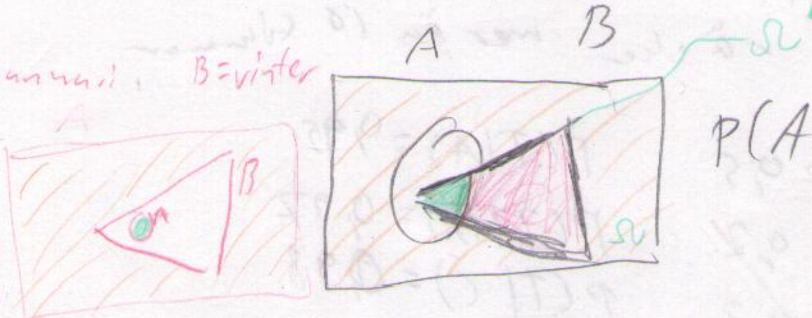
2011-(09)sep-01
sannstat

# Betingad slh

slh = sannolikhet

$P(A|B)$ = slh för, A betingat B




$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

2,27) $R_1$ = första sidan röd

$R_2$ = andra — || —

Sökt $P(R_2|R_1) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

R – R
V – R
V – V

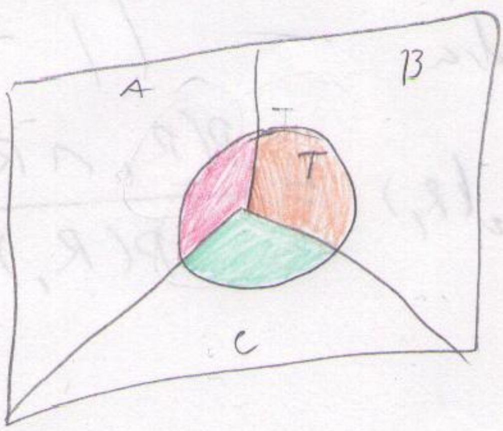
b) Det som är våra utfall är, de sex sidorna inte korten!

2,29

A – battert kommer från fabrik A
B – 〃 〃 B
C – 〃 〃 C
T – batteriet räcker mer än 10 timmar

Givet $P(A) = 0{,}5$ $\qquad P(T|A) = 0{,}95$
$P(B) = 0{,}2$ $\qquad P(T|B) = 0{,}97$
$P(C) = 0{,}3$ $\qquad P(T|C) = 0{,}98$

a) $P(T)$ sökes




$$P(T) = P(\underline{T\cap A}) + P(\underline{T\cap B}) + P(\underline{T\cap C}) =$$

$$= \left\{ P(T|X) = \frac{P(T\cap X)}{P(X)} \Leftrightarrow P(T\cap A) = P(T|A)\cdot P(A) \right\} =$$

Ingen om total sannolikhet

$$= P(T|A)\cdot P(A) + P(T|B)\cdot P(B) + P(T|C)\cdot P(C) =$$

$$= 0{,}95\cdot 0{,}5 + 0{,}97\cdot 0{,}2 + 0{,}98\cdot 0{,}3 = 0{,}963$$

Sannolikt? $P(A)=0{,}5$ $\quad P(B\cup C)=0{,}5$
så $P(T) \approx (0{,}95+0{,}97)/2 = 0{,}96$
C mer sannolikt än A, så lite mer.
Mellan 0,95 och 0,98

b) sökt $P(A|T) =$

$$= \frac{P(A\cap T)}{P(T)} = \{\text{se a-uppgiften}\} = \frac{P(T|A)\cdot P(A)}{P(T)} =$$

$$= \left(\frac{P(T|A)\cdot P(A)}{P(T|A)\cdot P(A) + P(T|B)\cdot P(B) + P(T|C)\cdot P(C)}\right)_{\text{Bayes sats}} =$$

$$= \frac{0{,}95\cdot 0{,}5}{0{,}95\cdot 0{,}5 + 0{,}97\cdot 0{,}2 + 0{,}98\cdot 0{,}3 = 0{,}963} =$$

$$= 0{,}493$$

c) sökt $P(A|T^*) =$

$$= \frac{P(A\cap T^*)}{P(T^*)} = \frac{P(A\cap T^*)}{1-P(T)} =$$

$$= \frac{P(A) - P(A\cap T)}{1-P(T)} = \frac{0{,}5 - \overbrace{0{,}95\cdot 0{,}5}^{P(T|A)\cdot P(A)}}{1-0{,}963} =$$

$$= \frac{0{,}05\cdot 0{,}5}{0{,}036} = \frac{0{,}025}{0{,}036} = \frac{25}{36} \approx 0{,}676$$

$P(A) = \left\{ \begin{matrix} \text{omm } A \text{ och } B \\ \text{är oberoende} \end{matrix} \right\} = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

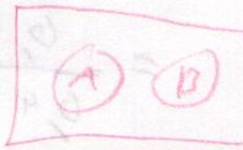
Definition: A och B oberoende

$\iff$

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Definition: A och B disjunkta

$$P(A \cap B) = 0$$



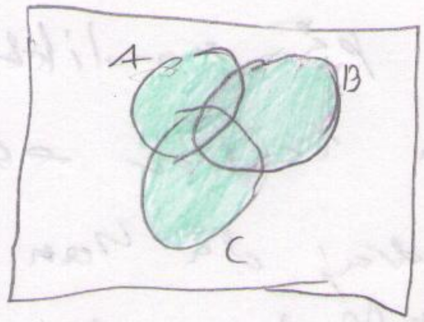
$$P(A \underset{(\sqcup)}{\cup} B) = P(A) + P(B)$$

Räkna hemma 2,38

2,36) 3 oberoende fel:

$P(A) = 0,20$
$P(B) = 0,05$
$P(C) = 0,10$

Sökt $P(\text{minst ett fel}) =$
$= P(A \cup B \cup C) =$
$= P(A) + P(B) + P(C) -$
$- P(A \cap B) - P(A \cap C) -$
$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) =$
$= 0,2 + 0,05 + 0,10 -$
$- 0,2 \cdot 0,05 - 0,2 \cdot 0,10 -$
$- 0,05 \cdot 0,10 + 0,20 \cdot 0,05 \cdot 0,10 =$




$= P((A^* \cap B^* \cap C^*)^*) =$

$= 1 - P(A^* \cap B^* \cap C^*) = \{\text{oberoende}\} =$

$= 1 - P(A^*) \cdot P(B^*) \cdot P(C^*) =$

$= 1 - (1-0{,}20)(1-0{,}05)(1-0{,}10) =$

$= 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}32$

2,42)

$A_i$ = person A:s i:te skott träffar

$B_i$ = person B:s i:te — // —

$P(A_i) = P(B_i) = p$

Alla $A_i$:n och $B_i$:n är oberoende

A och B skjuter varannan gång

Sökt: s/h att en person träffar 2 gånger innan den andra träffat alls

skjuter: $A_1\ B_1\ A_2\ B_2\ A_3\ B_3 \ldots$

Man kan räkna på sannolikheten att en person träffar ett skott innan den andra, då han var den som träffade först.

Anta till exempel att B träffar först.

A B A B A B

1-p p

1-p 1-p 1-p p

1-p 1-p 1-p 1-p 1-p p

Sch att B sedan träffar innan A gör det är $P(A_1^* \cap B_1)+$

$+ P(A_1^* \cap B_1^* \cap A_2^* \cap B_2)+$

$+ P(A_1^* \cap B_1^* \cap A_2^* \cap B_2^* \cap A_3^* \cap B_3) + \ldots =$

$= \{\text{oberoende}\} = P(A_1^*)P(B_1) + P(A_1^*)P(B_1^*)P(A_2^*)P(B_2) +$
$+ P(A_1^*)P(B_1^*)P(A_2^*)P(B_2^*)P(A_3^*)P(B_3) + \ldots$

Vi har här en geometrisk serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{2i+1} p = (1-p)p \sum_{i=1}^{\infty} ((1-p)^2)^i$$

$$S_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^n$$

där $a = (1-p)p$
$k = (1-p)^2$

$$S_{n+1} = a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n+1}$$

$$S_{n+1} - S_n = ak^{n+1} \quad (1)$$

$$k \cdot S_n = S_{n+1} - a \quad (2)$$

$$S_{n+1} = k \cdot S_n + a \quad \text{enligt } (2)$$

in ; $(1) \Rightarrow k \cdot S_n + a - S_n = ak^{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a(k^{n+1} - 1)}{k-1}$$

här $\Rightarrow$ sökt slh $= (1-p) \cdot p \left[ \frac{[(1-p)^2]^{\infty} - 1}{(1-p)^2 - 1} \right] =$

$$= (1-p)p \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{(1-p) \cdot p}{1-[1-2p+p^2]} =$$

$$= \frac{(1-p) \cdot p}{p(2-p)} = \frac{1-p}{2-p}$$

2,28) $P(A) = \frac{1}{3}$ $A$ - $A$ vinner

$B, C$ - analogt

$P(C) = P(C \cap B^* \cap A^*) =$

$= P(C \mid B^* \cap A^*) \cdot P(A^* \cap B^*) =$

$= 1 \cdot P(B^* \mid A^*) \cdot P(A^*) =$

$= 1 \cdot \frac{1}{2} P(A^*) =$

$= 1 \cdot \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{3}) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$