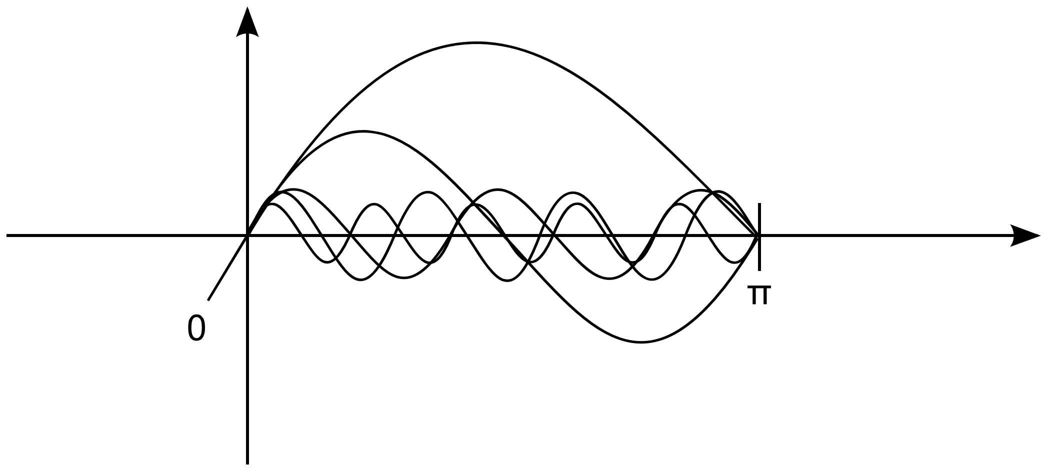
Fouriertransformer

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \qquad t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)}_{A(t)=\text{“frekvensinnehåll”}} \underbrace{\sin nx}_{\text{“frekvens”}}$$

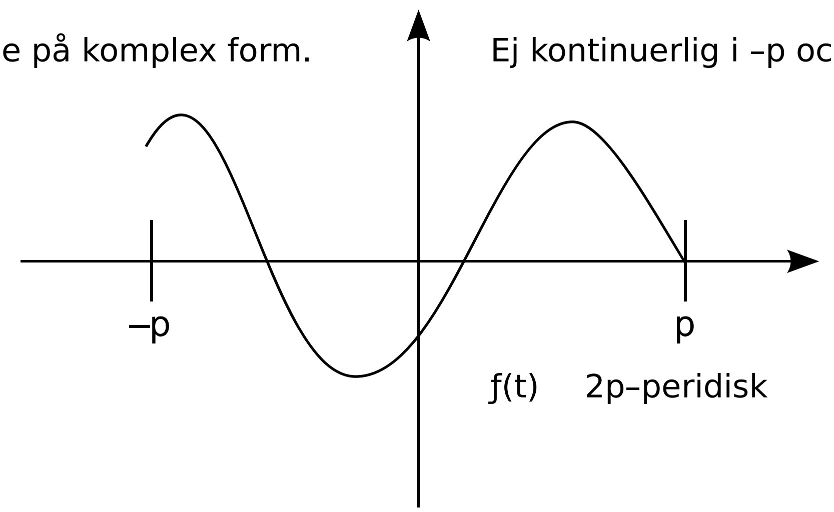
Exempel:



Randvillkor: $\begin{cases} u(0;t)=0 \\ u(\pi;t)=0 \end{cases}$

Fourierserie på komplex form.

Ej kontinuerlig i –p och p.



$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{p}t}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t) \cdot e^{-in\frac{\pi}{p}t}\,dt$$

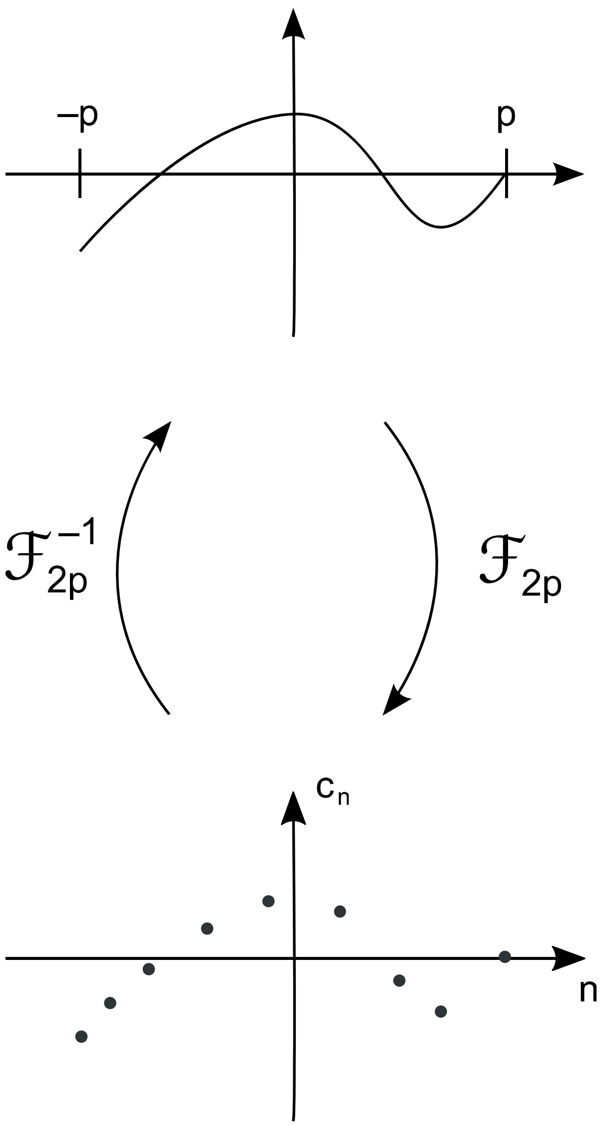
Eulers formel:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

Se sida 7 i kompendiet.

f, 2p-periodisk



Frekvensinnehåll motsvarande frekvens $\frac{n\pi}{p}$

Vad händer om p → ∞?

Man kan resonera med Riemann-summor:

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \qquad (\dagger)$$

där

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt \qquad (\ddagger),$$

$\omega \in \mathbb{R}$, $\quad |e^{i\omega t}| = 1$

Definition:

Om ƒ(t) är absolut integrabel, det vill säga om

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \quad ,$$

så existerar Fouriertransformen av ƒ(t).

∵

$$\underbrace{\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \right|}_{<\infty} \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot \underbrace{|e^{-i\omega t}|}_{1}\, dt$$

Definition:

Fourierintegralen till ƒ(t), vars Fouriertransform är $\hat{f}(\omega)$, är

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

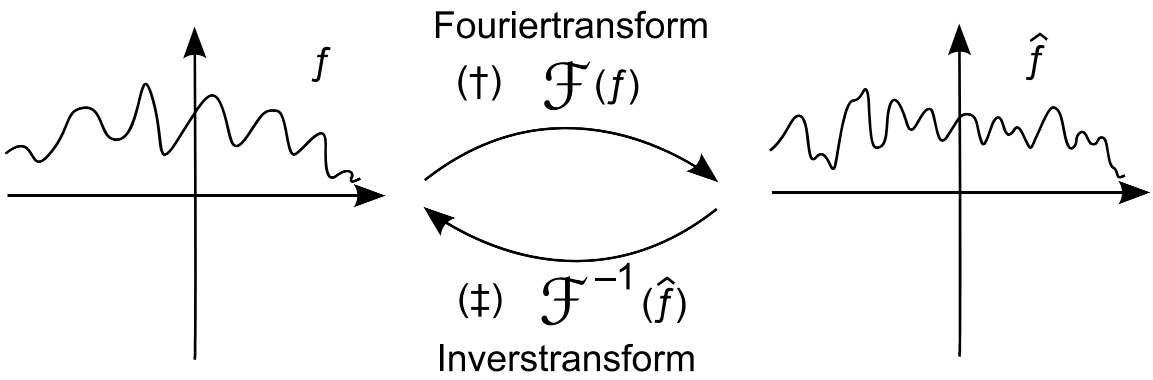
Sats:

Om ƒ är absolut integrabel på intervallet]–∞; ∞[och ƒ och ƒ' är styckvis kontinuerliga på varje ändligt intervall så gäller att

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{f(t^+) - f(t^-)}{2}$. Om dessutom ƒ är kontinuerlig för

alla $t \in \mathbb{R}$ så är $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$.

Operationerna $\mathcal{F}(f)$ och $\mathcal{F}^{-1}(f)$:



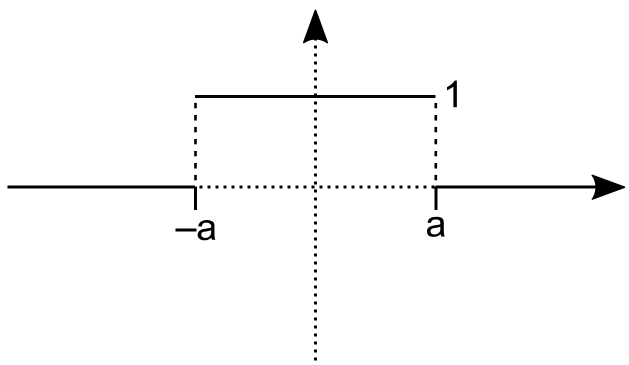
$\left|\hat{f}(\omega)\right|$="frekvenspektrum"

$\hat{f}(\omega)$="amplitud"

Exempel

Beräkna Fouriertransformen till

$$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<a\\ 0, & |t|\geq a\end{cases}$$ (Ej oändligt integrabel)



$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\,dt=\left[-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega i}\right]_{t=-a}^{a}=-\frac{e^{-i\omega a}-e^{i\omega a}}{\omega i}=\frac{2\sin\omega a}{\omega}\quad,\quad \omega\neq 0$$

$$\hat{f}(0)=\int_{-a}^{a} dt=[t]_{-a}^{a}=2a$$

Är $\hat{f}(\omega)$ kontinuerlig?

$$\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{2\sin\omega a}{\omega}=\lim_{\omega\to 0}\frac{2a\sin\omega a}{\omega a}=\lim_{\omega\to 0}2a\ \mathrm{sinc}\ \omega a=2a$$

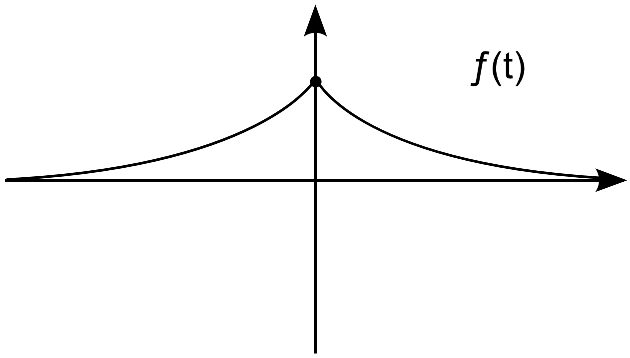
Ja! $\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)=\hat{f}(0)$

Vi kan skriva f som Fourierintegral:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\omega a}{\omega}e^{i\omega t}\,dt \quad \text{då } t\neq \pm a$$

Exempel

Beräkna Fouriertransformen till $f(t) = e^{-a|t|}$



$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt+\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-t(a+i\omega)}\,dt+\int_{-\infty}^{0}e^{t(a+i\omega)}\,dt=\left[\frac{-e^{-t(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right]_{t=0}^{\infty}+\left[\frac{-e^{t(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right]_{t=-\infty}^{0}=$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left(\frac{e^{h(a+i\omega)}}{a+i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}-\frac{e^{h(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right)=\frac{a-i\omega+a+i\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$