2011-(05)maj-17: dag 30

Övning 10; graffärgning och matchningen.

Men först från förra KS:en:

Vi söker $2^{5^{2011}}$ (mod 13)

1) Använd Fermats lilla sats:

$2^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ Ty: 13 är ett primtal
$12 \;\; 13 - 1,\ 13 \nmid 2$

5^{2011} (mod 12)?

$5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{12}$

Så:

$$5^{2011} = 5^{2\cdot 1005 + 1} = (5^2)^{1005}\cdot 5 \equiv 1^{1005}\cdot 5 = 5 \pmod{12}$$

Så:

$$5^{2011} = k\cdot 12 + 5 \text{ och } 2^{5^{2011}} = \left(2^{12}\right)^k\cdot 2^5 \equiv 1^k\cdot \underbrace{2^5}_{32} \equiv 6 \pmod{13}$$

2) $2^5 \equiv 6 \pmod{13}$

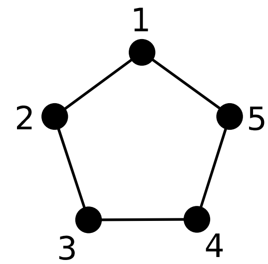
$6^5 = 36\cdot 36\cdot 6 \equiv (-3)^2\cdot 6 = 54 \equiv 2 \pmod{13}$

$$2^{5^{2011}} = \left(\left(2^5\right)^5\right)^5 \ldots = \left(\underbrace{\left(\underbrace{\left(2^5\right)^5 \ldots}_{2010}\right)^5}_{\equiv 2 \pmod{13}}\right)^5 \equiv 2^5 \ldots \pmod{13}$$

Övningsuppgifter

1) Kromatiska polynomet $P_{C_5}(\lambda)$ för C_5?

Med “kombinatoriskt resonemang”:



$$P_{C_5}(\lambda) = \overset{\text{hörn 1}}{\lambda}\cdot\overset{2}{(\lambda-1)}\cdot\Big[\overset{\text{5 som: } 2}{1}\cdot\overset{3}{(\lambda-1)}\overset{4}{(\lambda-2)} +$$

$$+ \underset{\text{5 inte som 2, 1}}{(\lambda-2)}\Big[\underset{\text{3 som: } 5}{1}\cdot\underset{4}{(\lambda-1)} + \underset{\text{3 inte som: } 5,\,2}{(\lambda-2)}\underset{4}{(\lambda-2)}\Big]\Big] =$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)[\lambda-1+\lambda-1+(\lambda-2)^2] =$$

$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)[(\lambda-1)^2+1]$$

Alternativt med rekursionsformeln:

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda)$$

$$P_{C_5}(\lambda) = P_{T_5}(\lambda) - P_{C_4}(\lambda) = P_{T_5}(\lambda) - \left(P_{T_4}(\lambda) - P_{C_3}(\lambda)\right) =$$

$$= \lambda(\lambda-1)^4 - \lambda(\lambda-1)^3 + \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) =$$

$$= \lambda(\lambda-1)[(\lambda-1)^3 - (\lambda-1)^2 + (\lambda-2)] = \ldots$$

Man kan verifiera att

$$P_{C_5}(\lambda) = (\lambda-1)^5 + (-1)^5(\lambda-1)$$

Vilket visades på föreläsning.

2)

Utgå från $P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda)$ och visa att $P_G(\lambda)$ är ett polynom med högstagradstermen λ^n, $n = |V|$, och nästagradstermen $-|E|\lambda^{n-1}$.

$G - e$ (G med kanten e borttagen) och
G/e (G med kanten e ihopdragen (kontraherad)) har båda en kant mindre än G. Vi kan visa påståendet med induktion över $|E|$.

Bas:

Om G skanar kanter, $G = (V, \emptyset)$, $|V| = n$

$P_G(\lambda) = \lambda^n$ OK!

Steg:

Antag att påståendet är sant för alla grafer med högst k stycken kanter.

Låt $G = (V, E)$ ha $|E| = k + 1$
e är en kant i G ($e \in E$)

Induktionsantagande

$$P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G/e}(\lambda) \overset{IA}{=} \lambda^n - k\lambda^{n-1} + (\dots) - (\lambda^{n-1} + (\dots)) =$$

λ^{n-2} eller lägre

$$= \lambda^n - (k+1)\lambda^{n-1} + (\dots)$$

Så påståendet är sant för $|E| = k + 1$.

4) Om transversaler (så Halls sats formulerades först) (boken DMF sida 244) att finna "distinkta representanter" med $m_i \in M_i$ och $m_i \neq m_j$ om $i \neq j$. Finns de?

Halls sats säger att det går omm

$$\left|\bigcup_{i \in A} M_i\right| \geq |A| \quad \text{för alla } A \subseteq I,\ I \text{ ändlig.}$$

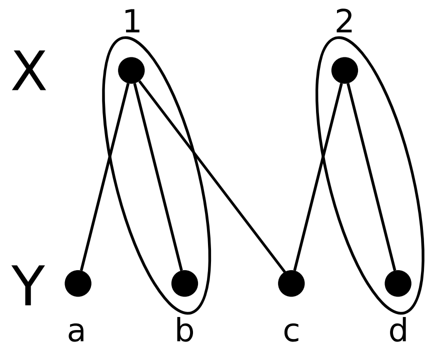
Ty:

Vi söker en fullständig matchning i en bipartit graf med

$$X = I,\ Y = \bigcup_{i \in I} M_i \quad \text{och}$$

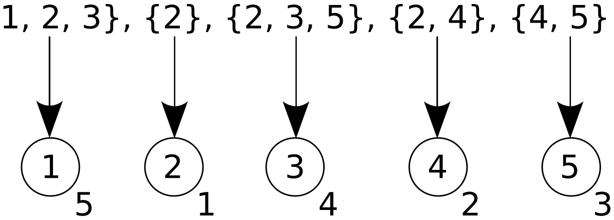
kanter mellan $i \in I$ och alla element i M_i,

$$M_1 = \{a, b, c\}, \quad M_2 = \{c, d\}.$$



Vi söker en transversal till mängderna

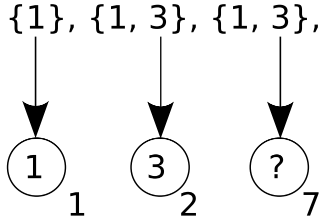
$\{1, 2, 3\}, \{2\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}$



Varför finns ingen transversal till

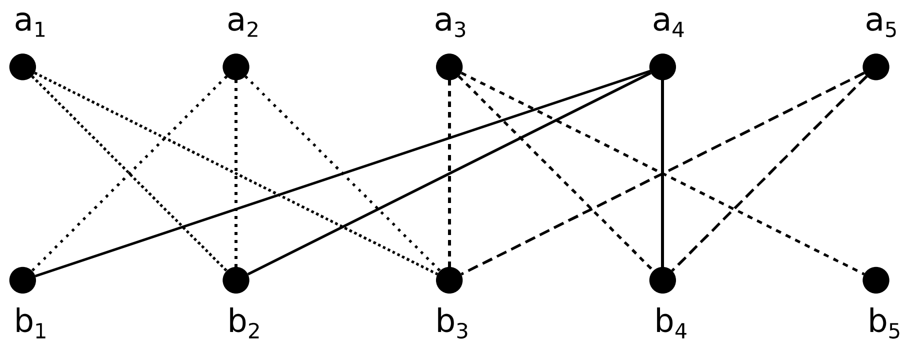
$\overset{M_1}{\{1\}}, \overset{M_2}{\{1, 3\}}, \overset{M_3}{\{1, 3\}}, \{2, 3, 4, 5\}$

alt 1:

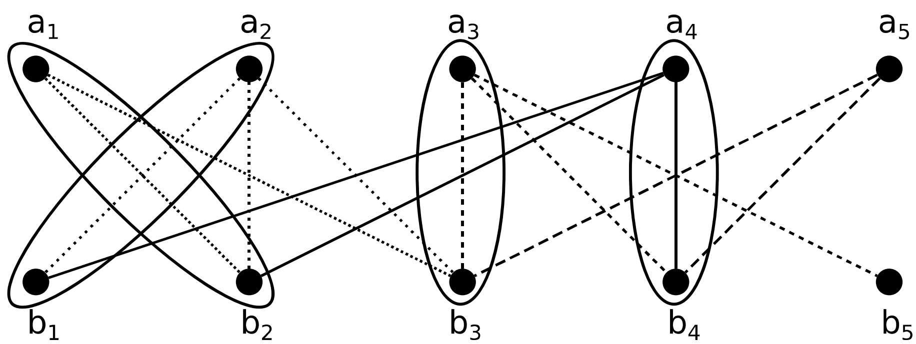


alt 2: Halls sats mängderna 1, 2, 3 har bara två element tillsammans, det vill säga färre element tillsammas än antalet mängder: ingen transversal.

5) Vi söker en fullständig matchningen till grafen

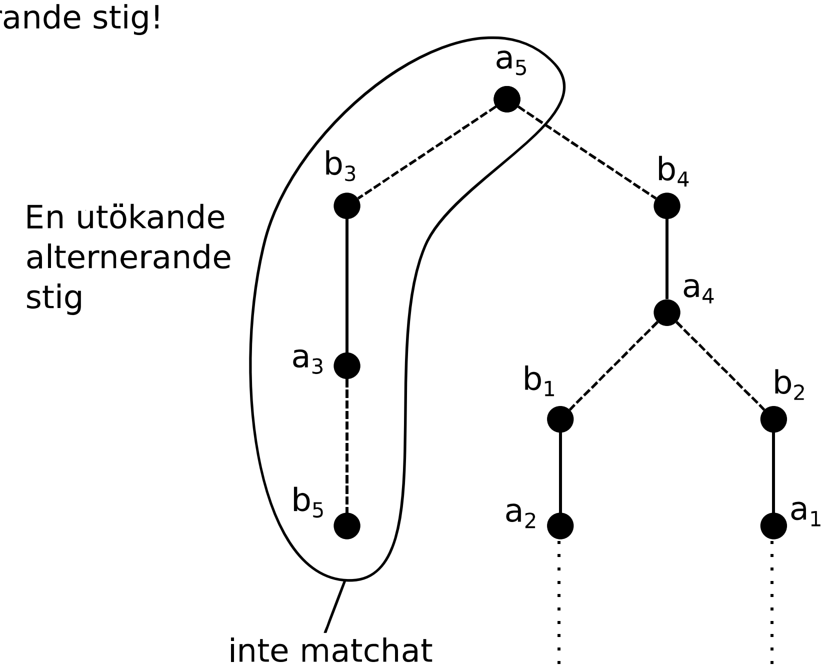


Efter 4 steg fås den ritade matchningen (nedan).
(Första lediga partiella matchningen tages, för varje a.)

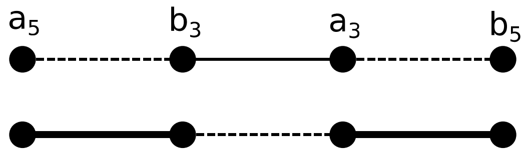


Hur skall a_5 matchas?

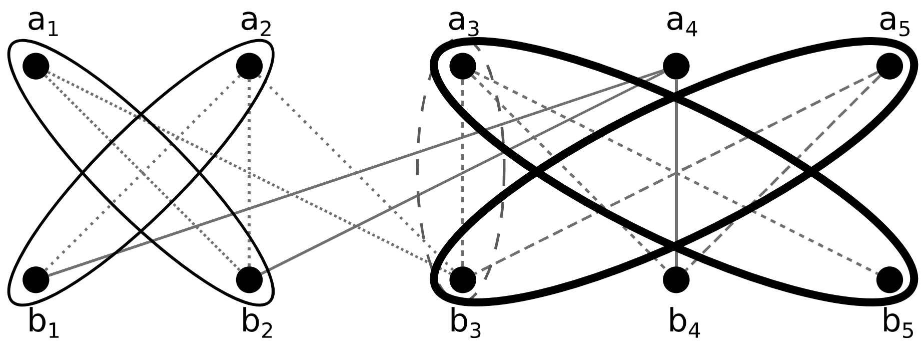
Sök en utökande alternerande stig!



Byt i den alternerande stigen.



Ger:



9) 10 skrivande, 10 uppgifter.
Varje skrivande klarade minst 4 uppgifter.
Varje uppgift klarades av minst 5 skrivande.

A en mängd skrivande, $A \neq \emptyset$, $|P(A)| \geq 4$ (alla klarade minst 4)

Mängden uppgifter som någon i klarade.

$|A| > 4$ ger $|P(A)| = 10$

Varje uppgift klarades av ingen i A.
Så $|P(A)| \geq |A|$ för alla A — Halls sats…