Differential ekvation

$xy' - y = x^2$, $x > 0$ (1) har en lösning som också uppfyller ekvationen

$x^3 y' - x^2 y = y^2,$ $x > 0$ (2) bestäm denna lösning.

Löser ekvationen (1). Den är linjär av första ordningen.

Löses med hjälp av integrerande faktor.

Skriv ekvationen på normal form.

$$y' - \frac{1}{x} y = x$$

Multiplicera ekvationen med den integrerande faktorn $e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} y\right) = 1$$

$$\frac{y}{x} = x + C$$

$$y = x^2 + Cx$$

Löser ekvation (2).

Omforma (2) till $x^3 y^{-2} y' - x^2 y^{-2} y = 1$

$x^3 y^{-2} y' - x^2 y^{-1} = 1$

$u \triangleq y^{-1}$

$u' = -y^{-2} y'$

$-x^3 u' - x^2 u = 1$

$$u' + \frac{1}{x} u = -\frac{1}{x^3}$$

$$\text{“Integrerande faktor”} = e^{\int \frac{1}{x}} = x$$

$$u'x+u=-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(x\cdot u)=-x^{-2}$$

$$xu=x^{-1}+B$$

$$u=x^{-2}+\frac{B}{x}=\frac{1+Bx}{x^2}$$

$$y^{-1}=\frac{1+Bx}{x^2}$$

$$y=\frac{x^2}{1+Bx}$$

Vi vill att för några C och B att

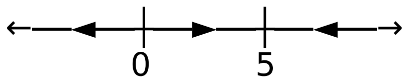
$$x^2+Cx=\frac{x^2}{1+Bx}$$

Tag C = B = 0

Den sökta lösningen är $y = x^2$

Bestäm stationära lösningen och deras stabilitet till $\frac{dx}{dt}=x(5-x)$.

Stationär vid $x = 0$ och $x = 5$.



Instabil vid 0 och stabil vid 5.

Klassifiera kritiska punkter hos $x'(t) = x(5 - x)$, $y'(t) = y(x - 1)$.

Vi söker kritiska punkter.

$x(5 - x) = 0$ ekvationen (1) get $x = 0$ och $x = 5$.
$y(x - 1) = 0$

För $x = 0$:

Ekvationen (2) ger $y(0; -1) = -y = 0$ Kritisk punkt: $(0; 0)$

För $x = 5$:

Ekvationen (2) ger $4y = 0 \Rightarrow y = 0$ Kritisk punkt: $(5; 0)$

Vi linjäriserar system i närheten av de kritiska punkterna.

Förklarning:

$$\frac{dx}{dt}=P(x;\,y)$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x;\,y)$$

$(x_1; y_1)$ är en kritisk punkt.

$P(x_1; y_1) = 0 = Q(x_1; y_1)$

$$\frac{dy}{dt}=P(x;\,y)=\{(x;\,y)\simeq(x_1;\,y_1)\}=$$

$$=\underbrace{P(x_1;\,y_1)}_{=0}+\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(x_1;\,y_1)}\cdot\underbrace{(x-x_1)}_{h}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_1;\,y_1)}\cdot\underbrace{(y-y_1)}_{k}+\text{H.O.T.}$$

$$\frac{dy}{dt}=h\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(x_1;\,y_1)}+k\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_1;\,y_1)}+\text{H.O.T.}$$ (H.O.T. är en restterm)

För $(x; y) \approx (x_1; y_1)$

$$\frac{dx}{dt}\approx\begin{pmatrix}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_{(x_1;\,y_1)} & \left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]_{(x_1;\,y_1)}\\ \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_{(x_1;\,y_1)} & \left[\frac{\partial Q}{\partial y}\right]_{(x_1;\,y_1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

$x' = 5x - x^2$

$y' = xy - y$

$$\mathbf{A}(x;\,y)=\begin{pmatrix}5-2x & 0\\ y & x-1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(0\,;\,0)=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Egenvärden: 5 och –1

Sadelpunkt!

$$\mathbf{A}(5\,;\,0)=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

Egenvärden: –5 och 4

Sadelpunkt!