Sanorlikhet & Statestik 12/9 - 2011

Trådimentionel diskret s.v. 2 dimentioner

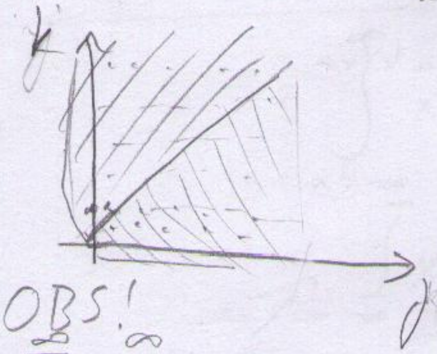
par (X, Y) av diskret s.v.

Slk-fkn $p_{X,Y}(j,k) = P(X=j, Y=k)$, $j,k = 0,1,2,\ldots$

Då gäller, för $A \subseteq \{0,1,\ldots\}^2$

$P((X,Y) \in k)$ $p_{X,Y}(j,k)$

Ex. $P(X < Y) = \sum_{k>j} p_{X,Y}(j,k)$



OBS!

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} p_{X,Y}(j,k) = 1$$

Två dimentionel kontinuerlig s.v. (X,Y): finns

Täthetsfunktion $f_{X,Y}(x,y)$ så att för varje $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f_{X,Y} = (x,y)\,dx\,dy$$

OBS!

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$$

Ex: Likformig fördelning på mängd $B \subseteq \mathbb{R}^2$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/\text{area}(B) & (x,y) \in B \\ 0 & \text{f.ö.} \end{cases}$$

$P((X,Y) \in A) = \frac{\text{area}(A)}{\text{area}(B)}$ Hur stor del av den totala ytan omfattar A av B

Marginalisering

$$P_X(j) = P(X=j) = P((X,Y) \in \{(j,0),(j,1),(j,2)\dots\})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P_{X,Y}(j,k)$$

Pss $p_Y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{XY}(j,k)$

Väldigt lätt att komma från 2 dim till 1 dim

Marginalisering för diskreta variabler

Vidare kontinuerliga variabler

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{XY}(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\, dx$$

Väntevärdesbegreppet

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(j,k)\, p_{XY}(j,k) & (X,Y) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy & (X,Y) \text{ kontinuerlig} \end{cases}$$

Ex $E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$

$= \iint x\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy \iint y\, f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$

$= \int_{x=-\infty}^{\infty} x \int_{y=-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy + \int_{y=-\infty}^{\infty} y \int_{x=-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)$

$\overset{=}{\nearrow} \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = E(X) + E(Y)$

Marginalisering

Två stokastiska variabler X & Y är oberoende om för alla mängder A & B

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

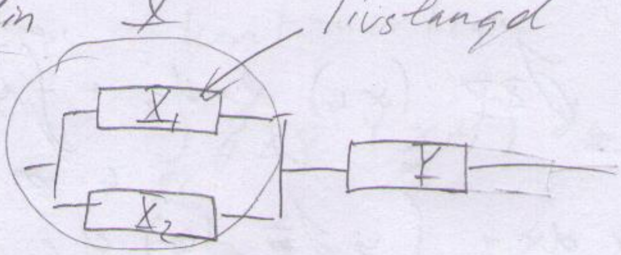
Samma sak som (ekvivalent med)

$$p_{X,Y}(j,k) = p_X(j)\,p_Y(k), \text{ alla } j, k \text{ (diskret)}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y), \text{ alla } x, y \text{ (kontinuerliga)}$$

Max & Min

Ex.



X = livslängd del 1 = $\max(X_1, X_2)$

Z = livslängd system = $\min(X, Y)$

Låt $X_1, \dots, X_n$ oberoende s.v. $Z = \max(X_1, \dots, X_n)$

Då $Z \le z \iff X_1 \le z, X_2 \le z, \dots, X_n \le z$

sannolikheter / oberoende variabler

och $P(Z \le z) = P(X_1 \le z, \dots, X_n \le z) = P(X_1 \le z) \cdots P(X_n \le z)$

Om $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$ så

$Z > z \iff X_1 > z, \dots, X_n > z$

och $P(Z > z) = P(X_1 > z) \cdot \ldots \cdot P(X_n > z)$

Summor

X & Y oberoende diskreta

$Z = X + Y \qquad p_Z(k) = ?$

$p_Z(k) = P(Z=k) = P(X+Y = k)$

$= \sum_{\substack{j \geq 0; \\ l \geq 0; \\ j+l = k}} p_{X,Y}(j,l) = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ l \geq 0 \\ j+l=k}} p_X(j)\, p_Y(l)$

$= \sum_{j=0}^{k} p_X(j)\, p_Y(k-j)$

Faltningssumma!

Om (X, Y) kont.:

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\, dx$

Ex: $\left.\begin{array}{l} X = Bin(n,p) \\ Y = Bin(m,p) \end{array}\right\}$ Ober

$Z = X + Y$

Då: $Z \in Bin(n+m, p)$

Går att ses

Ex. $\left.\begin{array}{l} X \in Po(\mu_1) \\ Y \in Po(\mu_2) \end{array}\right\}$ ober

Då

$$X + Y \in Po(\mu_1 + \mu_2)$$

Vi har sett $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Dessutom gäller (pss) $E(\alpha X) = \alpha E(X)$

(a är en konstant)

Alltså: V.v. är väntevärdet linjärt

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\right) = \sum a_i E(X_i)$$

Ex: $E(2X + 3Y - 4Z) = 2E(X) + 3E(Y) - 4E(Z)$

Kovarians (Samvariation)

$$C(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

Mäter linjärt beroende

Vi har

$$C(X, Y) = E(X Y) - E(X)E(Y)$$

Tack för idag