Sammanfattning av modul 3

(G; $\ast$) är en grupp om

G1) $\forall\, x, y \in G : x \ast y \in G$
“slutenhet”

G2) $\forall\, x, y, z \in G : (x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$
“associativitet”

G3) $\exists\, I \in G : \forall\, x \in G \ : \ I \ast x = x \ast I = x$
“identitetselement”

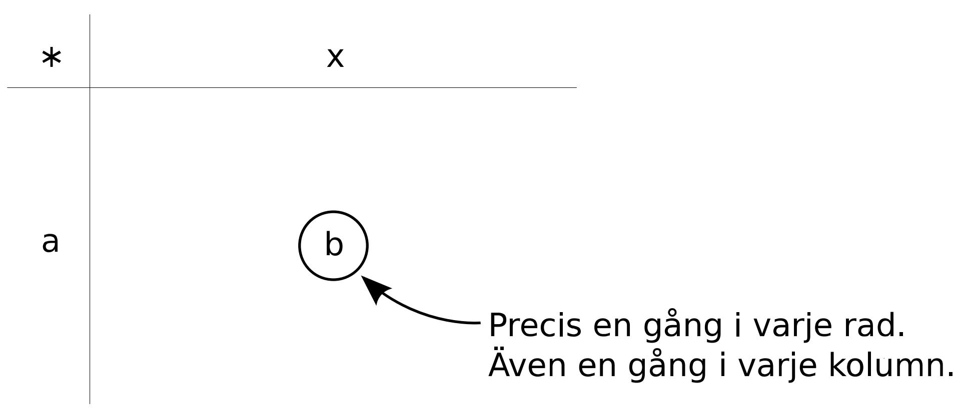
G4) $\forall\, x \in G : \exists\, x^{-1} \in G \ : \ x \ast x^{-1} = x^{-1} \ast x = I$
“invers”

Om det i en grupp (G; $\ast$) gäller att

$$a \ast b = b \ast a$$

för alla $a, b \in G$, kallas G abelsk eller kommutativ.

Grupptabeller är latinska kvadrater.



$$ax = ay \ \Rightarrow\ x = y \ \Leftarrow\ xa = ya$$

En grupp, G, är cyklisk om det finns ett element $g \in G$ sådant att varje element i G är av formen g^n, något $n \in \mathbb{Z}$.

Ett sådant g kallas en generator, ett genererande element för G.

$G = \langle g \rangle$

Om $o(g) = m$:

$$G = \{1, g, g^2, g^3, \ldots, g^{m-1}\} \quad \text{ser ut som } (\mathbb{Z}_m; +).$$

alla olika

Om $G = \langle g \rangle$ gäller $|G| = o(g)$

$o(g) = \infty$:

$$G = \{\ldots, g^{-2}, g^{-1}, 1, g, g^2, \ldots\} \quad \text{ser ut som } (\mathbb{Z}; +).$$

Om $H \subseteq G$ och $(G; \ast)$ är en grupp så är H en delgrupp till G omm:

$$\begin{cases} \text{S0:} & H \neq \emptyset \\ \text{S1:} & x, y \in H \Rightarrow x \ast y \in H \\ \text{S2:} & x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \end{cases}$$

$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz, \text{ alla } g \in G\}$, G:s centrum

$C(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ för alla $g \in G$

“centralisatorn” till G

Sidoklasser (en. cosets)

Definition: Om H är en delgrupp till G, $g \in G$, så är $gH = \{gh \mid h \in H\}$
en vänstersidoklass till H (en. left coset) och $Hg = \{hg \mid h \in H\}$
en högersidoklass till H (en. right coset).

Sats:

Om H är en delgrupp till G så är g_1H och g_2H identiska eller disjunkta.

Ty: Låt $x \in g_1H \cap g_2H$, vi skall visa att $g_1H = g_2H$.

$x = g_1h_1 = g_2h_2$, $h_1, h_2 \in H$ så $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$ och om

$y = g_1H \Rightarrow y = g_1(h \in H) = g_2h_2h_1^{-1}h\ (\in H) \Rightarrow y_1 \in g_2H$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{så} & g_1H \subseteq g_2H \\ \text{på samma sätt} & g_2H \subseteq g_1H \end{array}\right\} \Rightarrow g_1H = g_2H$$

De ger en partition av G (ekvivalensrelationen $g_2^{-1} g_1 \in H$)

(Om H är ändlig är) dessutom $|H| = |gH| = |Hg|$

Så Lagranges sats: Om G är ändlig, H en delgrupp till G:

$$|H| \,\Big|\, |G|$$

$[G : H] = |G : H| = \dfrac{|G|}{|H|}$, H:s index i G, antalet (vänster eller höger) sidoklasser.

Om G är en grupp, $|G| = p$, p primtal så är G cyklisk.

En gruppisomorfi mellan $(G_1; \ast)$ och $(G_2; \circ)$ är en bijektion
$\phi : G_1 \to G_2$ så att $\phi(g \ast g') = \phi(g) \circ \phi(g')$ för alla $g, g' \in G_1$.

Grupperna $(G_1; \ast)$, $(G_2; \circ)$ kallas isomorfa om det finne en isomorfi mellan dem.

$(G_1; \ast) \approx (G_2; \circ)$ (Beteckningen $(G_1; \ast) \cong (G_2; \circ)$ är mycket vanligare.)

Isomorfi är en ekvivalensrelation mellan grupper.

$$\phi \ : \ \begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 2 \\ 2 & \mapsto & 0 \\ 3 & \mapsto & 5 \\ 4 & \mapsto & 3 \\ 5 & \mapsto & 4 \\ 6 & \mapsto & 6 \end{array}$$

Enradsnotation: $\phi = [1\ \ 2\ \ 0\ \ 5\ \ 3\ \ 4\ \ 6]$

Tvåradsnotation: $\phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Cykelnotation: $\phi = (0\ \ 1\ \ 2)(3\ \ 5\ \ 4)(6) = (0\ \ 1\ \ 2)(3\ \ 5\ \ 4)$

Ordningen för $\pi \in S_n$ är lätt att se av π:s cykelstruktour.

Exempel: $S_{12} \ni \pi = (1\ 7\ 4\ 11)(2\ 9\ 6)(3\ 5\ 8\ 12\ 10)$

$o(\pi) = ?$

$4, 3, 5 \mid o(\pi)$ I varje cykel skall man gå ett helt antal varv.

"så" $o(\pi) = \mathrm{mgm}(4, 3, 5) = 60$

Ett sätt till att beskriva permutationer:

$\pi \in S_n$ motsvarar $\underset{n\times n}{\mathbf{M}_\pi}$ med $m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \pi(j) = i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$.

$$\mathbf{M}_\pi = \begin{array}{cl} \text{kolonn } j & \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 & \\ 0 & & \vdots & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & \cdots & 1 & \\ 1 & & 0 & \\ 0 & & \vdots & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{rad } \pi(j) \\ \\ \\ \text{rad } \pi(i) \\ \\ \end{array} \end{array}$$

så $\mathbf{M}_\pi e_j = e_{\pi(j)}$ där $e_k =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{rad } k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Och $\underbrace{\mathbf{M}_\pi\mathbf{M}_\sigma}_{n\times n}\underbrace{e_j}_{n\times 1} = \mathbf{M}_\pi e_{\sigma(j)} = e_{\pi(\sigma(j))} = e_{(\pi\sigma)(j)} = \mathbf{M}_{\pi\sigma} e_j$ så $\mathbf{M}_\pi \mathbf{M}_\sigma = \mathbf{M}_{\pi\sigma}$

Multiplikation i S_n motsvarar matrismultiplikation.

$\mathbf{M}_\pi^t = \mathbf{M}_\pi^{-1}$ (ortogonal matris) $= \mathbf{M}_{\pi^{-1}}$

Cayleys sats:

Varje grupp G är isomorf med en delgrupp till S_G.

Ty: $\varphi : G \to S_G$ så att för $g, h \in G : \varphi(g)(h) = gh$ då

$(\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2))(h) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(h)) =$

$= \varphi(g_1)(g_2h) = g_1(g_2h) =$

$= (g_1g_2)(h) = \varphi(g_1g_2)h$ så

$\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2) = \varphi(g_1g_2)$

φ injektiv ty $g_1h = g_2h \Rightarrow g_1 = g_2$

så $G \cong \varphi(G) = \{\varphi(g) \mid g \in G\}$

Isomorfi, skrivs ibland $G \approx \varphi(G)$.

(Speciellt kan varje ändlig grupp representeras med matriser.)

Konjugering i S_n

$\alpha, \beta \in S_n$ är konjugerade om det finns $\sigma \in S_n$ så att $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$
(det vill säga $\sigma\alpha = \beta\sigma$).

En ekvivalensrelation på S_n (reflexiv, symmetrisk och transitiv).

Exempel:

$\sigma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)$ är konjugerad till $\beta = (1\ 3)(2\ 4\ 5)$.

$\sigma = (1\ 5\ 3\ 4)$ ger $\sigma\alpha\sigma^{-1} = (1\ 5\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 4\ 3\ 5) = (1\ 3)(2\ 4\ 5)$

$\alpha, \beta \in S_n$ är konjugerande omm de har samma cykelstruktur.

Klasser av konjugerade element i S_n svarar precis mot partitioner av heltalet n.

Exempel: Alla element i S_5 konjugerade med (1 4)(2 5 3)
är de med cykelstruktur [2 3].

Exempel: $\underbrace{\sigma\pi}_{\beta} = \sigma\underbrace{(\pi\sigma)}_{\alpha}\sigma^{-1}$, så $\sigma\pi$ och $\pi\sigma$ är konjugerade.

En grövre uppdelning av S_n: jämna och udda.

En transposition: en permutation av typ $[1^{n-2}\ 2]$, det vill säga (ij) $i \neq j$.

Om $\pi \in S_n$ så finns transpositioner $\tau_1, \ldots, \tau_r$ så att $\pi = \tau_r\, \tau_{r'\,1} \ldots \tau_2\, \tau_1$
ty $(x_1\ x_2 \ldots x_k) = (x_1\ x_k)(x_1\ x_{k-1})\ldots(x_1\ x_2)$.

π är en jämn/udda permutation om r är jämnt/udda då $\pi = \tau_r\, \tau_{r-1} \ldots \tau_1$;
$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^r$.

Om $\pi \in S_n$, $\pi = \tau_r\, \tau_{r-1} \ldots \tau_1 = \tau'_r \ldots \tau'_1$ (τ_i, τ'_i transpositioner)
så har r och r' samma paritet. (Båda jämna eller båda udda.)

(U(G), ·) är en grupp av U(G), de invertabla elementen i G.

$U(\mathbb{Z}_m) = \{r \in \mathbb{Z}_m \mid \operatorname{sgd}(r, m) = 1\}$

(R, +, ·) är en ring om (R, +) är en kommutativ grupp med identitetselement 0,
(R, ·) är sluten och associativ med identitetselement 1 och · distributiv över +.

(F, +, ·) är en kropp (en. field) om (F, +, ·) är en ring och
(F\{0}, ·) är en kommutativ grupp.

$\phi : A \to B$ är en homomorfi mellan $(A, \circ)$ och $(B, \bullet)$ om

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \bullet \phi(b) \in B \qquad \forall\, a, b \in A$$

En isomorfi är en bijektiv homomorfi.

Direkta produkten av $(A, \circ)$ och $(B, \bullet)$:

$$(A, \circ) \times (B, \bullet) = (A \times B, \ast)$$

och

$$(a_1, a_2) \ast (b_1, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 \bullet b_2)$$

N kallas en normal delgrupp till F om vänstersidoklasserna = högersidoklasserna.
Det vill säga om $gN = Ng\ \forall\, g \in G$ (ekvivalent: $gNg^{-1} = N$).

Alla delgrupper till en agelskgrupp är normala delgrupper.

Då är $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ en grupp, kvotgruppen.
$g_1Ng_2N = \{h_1h_2 \mid h_1 \in g_1N, h_2 \in g_2N\} = g_1g_2N$