$$g(x)=\sum_{i=0}^{n} a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}$$

$g(x) \neq 0$ — inhomogen
$g(x) = 0$ — homogen

[z.c.4.1.7.]

$x(t)\ c_1 \cos \omega t = c_2 \sin \omega t$

är den allmäna lösningen till

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Visa att den lösningen som uppfyller

$$x(0) = x_0 \quad (1) \quad \text{samt} \quad x'(0) = x_1 \quad (2)$$

är

$$x(t)=x_0 \cos \omega t+\frac{x_1}{\omega} \sin \omega t$$

$x(t)$ uppfyller (1):

$$x_0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Leftrightarrow x_0 = c_1$$

$x(t)$ uppfyller (2):

$$x'(t) = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t$$

$x'(0) = x_1$:

$$x_1 = -c_1\omega \sin 0 + c_2\omega \cos 0 = c_2\omega$$

Funktionerna $\coprod_{i=0}^{n} f_i$ är linjärt beroende om det finns konstanter, $\coprod_{i=0}^{n} C_i$,

så att $\sum_{i=0}^{n} C_i f_i=0$

[z.c.4.1.17.]

$f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \sin^2 x$

Linjärt beroende?

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 = f_2 + f_3$

$c_2 = c_3$

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$
$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_2 f_3 = 0$
$c_1 f_1 + c_2(f_2 + f_3) = 0$
$c_1 \cdot 5 + c_2 \cdot 1 = 0$

$c_2 = -5c_1$

$c_1 \cdot 5 - 5c_1 \cdot 1 = 0$

$5(c_1 - c_1) = 0$
$0 = 0$

Linjärt beroende!

[z.c.4.1.40.]

Är $f_1(x) = e^{x+2}$ och $f_2(x) = e^{x-3}$ linjärt beroende?

$f_1(x) = e^{x+2} = e^2 e^x = k_1 e^x$
$f_2(x) = e^{x-3} = e^{-3} e^x = k_2 e^x$

Ja, båda är på formen ke^x.

[z.c.4.1.23.]

Visa att funktionerna e^{-3x} & e^{4x} utgör en fundamentalmängd till ekvationen

$$y'' - y' - 12y = 0$$

1) Antalet funktioner är lika många som ekvations ordningsnummer:

“ordning” = 2 $\asymp$ 2 = “funktioner”

2) Funktionerna är lösningar till ekvationen. (Kolla själv!)

3) $W(e^{-3x}; e^{4x}) \neq 0$:

$$W(f_1;f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

$$W(e^{-3x};e^{4x})=\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{4x} \\ -3e^{-3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix}=(4+3)e^{(4-3)x}=7e^{x}\neq 0$$

[z.c.4.2.9.]

Lös $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$, om $y_1 = x^4$ är en lösning!

Substitution: $y \triangleq y_1 \cdot u$

$y' = (y_1u)' = y_1'u + y_1u'$

$y'' = (y_1'u + y_1u')' = (y_1'u)' + (y_1u')' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''$

$$\begin{aligned}
0 &= x^2y'' - 7xy' + 16y = \\
&= x^2y_1''u + 2x^2y_1'u' + x^2y_1u'' - 7xy_1'u - 7xy_1u' + 16y_1u = \\
&= u\cdot([x^2y_1'' - 7xy_1' + 16y_1]_0) + u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1 = \\
&= \{[\ldots]_0 = 0\} = u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1 && = \{v \triangleq u' \mid v' = u''\} = \\
&= v'x^2y_1 + v\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) && = \{y_1 = x^4 \mid y_1' = 4x^3\} = \\
&= v'x^6 + v\cdot(8x^5 - 7x^5) = \\
&= v'x^6 + vx^5
\end{aligned}$$

$0 = v'x + v$
$0 = (vx)'$
$C = vx$
$v = C/x$

$v = u' = C/x$

$$\frac{du}{dx}=\frac{C}{x} \Leftrightarrow du=\frac{C}{x}dx \Leftrightarrow \int du=\int \frac{C}{x}dx \Leftrightarrow u=C\ln|x|+D$$

$y = y_1u = x^4(C \ln |x| + D)$

$y = Cx^4 \ln |x| + Dx^4$ Allmän lösning

Metod 2:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ (*) Homogen

Om y_1 löser (*) så kan en anna lösning skrivas som

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx$$

Prova metoden på [z.c.4.2.9.]!

[z.c.4.6.1.]

$y'' + y = \sec x$

1) $y'' + y = 0$

Hjälpekvation: $m^2 + 1 = 0$ Kolla 4.3 kap.
$m_{1,2} = \pm i$

$$y_h=e^{\Re m}\left(c_1\cos(|\Im m|\cdot x)+c_2\sin(|\Im m|\cdot x)\right)=$$

$$=e^0\left(c_1\cos(1\cdot x)+c_2\sin(1\cdot x)\right)=$$

$$=e^0(c_1\cos x+c_2\sin x)=(c_1\underbrace{\cos x}_{y_1}+c_2\underbrace{\sin x}_{y_2})$$

$y_p = (y_1\cdot u_1 + y_2\cdot u_2)(x)$

2) $u_1(x)$, $u_2(x)$?

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=W(y_1;y_2)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}=-\tan x$$

$$W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix}=1$$

$$u_1'=-\tan x=-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$u_2'=1$$

$$u_2=x$$

$$u_1=\int -\frac{\sin x}{\cos x}dx=\left\{\begin{matrix} v=\cos x \\ dv=-\sin x\ dx \end{matrix}\right\}=\int \frac{dv}{v}=\ln|v|=\ln|\cos x|$$

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$$