2010−(09)sep−06: dag 1, 6

Modul 2:

Högre ordningens ODE.
System av linjära ODE.
Autonoma system. Stabilitet.

Differentialekvationer av högre ordning:

$$\mathcal{L}(D)y=\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}=g(x)$$

$$\mathcal{L}(D)(c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x))=c_1\mathcal{L}(D)y_1(x)+c_2\mathcal{L}(D)y_2(x)$$

Alla lösningar till y är linjärt oberoende av varandra, detta innebär att om man deriverar summan av dem, med koefficinenter, så får man samma svar som om man summerar derivatorna av y med koefficienter till y eller derivationerna.

Reduktion av ordning:

$\mathcal{L}(D)y = 0$

y_1 är en kände icke-trivial lösning.

$y(x) = u(x)y_1(x)$.

Man kan substituera y med en funktion multiplicerat med en känd, icke-trivial lösning för att reducera differentialekvationens ordning, om den är homogen.

$\mathcal{L}(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende.

Lösningar till den homogena ekvationen:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$(u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2)(x) \triangleq y(x)$

Fundera inte över detta om du inte begriper det, fortsätt istället att läsa som saker bli klarare.

En partikulärlösning sökes.

Välj: $y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$

Då erhålles: $y_1' \cdot u_1' + y_2' \cdot u_2' = f$

Matrisform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Ställ upp wronskianen för lösningarna och multiplicera med en vektor av deriverade koefficientfunktioner och låt detta vara lika med en vektor med nollor samt, i slutet, den inhomogena delen.

Entydlig lösning:

$\det \mathbf{A} \neq 0$

En entydlig lösning erhålls om wronskianen's determinant är lika med 0.

Cramers regel: (Cramer uttalas /krɑːmər/)

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}} \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}}$$

Cramers regel kan användas på matrisformen för att lösa ut dem deriverade koefficientfunktionerna.

Exempel

Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen

$$x(y'' - 2y' + y) = 0, \qquad x > 0$$

samt en partikulärlösning till differentialekvationen

$$x(y'' - 2y' + y) = e^x, \qquad x > 0$$

$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y_1 \triangleq e^x$ Vi kan lätt sa att e^x är en lösning.

$y = e^x z(x)$ Substituera y med y_1 och en funktion.

$e^x \cdot x((z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + z) = e^x$

Då erhålls ett uttryck som kan förenklas till:

$z'' = 1 / x \qquad (*)$

$z' = \ln x + C$

$y' = e^x z' + e^x z$

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + D$

$z = x \ln x - x + Cx + D$

$y = e^x z = e^x(x \ln x - x + Cx + D)$

$y = Cxe^x + De^x + e^x(x \ln x - x)$

$y_p = e^x(x \ln x - x)$

$(xe^x;\ e^x)$ Fundamentalmänd av lösningar till den homogena ekvationen.
De homogena lösningarna är alltså xe^x och e^x.

$(*) \because$

$e^x x z'' = e^x$

$x z'' = 1$

$z'' = 1 / x$

$x(y'' - 2y' + y) = e^x, \qquad x > 0$

$y_h \triangleq u(x)xe^x + v(x)e^x \qquad\qquad u_1 = u \qquad u_2 = v$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} xe^x & e^x \\ xe^x + e^x & e^x \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{x} \end{pmatrix}$$

$|\mathbf{A}| = -e^{2x}$

$$u'(x) = \frac{1}{-e^{2x}}\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{-e^{2x}}\begin{vmatrix} xe^x & 0 \\ xe^x + e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = -1$$

$u(x) = \ln |x| = \{x > 0\} = \ln x$
$v(x) = -x$

$y_p = xe^x(\ln x - 1)$

System av linjära första ordningens ODE.

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

Exempel:

$y' = ay$
$y = Ce^{ax}$

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

2010−(09)sep−08: dag 2, 7

Reduktion av ordning:

$\mathcal{L}(D)y = 0$
y_1 är en känd icke-trivial lösning.

$y(x) \triangleq u(x)y_1(x)$
$\mathcal{L}(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

En partikulärlösning sökes.
Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$
Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f$

System av linjära första ordningens ODE:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

Två lösningar till $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$:

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$

Då är även $\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2}$ lösningar.

$\overrightarrow{X_1}$ och $\overrightarrow{X_2}$ är linjärt oberoende.

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}\overrightarrow{X_1} & \overrightarrow{X_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\mathbf{\Phi}\vec{C}$$

$\mathbf{\Phi}$ är en fundamentalmatris.

Variation av parametrar:

$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X},\ \vec{X}=\mathbf{\Phi}(t)\vec{C}$ $\quad$ $\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$ är homogen

$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}+\vec{F}$ $\quad$ inhomogen

$$\overrightarrow{X_p}=\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}'(t)\vec{U}(t)+\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}'(t)=\mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}(t)+\vec{F}(t)$$

$$\underbrace{\left(\mathbf{\Phi}'(t)-\mathbf{A}\mathbf{\Phi}(t)\right)}_{\mathbf{0}}\vec{U}(t)+\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}'(t)=\vec{F}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}'(t)=\vec{F}(t)$$

$\vec{U}'(t)=\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)$ $\quad$ $\because$ det $\mathbf{\Phi}\neq 0$

Plana autonoma system och stabilitet:

$$\vec{x}'=\vec{g}(\vec{x})$$

Plant autonomt system:

$\dfrac{dx}{dt}=P(x;\,y)$ $\qquad$ $\dfrac{dy}{dt}=Q(x;\,y)$

$\overrightarrow{x_1}$ är en kritisk punkt till $\vec{x}'=\vec{g}(\vec{x})$

Taylorutveckling!

$$\overrightarrow{x_1}=\vec{g}(\vec{x})=\vec{g}(\overrightarrow{x_1})+\vec{g}(\overrightarrow{x_1})(\vec{x}-\overrightarrow{x_1})+\overrightarrow{R_1}$$

$$\vec{x}'\approx\vec{g}(\overrightarrow{x_1})(\vec{x}-\overrightarrow{x_1})$$

$\because$

$\overrightarrow{x_1}$ är en kritisk punkt, $\vec{g}(\overrightarrow{x_1})=\vec{0}$

4 kap.:

Begynnelsevärdesproblem
Randvärdesproblem
Linjärt oberoende
Wronskian/Wronskideterminanten
Fundamentallösningar
Homogena lösningar
Allmäna lösningar

Begynnelsevärdesproblem:

$$\mathcal{L}(D)y = a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

Låt $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ och $g(x)$ vara kontinuerliga på ett intervall, I, och låt $a_2(x) \neq 0\ \forall x \in I$.
För varje godtycklig punkt $x = x_0 \in I$ existerar en entydlig lösning $y(x)$ på intervallet I.

Randvärdesproblem:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, kan vara derivator av *y*, och inte bara *y*.

[z.c.4.1.13.]

$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

Lösningar till $y'' - 2y' + 2y = 0$

$y' = c_1 e^x(\cos x - \sin x) + c_2 e^x(\sin x + \cos x)$

a)

Villkor: $\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ 0 = y'(\pi) = -e^{\pi}(c_1 + c_2) \end{cases}$

$y = e^x(\cos x - \sin x)$

b)

Villkor: $\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ -1 = y'(\pi) = -e^{\pi} c_1 \end{cases}$

Saknar lösning

$\because$

$c_1 \neq -e^{\pi} c_1$

$\because$

$e^{\pi} \neq 1$

Villkor: $\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 \\ 0 = y'(\pi) = -e^{\pi} c_1 \end{cases}$

$y = c_2 \cdot e^x \cdot \sin x$

Linjärt oberoende:

$\{f_1(x); f_2(x)\}$ är linjärt beroende på ett intervall, I, om det existerar konstanter, c_1 och c_2, alla ej lika med noll, så att $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, $\forall\ x \in I$.

Om $\{f_1(x); f_2(x)\}$ ej är linjärt beroende på intervallet I så är $\{f_1(x); f_2(x)\}$ linjärt oberoende.

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$

Derivera med avseende på x!

$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linjärt oberoende: $c_1 = c_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Entydlig lösning.

Wronskian (eller wronskideterminant):

Låt funktionerna $f_1(x)$ och $f_2(x)$ vara deriverbara.

Wronskideterminanten är $W(f_1; f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$

För flera variabler:

$$W\left(\coprod_{i=0}^{n} f_i \right) = \left| \coprod_{i=0}^{n} {}^{\downarrow} \ \coprod_{j=0}^{n} {}^{\rightarrow} \ f_j^{(i)} \right|$$

Låt y_1 och y_2 vara lösningar till, den snart definierade, [IH] på ett intervall, I.
Då är $\{y_1; y_2\}$ linjärt oberoende på I
$\therefore$
$W(y_1; y_2) \neq 0, \forall x \in I$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ [IH]

Låt y_1 & y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y(x) \triangleq (u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2)(x)$

Insättning i [IH] ger:

Här skulle färger vara bra, men för svart-vit utskrift-vänlighet, så makerar jag saker med [ ] med index.

$$Q([y_1u_1]_0 + [y_2u_2]_1) + P([y_1'u_1]_0 + y_1u_1' + [y_2'u_2]_1 + y_2u_2') +$$
$$+ [y_1''u_1]_0 + y_1'u_1' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ [y_2''u_2]_1 + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' = f$$

$$[u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1)]_0 + [u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2)]_1 +$$
$$+ [y_1'u_1' + y_2'u_2']_2 + [y_2'u_2' + y_2u_2'' + y_1'u_1' + y_1u_1'']_3 +$$
$$+ P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

$$[y_1'u_1' + y_2'u_2']_2 + [\frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2')]_3 + P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

En partikulärlösning sökes.

Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$

Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f$

**Fä
r
g
va
r
i**

Insättning i [IH] ger:

$$Q(y_1u_1 + y_2u_2) + P(y_1'u_1 + y_1u_1' + y_2'u_2 + y_2u_2') +$$
$$+ y_1''u_1 + y_1'u_1' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ y_2''u_2 + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' = f$$

$$u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) +$$
$$+ y_1'u_1' + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + \frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2') + P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

2010−(09)sep−09: dag 3, 8

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n} a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}$$

$g(x) \neq 0$ — inhomogen
$g(x) = 0$ — homogen

[z.c.4.1.7.]

$x(t)\ c_1 \cos \omega t = c_2 \sin \omega t$

är den allmäna lösningen till

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Visa att den lösningen som uppfyller

$$x(0) = x_0 \quad (1) \quad \text{samt} \quad x'(0) = x_1 \quad (2)$$

är

$$x(t)=x_0 \cos\ \omega t+\frac{x_1}{\omega} \sin \omega t$$

x(t) uppfyller (1):

$$x_0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Leftrightarrow x_0 = c_1$$

x(t) uppfyller (2):

$$x'(t) = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t$$

$x'(0) = x_1$:

$$x_1 = -c_1\omega \sin 0 + c_2\omega \cos 0 = c_2\omega$$

Funktionerna $\coprod_{i=0}^{n} f_i$ är linjärt beroende om det finns konstanter, $\coprod_{i=0}^{n} C_i$,

så att $\sum_{i=0}^{n} C_i f_i=0$

[z.c.4.1.17.]

$f_1(x) = 5$, $f_2(x) = \cos^2 x$, $f_3(x) = \sin^2 x$

Linjärt beroende?

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 = f_2 + f_3$

$c_2 = c_3$

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$
$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_2 f_3 = 0$
$c_1 f_1 + c_2(f_2 + f_3) = 0$
$c_1 \cdot 5 + c_2 \cdot 1 = 0$

$c_2 = -5c_1$

$c_1 \cdot 5 - 5c_1 \cdot 1 = 0$

$5(c_1 - c_1) = 0$
$0 = 0$

Linjärt beroende!

[z.c.4.1.40.]

Är $f_1(x) = e^{x+2}$ och $f_2(x) = e^{x-3}$ linjärt beroende?

$f_1(x) = e^{x+2} = e^2 e^x = k_1 e^x$
$f_2(x) = e^{x-3} = e^{-3} e^x = k_2 e^x$

Ja, båda är på formen ke^x.

[z.c.4.1.23.]

Visa att funktionerna e^{-3x} och e^{4x} utgör en fundamentalmängd till ekvationen

$$y'' - y' - 12y = 0$$

1) Antalet funktioner är lika många som ekvations ordningsnummer:

“ordning” = 2 $\asymp$ 2 = “funktioner”

2) Funktionerna är lösningar till ekvationen. (Kolla själv!)

3) $W(e^{-3x}; e^{4x}) \neq 0$:

$$W(f_1;f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

$$W(e^{-3x};e^{4x})=\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{4x} \\ -3e^{-3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix}=(4+3)e^{(4-3)x}=7e^{x}\neq 0$$

[z.c.4.2.9.]

Lös $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$, om $y_1 = x^4$ är en lösning!

Substitution: $y \triangleq y_1 \cdot u$

$y' = (y_1u)' = y_1'u + y_1u'$

$y'' = (y_1'u + y_1u')' = (y_1'u)' + (y_1u')' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''$

$$\begin{aligned}0 &= x^2y'' - 7xy' + 16y = \\ &= x^2y_1''u + 2x^2y_1'u' + x^2y_1u'' - 7xy_1'u - 7xy_1u' + 16y_1u = \\ &= u\cdot([x^2y_1'' - 7xy_1' + 16y_1]_0) + u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1 = \\ &= \{[\ldots]_0 = 0\} = u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1 && = \{v \triangleq u' \mid v' = u''\} = \\ &= v'x^2y_1 + v\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) && = \{y_1 = x^4 \mid y_1' = 4x^3\} = \\ &= v'x^6 + v\cdot(8x^5 - 7x^5) = \\ &= v'x^6 + vx^5\end{aligned}$$

$0 = v'x + v$
$0 = (vx)'$
$C = vx$
$v = C/x$

$v = u' = C/x$

$$\frac{du}{dx}=\frac{C}{x} \Leftrightarrow du=\frac{C}{x}dx \Leftrightarrow \int du=\int \frac{C}{x}dx \Leftrightarrow u=C\ln|x|+D$$

$y = y_1u = x^4(C \ln |x| + D)$

$y = Cx^4 \ln |x| + Dx^4$ Allmän lösning Alla homogena lösningar erhålls.

Metod 2:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ (*) Homogen

Om y_1 löser (*) så kan en anna lösning skrivas som

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx$$

Prova metoden på [z.c.4.2.9.]!

[z.c.4.6.1.]

$y'' + y = \sec x$

1) $y'' + y = 0$

Hjälpekvation: $m^2 + 1 = 0$ Kolla 4.3 kap.

Hjälpekvation kallas ofta karaktäristisk ekvation och erhålla genom att byta ut $y^{(n)}$ mot r^n, eller i detta fall m^n. $y^{(n)}$ är n:te derivatan till y.

$m_{1,2} = \pm i$

Vid två komplexa (egentligen även vida reela) m (de delar reel del, och har relativt varandra negativ imagionär del) erhålls två homogena lösningar genom på följande formel, där det är lättas om man väljer m med positiv imagionärdel:

$$y_h=e^{\Re m}\left(c_1\cos(|\Im m|\cdot x)+c_2\sin(|\Im m|\cdot x)\right)=$$

$$=e^0\left(c_1\cos(1\cdot x)+c_2\sin(1\cdot x)\right)=$$

$$=e^0(c_1\cos x+c_2\sin x)=(c_1\underbrace{\cos x}_{y_1}+c_2\underbrace{\sin x}_{y_2})$$

Lösningarna är linjärt oberoende av varandra (dock inte om imagionära delen är 0, för då är de identiska) per automatik.

$y_p = (y_1\cdot u_1 + y_2\cdot u_2)(x)$

2) $u_1(x)$, $u_2(x)$?

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1;y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = -\tan x \quad = u_1'$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix} = 1 \quad = u_2'$$

$$u_1' = -\tan x = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$u_1 = \int -\frac{\sin x}{\cos x}dx = \left\{ \begin{matrix} v = \cos x \\ dv = -\sin x\ dx \end{matrix} \right\} = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| = \ln|\cos x|$$

$$u_2' = 1$$

$$u_2 = x$$

$$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$$

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$$

2010−(09)sep−10: dag 4, 9

$\vec{X}' = \mathbf{A}(t)\vec{X} + \vec{F}(t)$

Låt elementen i matrisen $\mathbf{A}(t)$ och vektorn $\vec{F}(t)$
vara kontinuerliga på ett gemensamt intervall, I.
Då har följande begynnelsevärdesproblem en entydlig lösning:

$$\vec{X}(t_0) = \vec{X_0},\ \ t_0 \in \mathrm{I}$$

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$ [H]

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ är lösningar till [H].

Påstående:

$$\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} \quad \text{är lösningen till [H].}$$

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ måste vara linjärt oberoende.

$c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} = \vec{0}$

Linjärt oberoende då $c_1 = c_2 = 0$.

$(\vec{X_1}\ \ \vec{X_2}) \neq \vec{0}$

Allmän lösning: $\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2}$

$\vec{X} = (\vec{X_1}\ \ \vec{X_2})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi\vec{C}$

Φ kallas “fundamentalmatris”.

$y' = ay$
$y = Ce^{ax}$

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} = \lambda\vec{K}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} - \lambda\vec{K} = \vec{0}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} - \lambda\mathbf{I}\vec{K} = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

Omforming av höger ordningens ODE

$y'' + y = 0$ $\quad\quad$ $y = e^{ix}$

Karaktäristisk ekvation:

$r^2 + r^0 = 0$ $\quad\quad$ $y = \cos x + i \sin x$

$r = \pm i$ $\quad\quad$ $y_1 = \Re\, y = \cos x$

$y_2 = \Im\, y = \sin x$

$y = A \cos t + B \sin t$

Sätt $x = y'$

$$\begin{cases} x' = y'' = -y & \because \; y'' + y = 0 \\ y' = x \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\vec{X}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{X}}$$

$$0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$\lambda = \pm i$

$\lambda = i$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\vec{K} = \vec{0} \qquad \vec{K_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = e^{it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{X} = \cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i\cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \sin t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1} = \Re\vec{X} = \cos t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_2} = \Im\vec{X} = \cos t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} = c_1\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

1:a komponenten: $c_1 (-\sin t) + c_2 \cos t = y$

2:a komponenten: $c_1 \cos t + c_2 \sin t = x$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer
För få oberoende egenvektorer
Komplex egenvärden

Skilda reella egenvärden

$$\vec{X}=c_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{K_2}e^{\lambda_2 t}$$

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer

$$\vec{X}=c_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{K_2}e^{\lambda_1 t}$$

Ej tillräckligt många
Multipelt egenvärde med en egenvektor
λ_1 egenvärde med multiplicitet 2 (duplex; två likadana egenvärden).

En lösning $\vec{X_1}=\vec{K}e^{\lambda_1 t}$

Ansätt: Andra lösningen $\vec{X_2}=(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}$

Exempel: y'' – 2y' + y = 0

Karaktärisktisk ekvation: $r^2 - 2r + 1 = 0$
$(r - 1)^2 = 0$
$r_{1,2} = 0$

$y = Ae^x + Bxe^x = (A + Bx)e^x$

$$(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}+\vec{L}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{A}\vec{L}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{A}\vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{L}=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}t+(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}$$

t^1: $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}=\vec{0}$

t^0: $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=\vec{L}$

$\vec{L}$ är en egenvektorer

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=0 \Leftrightarrow (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^2\vec{P}=0$$

2010–(09)sep–13: dag 5, 10

Homogena linjära system
Med konstanta koefficienter

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}=\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t}=\mathbf{A}\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{K}=\vec{0}$$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden
• Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer
• För få linjärt oberoende egenvektorer

Komplex egenvärden

[z.c.8.2.2.]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+2y\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-2=\lambda^2-5\lambda+4$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 4$

Bestäm en egenvektor till varje egenvärde.

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$\lambda_1=1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \quad \vec{v_1}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2=4 \quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{v_2}=\vec{0} \quad \vec{v_2}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{X}=C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}$$

[z.c.8.2.19.]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x-y \\ \dfrac{dy}{dt}=9x-3y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$3\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dy}{dt}$ men även $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}=0$

$\because \ \lambda_{1,2} = 0$

Bestäm en egenvektor till varje egenvärde.

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{v_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ansätt andra lösningen $\vec{X_2}=(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}$

$$(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}+\vec{L}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{A}\vec{L}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{A}\vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{L}=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}t+(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}$$

t^1: $\quad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}=\vec{0}$

t^0: $\quad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=\vec{L}$

$\vec{L}$ är en egenvektorer

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\vec{P}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{P}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=C_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+C_2\left[\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right]$$

[z.c.8.2.36.]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x+5y\\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+6y\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}4-\lambda & 5\\ -2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)(6-\lambda)+10=(\lambda-5)^2+9$$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 3i$

$$\begin{pmatrix}4-5-3i & 5\\ -2 & 6-5-3i\end{pmatrix}\vec{v_1}=\begin{pmatrix}-1-3i & 5\\ -2 & 1-3i\end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \iff \vec{v_1}=\begin{pmatrix}1-3i\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}=e^{(5+3i)t}\begin{pmatrix}1-3i\\2\end{pmatrix}=e^{5t}(\cos 3t+i\sin 3t)\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{X_1}=\Re\vec{Z}=e^{5t}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cos 3t+\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\sin 3t\right)=e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 3t+3\sin 3t\\ 2\cos 3t\end{pmatrix}\\ \vec{X_2}=\Im\vec{Z}=e^{5t}\left(\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}\cos 3t+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\sin 3t\right)=e^{5t}\begin{pmatrix}\sin 3t-3\cos 3t\\ 2\sin 3t\end{pmatrix}\\ \vec{X}=C_1\vec{X_1}+C_2\vec{X_2}\end{cases}$$

[z.c.8.3.13.]

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\vec{X}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}e^t$$

Bestäm en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$!

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\vec{X}$$

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+1$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

Bestäm en komplex egenvektor!

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix}1-(1+i) & -1\\ 1 & 1-(1+i)\end{pmatrix}\vec{v}_1=\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0} \ \Leftrightarrow\ \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}=e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=e^{t}\underbrace{(\cos t+i\sin t)}_{\text{cis } t=e^{t}}\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{X}_1=\Re\vec{Z}=e^{t}\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\sin t\right)=e^{t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\\ \vec{X}_2=\Im\vec{Z}=e^{t}\left(\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin t\right)=e^{t}\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}\end{cases}$$

Fundamentalmatrisen: $\mathbf{\Phi}(t)=e^{t}\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}$

$$\vec{X}_p\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}=\mathbf{\Phi}(t)\int\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{U}=\int e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}e^{t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}dt=\int\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_p=e^{t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}=e^{t}\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\mathbf{\Phi}(t)\vec{C}+\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}=e^{t}\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}\vec{C}+e^{t}\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

2010–(09)sep–14: dag 6, 11

Veriferia att $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}e^{-\frac{3t}{2}}$

är en lösning till $\vec{x}'=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ 1 & -1\end{pmatrix}\vec{x}$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_2}{4}-x_1\\ x_1-x_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}\underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)}_{\lambda}e^{-\frac{3t}{2}} \overset{?}{=} \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ 1 & -1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}e^{-\frac{3t}{2}}$$

Egentligen behöver vi verifiera att $\lambda\vec{v}=\mathbf{A}\vec{v}$, det vill säga att $\vec{v}$ är en egenvektor för **A** med egenvärdet λ.

$$\mathbf{A}\vec{v}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{2}{4}\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}\\ -1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -3\end{pmatrix}=-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\lambda\vec{v}$$

Stämmer!

Bestem den allmänna lösnngen till

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x+2y\\11x-2y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}7 & 2\\ 11 & -2\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Sök egenvärden till **A**

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}7-\lambda & 2\\ 11 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(-2-\lambda)-22=$$

$$=\lambda^2-5\lambda-36=(\lambda+4)(\lambda-9)$$

$\lambda_1 = 9$ söker $\vec{v}_1$ så att

$$(\mathbf{A} - 9\mathbf{I})\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -11 \end{pmatrix}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -4$

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

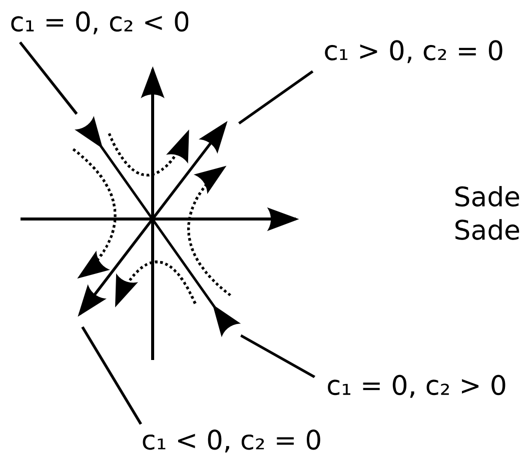
Vi har två linjärt oberoende lösningar:

$$\vec{X}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} \quad \text{och} \quad \vec{X}_2 = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

$$\vec{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} e^{-4t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ange hastighetsvektorn i punkten (2; 11)!

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' = 7x + 2y = 14 + 22 = 36 \\ y' = 11x - 2y = 22 - 22 = 0 \end{pmatrix}$$



Sadelpunkt
Sadelbeteende

Bestäm lösningen till BVP

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}6 & -1\\5 & 4\end{pmatrix}\vec{X} \quad , \quad \vec{X}(0)=\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}6-\lambda & -1\\5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(4-\lambda)+5=\lambda^2-10\lambda+29$$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$

$$\begin{pmatrix}6-5-2i & -1\\5 & 4-5-2i\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}1-2i & -1\\5 & -1-2i\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$$

Rad 1 och rad 2 är alltid linjärt beroende.

$$(1-2i)\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{0}$$

$$\vec{v}=t\begin{pmatrix}1\\1-2i\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\1-2i\end{pmatrix}e^{(5+2i)t}=\begin{pmatrix}1\\1-2i\end{pmatrix}e^{5t}\text{ cis }2t=e^{5t}\begin{pmatrix}\text{cis }2t\\(1-2i)\text{ cis }2t\end{pmatrix}=$$

$$=e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t+i\sin 2t\\\cos 2t+2\sin 2t-2i\cos 2t+i\sin 2t\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\\cos 2t+2\sin 2t\end{pmatrix}}_{\vec{x}_1}+\underbrace{ie^{5t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\-2\cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}}_{\vec{x}_2}$$

$\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \qquad \vec{v}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \qquad \vec{v}=t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_h}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^0+c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^t$$

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}$$

Formeln (se sida 330 eller Beta)

$$\vec{X_p}=\mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$ $\vec{F}(t)$ är den inhomogena delen.

Söker $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=\frac{\operatorname{adj}\mathbf{\Phi}(t)}{\det\mathbf{\Phi}(t)}=\begin{pmatrix} 2e^t & -3e^t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-e^t}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \frac{1}{e^t} & -\frac{1}{e^t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_p}=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \frac{1}{e^t} & -\frac{1}{e^t} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{F}}dt=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -8-3 \\ \frac{4+1}{e^t} \end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -11 \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11t \\ -5e^{-t} \end{pmatrix}+C=\{*\}=\begin{pmatrix} -11t-15 \\ -11t-10 \end{pmatrix}$$

{*} Som vanligt sätter vi C till 0 eftersom vi bara vill ha en lösning i partikulärlösning.

2010–(09)sep–15: dag 7, 12

Plana autonoma system och stabilitet.

[10.1.] Autonoma system

Kritiska punkter.
Periodiska lösningar.

[10.2.] Stabilitet hos linjära system

[10.3.] Linjärisering och lokala stabiliteter

Plant autonomt system

$$\frac{dx}{dt} = P(x; y)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x; y)$$

Vektorfält:

$$\vec{v}(x; y) = \begin{pmatrix} P(x; y) & Q(x; y) \end{pmatrix}$$

Lösningstyper:

Statinära punkter
Båge
Periodisk lösning

Stabilitetsundersökning av linjära system

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

Egenvärden till matrisen:

Reella
- Enkla
- Multipla

Komplexa

Stationära punkter: $\vec{X}' = \vec{0} = \mathbf{A}\vec{X}$

det $\mathbf{A} \neq 0$ $\because$ Entydlig lösning

(0 0) är den enda stationära punkten.

λ reella och enkla ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$	Instabil nod
$\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$	Stabil nod

λ reella och multipla ($\lambda_1 = \lambda_2$)

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instabil degenererad nod
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil degenererad nod

Egentligen kan man också få instabila och stabila stjärnor.

λ komplex ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)

$$\vec{Z} = e^{(\alpha+i\beta)t}\vec{K_1} = e^{\alpha t} \operatorname{cis} \beta t \cdot \vec{K_1}$$

$\vec{X_1} = \Re \vec{Z}$ ($\Re$ skrivs ofta Re)

$\vec{X_2} = \Im \vec{Z}$ ($\Im$ skrivs ofta Im)

$\alpha > 0$	Instabil spiral
$\alpha = 0$	Centrum, stabil (ellipsformad)
$\alpha < 0$	Stabil spiral

Stabilitetskriterium för linjära system

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} \quad , \quad \vec{X}(0) = \vec{X_0} \neq \vec{0} \quad , \quad \det \mathbf{A} \neq 0$$

1. $\lim_{t \to \infty} \vec{X}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \Re \lambda < 0$

2. $\vec{X}(t)$ är periodisk $\Leftrightarrow \Re \lambda = 0$

3. I övriga fall finns det minst ett $\vec{X_0}$ för vilket $\vec{X}(t)$ blir obegränsat då t växer.

Skilda reella egenvärden

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{K_2}e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda_2 < \lambda_1$

$$\vec{X}(t)=e^{\lambda_1 t}\left(C_1\vec{K_1}+C_2\vec{K_2}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\vec{X}(t)=\lim_{t\to\infty}e^{\lambda_1 t}C_1\vec{K_1}$$

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer.

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{K_2}e^{\lambda_1 t}=\left(C_1\vec{K_1}+C_2\vec{K_2}\right)e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\left(\vec{K_1}t+\vec{P}\right)e^{\lambda_1 t}=t\,e^{\lambda_1 t}\left(C_2\vec{K_1}+\frac{C_1}{t}\vec{K_1}+\frac{C_2}{t}\vec{P}\right)$$

[z.c.10.1.16.]

$$\begin{cases} x'=-x(4-y^2) \\ y'=4y(1-x^2) \end{cases}$$

Bestäm de kritiska (stationära) punkterna.
I de stationära punkterna är tangentvektorn (x'; y') = (0; 0)

$$\begin{cases} -x(4-y^2)=0 & (1) \\ 4y(1-x^2)=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1):\quad \begin{cases} \text{a)}\;\; x=0 \quad \text{insatt i (2):}\;\; y=0 \quad (0;0) \\ \text{b)}\;\; 4-y^2=0 \;\Leftrightarrow\; y=\pm 2 \quad \text{insatt i (2):} \\ \quad \pm 8(1-x^2)=0 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 1 \end{cases}$$

De stationära lösningarna är (0; 0) och ($\pm_1$ 1; $\pm_2$ 2)

[z.c.10.2.11.]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(4+\lambda)+6 = -25+\lambda^2+6 = -19+\lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{19}$$

Skilda tecken hos egenvärderna.
(0; 0) är en sadelpunkt.

[z.c.10.2.11.]

Bestäm μ så att vi får en stabil spiral.

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \vec{X}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & \mu-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\mu + 1$$

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2-4}}{2}$$

(0; 0) är en stabil spirital då:

$$\begin{cases} \mu^2 - 4 < 0 & \text{(spiral)} \\ \mu < 0 & \text{(stabil)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^2 < 4 \iff -2 < \mu < 2 \\ \mu < 0 \end{cases}$$

$-2 < \mu < 0$

2010–(09)sep–17: dag 8, 13

Anteckningar från denna dag saknas...

2010–(09)sep–20: dag 9, 14

Stabilitetsundersökning av icke-linjära system

$$\dot{\vec{X}}=\vec{f}(\vec{X})$$

Läraren skrev med punkt ovanför, vilket innebär att det är första derivatan, två punkter är andra derivatan, och så vidare. Punkt används oftast i mekaniken för vid derivata med avseende på tiden.

Stationär lösning:

$$\dot{\vec{X}}=\vec{0}=\vec{f}(\vec{X})$$

$$\vec{X}=\vec{X_0}$$

Taylorutveckling kring den kritiska punkten

$$\dot{\vec{X}}=\vec{f}(\vec{X})=\vec{f}(\vec{X_0})+\vec{f}(\vec{X_0})(\vec{X}-\vec{X_0})+\vec{R_2}$$

Linjärisert system

$$\dot{\vec{X}}=\vec{f}(\vec{X_0})(\vec{X}-\vec{X_0})$$

$$\vec{f}(\vec{X})=\begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(\vec{X})=\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}=\text{“Jacobimatris”}$$

[z.c.10.3.14.]

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x-y^2 \\ -y+xy \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(\vec{X})$$

$$\begin{cases} 2x-y^2=0 \\ -y+xy=-y(1-x)=0 \end{cases}$$

a) $y = 0 \Rightarrow x = 0,$ $(x; y) = (0; 0)$

b) $x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2},$ $(x; y) = (1; \pm\sqrt{2})$

$$\mathbf{g}'(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ y & -1+x \end{pmatrix} = \text{“Funktionalmatris”}$$

$$\mathbf{g}'(0;0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (↗-diagonalen kallas “bidialgonalen”)

↘-diagonalen kallas “huvuddiagonalen”. **g'**(0; 0) är en (huvud)diagonalmatris.

(0; 0) är en sadelpunkt, ty signum(λ_1) = –signum(λ_2) ≠ 0.
Därmed är diagonalen även instabil.

$$\mathbf{g}'(1;\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\lambda+4 = \lambda^2-2\lambda+4$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$\Re\, \lambda > 0 \therefore$ Instabil spiral i (1; $\sqrt{2}$)

Alternativ framställning:

(0; 0)

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^2 \\ xy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

(1; $\sqrt{2}$)

Sätt: $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-\sqrt{2} \end{cases} \left| \begin{array}{l} u' = x' \\ v' = y' \end{array} \right.$

$$\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-\sqrt{2} \end{cases} \left| \begin{array}{l} u' = x' \\ v' = y' \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(u+1)-(v+\sqrt{2})^2 \\ -(v+\sqrt{2})+(u+1)(v+\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u-v^2-2v\sqrt{2} \\ uv+u\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

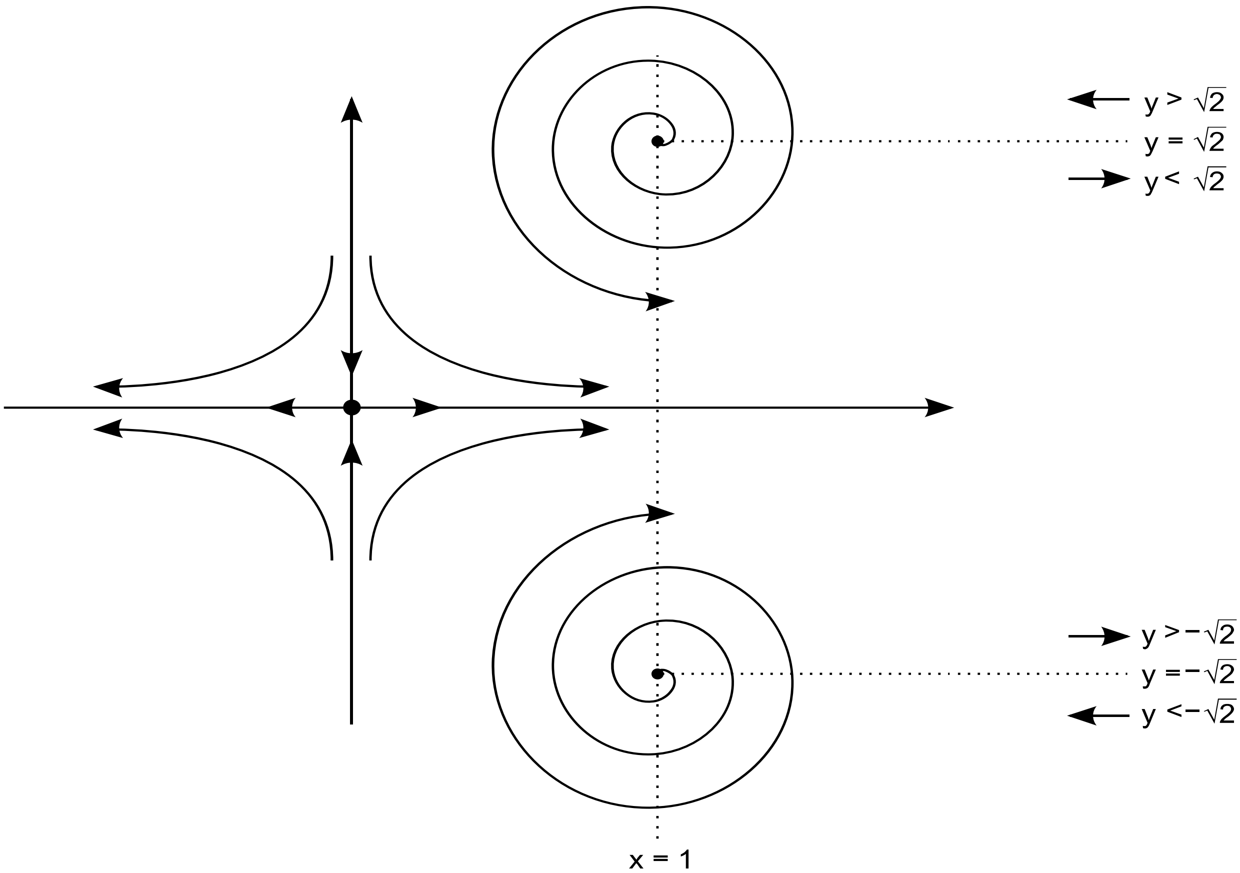
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v^2 \\ uv \end{pmatrix}$$

$$\vec{0} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}\vec{v}$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fasporträtt:

$$\vec{X}'(x \triangleq 1) = \begin{pmatrix} 2-y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Spiralers rotationsriktning kan fås genom att
kolla derivatan i en närliggande punkt, eller genom
att titta på en stationär punkt med kända riktningsderivator.

Sammanfattning: dag 1-9, 6-14

System av linjära första ordningens ODE

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F}$

Bestäm egenvärderna λ:

det($\mathbf{A}$ – λ$\mathbf{I}$) = 0

λ reella och enkla ($\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Instabil nod
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Stabil nod

λ reella och multipla ($\lambda_1 = \lambda_2$):

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instabil degenererad nod
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil degenererad nod

λ komplex ($\lambda_{1,\,2} = \alpha \pm i\beta$):

$\vec{Z} = e^{(\alpha+i\beta)t}\vec{K_1} = e^{\alpha t}\text{ cis }\beta t \cdot \vec{K_1}$

$\vec{X_1} = \Re\vec{Z}$ ($\Re$ skrivs ofta Re)

$\vec{X_2} = \Im\vec{Z}$ ($\Im$ skrivs ofta Im)

$\alpha > 0$	Instabil spiral	
$\alpha = 0$	Centrum, stabil	(ellipsformad)
$\alpha < 0$	Stabil spiral	

Vid λ reella och enkla:

$\vec{X_h} = \sum_{n=1}^{N} C_n \vec{X_n}$ där $\vec{X_n} = \vec{v_n} e^{\lambda_n t}$ där $\vec{v_n}$ är egenvektorn för λ_n som

beräknas genom: $(\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I})\vec{v_n} = \vec{0}$

Varje lösning, med en godtycklig koefficient, bestäms genom att bestäma en egenvektor till ett egenvärde och multiplicera den med e upphöjt till egenvektor, multiplicerat med t.

Vid λ reella och multipla:

$$\vec{X}_h = C_1 \underbrace{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}}_{\vec{x}_1} + C_2 \underbrace{\left(t\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) e^{\lambda_1 t}}_{\vec{x}_2}$$

Där $\vec{v}_1$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\vec{v}_1 = \vec{0}$

och $\vec{v}_2$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\vec{v}_2 = \vec{v}_1$

Vid multipla reella egenvärden bestämer man först egenvektorn och seden bestämer man en vektor på samma sätt som egenvektorn fast byter ut nollvektor mot egenvektor, detta blir den andra “egenvektorn”.

Den första lösningen bestäms på vanligt vis, och den andra lösningens bestäms genom att använda samma egenvärde med man byter ut egenvektorn mot den andra “egenvektorn” adderat med t multiplicerat med egenvektorn.

Vid λ komplexa:

$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \ \lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$\vec{X}_h = C_1 \Re \vec{Z} + C_2 \Im \vec{Z} \quad \text{där} \quad \vec{Z} = e^{(\alpha + i\beta)t} \vec{v}_1 = e^{\alpha t} \operatorname{cis} \beta t \cdot \vec{v}_1$$

$e^{i\beta} = \cos\theta + i \sin\theta$

Den reella delen och den imagionära delen är separata lösningar. Det är lättast att räkna med det egenvärdet som har positiv imagionärdel. Naturligtvis spelar inte det någon roll eftersom sin och cos är udda och jämna funktioner som kommer ha godtyckliga koefficienter.

där $\vec{v}_1$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} a+ib & c \\ p & q \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -a+ib \\ \xi \end{pmatrix}_{\xi = \frac{a^2+b^2}{c}}$$

Detta är ett lätt sätt att bestämma egenvektorn vid komplexa matriselement.

(p; q) är linjärt beroende (a + ib; c)
Detta gäller även för reella värden eftersom determinanten är 0.

Inhomogena delen:

$$\vec{X_p} = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

Om $\vec{F}$ saknas $\left(\vec{F}=\vec{0}\right)$ är $\vec{X_p}=\vec{0}$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \text{“Fundamentalmatris”} = \begin{pmatrix} \vec{X_1} & \cdots & \vec{X_N} \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrisen har en determinant skild från noll eftersom lösningarna är linjärt oberoende.

$$\vec{X} = \vec{X_h} + \vec{X_p}$$

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x;\,y) \\ Q(x;\,y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{“Funktionalmatris”}} \vec{X}$$

Högre ordningens ODE

Wronskian (eller wronskideterminant):

För flera variabler:

$$W\left(\coprod_{i=0}^{n} y_i\right)=\left|\coprod_{i=0}^{n}{}^{\downarrow}\ \coprod_{j=0}^{n}{}^{\rightarrow}\ y_j^{(i)}\right|$$

Om alla $y_i(x)$ är linjärt oberoende lösningar
till en inhomogen ekvation på ett intervall,
I, så är $W(y) \neq 0, \forall x \in I$.

$$W_n=\begin{vmatrix} y_0 & \cdots & y_{n-1} & 0 & y_{n-1} & \cdots & y_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ y_0^{(N-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(N-1)} & 0 & y_{n-1}^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)} \\ y_0^{(N)} & \cdots & y_{n-1}^{(N)} & f(x) & y_{n-1}^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} \end{vmatrix}$$

Där $f(x)$ är den inhomogena delen.

$y = y_h + y_p$

$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$

$y_p = y_1u_1(x) + y_2u_2(x)$

$$u_n=\int \frac{W_n}{W}$$

Vid en känd icke-trivial lösning kan $y(x)$ substitueras med $u(x)y_1(x)$, vilket är den allmäna homogena lösningen.

En fundamentalmängd är en mängd av alla lösningar som är linjärt oberoende av varandra och består av en term.