2011-(09)sep-06
sannstat

Stokastisk variabel (s.v.): numeriskt resultat av ett slumpmässigt experiment.

Diskret s.v.: en s.v. som antar ändligt eller uppräkneligt antal värden, i regel 0, 1, 2, 3 ...

Typexemplet är att man räknar antal

För en diskret s.v. X

Sannolikhetsfunktionen

$$p_X(k) = P(X = k) \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \ldots$$

och fördelningsfunktionen

$$F_X(k) = P(X \leq k) \quad \text{för } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Exempel:

Likformig fördelning på $a, a+1, \ldots, b$:

$$p_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a+1} & \text{för } k = a, a+1, \ldots, b \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Exempel:

För första gången (ffg)-fördelning

Utför experiment upprepade oberoende gånger. X = totalt antal försök till lyckat för första gången

$$p_X(k) = P(X=k) = (1-p)^{k-1} p \quad \text{för } k=1,2,3,\dots$$

Exempel:

Geometrisk fördelning: (Geo())

Variant på ffg, räknar ej det avslutande lyckade försöket.

Sannolikheten att för k olyckade försök

$$p_X(k) = P(X=k) = (1-p)^k p \quad \text{för } k=0,1,2,\dots$$

Exempel:

Binomialfördelning (Bin)

Ett experiment görs n gånger oberoende, varje lyckas med sannolikhet p.

X = totalt antal lyckade försök.

$$p_X(k) = P(X=k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{"binomialkoefficienten"}} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{för } k = 0,1,2,\ldots,n$$

antal sätt att välja k försök som lyckas bland n.

Exempel:

Hypergeometriskfördelning (Hyp)

(v vita och s svarta kulor i en urna)

Drag n stycken utan återläggning

X = antal vita

$$p_X(k) = P(X=k) = \frac{\binom{v}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{v+s}{n}} \quad \text{för} \quad \begin{array}{l} 0 \le k \le v \\ 0 \le n-k \le s \end{array}$$

Med $N = v+s$ (totalt antal kulor)
och $p = \frac{v}{v+s}$ (andel vita kulor)

$$p_X(k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{n}{k}} \text{ för } 0 \le k \le Np, \ 0 \le n-k \le N(1-p)$$

Geometrisk fördelning: oändlig population
Hypergeometrisk fördelning: ändlig population

Exempel:

Poissonfördelning med parameter $\mu > 0$

$$p_X(k) = P(X=k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \text{ för } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Användbar som modell för sällsynta händelser.
Motivering: om $X_n \in Bin(n, p_n)$ för $p_n \to 0$ så att $np_n \to \mu$ då gäller $p_{X_n}(k) \to p_X(k)$ då $n \to \infty$, för alla k.

Observera att varje sannolikhetsfunktion, $p_X(k)$, uppfyller

(för $k \in \mathbb{N}$)

(i) $p_X(k) \geq 0$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$

(iii) Om $A \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\}$ mängd av heltal, så $P(X \in A) = \sum_{k \in A} p_X(k)$

Speciellt:

$$F_X = P(X \leq k) = \sum_{j=0}^{k} p_X(j)$$

$$\text{poissoncdf}(\underbrace{53.5}_{\mu}, \underbrace{45}_{k})$$

cdf: cumulative distribution funktion

geomet i miniräknaren är ffs

pdf ~ probibility density funktion

Observation: ((diskret))

$$P(X>k) = 1 - P(X \le k) = 1 - F_X(k)$$

$$P(X \ge k) = 1 - P(X<k) = 1 - P(X \le k-1) =$$
$$= 1 - F_X(k-1).$$

Väntevärde

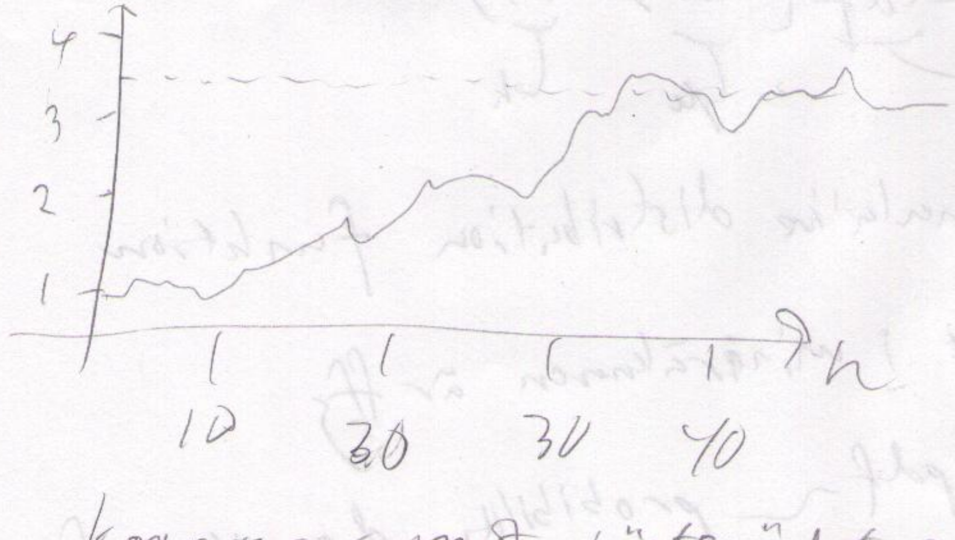
Vi definierar

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{p_X(k)}_{P(X=k)} \cdot k$$

$P(X=k)$ ("vikter")

Expectation

medelvärde av n tärningskast



konvergerar mot väntevärdet enligt stora talens lag.

Exempel:

Om $X \in \mathrm{ffg}(p)$ så

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p =$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} = -p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dp} (1-p)^k =$$

$$= -p \frac{d}{dp} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = -p \frac{d}{dp} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k - 1 \right] =$$

$$= -p \frac{d}{dp} \left[\frac{1}{1-(1-p)} - 1 \right] =$$

$$= -p \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) =$$

$$= -p \cdot \frac{-1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Exempel:

$Bin(n,p)$ har väntevärde $= np$

Exempel:

$Po(\mu)$ har väntevärde $= \mu$.

Poissonfördelning

Exempel:

Slå tärning. Flytta så många steg som visas av tärningen, men 10 steg om 5 eller 6 öjon.

X = antal öjon

$Y = g(X)$ = antal steg

där

$$\begin{cases} g(k) = k & \text{för } k = 1, 2, 3, 4 \\ g(5) = g(6) = 10 \end{cases}$$

$$p_Y(k) = \begin{cases} 1/6 & k = 1, 2, 3, 4 \\ 1/6 + 1/6 = 2/6 (= 1/3) & k = 10 \\ 0 & \text{för övrigt} \end{cases}$$

Notera:

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{2}{6}$$

$$E[g(X)] = g(1) \cdot \frac{1}{6} + g(2) \cdot \frac{1}{6} + g(3)\frac{1}{6} + g(4)\frac{1}{6} + g(5)\frac{1}{6} + g(6)\frac{1}{6}$$

Allmänt:

$$E[g(X)] = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) p_X(k)$$