2011-(05)maj-09: dag 28

- Mer om grafer
  - Planära grafer (fortsättning)
    - "Platonska grafer"
    - Duala grafer
  - (Hörn)färgning av grafer
    - Kromatiska talet, $\chi(G)$
    - En girig algoritm
    - Sex-, fem- och fyrfärgssatsen
    - Kromatiska polynomet, $P_G(\lambda)$
  - Matchning i grafer
    - Fullständig och maximal matchning
    - Bipartita grafer
    - Halls sats (giftermlssatsen)
      - Utökande alternerande stigar
    - Distinkta representatater (tramsversalerna)

Ö9:12)

$G = (V, E)$ sammanhängande, plan
$v = |V| = 12$, $r = 11$
$\delta(h) = 3$ eler 5 för alla $h \in V$.

Hur många av varje?

Låt antalet hörn med alens 3 vara x.
Antalet med valens 5.

Eulers polyederformel:

$$v - e + r = 12 - e + r = 12 - e + 11 = 2$$

Så: $e = 21$

$$\sum_{h \in V} \delta(h) = \underbrace{2|E|}_{2} e : \quad 3 \cdot x + 5(12 - x) = 2 \cdot 21$$

ger $x = 9$

"Platonska grafer"   (inte standardnamn)

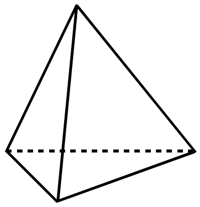
Platonska kroppar (en. Platonic solids) (polyedrar) med alla hörn (n kanter) och alla sidor (regelbundna m-hörningar) kongurenta.

Det finns finns precis 5 stycken olika.

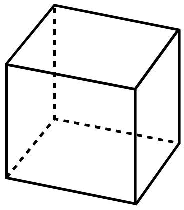
Animeringar:

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tetrahedron.gif
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Hexahedron.gif
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Octahedron.gif
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dodecahedron.gif
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Icosahedron.gif

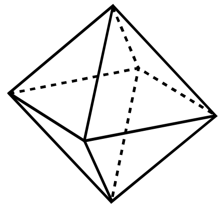
(Bilder på nästa sida.)



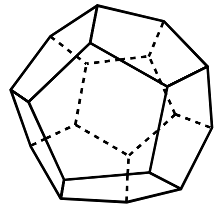
Tetraeder



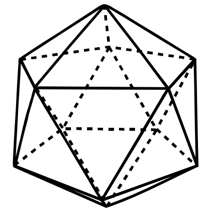
Hexaeder



Oktaeder



Dodekaeder

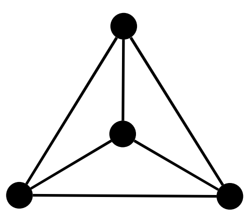


Ikosaeder

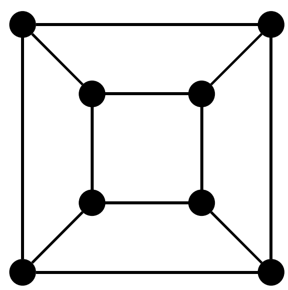
Tetraeder: (en. tetrahedron) Tresidig pyramid
Hexaeder: (en. hexahedron) Kub
Oktaeder: (en. octahedron) Dubbel fyrsidig pyramid; T8- (D8) tärning
Dodekaeder: (en. dodecahedron) T12- (D12) tärning
Ikosaeder: (en. icosahedron) T20- (D20) tärning

Planar ritningar: (Kan konstrueras genom att dra ut ena sidan så att resten får plats innanför.)

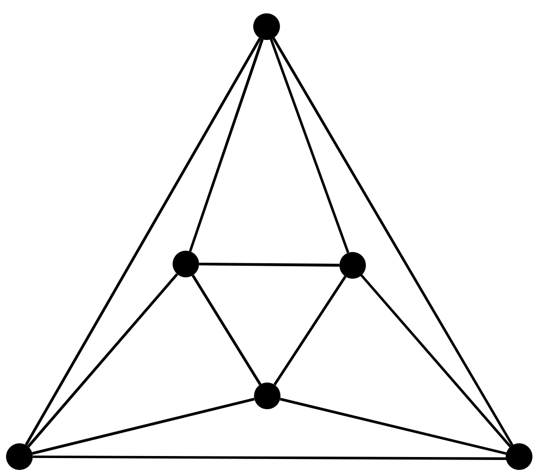
Tetraeder



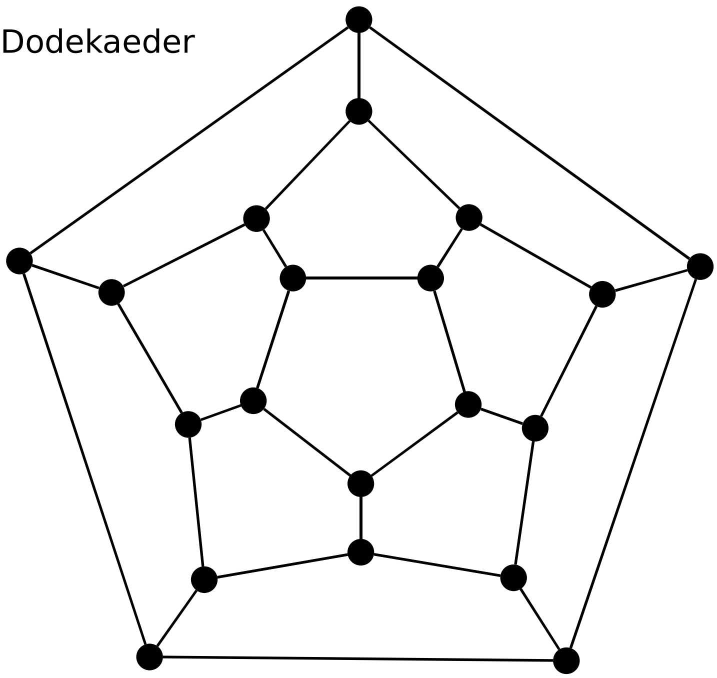
Hexaeder



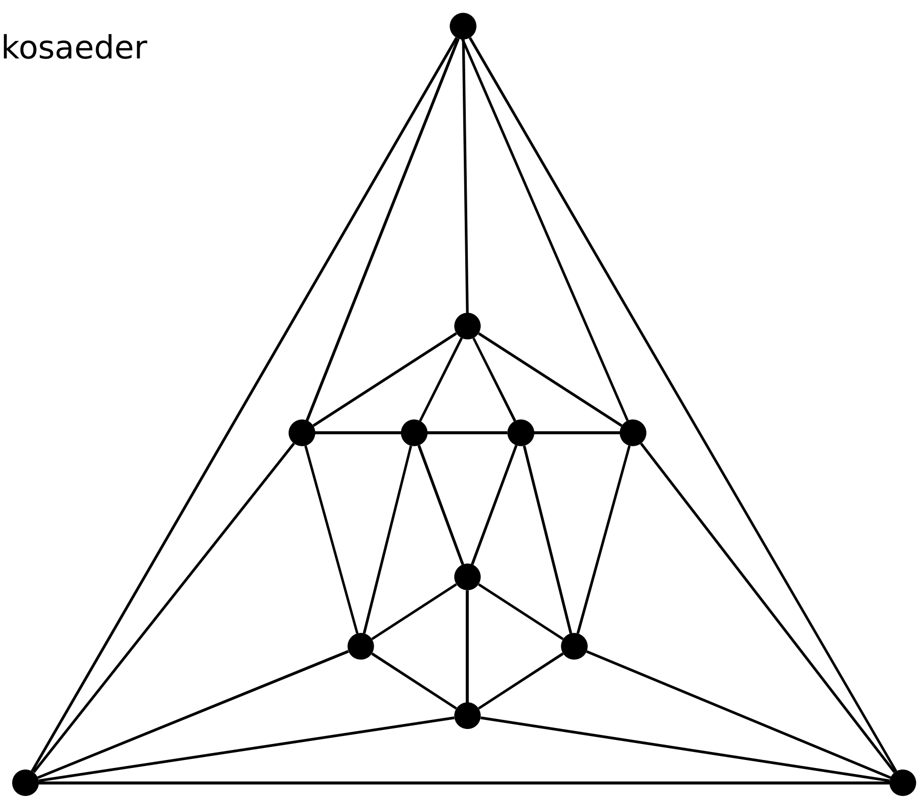
Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



En “duppelt reguljär” graf: sammanhängande, plan med smmam valens ($n \geq 3$) i alla hörn, samma antal ($m \geq 3$) kanter kring varje yta.

Vi skall se att det bara finns 5 stycken olika:

$$\begin{cases} v - e + r = 2 & \text{(plan, sammanhängande graf)} \\ nv = 2e = mr \end{cases}$$

$$nv = \sum_{x \in X} \delta(x)$$

Så $\frac{2}{n}e - e + \frac{2}{m}e = 2 = \underbrace{(2m - mn + 2n)}_{\text{så: } >0}\frac{e}{mn}$

Det vill säga

$$\begin{cases} (m-2)(n-2) < 4 \\ m, n \geq 3 \end{cases}$$

$$2\frac{e}{n} \qquad \frac{2mn}{2m - mn + 2m} \qquad 2\frac{e}{m}$$

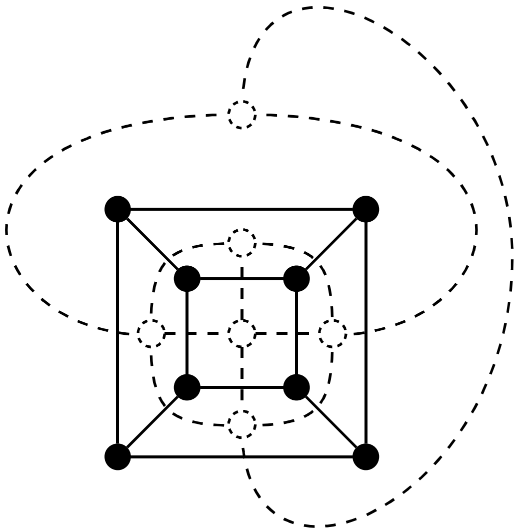
Möjliga m, n:

	m	n	ger	v	e	r
	3	3		4	6	4
•	3	4		6	12	8
−	3	5		12	30	20
•	4	3		8	12	6
−	5	3		20	30	12

Motsvarande kroppar:

tetraeder
okta-
ikosa-
hexa- (kub)
dodeka-

Den duala grafen $G^\perp$ till en plan graf G beskriver grannrelationen för ytorna i G.



Hörnen i $G^\perp$ svarar mot ytorna i G, en kant i $G^\perp$ mot varje kant mellan ytorna.

Den duala grafen kan ha ölgor, multipla kanter.

Heldraget:	G	hexaeder
Halvdraget:	$G^\perp$	oktaeder

$(G^\perp)^\perp \cong G$

(Hörn)färgning av grafer

(Vi kommer inte gå in på kantfärgning.)

$c : V \to \mathbb{N}$ sådant att
$\{x, y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$

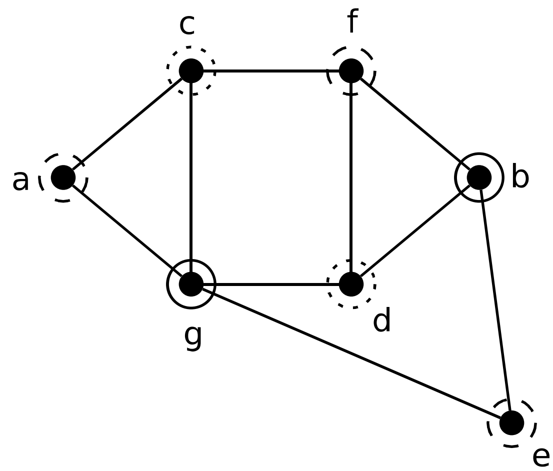
Exempel: Schemaläggning av sju föreläsning, vissa kan inte ligga samtidigt.

I tabellen på nästa sida markerar ‘x’ att två föreläsningar inte kan ligga samtidigt.

Tabellen uttycks sedan med en färgad graf.

	a	b	c	d	e	f	g
a			x				x
b				x	x	x	
c	x					x	x
d		x				x	x
e		x					x
f		x	x	x			
g	x		x	x	x		

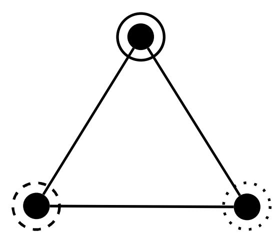
symmetri



Minsta möjliga antalet färger: 3

Möjligt enligt figuren, minsta ty:

En triangel (C_3) kräver 3 färger:



Det kromatiska talet, $\chi(G)$ för G:

Minsta antalet färger som räcker för en hörnfärgning av G.

Exempel:

$\chi(G) \leq |V|$

$\chi(G) = |V| \Leftrightarrow G = K_n$, något n.

$\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ Bipartit, $|E| \geq 1$

$\chi(G) = 1 \Leftrightarrow |E| = 0, |V| \geq 1$

$\chi(G) = 0 \Leftrightarrow |V| = 0$

Observera att $\chi(G) = k$ betyder:

$$\begin{cases} k \text{ färger räcker} \\ k-1 \text{ färger räcker itne} \end{cases}$$

I allmänhet svårt att bestämma $\chi(G)$.

En girig algoritm (ger ofta ganska bra värden):

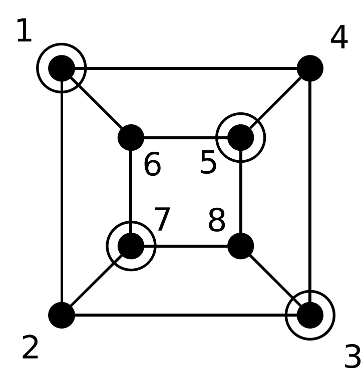
1) Ordna V: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $\quad n = |V|$

2) Välj i tur och ordning $c(v_1) = 1$, $c(v_2)$, $c(v_3)$, …
mästa tillåtna värde (med hänsyn till redan färgade grannar).

Ö9:14)

Ordna hörnen i kubgrafen så att giriga algoritmen ger 2, 3, 4 färger.

2:	v:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	index
	c:	1 $\underline{\underline{2}}$ 1 2 1 2 1 2	färg
3:	v:	1, 8, 2, 3, 4, 5, 6, 7	index
	c:	1 1 2 $\underline{\underline{3}}$ 2 3 2 3	färg
4	v:	1, 8, 5, 2, 3, 4, 5, 6	index
	c:	1 1 2 2 3 $\underline{\underline{4}}$ 3 4	färg



Sats: Om G har maxvalens k:

I) $\chi(G) \leq k + 1$
II) G sammanhängande och inte reguljär: $\quad \chi(G) \leq k$

Ty:

I) Klart.
II) Ordna hörnen $\delta(v_n) < k$, v_{n-1} granne med v_n, v_{n-2} granne med v_{n-1} eller v_n, … (går ty G sammanhängande).

Giriga algorithmen ger en färgning med högst k färger, ty
varje vi har högst $k - 1$ färgade granner när den gärgas.

Exempel:

För en planär graf $(c \overset{e > 1}{\geq} 1)$

$$\left\{\begin{matrix} 3r \leq e2 \\ \\ r \leq {}^{2}/_{3}e \end{matrix}\right\} \quad 1 = v - e + r - c \leq v - {}^{1}/_{3}e - c$$

Så $6v \geq 2e + 6(c + 1) \geq \left(\sum_{x \in X} \delta(x)\right) + k$

Det vill säga: $\left(\sum_{x \in X} \delta(x) - 6\right) \leq 12$

Så något hörn har valens ≤ 5.

6-färgssatsen:

Om G är planär gäller $\chi(G) \leq 6$

Ty:

Induktion över v, antalet hörn.

Bas: $v = 1$ OK

Steg:

Antag att påståendet är sant då $v = k$.
Låt G vara planär med $k + 1$ hörn.

Tag bort ett hörn med valens ≤ 5 (enligt nyss),
får G'. G' färgas med högst 6 färger.
(*)
Sista hörnet (5 hrannar av de 6 färgerna) med någon kan färgas.

5-färgssatsen:

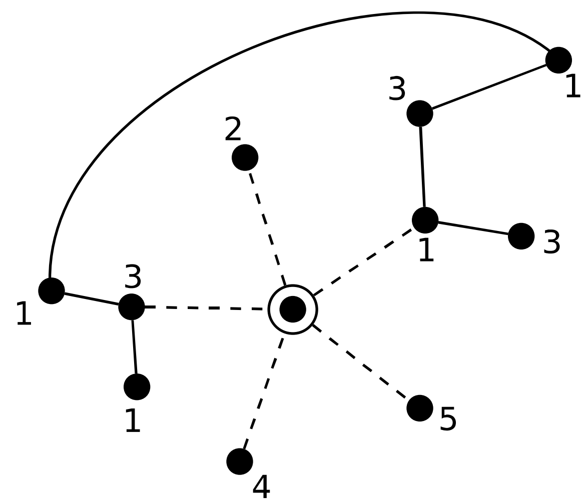
Lite svårare; med samma förutsättningar som i 6-färgssatsen.

Bevis som nyss, fram till (*) i steget.

Om alla grannar (till sista hörnet):

inte olika: Klart.

olika: Bilda 1–3-kedjor.



Om 1-hörnet förbundet med 3-hörnet
finns ingen 2–4-kedja från 2-hörnet till
4-hörnet.

“Byt färger” så något 4 färger på grannarna.