Plana autonoma system och stabilitet.

[10.1.] Autonoma system

Kritiska punkter.
Periodiska lösningar.

[10.2.] Stabilitet hos linjära system

[10.3.] Linjärisering och lokala stabiliteter

Plant autonomt system

$$\frac{dx}{dt}=P(x;y)$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x;y)$$

Vektorfält:

$$\vec{v}(x;y)=\left(P(x;y)\quad Q(x;y)\right)$$

Lösningstyper:

Statinära punkter
Båge
Periodisk lösning

Stabilitetsundersökning av linjära system

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

Egenvärden till matrisen:

Reella	Komplexa
• Enkla	
• Multipla	

Stationära punkter: $\vec{X}'=\vec{0}=\mathbf{A}\vec{X}$

det $\mathbf{A} \neq 0$ $\because$ Entydlig lösning

(0 0) är den enda stationära punkten.

λ reella och enkla ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Instabil nod
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Stabil nod

λ reella och multipla ($\lambda_1 = \lambda_2$)

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instabil degenererad nod
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil degenererad nod

λ komplex ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)

$$\vec{Z} = e^{(\alpha + i\beta)t}\vec{K_1} = e^{\alpha t} \operatorname{cis} \beta t \cdot \vec{K_1}$$

$\vec{X_1} = \Re \vec{Z}$ ($\Re$ skrivs ofta Re)

$\vec{X_2} = \Im \vec{Z}$ ($\Im$ skrivs ofta Im)

$\alpha > 0$	Instabil spiral	
$\alpha = 0$	Centrum, stabil	(ellipsformad)
$\alpha < 0$	Stabil spiral	

Stabilitetskriterium för linjära system

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$, $\vec{X}(0) = \vec{X_0} \neq \vec{0}$, det $\mathbf{A} \neq 0$

1. $\lim_{t \to \infty} \vec{X}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \Re \lambda < 0$

2. $\vec{X}(t)$ är periodisk $\Leftrightarrow \Re \lambda = 0$

3. I övriga fall finns det minst ett $\vec{X_0}$ för vilket $\vec{X}(t)$ blir obegränsat då *t* växer.

Skilda reella egenvärden

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{K_2}e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda_2 < \lambda_1$

$$\vec{X}(t)=e^{\lambda_1 t}\left(C_1\vec{K_1}+C_2\vec{K_2}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\vec{X}(t)=\lim_{t\to\infty}e^{\lambda_1 t}C_1\vec{K_1}$$

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer.

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{K_2}e^{\lambda_1 t}=\left(C_1\vec{K_1}+C_2\vec{K_2}\right)e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\left(\vec{K_1}t+\vec{P}\right)e^{\lambda_1 t}=t\,e^{\lambda_1 t}\left(C_2\vec{K_1}+\frac{C_1}{t}\vec{K_1}+\frac{C_2}{t}\vec{P}\right)$$

[z.c.10.1.16.]

$$\begin{cases} x'=-x(4-y^2) \\ y'=4y(1-x^2) \end{cases}$$

Bestäm de kritiska (stationära) punkterna.
I de stationära punkterna är tangentvektorn (x'; y') = (0; 0)

$$\begin{cases} -x(4-y^2)=0 & (1) \\ 4y(1-x^2)=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1):\ \begin{cases} \text{a)}\ \ x=0 \quad \text{insatt i (2):}\ \ y=0 \qquad (0;0) \\ \text{b)}\ \ 4-y^2=0 \ \Leftrightarrow\ y=\pm 2 \quad \text{insatt i (2):} \\ \quad \pm 8(1-x^2)=0 \ \Leftrightarrow\ x=\pm 1 \end{cases}$$

De stationära lösningarna är (0; 0) och ($\pm_1$ 1; $\pm_2$ 2)

[z.c.10.2.11.]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(4+\lambda)+6 = -25+\lambda^2+6 = -19+\lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{19}$$

Skilda tecken hos egenvärderna.
(0; 0) är en sadelpunkt.

[z.c.10.2.11.]

Bestäm μ så att vi får en stabil spiral.

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \vec{X}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & \mu-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\mu + 1$$

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2-4}}{2}$$

(0; 0) är en stabil sprital då:

$$\begin{cases} \mu^2 - 4 < 0 & \text{(spiral)} \\ \mu < 0 & \text{(stabil)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^2 < 4 \iff -2 < \mu < 2 \\ \mu < 0 \end{cases}$$

–2 < μ < 0