$f(t)$ är Lipschitz-kontinuerlig på intervallet $[t_1; t_2]$ om

$$|f(s)-f(t)| \leq L|s-t| \quad \forall \quad s, t \in [t_1; t_2]$$

Fundamentalsatsen:

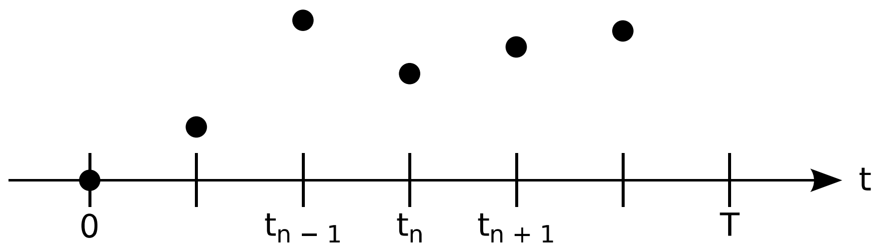
Om f är Lipschitz-kontinuerlig $[0; t]$ så är

$$u(t)=\int_0^t f(s)\, ds$$ en lösning till differentialekvationen

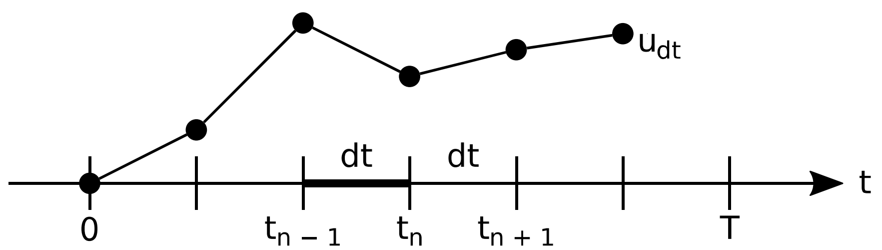
$$\begin{cases} \dot{u}(t)=f(t) \\ u(0)=0 \end{cases} \quad t \in [0; T]$$

$$u(t)=\int_0^t f(s)\, ds$$ definieras genom tidsstegning

$u^{n+1} = u^n + f(t_n)\, dt$ (1) med försvinnande litet tidssteg, dt



Styckvis linjär interpolation



För $[t_n; t_{n+1}]$:

$$u_{dt}(t)=u^n \frac{t_{n+1}-t}{dt}+u^{n+1}\frac{t-t_n}{dt}$$

Residual:

$\dot{u}(t) - f(t) = 0$ för exakt lösning

$\dot{u}_{dt}(t) - f(t) \not\equiv 0$ alltså inte strikt lika med noll (detta brukar skrivas ≠ 0)

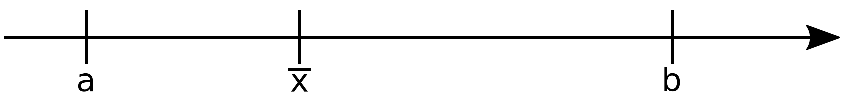
För $[t_n; t_{n+1}]$:

$$\left|\dot{u}_{dt}(t) - f(t)\right| = \left|\frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - f(t)\right| = \{(1)\} = \left|f(t_n) - f(t)\right| \leq L\,dt$$

Fourier: $u(t) \approx \sum_{m=-N}^{N} u_m e^{imx}$ (Se modul 3 för SF1637)

Taylorserie: $u(x) \approx u(\bar{u}) + u'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} u''(\xi)(x - \bar{x})^2$

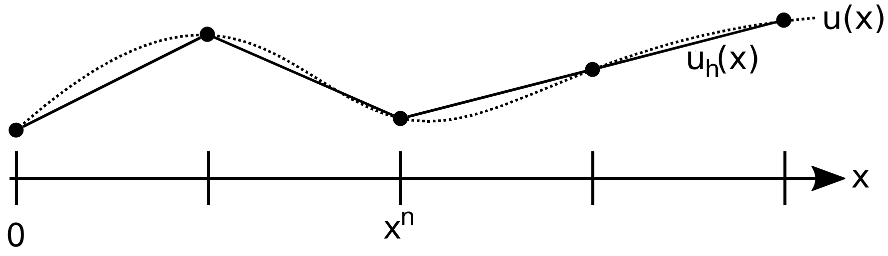
$\xi \in [a; b]$



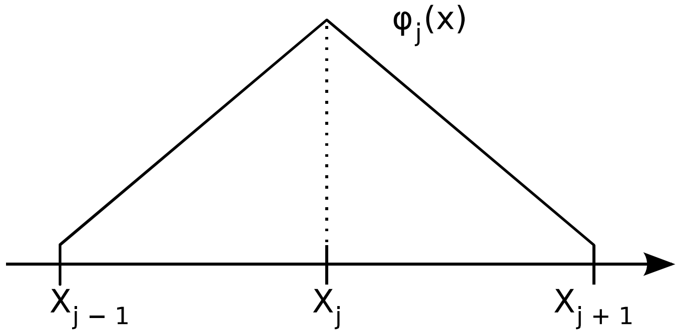
(Vi har kvar ½ trots att vi har ett “ordo”-värde, eftersom vi vill beräkna ett felvärde.)

$\pi_1\, u(x_n) = u_h(x_n) = u(x_n)$

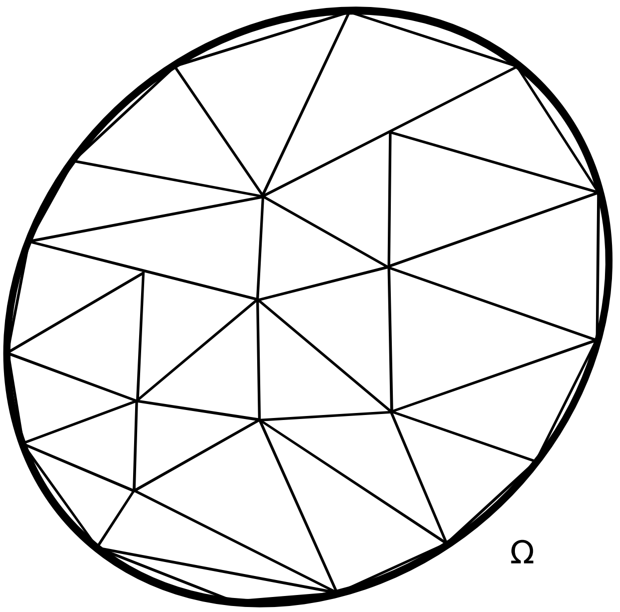
π_1 betyder linjär interpolans.

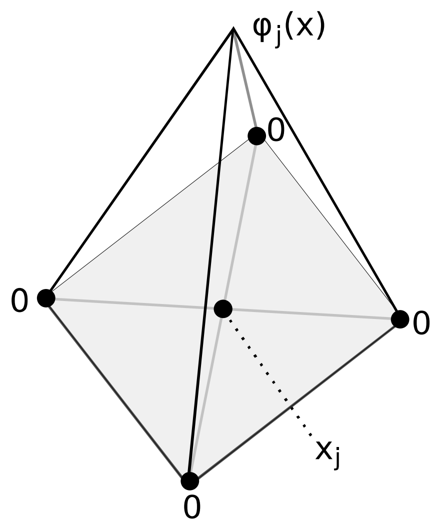


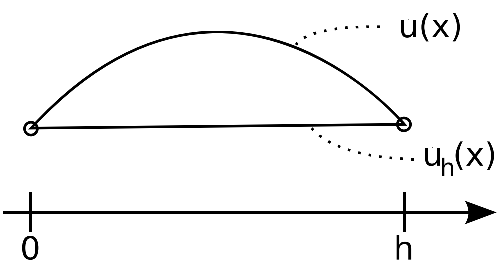
$$u_h(x) = \sum_{j=0}^{N} u(x_j)\varphi_j(x), \qquad \varphi_j(x_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$



3-dimensionell interpolation med hjälp av triangulering med polygonpyramider (läraren sa tetraedrar (en. tetrahedrons) trots att han hade en rektangelpyramid):







$$\begin{cases} u_h(0) = u(0) \\ u_h(h) = u(h) \end{cases}$$

Antag att u(x) är två gånger deriverbar.

Uppskatta $e_n = u(x) - u_h(x)$, $x \in [0; n]$.

1. Subtrahera linjär funktion från u(x) så att $u(0) = u(h) = 0 \Rightarrow u_h \equiv 0$

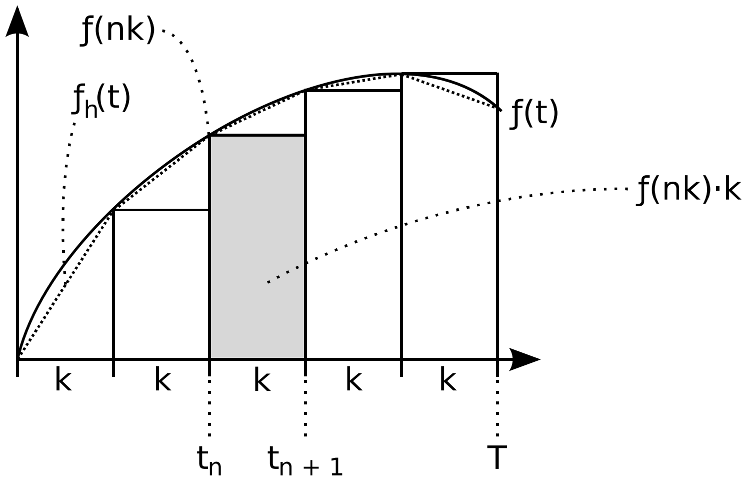
2. Antag att $u(x) \neq u_h(x)$ för något $x \in]0; h[$.

   u(x) är maximal då $x = \xi \in]0; h[\Rightarrow u'(\xi) = 0$

$$|u(x)-u_h(x)| \leqslant \max_{x\in]0;h[} |u(x)-u(\xi)| = \max_{x\in]0;h[} \left| u(x)-u(\xi)-\underbrace{u'(\xi)(x-\xi)}_{0} \right| =$$

$$= \{\text{Taylor}\} = \{\eta \in]0;h[\} = \max_{x\in]0;h[} \left| \frac{1}{2} u''(\eta)(x-\xi)^2 \right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2} \max_{x\in]0;h[} |u''(\eta)|}_{C} h^2$$

Kvadratur : Riemannsumma



f_h är en styckvis linjärt interpolant; $f_h(t_i) = f(t_i)$, $i \in \mathbb{Z}_{0..N}$

Kvadraturfel

$$\left| \int_0^T f(t)\,dt - \sum_{n=0}^{N} f(nk)\cdot k \right| \leq \frac{LT}{2} k$$

k utan exponent betyder att konvergensordningen är 1.

$$\int_0^T f(t)\,dt \simeq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2}\big(f(nk)+f((n+1)k)\big)\cdot k = \int_0^T f_h(t)\,dt$$

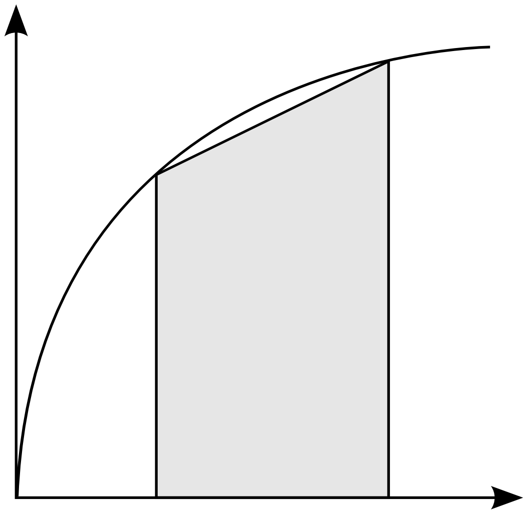
Kvadraturregler kan bygga på exakt integraton av en interpolant.

Kvadraturfel:

$$\left|\int_0^T f(t)\,dt - \int_0^T f_h(t)\,dt\right| = \left|\int_0^T \left(f(t)-f_h(t)\right)dt\right| \leq \int_0^T \left|f(t)-f_h(t)\right| dt \leq$$

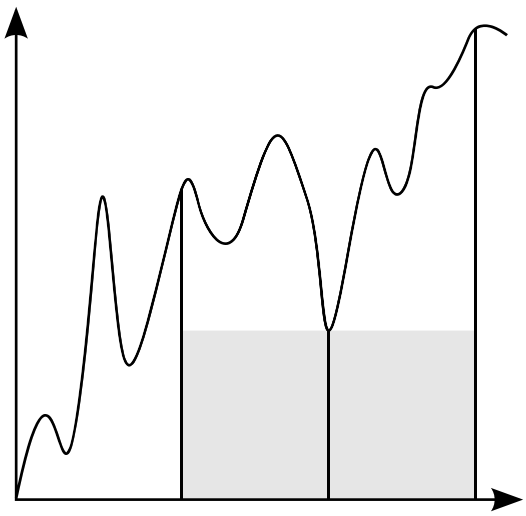
$$\leq \max_{t\in[0;T]} \left|f(t)-f_h(t)\right| \cdot \int_0^T dt \leq CTk^2$$

Trapetsregeln (en. Trapezoidal/Trapezoid/Trapezium rule):



Summering av trapetser.

Mittpunktsregeln (en. Midpoint rule):



$$\int_0^T f(t)\,dt \simeq \sum_{n=0}^{N} f\left(t_n+\frac{k}{2}\right)\cdot k$$

Samma konvergensordning
som trapetsregeln

L_2-projektion

$$u_h(x)=\sum_{j=1}^{N} u_j \varphi_j(x)$$

Definition:

L_2-projektionen, $\mathbb{P}u$ (eller Pu), av u på intervallet [0; h] som (i detta exempel) styckvis konstant så att

$$\int_0^h \left(u(y)-\mathbb{P}u\right) v \, dy=0$$

för alla konstanta funktioner, v, på intervallet [0; h].

$$v\left(\int_0^h u(y)\, dy-\int_0^h \mathbb{P}u \, dy\right)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$v\left(\int_0^h u(y)\, dy-\mathbb{P}u\cdot h\right)=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_0^h u(y)\, dy-\mathbb{P}u\cdot h=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}u=\frac{1}{h}\int_0^h u(y)\, dy$$

Medelvärdet av u på [0; h]

Linjär algebra

$$\vec{v}=(v_1;\, v_2)$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1^{\,2}+v_2^{\,2}}$$

L_2-norm:

$$\|f\| = \left(\int_0^h f(y)^2 \, dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|u-\mathbb{P}u\|^2=\int_0^h \left(u(y)-\mathbb{P}u\right)^2 dy=\{\text{konstant funktion, } v\}=$$

$$=\int_0^h \left(u(y)-\mathbb{P}u\right)\left(u(y)-\mathbb{P}u\right) dy+\underbrace{\int_0^h \left(u(y)-\mathbb{P}u\right)\underbrace{\left(\mathbb{P}u-v\right)}_{\text{konstant}} dy}_{0}=$$

$$=\int_0^h \left(u(y)-\mathbb{P}u\right)\left(u(y)-v\right) dy\le\left\{\begin{matrix}\{\text{Linjär algebra:}\\ \text{Couchys olikhet:}\\ v\cdot w\le|v|\cdot|w|\end{matrix}\right\}\le$$

$$\le\left(\int_0^h \left(u(y)-\mathbb{P}u\right)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int_0^h \left(u(y)-v\right)^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\|u-\mathbb{P}u\|\cdot\|u-v\|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\|u-\mathbb{P}u\|\le\|u-v\| \quad \forall\, v$$