljs kommer den kommas fram till.

$|X| < |Y|$ betyder att det finns en injektion $f : X \to Y$, men inte en surjektion.

Sats: $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, alla mängder A.

Ty: Det finns en bijektion $g : A \to \mathcal{P}(A)$

$|X| < |Y|$: det finns en injektion : $X \to Y$
det finns inte en bijektion.

$g(a) = \{a\}$

Låt $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Vi ska se att f inte är en surjektion med
$B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \in \mathcal{P}(A)$.

För alla $a \in A$: $a \in B \Leftrightarrow a \notin f(a)$
Om $f(b) = B$: $b \in B \Leftrightarrow b \notin f(b) = B$ Motsägelse!
$b \in A$: f är inte surjektiv

Binära <u>relationer</u> på en mängd $\mathcal{R}$ en binär relation på mängden X
för alla $a, b \in X$ är $a \mathcal{R} b$ sant eller falskt.

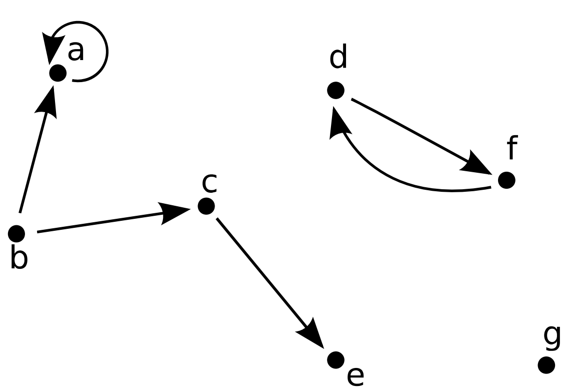
Exempel: $\mid$ $\leq$ $<$ $=$ $\equiv_m$ $\nmid$ på $\mathbb{Z}$

$\subseteq$ $\subset$ $|A| = |B|$ $A \cap B \neq \emptyset$ på mängder

Formellt definieras ofta

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in X^2 \mid a \mathcal{R} b\} \subseteq X^2 \ (= X \times X)$$

Beskrivs ibland med en graf



betyder $b \mathcal{R} c$ sant det vill säga
$(a, b) \in \mathcal{R}$.

Kan också beskrivas med en <u>matris</u>

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

$x \mathcal{R} y$ omm 1 i position xy

Viktiga egenskaper för binära relationer:

$\mathcal{R}$ <u>reflexiv</u>:

$x \mathcal{R} x \ \forall x \in X$
exempel: $|$ $\leq$ $=$ $\equiv_m$

$\mathcal{R}$ <u>symmetrisk</u>:

$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow y \mathcal{R} x$
exempel: $=$ $\equiv_m$

$\mathcal{R}$ <u>antisymmetrisk</u>:

$x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$
exempel: $\leq$ $\subseteq$ $|$

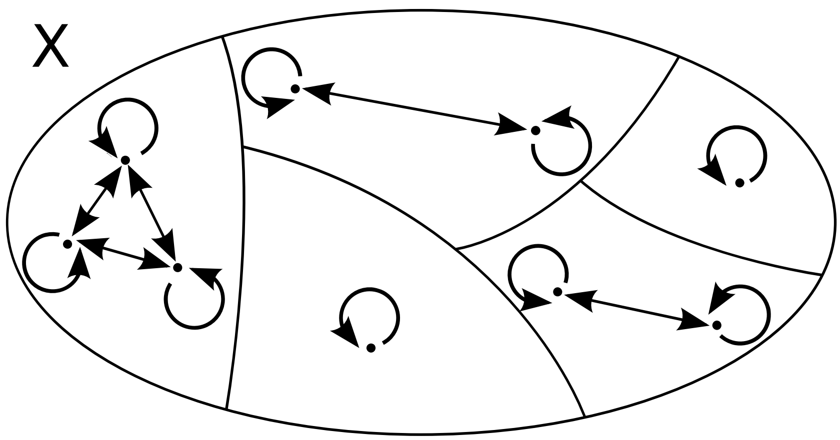
$\mathcal{R}$ <u>transitiv</u>:

$x \mathcal{R} y, y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
exempel: $\geq$ $=$

$\mathcal{R}$ kallas en ekvivalensrelation omm den är reflexiv, symmerisk och transitiv.

Exempel: $=$ $\quad \equiv_m$ $\quad |\cdot| = |\cdot|$

En sådan delar X i ekvivalensklasses (disjunkta) $\quad (y = \{x \in X \mid x \,\mathcal{R}\, y\})$

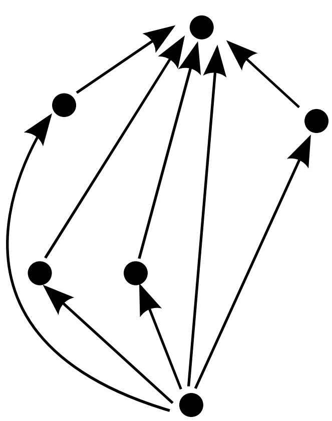


Ett exempel på en sådan är $\equiv_m$

$\mathcal{R}$ kallas en partialordning omm den är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

Exempel: $\leq$ (för $\mathbb{Z}$) $\quad \subseteq$ (för $\mathcal{P}(Y)$) $\quad |$ (för $\mathbb{N}$)

$|$:



Inga cykler (sluta kurvor) av längen > 1.

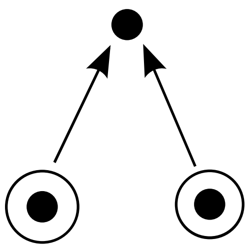
I samband med partialordning ($\preccurlyeq$ eller dylikt)

Ett element $a \in X$ (med partialordning $\preccurlyeq$)
kallas minimalt om inget mindre:

$$x \preccurlyeq a \Rightarrow x = a$$

Minst om det är mindre än alla:

$$a \preccurlyeq x \ \forall\, x \in X$$



Minimal
det finns inget minsta

a minst $\Rightarrow$ a minimalt
a minst $\not\Leftarrow$ a minimalt

På samma sätt; maximalt, störst.

Om $x \preccurlyeq z$, $y \preccurlyeq z$ är z en övre begränsning till X, Y
(Det finns även undre begränsning.)

Exempel: gemensam delare $|$.