Då en produkt tas ut ur ugnen har den temperaturen 700°C. Den svalar; avsvalkningstakten är proportionell med skillnaden i temperaturen mellan produkten och omgivningen.

Vilken av följande modeller är rimlig?

1)
$$\frac{dT}{dt}=-\left(\frac{T-40}{3}\right)$$

2)
$$\frac{dT}{dt}=\frac{T-30}{3}$$

1:an, ty temperaturen ska avta vilket kräver negativ derivata.

Bestäm lösningen till

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{T}{3}+\frac{40}{3}$$

Vi söker en allmän lösning till motsvarande homogent system.

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{T}{3}$$

$$dT=-\frac{T}{3}dt$$

$$\frac{dT}{T}=-\frac{1}{3}dt$$

$$\int \frac{dT}{T}=\int -\frac{1}{3}dt$$

$$\int \frac{dT}{T}=-\frac{1}{3}\int dt$$

$$\ln|T|=-\frac{1}{3}t+C$$

$$|T|=e^{-\frac{1}{3}t+C}=e^{-\frac{1}{3}t}e^{C}=Ce^{-\frac{1}{3}t}$$

$$T=Ce^{-\frac{1}{3}t}$$

En partikulärlösning till det ursprungliga systemet. Man kan gissa: $T(t) = 40$ är en lösning. ($(40 – 40) / 3 = 0 = D_t(40)$)

Den allmänna lösningen är alltså $T(t)=Ce^{-\frac{t}{3}}+40$.

Låt $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ vara en lösning till differentialekvationen

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Bestäm två linjärt oberoende lösningar.

Insätt $y = x^a$ i ekvationen.

$$x^2\underbrace{a(a-1)x^{a-2}}_{y''}+4x\underbrace{ax^{a-1}}_{y'}+2\underbrace{x^a}_{y}=0$$

$$a(a-1)x^a+4ax^a+2x^a=0$$

$$x^a\big(a(a-1)+4a+2\big)=0$$

$$a(a-1)+4a+2=0$$

$$a^2-a+4a+2=0$$

$$a^2+3a+2=0$$

$$a_1=-1 \quad , \quad a_2=-2$$

Vi fick att $y_1 = x^{-1}$ och $y_2 = x^{-2}$ är lösningar.

De är linjärt oberoende. (Eftersom $x^{-1} \neq kx^{-2}$, för en konstant, k.)

Den allmänna lösningen till ekvationen är

$$y = Cx^{-1} + Dx^{-2}$$

Låt $y_p = x^3$ vara en partikulärlösning till

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = f(x)$$

Bestäm $f(x)$.

Lösning: insätt $y_p = x^3$ i ekvationen:

$$x^2\underbrace{6x}_{y_p''}+4x\cdot\underbrace{3x^2}_{y_p'}+2\underbrace{x^3}_{y_p}=f(x)$$

$$6x^3+12x^3+2x^3=f(x)$$

$$(6+12+2)x^3=f(x)$$

$$f(x)=20x^3$$

[4.2.19.]

Bestäm den allmänna lösningen till

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$$

givet att $y_1 = x^4$ är en lösning.

Lösning: Vi söker den andra linjärt oberoende lösningen på formen $y_2 = u(x)\cdot y_1(x)$.

Insätter y_2 i ekvationen:

$$y_2'=u'y_1+uy_1'$$

$$y_2''=u''y_1+\underbrace{u'y_1'+u'y_1'}_{2u'y_1'}+uy_1''$$

$$x^2\left(u''y_1+2u'y_1'+\underline{uy_1''}\right)+7x\left(u'y_1+\underline{uy_1'}\right)+\underline{16uy_1}=0$$

$$VL=u\underbrace{\left(\underline{x^2y_1''-7x_1'+16y_1}\right)}_{=0,\ \text{ty } y_1 \text{ är en lösning}}+x^2u''y_1u+2x^2u'y_1'-7xu'y_1=\{y_1=x^4\}=$$

$$=u''x^6+u'x^5=x^5(\underbrace{u''x+u'}_{\text{för alla x}})=0$$

$$\Updownarrow$$

$$u''x+u'=0$$

Beteckna $z(x) \triangleq u'(x)$.

För z har vi ekvationen

$$z'x + z = 0$$

$$\frac{dz}{dx}x=-z$$

$$x\,dz=-z\,dx$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{z}=\int -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|=-\ln|x|+C$$

$$\ln|z|=-\ln|x|+\ln C$$

$$\ln|z|=\ln\frac{C}{|x|}$$

$$|z|=\frac{C}{|x|}=\frac{C}{x}$$

$$z=\frac{C}{x}$$

$$u'=\frac{C}{x}$$

$$u=\int \frac{C}{x}\,dx$$

$$u=C\ln|x|+D$$

Vi fick en lösning:

$$y_2 = u y_1 = (C \ln|x| + D)\, x^4$$

med godtyckliga konstanter, C och D.

Tag $C = 1$, $D = 0$.

$y_2 = x^4 \ln|x|$

är linjärt oberoende av $y_1 = x^4$.

Den allmänna lösningen till ekvationen ovan är $y = Ax^4 + Bx^4 \ln|x|$

Låt **A** vara en reel matris.

Betrakta systemet av differential ekvationer: $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$

En lösning till detta system ges av

$\vec{Z} = \vec{X_1} + i\vec{X_2}$ där $\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ är reela och vektorvärda funktioner.

Visa att även $\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ är lösningar.

Insätt $\vec{Z}$ i systemet:

$$\left(\vec{X_1} + i\vec{X_2}\right)' = \mathbf{A}\left(\vec{X_1} + i\vec{X_2}\right)$$

$$\vec{X_1}' + i\vec{X_2}' = \mathbf{A}\vec{X_1} + i\mathbf{A}\vec{X_2}$$

$$\underbrace{\left(\vec{X_1}' - \mathbf{A}\vec{X_1}\right)}_{P_1} + i\underbrace{\left(\vec{X_2}' - \mathbf{A}\vec{X_2}\right)}_{P_2} = 0$$

Både P_1 och P_2 ska vara noll.

Både $\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ är lösningar till systemet.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \vec{X}$$

Vi söker egenvärden till $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 20 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 17 = (\lambda+1)^2 + 16 = 0$$

$$(\lambda+1)^2 = -16$$

$$(\lambda+1) = \pm 4i$$

$$\lambda = -1 \pm 4i$$

Vi söker egenvektorn $\vec{v}$ motsvarande $\lambda = -1 \pm 4i$.

$$\mathbf{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff 0 = \mathbf{A}\vec{v} - \lambda\vec{v} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 5 & -3-\lambda \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 2-4i & -4 \\ 5 & -2-4i \end{pmatrix} \vec{v}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix}$$

En komplex lösning är

$$\vec{Z} = e^{(-1+4i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix} = e^{-t} \operatorname{cis}(4t) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1-2i \end{pmatrix} =$$

= Bla, bla, bla, se äldre anteckningar!