Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen y' = y(y – 1).
Dick begöver ej konstantlösningarna anges. Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret

$$\begin{cases} y(0)=2 & \text{(a)} \\ y(0)=½ & \text{(b)} \end{cases}$$

Ange lösningens existensintervall och vad som änder då x växer.

$$\frac{1}{y(y-1)}y'=1$$

$$\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}\right)y'=1$$

$-\ln|y| + \ln|y-1| = x + \ln|C|$

$$\frac{y-1}{y}=Ce^x$$

$$1-\frac{1}{y}=Ce^x$$

$$y=\frac{1}{1-Ce^x}$$

(a):	(b):
$y(0) = 2$	$y(0) = ½$
$C = ½$, (antaget att $x = 0$)	$C = -1$, (antaget att $x = 0$)
$y=\frac{2}{2-e^x}$	$y=\frac{1}{1+e^x}$
$x \in]-\infty; \ln 2]$	$x \in \mathbb{R}$

Modul 2:

Högre ordningens ODE.
System av linjära ODE.
Autonoma system. Stabilitet.

Differentialekvationer av högre ordning:

$$L(D)y=\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}=g(x)$$

$$L(D)(c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x))=c_1 L(D) y_1(x)+c_2 L(D) y_2(x)$$

Reduktion av ordning:

$L(D)y = 0$

y_1 är en kände icke-trivial lösning.

$y(x) = u(x)y_1(x)$.

$L(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende.

Lösningar till den homogena ekvationen:

$y = C_1y_1 + C_2y_2$

$(u_1\cdot y_1 + u_2\cdot y_2)(x) \triangleq y(x)$

En partikulärlösning sökes.

Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$

Då erhålles: $y_1'\cdot u_1' + y_2'\cdot u_2' = f$

Matrisform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Entydlig lösning:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Cramers regel:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}} \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}}$$

Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen

$$x(y'' - 2y' + y) = 0, \qquad x > 0$$

samt en partikulärlösning till differentialekvationen

$$x(y'' - 2y' + y) = e^x, \qquad x > 0$$

$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y_1 \triangleq e^x$

$y = e^x z(x)$

$e^x \cdot x((z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + z) = e^x$

$z'' = 1 / x \qquad (*)$

$z' = \ln x + C$

$y' = e^x z' + e^x z$

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + D$

$z = x \ln x - x + Cx + D$

$y = e^x z = e^x(x \ln x - x + Cx + D)$

$y = Cxe^x + De^x + e^x(x \ln x - x)$

$y_p = e^x(x \ln x - x)$

$(xe^x;\ \ e^x)$

(*) $\because$

$e^x x z'' = e^x$

$xz'' = 1$

$z'' = 1 / x$

$x(y'' - 2y' + y) = e^x, \qquad x > 0$

$y_h \triangleq u(x)xe^x + v(x)e^x \qquad\qquad u_1 = u \qquad u_2 = v$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} xe^x & e^x \\ xe^x+e^x & e^x \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^x}{x} \end{pmatrix}$$

$|\mathbf{A}| = -e^{2x}$

$$u'(x)=\frac{1}{-e^{2x}}\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{e^x}{x} & e^x \end{vmatrix}=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=\frac{1}{-e^{2x}}\begin{vmatrix} xe^x & 0 \\ xe^x+e^x & \dfrac{e^x}{x} \end{vmatrix}=-1$$

$u(x) = \ln |x| = \{x > 0\} = \ln x$
$v(x) = -x$

$y_p = xe^x(\ln x - 1)$

System av linjära första ordningens ODE.

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

Exempel:

y' = ay
y = Ce^{ax}

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$