

Första ordningens ODE:

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y)$$

- Separabla:  $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$
- Linjära:  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

Separabla

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

1.  $h(y) = 0$  :  $y = \text{konstant}$
2.  $h(y) \neq 0$  :  $\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$

Integrera med avseende på  $x$ .

Linjära

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Multiplitera med  $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} \cdot P(x)y = e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left( e^{\int P(x)dx} y \right) = e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

Integrera med avseende på  $x$ .

Substitutioner:

Homogena:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{Sätt } z = y/x. \quad y = xz, \quad y' = xz' + z$$

$$xz' + z = f(z)$$

$$xz' = f(z) - z$$

Separabel!

Bernoulliska:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y + f(x)y^\alpha, \quad 1 \neq \alpha \neq 2, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$y^{-\alpha} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

$$\text{Sätt } z = y^{1-\alpha}, \quad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = f(x)$$

Linjärt!

Begynnelsevärdesproblem (BVP)

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y), \quad y(x_0) = y_0$$

Exemple på derivatagraf:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Rita up koordinatsystem och rita in lutning för (x; y) punkter då

- $y = 0, x' = \pm\infty$
- $x = 0, y' = 0$
- $y = -x, y' = 1$
- $y = x, y' = -1$

Man ser att cirklar bildas.  
Stämmer det?

$$y \frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\int \left( 2y \frac{dy}{dx} + 2x \right) dx = \int dx$$

$$\int 2y \frac{dy}{dx} dx + \int 2x dx = \int dx$$

$$\int 2y dy + \int 2x dx = \int dx$$

$$y^2 + x^2 = C$$

Ja, det stämmer!

$$y^2 + x^2 = r^2$$

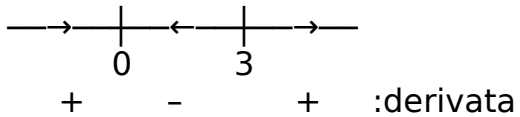
## Exempel på stabilitet

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$$

Kritiska punkter:  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y = y(y - 3) = 0$

Kritiska punkter:  $y = 0$  och  $y = 3$

Fasporträtt (faslinje)



$y = 0$  är asymptotiskt stabil.

$y = 3$  är instabil.

