Reduktion av ordning:

$L(D)y = 0$
y_1 är en känd icke-trivial lösning.

$y(x) \triangleq u(x)y_1(x)$
$L(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen

$y = C_1y_1 + C_2y_2$

En partikulärlösning sökes.
Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$
Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f$

System av linjära första ordningens ODE:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

Två lösningar till $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$:

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$

Då är även $\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2}$ lösningar.

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ är linjärt oberoende.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{X_1} & \vec{X_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathbf{\Phi}\vec{C}$$

$\mathbf{\Phi}$ är en fundamentalmatris.

Variation av parametrar:

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$, $\vec{X} = \mathbf{\Phi}(t)\vec{C}$ $\quad$ $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$ är homogen

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F}$ $\quad$ inhomogen

$$\vec{X_p} = \mathbf{\Phi}(t)\vec{U}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}'(t)\vec{U}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\vec{U}'(t) = \mathbf{A\Phi}(t)\vec{U}(t) + \vec{F}(t)$$

$$\underbrace{\left(\mathbf{\Phi}'(t) - \mathbf{A\Phi}(t)\right)}_{\mathbf{0}}\vec{U}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\vec{U}'(t) = \vec{F}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}'(t) = \vec{F}(t)$$

$\vec{U}'(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)$ $\quad$ $\because$ det $\mathbf{\Phi} \neq 0$

Plana autonoma system och stabilitet:

$$\vec{x}' = \vec{g}(\vec{x})$$

Plant autonomt system:

$\frac{dx}{dt} = P(x;y)$ $\quad$ $\frac{dy}{dt} = Q(x;y)$

$\vec{x_1}$ är en kritisk punkt till $\vec{x}' = \vec{g}(\vec{x})$

Taylorutveckling!

$$\vec{x_1} = \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x_1}) + \vec{g}(\vec{x_1})(\vec{x} - \vec{x_1}) + \vec{R_1}$$

$$\vec{x}' \approx \vec{g}(\vec{x_1})(\vec{x} - \vec{x_1})$$

$\because$

$\vec{x_1}$ är en kritisk punkt, $\vec{g}(\vec{x_1}) = \vec{0}$

4 kap.:

- Begynnelsevärdesproblem
- Randvärdesproblem
- Linjärt oberoende
- Wronskian/Wronskideterminanten
- Fundamentallösningar
- Homogena lösningar
- Allmäna lösningar

Begynnelsevärdesproblem:

$$L(D)y = a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

Låt $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ & $g(x)$ vara kontinuerliga på ett intervall, I, och låt $a_2(x) \neq 0\ \forall x \in I$.
För varje godtycklig punkt $x = x_0 \in I$ existerar en entydlig lösning $y(x)$ på intervallet I.

Randvärdesproblem:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, kan vara derivator av *y*, och inte bara *y*.

[z.c.4.1.13.]

$y = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x$

Lösningar till $y'' - 2y' + 2y = 0$

$y' = c_1e^x(\cos x - \sin x) + c_2e^x(\sin x + \cos x)$

a)

Villkor: $\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ 0 = y'(\pi) = -e^{\pi}(c_1 + c_2) \end{cases}$

$y = e^x(\cos x - \sin x)$

b)

Villkor: $\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ -1 = y'(\pi) = -e^{\pi} c_1 \end{cases}$

Saknar lösning

$\because$

$c_1 \neq -e^{\pi} c_1$

$\because$

$e^{\pi} \neq 1$

Villkor: $\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 \\ 0 = y'(\pi) = -e^{\pi} c_1 \end{cases}$

$y = c_2 \cdot e^x \cdot \sin x$

Linjärt oberoende:

$\{f_1(x); f_2(x)\}$ är linjärt beroende på ett intervall, I, om det existerar konstanter, c_1 och c_2, alla ej lika med noll, så att $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, $\forall\, x \in I$.

Om $\{f_1(x); f_2(x)\}$ ej är linjärt beroende på intervallet I så är $\{f_1(x); f_2(x)\}$ linjärt oberoende.

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$

Derivera med avseende på *x*!

$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linjärt oberoende: $c_1 = c_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Entydlig lösning.

Wronskian (eller wronskideterminant):

Låt funktionerna $f_1(x)$ & $f_2(x)$ vara deriverbara.

Wronskideterminanten är $W(f_1; f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$

För flera variabler:

$$W\left(\coprod_{i=0}^{n} f_i\right)=\left|\coprod_{i=0}^{n}{}^{\downarrow} \coprod_{j=0}^{n}{}^{\rightarrow} f_j^{(i)}\right|$$

Låt y_1 & y_2 vara lösningar till, den snart definierade, [IH] på ett intervall, I.
Då är $\{y_1; y_2\}$ linjärt oberoende på I
$\therefore$
$W(y_1; y_2) \neq 0, \forall x \in I$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ [IH]

Låt y_1 & y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y(x) \triangleq (u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2)(x)$

Insättning i [IH] ger:

Här skulle färger vara bra, men för svart-vit utskrift-vänlighet, så makerar jag saker med [ ] med index.

$$Q([y_1u_1]_0 + [y_2u_2]_1) + P([y_1'u_1]_0 + y_1u_1' + [y_2'u_2]_1 + y_2u_2') \; +$$
$$+ [y_1''u_1]_0 + y_1'u_1' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ [y_2''u_2]_1 + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' = f$$

$$[u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1)]_0 + [u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2)]_1 +$$
$$+ [y_1'u_1' + y_2'u_2']_2 + [y_2'u_2' + y_2u_2'' + y_1'u_1' + y_1u_1'']_3 +$$
$$+ P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

$$[y_1'u_1' + y_2'u_2']_2 + [\frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2')]_3 + P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

En partikulärlösning sökes.

Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$

Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f$

Färg variant:

Insättning i [IH] ger:

$$Q(y_1u_1 + y_2u_2) + P(y_1'u_1 + y_1u_1' + y_2'u_2 + y_2u_2') \; +$$
$$+ y_1''u_1 + y_1'u_1' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ y_2''u_2 + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' = f$$

$$u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) +$$
$$+ y_1'u_1' + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + \frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2') + P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$