2011-(02)feb-17: dag 10

Mer kombinatorik

Exempel från övning 3

Oordnat val utan upprepning avslutning

Multinominal tal $\binom{n}{k_{1,} k_2, \ldots, k_m}$

Oordnat val med upprepning

k stycken oordnade valda från en n-mängd.

$\binom{n+k-1}{k}$ sätt

Postfacksprincipen

Ingen injektion $f : X \to Y$ om $|X| > |Y|$

Genererande funktion

Från övning 3:

9) Visa att för $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Binomialsatsen ger

$$(1+t)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k$$

Tag $\int_0^1 \ldots\, dt$ av båda leden:

$$\left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1$$

Det vill säga

$$\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$$ Det vi ville visa.

Alternativt:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\,\frac{n+1!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}\ldots$$

10) Finn för $n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0}+\binom{n-1}{n}+\binom{n-2}{2}+\ldots+\binom{n-\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor n/2 \rfloor}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{n-k}{k}$$

n = 0: $\binom{0}{0}=1$

n = 1: $\binom{1}{0}=1$

n = 2: $\binom{2}{0}+\binom{1}{1}=2$

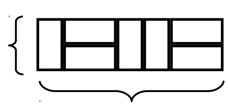
n = 3: $\binom{3}{0}+\binom{2}{1}=3$

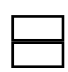
n = 4: $\binom{4}{0}+\binom{3}{1}+\binom{2}{2}=5$

n = 5: $\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}=8$

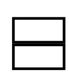
Kombinatoriskt:

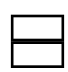
F_{n+1} = Antalet sätt att plattläga en 2×n-gång med 2×1-plattor.

2 
n

Antalet sätt att göra dett med precis k stycken 

är $\binom{n-k}{k}$

Antalet pos för  eller 

Antalet pos med 

Lite till om oordnade urval utan upprepning

Exempel:

186 studenter skall fördelas på 4 övningsgrupper med
36, 42, 45 respektive 63 platser. Hur många sätt är möjliga?

Multiplicationsprincipen:

$$\binom{186}{36}\binom{186-36=150}{42}\binom{150-42=108}{45}\binom{63}{63}=$$

Grupp 2
Antalet sätt att fylla grupp 1.

$$=\frac{186!}{36!(186-36)!}\cdot\frac{150!}{42!108!}\cdot\frac{108!}{45!63!}\cdot\frac{63!}{63!0!}=$$

$$=\frac{186!}{36!\,42!\,45!\,63!}=\binom{106}{36,\,42,\,45,\,63}$$

Multinominaltal:

$$\binom{n}{k_1,\,k_2,\,\ldots,\,k_m},\quad k_i\geq 0,\ \sum k=n$$

Ger antelet sätt att fördela n särskiljbara element i m särskiljbara lådor
med k_i element i låda “i” = antalet funktion $f : X \to Y$,
där värdet “i” antas precis k_i gånger.

m-mängd n-mängd

Sats:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} \qquad \left(\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k} \right)$$

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_i \in \mathbb{N} \\ \sum k = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \binom{n-1}{k_1 - 1, k_{2,} \ldots, k_m} + \binom{n-1}{k_1, k_2 - 1, \ldots, k_m} + \ldots + \binom{n-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m - 1}$$

$$\binom{n}{0, k_2, \ldots, k_m} = \binom{n}{k_2, \ldots, k_m}$$

Exempel:

Vad är koefficienten för $x^3y^5z^{12}$ i $(x + y + z)^{20}$?

Jo, den är (enligt multinomialsatsen)

$$\binom{n}{3, 5, 12} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \ldots = 7054320$$

Exempel:

Hur många ord kan man bilda med omkastningav bokstäverna i ordet "vetekatt"?

Jo, antalet funktion från positionerna (8 stycket) till {a, e, k, t, v}.

Med 1:a, 2:a, …

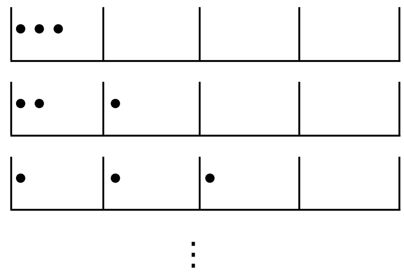
$$\binom{8}{1, 2, 1, 3, 1} = \frac{8!}{1!\, 2!\, 1!\, 3!\, 1!} = \frac{8!}{2!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 3360 \text{ stycken}$$

Fjärde urvalsfallet

Exempel:

På hur många sätt kan 3 identiska kulor placeras i 4 (särskiljbara) lådor?
<u>Oordnat val med upprepning.</u> (Eventuellt flera kulor i samma låda.)

aaa	acc	bcd
aab	acd	bdd
aac	add	ccc
aad	bbb	ccd
abb	bbc	cdd
abc	bbd	ddd
abd	bcc	



Totalt 20 stycken.

Allmänt:

Antalet <u>oordnade</u> val av k stycken från en k-mängd med upprepning =
antalet sätt att skriva $k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n =$ $\quad x_i \geq 0$

$$= \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Exempel:

$k = 3,\ n = 4$

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Ty:

$k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ kan bijektivt skrivas

$$\underbrace{\bullet\ \bullet}_{x_1} \,|\, \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{x_2} \,|\, \underbrace{\quad}_{x_3} \,|\, \underbrace{\bullet}_{x_4} \,|\, \ldots \,|\, \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{x_n}$$

Antalet symboler (• och |) =
= n+k+1

Varje svarar precis mot val av vilka k stycken som ska vara "•",
resten är "|".

Exempel:

En befolkning på 4711 personer skall rösta bland 8 partier (inklusive ogiltiga och avstått). Hur många möjliga valresultat?

Jo, antalet heltalslösningar till

$4711 = x_1 + \ldots + x_8 =$

$$= \binom{\overset{k}{4711} + \overset{n}{8} - 1}{\underset{k}{4711}} = \binom{4711+8-1}{\underset{n-1}{7}} = \ldots \approx 1{,}03 \cdot 10^{22}$$

Postfacksprincipen

Sats: Om $|X| > |Y|$ finns ingen injektion $f : X \to Y$.
"Om n saker läggs i m lådor, $n > m$, blir det minst 2 saker i minst en låda."

Exempel: Bland 367 personer finns alltid 2 med samma födelsedag.

Exempel:

Pelle äter minst en glass om dagen under 11 veckor, aldrig mer än 12 glassar under en vecka. Visa att det finns en följd dagar då han äter exakt 21 glassar.

Låt a_i vara totala antalet glass han äter de första "i" dagarna.

$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{77} \leq 11 \cdot 12 = 132$ och låt $b_i = a_i + 21$

$22 \leq b_1 < b_2 < \ldots < b_{77} \leq 132 + 21 = 153$

Så de 154 talen a_i, b_j finns bland $\{1, 2, \ldots, 153\}$ så minst två lika.

Alla a_i olika, alla b_j olika, så $a_i = b_j$, några i, j.

Det vill säga $a_i = a_j + 21$, så han äter precis 21 glassar uner dagarna $j + 1, j + 2, \ldots, i$.