SF1637
Differentialekvationer och transformer III

$$f(x) \simeq \mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$\alpha \frac{\partial^a u}{\partial x^a} = \frac{\partial^b u}{\partial y^b}$$

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt$$

$$\overrightarrow{X_p} = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \vec{F}(t) dt$$

$$\vec{Z} = e^{(\alpha + i\beta)t} \overrightarrow{K_1} = e^{\alpha t} \operatorname{cis} \beta t \cdot \overrightarrow{K_1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x) dx} y \right) = e^{\int P(x) dx} \cdot f(x)$$

$$\langle f_1; f_2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0 + X} f_1(x) \cdot f_2^*(x) dx$$

$$\frac{dy}{dx} = P(x) y = f(x) y^\alpha, \;\; 1 \neq \alpha \neq 2, \alpha \in \mathbb{R}$$

Version:	0
Sammanfattare:	Mattias Andrée
Kontaktadress:	maandree@kth.se

Modul 1

2010–(08)aug–27: dag 1, 1

SF1637 (SF1633 för andra än CL)

Diff & Trans III CL2

Hans Tranberg
KTH Matematik

Literatur:

Differential Equavations with Boundary-Value Problems 7:th ed. (7, inte 8)
[Zill / Cullen]

Mathematics Handbook BETA
[Råde / Westergren]

Introduktion till differentialekvationer (diff.ekv.)
Första ordnings ordinära diff.ekv. (ODE)

Modeller med första ordningens ODE.

[Z.C.1.3.10]

```
3 gal/min           ┌──────────┐
2 lb/gal            ├──────────┤
                    │300 gal   │  2 gal/min
─────────────→      │50 lb     │  ─────────────→
                    └──────────┘  a lb/gal
```

A(t) är mängden salt i tanken vid tiden t i pounds.

$$\frac{dA}{dt}\,\mathrm{lb/min} = \overbrace{3\,\mathrm{gal/min} \cdot 2\,\mathrm{lb/gal}}^{\text{ingående}} - \overbrace{2\,\mathrm{gal/min} \cdot \frac{A(t)}{\underbrace{300+t(3-2)}_{a}}\,\mathrm{lb/gal}}^{\text{utgående}}$$

$$\frac{dA}{dt} + 2 \cdot \frac{A(t)}{300+t} = 6, \quad A(0) = 50$$

Innehåll:

Högre ordningens ODE.

System av första ordningens ODE.

Plana autonoma system och stabilitet.

Laplacetransformer (för CBIOT & CKEMV)

Fouriertransformer (för CL)

Båge är integraler.

Partiella diff.ekv. (PDE) och randvärdesproblem i rektangulära koordinater.

Ortogonala funktioner och fourierserier.

Modul 1:

Första och andra ordningens ODE
KS 1

Modul 2:

Högre ordningens ODE
System av linjära ODE
Autonoma system. Stabilitet
KS 2

Modul 3:

Laplacetransformer (för BIO och K)
Fouriertransformer (för CL)
PDE. Fourierserier
Inlämningsuppgift 1 (i grupper om max 3)

CL har första salen på schemat.

Två-delad tentamen:

Del 1 är avseed för betyg E och består av 3 uppgifter.

Godkänd modul ger godkänd uppgift.
3 godkända moduler ger godkänt.
5 av 9 poäng ger godkänd KS.

Del 2 för högre betyg. 20 poäng.
8-9 KS-poäng ger bonuspoäng till del 2.

Exempel

Befolkningsmängden är P(t).

Relativa tillväxthastigheten är $\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt}$

Modell 1:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = a > 0$$

$$P(t) = Ce^{at}$$

Växer konstant.
Överbefolkning!

Modell 2:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = a - bP(t)$$

$$\frac{dP}{dt} = aP(t) - bP^2(t) = \{\text{Sätt}\} = 6P(t) - P^2(t)$$

Inget sker vid $P=0$ och $P=6$.

Stationära lösningar: $\frac{dP}{dt} = 0$

P=0, P=6

P > 6 ger minskning. Negativ derivata.
0 < P < 6 ger ökning. Positiv derivata.

Utvandring!

Modell 3:

$$\frac{dP}{dt} = aP(t) - bP^2(t) - h = \{\text{Sätt}\} = 6P(t) - P^2(t) - 8$$

h har storheten personer / tid.

P > 6 ger minskning. Negativ derivata.
2 < P < 6 ger ökning. Positiv derivata.
P < 2 ger minskning. Negativ derivata.

Första ordningens ODE:

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y)$$

- Separabla

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

- Linjära

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Separabla

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

1. $h(y) = 0$: y = konstant

2. $h(y) \neq 0$: $\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$

Integrera med avseende på x.

Man löser separabla ODE genom att separera variablerna till versin sida.

Linjära

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Multiplicera med $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx}\cdot\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}\cdot P(x)y=e^{\int P(x)dx}\cdot f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)=e^{\int P(x)dx}\cdot f(x)$$

Integrera med avseende på x.

Exempel

$$\frac{dx}{dt}=x^2-x$$ separabel

1) Stationära lösningar:

När dx / dy = 0 så är det en stationär lösning.

$$\frac{dx}{dt}=0;\ \ x=0,\ \ x=1$$

Vi får lösningarna.

2) $x \neq 0,\ \ x \neq 1$

Sedan ska vi hitt lösningarna när n ≠ 0 och n ≠ 1.

$$\frac{1}{x^2-x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$$

Vi separerar.

$$\int\frac{dx}{x^2-x}=?$$

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\quad (*)$$

Vi får två konstanter som vi tar fram med hjälp av handpåläggning.

Handpåläggning:

$$A=\left(\frac{1}{x-1}\right)_{x=0}=-1$$

$$B=\left(\frac{1}{x}\right)_{x-1=0}=1$$

Vid handpåläggning har man två funktioner, ƒ och g, sådana att ƒ·g är nämnaren: i detta fall x(x – 1). När man vill bestämma A, beräknar man 1/g(ε). Där ε är x:s värde för ekvation ƒ(x) = 0.

$$\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

Integration av (*) ger:

$$-\ln|x|+\ln|x-1|=t+\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=t+\ln|C|$$

2010–(08)aug–30: dag 2, 2

Linjär:

$$xy' - 2y = x^2,\ \ x > 0$$

Dividera med x för att få funktionerna på formen

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \quad (*)$$

$$P(x) = -\frac{2}{x}$$

Tyder ut P(x) som blir –2/x.

$$\int P(x)dx = \int -\frac{2}{x}dx$$

$$\int P(x)dx = -2\ln x$$

Man kan tänka sig att man borde ha en konstant, men eftersom man multiplicerar alla led försvinner den.

$$e^{\int P(x)dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} \quad (\dagger)$$

Multiplicera (*) med (†).

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = 1 \quad (\ddagger)$$

Här kan man se nu att man har fått derivatan av y, så då kan man sätta ihop dem.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = 1 \quad (\ddagger)$$

Kontrollera både (‡).

Integrera med avseende på x.

$$\frac{y}{x^2} = x + C$$

$$y = \underset{\underset{y_p}{\uparrow}}{x^3} + \underset{\underset{y_h}{\uparrow}}{Cx^2}$$

Allmänna lösningen erhålls direkt, partikulärlösningen saknar koefficient till skillnad från homogena lösningarna (en i detta fall).

Substitutioner:

Homogena:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sätt z = y/x. y = xz, (Viktigt:) y' = xz' + z

xz' + z = f(z)

xz' = f(z) – z

Separabel! $$\frac{1}{f(z)-z}\,dz=\frac{1}{x}\,dx$$

Bernoullska:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^{\alpha},\ \ 1\neq\alpha\neq 2,\alpha\in\mathbb{R}$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=f(x)$$

Sätt $z=y^{1-\alpha},z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{z'}{1-\alpha}+P(x)z=f(x)$$

Linjärt!

Begynnelsevärdesproblem (BVP)

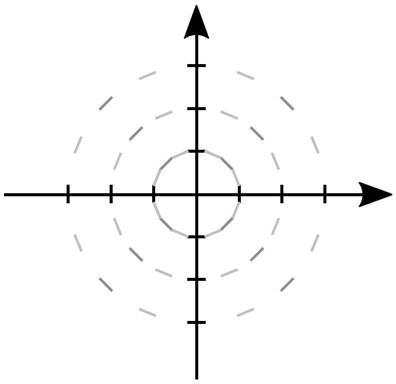
$$\frac{dy}{dx}=f(x;y),\ \ y(x_0)=y_0$$

Exempel:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Rita up koordinatsystem och rita in lutning för (x; y) punkter då

- y = 0, x' = ±∞
- x = 0, y' = 0
- y = –x, y' = 1
- y = x, y = –1



Man ser att cirklar bildas.
Stämmer det?

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

Läraren är synsk!

Onödigt och odidaktiskt steg ända skillnaden skulle vara delat med 2, och då kan man flyttar över den 2:an om sätta in den i C:et

$$\int \left(2y\frac{dy}{dx} + 2x\right) dx = \int dx$$

$$\int 2y\frac{dy}{dx} dx + \int 2x\, dx = \int dx$$

$$\int 2y\, dy + \int 2x\, dx = \int dx$$

$$y^2 + x^2 = C$$

Ja, det stämmer!

$$y^2 + x^2 = r^2$$

[z.c.2.1.17.]

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$$

Kritiska punkter: $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y = y(y-3) = 0$

Kritiska punkter: $y = 0$ och $y = 3$

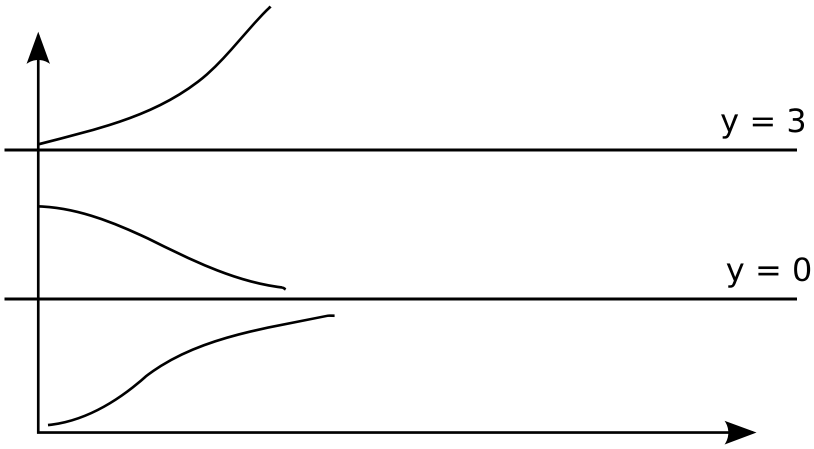
Fasporträtt (faslinje)

$$\longrightarrow \underset{0}{|} \longleftarrow \underset{3}{|} \longrightarrow$$

Går mot 0, och går från 3

$+ \quad - \quad +$:derivata

$y = 0$ är asymptotiskt stabil.
$y = 3$ är instabil.



Ekvationenen är bernoullsk, separabel och autonom.

[z.c.2.5.6.]

$$(y^2+xy)dx+x^2dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}=0$$

Homogent högerled och bernoullsk!

Sätt z = y/x, y = xz, y' = xz' + z.

xz' + z + z^2 + z = 0
xz' = z(z + 2)

Separabel!

a)

z = 0, z = –2, y = 0, y = –2x

b)

0 ≠ z ≠ 2:

$$\frac{z'}{z(z+2)}=-\frac{1}{x}$$

Handpåläggning eller annan metod ger:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)z'=-\frac{1}{x}$$

Integration med avseende på x ger:

ln |z| - ln |z + 2| = –2 ln |x| + ln |C|

$$\ln\left|\frac{z}{z+2}\right|=\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|$$

$$\frac{z}{z+2}=\pm\frac{C}{x^2}=\frac{C}{x^2}$$

$$C=\frac{x^2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+2}=\frac{xy}{\frac{y}{x}+2}=\frac{x^2y}{y+2x}$$

x^2y = C(y + 2x)

y = 0 finns med

y = –2x finns också med

[z.c.2.2.24.]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x^2-1}, \quad y(2)=2$$

Separabel!

Ansätt y = x:

V.L. = 1

$$\text{H.L.} = \frac{x^2-1}{x^2-1} = 1$$

y(2) = 2

OK!

Enda lösningen.

2010−(08)aug−31: dag 3, 3

[z.c.1.1.21.]

Verifiera att:

$$P(t)=\frac{Ce^t}{1+Ce^t}$$

är en lösning till

$$P'(t)=P(t)\cdot(1-P(t))$$

$$\frac{P'}{P(1-P)}=\Leftrightarrow\left\{\frac{A}{P}+\frac{B}{1-P}:\left\{\begin{matrix}A=1\\B=1\end{matrix}\right.\right\}\Leftrightarrow P'\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{1-P}\right)=1$$

Integrera!

$\ln|P| - \ln|1 - P| = t + C$

$$\ln\left|\frac{P}{1-P}\right|=t+C$$

$$\frac{P}{1-P}=\{P>0\}=e^{t+C}\Rightarrow P=e^{t+C}-Pe^{t+C}$$

$P + Pe^{t+C} = e^{t+C}$

$P(1 + e^{t+C}) = e^{t+C}$

$$P=\frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}}=\{\text{nytt } C\}=\frac{Ce^t}{1+Ce^t}$$

$y' = y^2 + 4$

Konstanta lösningar?

Nej, ty derivatan är aldrig 0.

Lokal extrempunkter?

Nej, ty derivatan är aldrig 0.

Lokala extrempunkter och konstanta lösningar är samma sak.

Sant/Falskt?

BVP:

$3y^{2/3}, \quad y(0)=0$

Har begynnelsevärdeproblemet en entydlig lösning?

$y(x) = 0$ ger $y'(x) = 3 \cdot 0 = 0$

$\therefore$ En lösning

Sats:

$y'_x = f(x; y), \qquad (x; y) \in \mathbb{R}^2$

$y(x_0) = y_0$

om $f(x; y)$ och f'_y är kontinuerliga så har BVP:et ovan en entydlig lösning för $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$

$f(x; y)$ är ovan $3y^{2/3}$, vilket är kontinuerligt.

$f'_y = 2y^{-1/3}$, vilket är icke-kontinuerligt. Eftersom det är odefinierad vid $y = 0$.

Satsen kan inte användas.

Antag: $y \neq 0$

$\therefore \quad y' = 3y^{2/3}$

Separabel!

$$\frac{y'}{y^{2/3}} = 3 \Leftrightarrow y' \cdot y^{-2/3} = 3$$

Integrera!

$$3y^{1/3} = 3x + C$$

$$y^{1/3} = \frac{3x+C}{3}$$

$$y^{1/3} = x + C$$

$$y = (x+C)^3$$

$y(0) = 0$ ger:

$$0 = (0+C)^3 = C^3 = C \quad \Leftrightarrow \quad C = 0$$

$y = x^3$

En andra lösning, alltså falskt.

Entydlig lösning
$\because$

$$y'_x = f(x\,;y) \quad \text{där} \quad f'_y \quad \text{är kontinuerlig.}$$

Exempel:

Klassificera med avseende på stabilitet dem kritiska punkterna till

$$y' = y(2 - y)(4 - y)$$

Bestäm dem värden där

$$\left| \lim_{x \to \infty} y(x) \right| < \infty$$

Lösning:

Kritiska punkter till $y' = f(y)$ är punkter C där $f(C) = 0$.

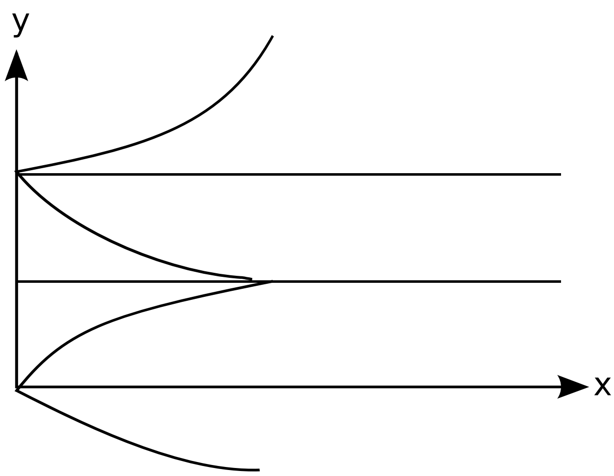
$y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$

Om C är en kritisk punkt så är $y(x) = C$ en konstant lösning.

		0		2		4	
y	−	0	+	+	+	+	+
2 – y	+	+	+	0	−	−	−
4 – y	+	+	+	+	+	0	−
resultat	−	0	+	0	−	0	+

←—◄——0——►——2——◄——4——►——→

Ger:



y går mot ∞, då x går mot ∞.

Instabilt, max

Stabilt, min

Instabilt, max

y går mot –∞, då x går mot ∞.

De startvärden som uppfyller

$$\left|\lim_{x\to\infty} y(x)\right| < \infty$$

ges av $0 \le y \le 4$.

Exempel:

Antalet kaniner P(t) beskrivs med BVP:

$$P'_t = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5000$$

a) Vad är $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

b) Ange t så att $P(t) = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty} P(T)$.

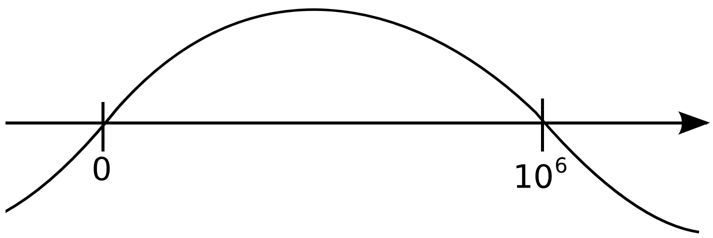
a) Lösning:

Kritiska punkter?

$P_t' = 0$ ges av:

$P(10^{-1} - 10^{-7}P) = 0$
$10^{-1} - 10^{-7}P = 0$
$10^{-1} = 10^{-7}P$
$P = 10^{6}$

Kritiska punkter: 0 och 106

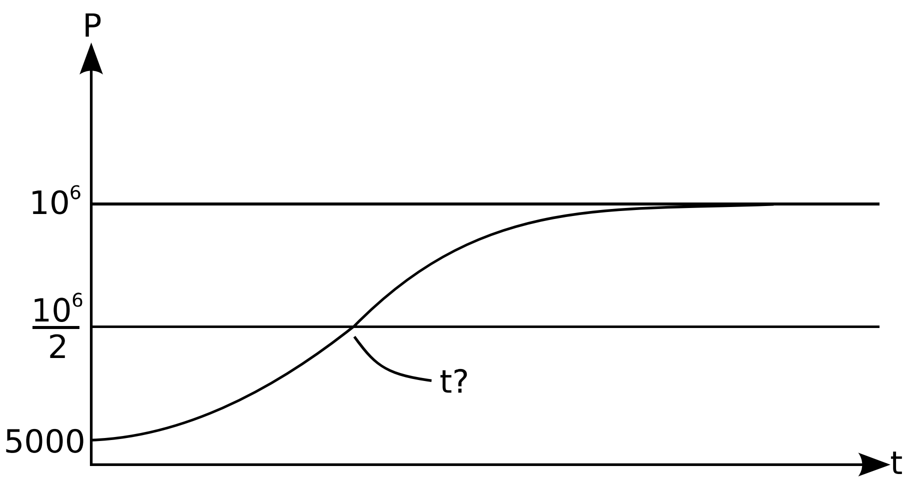


$y = 10^{-7}P(10^{6} - P)$

Tolkning:

0 kaniner stannar på 0.
3 kaniner ger 10^6
$0 < y < 10^6$
Över 10^6 minskar
Om startmängden är 5000 så är svaret på a) 10^6.

b)



$$P_t' = 10^{-7} \cdot P \cdot (10^6 - P)$$

Separabel!

$$\frac{P_t'}{P(10^6 - P)} = 10^{-7}$$

$$P_t'\left(\frac{A}{P} + \frac{B}{10^6 - P}\right) = 10^{-7} \iff \begin{cases} A = 10^{-6} \\ B = 10^{-6} \end{cases} \iff P_t'\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{10^6 - P}\right) = 10^{-1}$$

Integrera!

ln |P| = ln |10^6 – P| = 10^{-1}t + C

$$\frac{P}{10^6 - P} = e^{10^{-1}t + C}$$

$$\frac{5000}{10^6 - 5000} = e^{0+C} = e^C \triangleq D \qquad D = \frac{5000}{10^6 - 5000}$$

$$\frac{P}{10^6 - P} = \frac{5000}{10^6 - 5000} e^{10^{-1}t}$$

P = $5 \cdot 10^5$ ger:

$$\frac{10^5 \cdot 5}{10^6 - 10^5 \cdot 5} = \frac{5000}{10^6 - 5000} e^{10^{-1}t}$$

$$1 = \frac{5000}{10^6 - 5000} e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{10^6 - 5000}{5000} = e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{10^6}{5000} - 1 = e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{1000}{5} - 1 = 200 - 1 = 199 = e^{10^{-1}t} = (e^t)^{(10^{-1})}$$

$$199^{10} = e^t$$

$$\ln 199^{10} = t$$

$$t = 10 \ln 199$$

2010−(09)sep−01: dag 4, 4

[z.c.2.2.24.]

$$\frac{dy}{dx}, \quad y(2)=2$$

$$f(x;\, y)=\frac{y^2-1}{x^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2-1}$$

x får inte vara ±1.

r kan skapas.

[z.c.3.1.4.]

Antalet bakterier, vid tiden t, = N(t).

$$\frac{dN}{dt}=kN(t), \quad k>0$$

N(t) ≠ 0

$$\frac{1}{N(t)}\cdot\frac{dN}{dt}=k$$

Integrera med avseende på t.

$\ln |N(t)| = kt + \ln |C|$

$|N(t)| = e^{kt} \cdot C$
$N(t) = \pm Ce^{kt} = Ce^{kt}$

$N(3) = 400 \quad \Leftrightarrow \quad Ce^{3k} = 400$
$N(10) = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad Ce^{10k} = 2000$

$$\frac{2000}{400}=5=\frac{Ce^{10k}}{Ce^{3k}}=e^{7k}$$

$k = \dfrac{1}{7} \ln 5$

$$400 = Ce^{\frac{1}{7}\ln 5}$$

$$C = 400\,e^{-\frac{1}{7}\ln 5} = 400 \cdot 5^{-\frac{3}{7}}$$

$$N(t) = 400 \cdot 5^{-\frac{3}{7}} \cdot e^{t\frac{1}{7}\ln 5} = 400 \cdot 5^{\frac{t-3}{7}}$$

$$N(0) = 400 \cdot 5^{-\frac{3}{7}} \approx 201$$

[z.c.3.1.21.]

4 ℓ/min
1 g/ℓ

200 ℓ
30 g
En tank

4 ℓ/min

Salt i tanken: A(t)

$$\frac{dA}{dt} = 1 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{A(t)}{200}$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{50}A(t) = 4$$

$A_h = Ce^{-t/50}$
$A_p = 200$

$A(t) = Ce^{-t/50} + 200$

$A(0) = 30$
$30 = C + 200$
$C = -170$

$A(t) = 200 - 170e^{-t/50}$

För stora t: $A(5) \approx 200$

Rimligt!

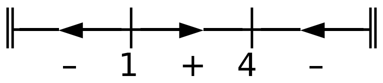
[z.c.3.2.5.]

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, \quad P(0) = P_0$$

Sätt a = 5, b = 1, h = 4.

$$\frac{dP}{dt} = P(5 - P) - 4 = 5P - P^2 - 4 = (P - 1)(4 - P)$$

Stationära lösningar: P = 1 och P = 4



Lösningar för 1 ≠ P ≠ 4.

Separabel

$$\frac{1}{(P-1)(4-P)} \cdot \frac{dP}{dt} = 1$$

Med handpåläggning

$$\left(\frac{1/3}{P-1} + \frac{1/3}{4-P} \right) \frac{dP}{dt} = 1$$

ln |P – 1| – ln |4 – P| = 3t + ln |C|

$$\ln\left| \frac{P-1}{4-P} \right| = 3t + \ln|C|$$

$$\left| \frac{P-1}{4-P} \right| = |C| e^{3t}$$

$$\frac{P-1}{4-P} = Ce^{3t}$$

Bestäm C

$$P(0) = P_0 \Rightarrow C = \frac{P_0 - 1}{4 - P_0}$$

$P - 1 = 4 \cdot Ce^{3t} - Pe^{3t}$

$$P(t) = \frac{1 + 4 \cdot Ce^{3t}}{1 + Ce^{3t}}$$

Populationen borta (P = 0)

$$\frac{0-1}{4-0}=Ce^{3t_0}$$

$$e^{3t_0}=-\frac{1}{4C}$$

$$t_0=\frac{1}{3}\ln\frac{-1}{4C}=\frac{1}{3}\ln\frac{4-P_0}{4(1-P_0)}$$

2010–(09)sep–03: dag 5, 5

Linjär av första ordningen:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \quad (*)$$

Lös först den homogena differentialekvationen.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

Derivera med y.

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)=0$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx+P(x)dx=0\,dx$$

Integrera med avseende på x.

$$\int\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx+\int P(x)dx=\int 0\,dx$$

$$\int\frac{y'}{y}dx+\int P(x)dx=C_0$$

$$\ln|y|+C_1+\int P(x)dx=C_0$$

$$\ln|y|+\int P(x)dx=C$$

$$\ln|y|+\int P(x)dx=\ln|C|$$

$$|y|+e^{\int P(x)dx}=|C|$$

$$y=\pm Ce^{-\int P(x)dx}$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

— eller —

$$\ln|y|-\ln|C|=-\int P(x)dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int P(x)dx$$

$$\left|\frac{y}{C}\right|=\frac{y}{\pm C}=\frac{y}{C}=e^{-\int P(x)dx}$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

Variation av parametrar:

$y_1(x) \triangleq e^{-\int P(x)dx}$, $u(x)y_1(x) \triangleq y$

Insättning i (*) ger:

$$\frac{du}{dx}y_1 + u\frac{dy_1}{dx} + Puy_1 = f$$

$$\frac{du}{dx}y_1 + 0_{(\dagger)} = f$$

(†):

$$u\frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad Puy_1 = Py$$

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0 \qquad \text{(Den homogena differentialekvationen)}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{f}{y_1} \qquad (y_1 \text{ är exponentiell, alltså } \neq 0)$$

$$u = C = \int \frac{f}{y_1}dx + D$$

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx + D\right)$$

Allmänna lösningen:

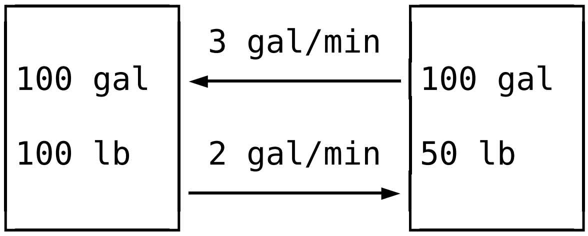
$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx + D\right)$$

$$y = De^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$y = \underset{\uparrow}{y_h} + \underset{\uparrow}{y_p}$$

1. Homogen lösning: y_1
2. Ansats: $y = u(x)y_1$
3. Insättning och hyfsning.

[z.c.3.3.7.]



$$\frac{dx_1}{dt} = 3\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_2(t)}{100-t}\,\text{lb/gal} - 2\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_1(t)}{100+t}\,\text{lb/gal}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_1(t)}{100-t}\,\text{lb/gal} - 3\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_2(t)}{100+t}\,\text{lb/gal}$$

$x_1(0) = 100$, $x_2(0) = 50$

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = \frac{d}{dt}0 = 0$$

$x_1 + x_2 = \text{konstant} = x_1(0) + x_2(0) = 100 + 50 = 150$

Systemet är slutet.

Eliminera x_1: $x_1 = 150 - x_2$

$$\frac{dx_2}{dt} = -3\frac{x_2(t)}{100-t} + 2\frac{150 - x_2(t)}{100+t}$$

$$\frac{dx_2}{dt} + \left(\frac{3}{100-t} + \frac{2}{100+t}\right)x_2(t) = \frac{300}{100+t}$$

Resten av lösningen finns på Internet.

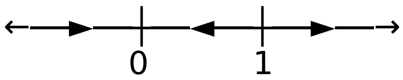
1. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet dem stationära lösningarna till den automona differentialekvationen $\frac{dy}{dx}=y(y-1)$.

Bestäm dem startvärden y_0 för vilka $\lim_{x\to\infty} y(x)$ är ändliga.

$$\frac{dy}{dx}=y(y-1)$$

Stationära lösningarna:

$$y(y-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=0 \\ y_2=1 \end{cases}$$



Stabilt vid 0, instabilt vid 1.

2. En tank innehåller 300 liter vatten i vilket 1800 gram salt har lösts. En annan saltlösning med koncentrationen 5 gram per liter pumpas in med hastigheten 2 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp. Bestäm saltmängden som funktion av tiden.

$$\frac{dA(t)}{dt}=2\cdot 5-3\cdot\frac{A(t)}{300-t(3-2)}$$

$$\frac{dA(t)}{dt}+\frac{3}{300-t(3-2)}A(t)=10$$

$$e^{\int\frac{3}{300-t}dt}=e^{-3\ \ln(300-t)}=(300-t)^{-3}=\text{“Integrerande faktor”}$$

$$(300-t)^{-3}\frac{dA(t)}{dt}+3(300-t)^{-4}A(t)=10(300-t)^{-3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)(300-t)^{-3}\right)=10(300-t)^{-3}$$

Med integration fås:

$$A(t)(300-t)^{-3}=5(300-t)^{-2}+C$$

t = 0:

$$1800 \cdot 300^{-3} = 5 \cdot 300^{-2} + C$$

$$A(t) = 5(300 - t) + \frac{(300-t)^3}{300^2}$$

$\because$

$$1800 \cdot 300^{-3} = 5 \cdot 300^{-2} + C$$

$$C = 1800 \cdot 300^{-3} - 5 \cdot 300^{-2} = 6 \cdot 300^{-2} - 5 \cdot 300^{-2} =$$

$$= \frac{6-5}{300^2} = \frac{1}{300^2}$$

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = y(y - 1)$.
Dock behöver ej konstantlösningarna anges. Bestäm därefter den lösningen som uppfyller villkoret:

a) $y(0) = 2$
b) $y(0) = ½$

Ange lösningens existensintervall och vad som händer då x växer.

[z.c.3.3.7.]

Bestäm den allmänna lösningen till

$y' + 3x^2y = x^2 \qquad (y = y(x))$

Lösning (linjär):

Multiplicera med integrerande faktorn.

$$e^{\int 3x^2 dx} = e^{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} e^{x^3} + 3x^2 e^{x^3} y = x^2 e^{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x^3}\right) = x^2 e^{x^3}$$

$$ye^{x^3} = \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C$$

$$y = \frac{1}{3} + \underbrace{Ce^{-x^3}}_{\text{transient term, } \to 0}$$

[Uppgift 13 på modullappen]

En kaka tas ut ur ugnen.

105°C efter 10 minuter
65°C efter 30 minuter

Vid vilken tidpunkt är temperaturen 30°C?

Avsvalningshastigheten är propotionell mot temperaturens differential $T - T_0$, då T är kakan temperatur och $T_0 = 25°C$ är rumstemperaturen.

Lösning:

Låt $T(t)$ vara kakans temperatur vid tiden t.

T uppfyller relationen

$$\frac{dT}{dt}=k\left(T-T_0\right),\quad T_0=25$$

Vi löser ekvationen! (linjär)

$$\frac{dT}{dt}-kT=-kT_0$$

Multiplicera med den integrerande faktorn $e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$.

$$\frac{dT}{dt}\cdot e^{-kt}-ke^{-kt}T=-kT_0e^{-kt}\Leftrightarrow\frac{d}{dt}\left(Te^{-kt}\right)=-kT_0e^{-kt}$$

Integrera!

$$Te^{-kt}=\int\left(tkT_0e^{-kt}\right)dt=T_0e^{-kt}+C\Rightarrow T=T_0+Ce^{kt}$$

$t \to \infty \Rightarrow T \to 0$
$\therefore k < 0$

Givet att:
$105 = T(10) = T_0 + Ce^{10k}$
$65 = T(30) = T_0 + Ce^{30k}$

$(T_0 = 25)$
$Ce^{10k} = 105 - 25 = 80$
$Ce^{30k} = 65 - 25 = 40$

$$\frac{Ce^{30k}}{Ce^{10k}}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}=e^{20k} \qquad \left(k=\frac{-\ln 2}{20}\right)$$

$$80=Ce^{10k}=C\sqrt{e^{30k}}=C\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C=80\sqrt{2}$$

Alltså:

$$T(t)=25+80\sqrt{2}\,e^{\frac{-\ln 2}{20}t}$$

Vi får:

$$35=25+\sqrt{2}\,80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$10=\sqrt{2}\,80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$1=8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}=8$$

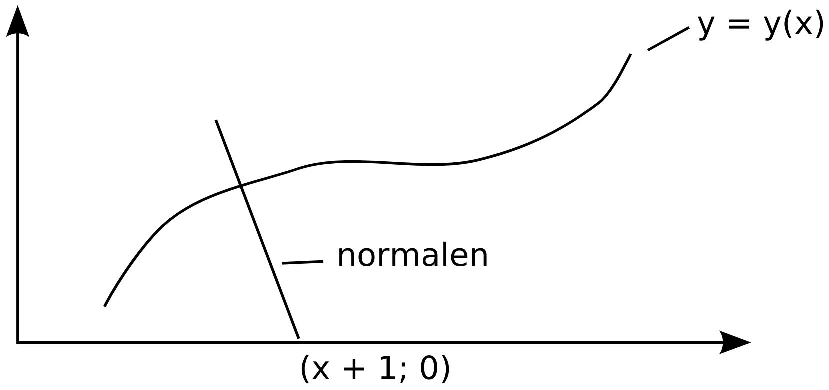
$$\frac{t}{20}-\frac{1}{2}=\log_2 8=3$$

$$t-10=60$$

$$t=70$$

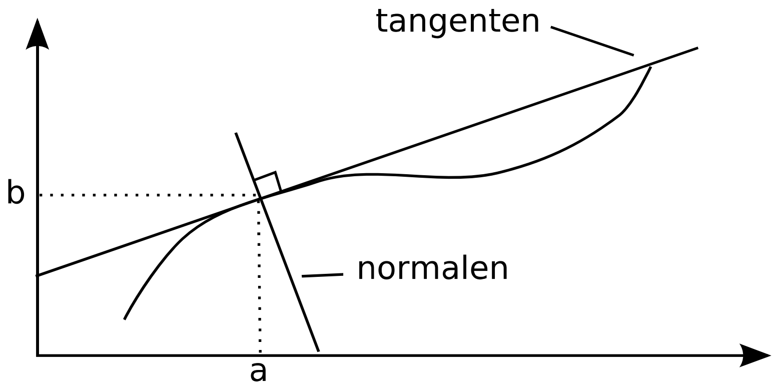
[uppgift 15 på modullappen]

Vilka kurvor $y = y(x)$ i planet har egenskapen att normalet till en godtycklig punkt $(x; y)$ på kurvan skär x-axeln i punkten $(x + 1; 0)$?



Lösning:

Hitta först en ekvation för normalen till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(a; b)$.



Lutningen på tangenten multiplicerat med lutningen på normalen = –1. Normalen har lutningen $-1/f'(a)$, så en ekvation för normalen är:

$$0=-\frac{1}{f'(x)}+y$$

det vill säga

$$y'=\frac{1}{y}$$ Separabel!

Vi löser ekvationen:

$$y'=\frac{1}{y} \quad \text{som vi skriver} \quad y\,dy=dx$$

Integrera!

$$\frac{y^2}{2}=x+C$$

$$y=\pm\sqrt{2x+2C}$$

X > –C

Varje val av C ger en sådan kurva.

[uppgift 5 på modullappen]

Bestäm lösningen till

$xy' + y + xy^2 = 0, \qquad y(1) = 1$

Bestäm existensintervallet.

Lösning:

Vi skriver lösningen på formen:

$$y'+\frac{1}{y}y+y^2=0$$

Bernoullsk!:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^{\alpha}$$

Dividera med y^2

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}+1=0 \iff \frac{y'}{y^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=-1 \quad (*)$$

$$u\triangleq\frac{1}{y}=y^{1-2}$$

Då $\frac{du}{dx}=-\frac{1}{y}y'$

(*) blir

$$-\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}\cdot u=-1$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}\cdot u=1$$ Linjärt!

Multiplicera med den integrerande faktorn

$$e^{-\int \frac{1}{x}dx}=e^{-\ln|x|}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx}-\frac{1}{x^2}\cdot u=\frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}u\right)=\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x}u=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C=\ln x+C \Leftrightarrow u=x(\ln x+C)$$

Gå tillbaka till y.

$$y=\frac{1}{u}=\frac{1}{x(\ln x+C)}$$

Begynnelsevillkor ger

$$1=y(1)=\frac{1}{C} \Leftrightarrow C=1$$

Alltså

$$y=\frac{1}{x(\ln x+1)}$$

Lösningen existerar för x sådant att
$x > 0$ och $x(\ln x + 1) > 0$.

Vi måste ha $\ln x + 1 > 0$, det vill säga
$\ln x > -1$
$x > e^{-1}$

Alltså:

Existensintervallet är $]e^{-1}; \infty[$.

Endast en del i intervallet ska vara med.

2010–(09)sep–06: dag 6, 6

Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen y' = y(y – 1).
Dick begöver ej konstantlösningarna anges. Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret

$$\begin{cases} y(0)=2 & \text{(a)} \\ y(0)=\tfrac{1}{2} & \text{(b)} \end{cases}$$

Ange lösningens existensintervall och vad som änder då x växer.

$$\frac{1}{y(y-1)}y'=1$$

$$\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}\right)y'=1$$

–ln |y| + ln |y – 1| = x + ln |C|

$$\frac{y-1}{y}=Ce^x$$

$$1-\frac{1}{y}=Ce^x$$

$$y=\frac{1}{1-Ce^x}$$

(a):

y(0) = 2

C = ½, (antaget att x = 0)

$$y=\frac{2}{2-e^x}$$

x ∈]–∞; ln 2]

(b):

y(0) = ½

C = –1, (antaget att x = 0)

$$y=\frac{1}{1+e^x}$$

x ∈ ℝ

Modul 2

2010–(09)sep–06: dag 1, 6

Modul 2:

Högre ordningens ODE.
System av linjära ODE.
Autonoma system. Stabilitet.

Differentialekvationer av högre ordning:

$$\mathcal{L}(D)y=\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}=g(x)$$

$$\mathcal{L}(D)(c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x))=c_1\mathcal{L}(D)y_1(x)+c_2\mathcal{L}(D)y_2(x)$$

Alla lösningar till y är linjärt oberoende av varandra, detta innebär att om man deriverar summan av dem, med koefficinenter, så får man samma svar som om man summerar derivatorna av y med koefficienter till y eller derivationerna.

Reduktion av ordning:

$\mathcal{L}(D)y = 0$

y_1 är en kände icke-trivial lösning.

$y(x) = u(x)y_1(x)$.

Man kan substituera y med en funktion multiplicerat med en känd, icke-trivial lösning för att reducera differentialekvationens ordning, om den är homogen.

$\mathcal{L}(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende.

Lösningar till den homogena ekvationen:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

$$(u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2)(x) \triangleq y(x)$$

Fundera inte över detta om du inte begriper det, fortsätt istället att läsa som saker bli klarare.

En partikulärlösning sökes.

Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$

Då erhålles: $y_1' \cdot u_1' + y_2' \cdot u_2' = f$

Matrisform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Ställ upp wronskianen för lösningarna och multiplicera med en vektor av deriverade koefficientfunktioner och låt detta vara lika med en vektor med nollor samt, i slutet, den inhomogena delen.

Entydlig lösning:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

En entydlig lösning erhålls om wronskianen's determinant är lika med 0.

Denna regel måste du kunna!

Cramers regel: (Cramer uttalas /krɑːmər/)

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}} \qquad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}}$$

Cramers regel kan användas på matrisformen för att lösa ut dem deriverade koefficientfunktionerna.

Exempel

Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen

$x(y'' - 2y' + y) = 0, \quad x > 0$

samt en partikulärlösning till differentialekvationen

$x(y'' - 2y' + y) = e^x, \quad x > 0$

$y'' - 2y' + y = 0, \quad y_1 \triangleq e^x$ Vi kan lätt sa att e^x är en lösning.

$y = e^x z(x)$ Substituera y med y_1 och en funktion.

$e^x \cdot x((z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + z) = e^x$

Då erhålls ett uttryck som kan förenklas till:

$z'' = 1 / x \quad (*)$

$z' = \ln x + C$ C kommer från att man integrerar raden ovanför.

$y' = e^x z' + e^x z$

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + D$ Detta är ena delen av z.

$z = x \ln x - x + Cx + D$

$y = e^x z = e^x(x \ln x - x + Cx + D)$

$y = Cxe^x + De^x + e^x(x \ln x - x)$

$y_p = e^x(x \ln x - x)$

$(xe^x;\ \ e^x)$ Fundamentalmänd av lösningar till den homogena ekvationen. De homogena lösningarna är alltså xe^x och e^x.

(*) $\because$

$e^x x z'' = e^x$

$xz'' = 1$

$z'' = 1 / x$

$x(y'' - 2y' + y) = e^x, \quad x > 0$

$y_h \triangleq u(x)xe^x + v(x)e^x \qquad u_1 = u \qquad u_2 = v$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} xe^x & e^x \\ xe^x + e^x & e^x \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{e^x}{x} \end{pmatrix}$$

$|\mathbf{A}| = -e^{2x}$

$$u'(x) = \frac{1}{-e^{2x}}\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{e^x}{x} & e^x \end{vmatrix} = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = \frac{1}{-e^{2x}}\begin{vmatrix} xe^x & 0 \\ xe^x + e^x & \dfrac{e^x}{x} \end{vmatrix} = -1$$

$u(x) = \ln |x| = \{x > 0\} = \ln x$
$v(x) = -x$

$y_p = xe^x(\ln x - 1)$

System av linjära första ordningens ODE.

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

Exempel:

$y' = ay$
$y = Ce^{ax}$

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

2010−(09)sep−08: dag 2, 7

Reduktion av ordning:

$\mathcal{L}(D)y = 0$
y_1 är en känd icke-trivial lösning.

$y(x) \triangleq u(x)y_1(x)$
$\mathcal{L}(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen

$y = C_1y_1 + C_2y_2$

En partikulärlösning sökes.
Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$
Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f$

System av linjära första ordningens ODE:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

Som i vanliga differentialekvationer.

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

Två lösningar till $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$:

$\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$

Då är även $\vec{X} = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2$ lösningar.

$\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ är linjärt oberoende.

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \vec{X}_1 & \vec{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi} \vec{C}$$

$\boldsymbol{\Phi}$ är en fundamentalmatris.

Variation av parametrar:

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$, $\vec{X} = \boldsymbol{\Phi}(t)\vec{C}$ $\quad$ $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$ är homogen

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F}$ $\quad$ inhomogen

$$\vec{X}_p = \boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\vec{U}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}'(t) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}(t) + \vec{F}(t)$$

$$\underbrace{\left(\boldsymbol{\Phi}'(t) - \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\right)}_{\mathbf{0}}\vec{U}(t) + \boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}'(t) = \vec{F}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}'(t) = \vec{F}(t)$$

$\vec{U}'(t) = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)$ $\quad$ $\because$ det $\boldsymbol{\Phi} \neq 0$

Plana autonoma system och stabilitet:

$$\vec{x}' = \vec{g}(\vec{x})$$

Plant autonomt system:

$\dfrac{dx}{dt} = P(x;\, y)$ $\quad$ $\dfrac{dy}{dt} = Q(x;\, y)$

$\vec{x}_1$ är en kritisk punkt till $\vec{x}' = \vec{g}(\vec{x})$

Taylorutveckling!

$$\vec{x}_1 = \vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x}_1) + \vec{g}(\vec{x}_1)(\vec{x} - \vec{x}_1) + \vec{R}_1$$

$$\vec{x}' \approx \vec{g}(\vec{x}_1)(\vec{x} - \vec{x}_1)$$

$\because$

$\vec{x}_1$ är en kritisk punkt, $\vec{g}(\vec{x}_1) = \vec{0}$

4 kap.:

- Begynnelsevärdesproblem
- Randvärdesproblem
- Linjärt oberoende
- Wronskian/Wronskideterminanten
- Fundamentallösningar
- Homogena lösningar
- Allmäna lösningar

Begynnelsevärdesproblem:

$$\mathcal{L}(D)y = a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

Låt $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ och $g(x)$ vara kontinuerliga på ett intervall, I, och låt $a_2(x) \neq 0\ \forall x \in I$.
För varje godtycklig punkt $x = x_0 \in I$ existerar en entydlig lösning $y(x)$ på intervallet I.

För varje punkt x på intervallet I existerar en entydlig lösning $y(x)$.

Randvärdesproblem:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, kan vara derivator av *y*, och inte bara *y*.

[z.c.4.1.13.]

$y = c_1 e^x \cos\ x + c_2 e^x \sin\ x$

Lösningar till $y'' - 2y' + 2y = 0$

$y' = c_1 e^x(\cos x - \sin x) + c_2 e^x(\sin x + \cos x)$

a)

Villkor: $\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ 0 = y'(\pi) = -e^{\pi}(c_1 + c_2) \end{cases}$

$y = e^x(\cos x - \sin x)$

b)

Villkor: $\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ -1 = y'(\pi) = -e^{\pi} c_1 \end{cases}$

Saknar lösning

$\because$

$c_1 \neq -e^{\pi} c_1$

$\because$

$e^{\pi} \neq 1$

Villkor: $\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 \\ 0 = y'(\pi) = -e^{\pi} c_1 \end{cases}$

$y = c_2 \cdot e^x \cdot \sin x$

Linjärt oberoende:

$\{f_1(x); f_2(x)\}$ är linjärt beroende på ett intervall, I, om det existerar konstanter, c_1 och c_2, alla ej lika med noll, så att $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, $\forall\ x \in I$.

Om $\{f_1(x); f_2(x)\}$ ej är linjärt beroende på intervallet I så är $\{f_1(x); f_2(x)\}$ linjärt oberoende.

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$

Derivera med avseende på x!

$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linjärt oberoende: $c_1 = c_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Entydlig lösning.

Wronskian (eller wronskideterminant):

Låt funktionerna $f_1(x)$ och $f_2(x)$ vara deriverbara.

Wronskideterminanten är $W(f_1; f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$

För flera variabler:

$$W\left(\coprod_{i=0}^{n} f_i\right) = \left| \coprod_{i=0}^{n} {}^{\downarrow} \coprod_{j=0}^{n} {}^{\rightarrow} f_j^{(i)} \right|$$

Förlängning av W ovan,
se annars nomenklaturen.

Låt y_1 och y_2 vara lösningar till, den snart definierade, [IH] på ett intervall, I.
Då är $\{y_1; y_2\}$ linjärt oberoende på I
$\therefore$
$W(y_1; y_2) \neq 0, \forall x \in I$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ [IH]

Låt y_1 & y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y(x) \triangleq (u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2)(x)$

Insättning i [IH] ger:

$$Q([y_1u_1]_0 + [y_2u_2]_1) + P([y_1'u_1]_0 + y_1u_1' + [y_2'u_2]_1 + y_2u_2') +$$
$$+ [y_1''u_1]_0 + y_1'u_1' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ [y_2''u_2]_1 + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' = ƒ$$

$$[u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1)]_0 + [u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2)]_1 +$$
$$+ [y_1'u_1' + y_2'u_2']_2 + [y_2'u_2' + y_2u_2'' + y_1'u_1' + y_1u_1'']_3 +$$
$$+ P(y_1u_1' + y_2u_2') = ƒ$$

$$[y_1'u_1' + y_2'u_2']_2 + [\frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2')]_3 + P(y_1u_1' + y_2u_2') = ƒ$$

Jag har markerat de olika färgerna
med olika index för tydlighets skull.

En partikulärlösning sökes.

Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$

Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = ƒ$

2010–(09)sep–09: dag 3, 8

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n} a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}$$

$g(x) \neq 0$ — inhomogen
$g(x) = 0$ — homogen

[z.c.4.1.7.]

$x(t)\ c_1 \cos \omega t = c_2 \sin \omega t$

är den allmäna lösningen till

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Visa att den lösningen som uppfyller

$$x(0) = x_0 \quad (1) \quad \text{samt} \quad x'(0) = x_1 \quad (2)$$

är

$$x(t)=x_0 \cos \omega t+\frac{x_1}{\omega} \sin \omega t$$

x(t) uppfyller (1):

$$x_0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Leftrightarrow x_0 = c_1$$

x(t) uppfyller (2):

$$x'(t) = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t$$

$x'(0) = x_1$:

$$x_1 = -c_1\omega \sin 0 + c_2\omega \cos 0 = c_2\omega$$

Funktionerna $\coprod_{i=0}^{n} f_i$ är linjärt beroende om det finns konstanter, $\coprod_{i=0}^{n} C_i$,

så att $\sum_{i=0}^{n} C_i f_i=0$

[z.c.4.1.17.]

$f_1(x) = 5, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \sin^2 x$

Linjärt beroende?

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 = f_2 + f_3$

$c_2 = c_3$

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$
$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_2 f_3 = 0$
$c_1 f_1 + c_2(f_2 + f_3) = 0$
$c_1 \cdot 5 + c_2 \cdot 1 = 0$

$c_2 = -5c_1$

$c_1 \cdot 5 - 5c_1 \cdot 1 = 0$

$5(c_1 - c_1) = 0$
$0 = 0$

Linjärt beroende!

$\cos^2 x$ och $\sin^2 x$ är på varandra linjärt oberoende, och kan 5 skrivs som en linjär kombination av $\cos^2 x$ och $\sin^2 x$, eftersom deras summa är precis som 5 konstant.
5 är alltså linjärt beroende av $\cos^2 x + \sin^2 x$, men inte av $\cos^2 x$ eller $\sin^2 x$.

Analogi: Ett system av vektorer är linjärt beroende om minst en vektor kan skrivs som en linjär kombination av de andra (minst en) vektorerna.

[z.c.4.1.40.]

Är $f_1(x) = e^{x+2}$ och $f_2(x) = e^{x-3}$ linjärt beroende?

$f_1(x) = e^{x+2} = e^2 e^x = k_1 e^x$
$f_2(x) = e^{x-3} = e^{-3} e^x = k_2 e^x$

Ja, båda är på formen ke^x.

x-delarna är lika, det är bara konstanterna som skiljer sig.

[z.c.4.1.23.]

Visa att funktionerna e^{-3x} och e^{4x} utgör en fundamentalmängd till ekvationen

$$y'' - y' - 12y = 0$$

1) Antalet funktioner är lika många som ekvations ordningsnummer:

"ordning" = 2 $\asymp$ 2 = "funktioner"

2) Funktionerna är lösningar till ekvationen. (Kolla själv!)

3) $W(e^{-3x}; e^{4x}) \neq 0$:

$$W(f_1;f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

$$W(e^{-3x};e^{4x})=\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{4x} \\ -3e^{-3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix}=(4+3)e^{(4-3)x}=7e^{x}\neq 0$$

[z.c.4.2.9.]

Lös $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$, om $y_1 = x^4$ är en lösning!

Substitution: $y \triangleq y_1 \cdot u$

$y' = (y_1u)' = y_1'u + y_1u'$

$y'' = (y_1'u + y_1u')' = (y_1'u)' + (y_1u')' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''$

$$\begin{aligned}
0 &= x^2y'' - 7xy' + 16y = \\
&= x^2y_1''u + 2x^2y_1'u' + x^2y_1u'' - 7xy_1'u - 7xy_1u' + 16y_1u = \\
&= u\cdot([x^2y_1'' - 7xy_1' + 16y_1]_0) + u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1 = \\
&= \{[\ldots]_0 = 0\} = u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1 && = \{v \triangleq u' \mid v' = u''\} = \\
&= v'x^2y_1 + v\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) && = \{y_1 = x^4 \mid y_1' = 4x^3\} = \\
&= v'x^6 + v\cdot(8x^5 - 7x^5) = \\
&= v'x^6 + vx^5
\end{aligned}$$

$0 = v'x + v$
$0 = (vx)'$
$C = vx$
$v = C/x$

$v = u' = C/x$

$$\frac{du}{dx} = \frac{C}{x} \Leftrightarrow du = \frac{C}{x}dx \Leftrightarrow \int du = \int \frac{C}{x}dx \Leftrightarrow u = C\ln|x| + D$$

$y = y_1 u = x^4(C \ln |x| + D)$

$y = Cx^4 \ln |x| + Dx^4$ Allmän lösning Alla homogena lösningar erhålls.

Metod 2:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ (*) Homogen

Om y_1 löser (*) så kan en anna lösning skrivas som

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2} dx$$

Prova metoden på [z.c.4.2.9.]!

[z.c.4.6.1.]

$y'' + y = \sec x$

1) $y'' + y = 0$

Hjälpekvation: $m^2 + 1 = 0$ Kolla 4.3 kap.

Hjälpekvation kallas ofta karaktäristisk ekvation och erhålla genom att byta ut $y^{(n)}$ mot r^n, eller i detta fall m^n. $y^{(n)}$ är n:te derivatan till y.

$m_{1,2} = \pm i$

Vid två komplexa (egentligen även vida reela) m (de delar reel del, och har relativt varandra negativ imagionär del) erhålls två homogena lösningar genom på följande formel, där det är lättas om man väljer m med positiv imagionärdel:

$$y_h = e^{\Re m}\left(c_1 \cos(|\Im m| \cdot x) + c_2 \sin(|\Im m| \cdot x)\right) =$$

$$= e^0\left(c_1 \cos(1 \cdot x) + c_2 \sin(1 \cdot x)\right) =$$

$$= e^0(c_1 \cos x + c_2 \sin x) = (c_1 \underbrace{\cos}_{y_1} x + c_2 \underbrace{\sin}_{y_2} x)$$

Lösningarna är linjärt oberoende av varandra (dock inte om imagionära delen är 0, för då är de identiska) per automatik.

$y_p = (y_1 \cdot u_1 + y_2 \cdot u_2)(x)$

2) $u_1(x)$, $u_2(x)$?

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix} = -\tan x \quad = u_1'$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix} = 1 \quad = u_2'$$

$$u_1' = -\tan x = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$u_1 = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = \begin{Bmatrix} v = \cos x \\ dv = -\sin x \; dx \end{Bmatrix} = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| = \ln|\cos x|$$

$$u_2' = 1$$

$$u_2 = x$$

$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2 = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$

$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x \sin x$

2010–(09)sep–10: dag 4, 9

$\vec{X}' = \mathbf{A}(t)\vec{X} + \vec{F}(t)$

Låt elementen i matrisen $\mathbf{A}(t)$ och vektorn $\vec{F}(t)$
vara kontinuerliga på ett gemensamt intervall, I.
Då har följande begynnelsevärdesproblem en entydlig lösning:

$$\vec{X}(t_0) = \vec{X}_0, \quad t_0 \in I$$

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$ [H]

$\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ är lösningar till [H].

Påstående:

$$\vec{X} = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 \quad \text{är lösningen till [H].}$$

$\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ måste vara linjärt oberoende.

$c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2 = \vec{0}$

Linjärt oberoende då $c_1 = c_2 = 0$.

$(\vec{X}_1 \;\; \vec{X}_2) \neq \vec{0}$

Allmän lösning: $\vec{X} = c_1\vec{X}_1 + c_2\vec{X}_2$

$\vec{X} = (\vec{X}_1 \;\; \vec{X}_2)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi\vec{C}$

Φ kallas "fundamentalmatris".

y' = ay
y = Ce^{ax}

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}=\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t}=\mathbf{A}\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{A}\vec{K}=\lambda\vec{K}$$

$$\mathbf{A}\vec{K}-\lambda\vec{K}=\vec{0}$$

$$\mathbf{A}\vec{K}-\lambda\mathbf{I}\vec{K}=\vec{0}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{K}=\vec{0}$$

Omforming av höger ordningens ODE

y'' + y = 0 y = e^{ix}

Karaktäristisk ekvation:

$r^2 + r^0 = 0$ y = cos x + i sin x

r = ±i $y_1 = \Re\, y = \cos x$

$y_2 = \Im\, y = \sin x$

y = A cos t + B sin t

Sätt x = y'

$$\begin{cases}x'=y''=-y \quad \because\ y''+y=0\\ y'=x\end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}}_{\vec{X}'}=\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{\vec{X}}$$

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

$\lambda = \pm i$

$\lambda = i$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{K}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\vec{K}=\vec{0} \qquad \vec{K}_1=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=e^{it}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=(\cos t+i\sin t)\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+i\cos t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\sin t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_1=\Re\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_2=\Im\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

$$c_1\vec{X}_1+c_2\vec{X}_2=c_1\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

1:a komponenten: $c_1\,(-\sin t) + c_2\cos t = y$

2:a komponenten: $c_1\cos t + c_2\sin t = x$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer
För få oberoende egenvektorer
Komplex egenvärden

Skilda reella egenvärden

$$\vec{X}=c_1\vec{K}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{K}_2e^{\lambda_2 t}$$

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer

$$\vec{X}=c_1\vec{K}_1e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{K}_2e^{\lambda_1 t}$$

Ej tillräckligt många
Multipelt egenvärde med en egenvektor
λ_1 egenvärde med multiplicitet 2 (duplex; två likadana egenvärden).

En lösning $\vec{X}_1=\vec{K}e^{\lambda_1 t}$

Ansätt: Andra lösningen $\vec{X}_2=(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}$

Exempel: $y'' - 2y' + y = 0$

Karaktärisktisk ekvation: $r^2 - 2r + 1 = 0$
$(r - 1)^2 = 0$
$r_{1,2} = 0$

$y = Ae^x + Bxe^x = (A + Bx)e^x$

$$(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}+\vec{L}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{A}\vec{L}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{A}\vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{L}=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}t+(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}$$

t^1: $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}=\vec{0}$

t^0: $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=\vec{L}$

$\vec{L}$ är en egenvektorer

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=0 \Leftrightarrow (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^2\vec{P}=0$$

2010–(09)sep–13: dag 5, 10

Homogena linjära system
Med konstanta koefficienter

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}=\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t}=\mathbf{A}\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{K}=\vec{0}$$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden
• Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer
• För få linjärt oberoende egenvektorer

Komplex egenvärden

[z.c.8.2.2.]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+2y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-2=\lambda^2-5\lambda+4$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 4$

Bestäm en egenvektor till varje egenvärde.

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\lambda_1=1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0} \qquad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=4 \qquad \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\vec{v}_2=\vec{0} \qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=C_1\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{4t}$$

[z.c.8.2.19.]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=9x-3y\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$3\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt} \quad \text{men även} \quad \begin{vmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$\because \ \lambda_{1,2}=0$$

Bestäm en egenvektor till varje egenvärde.

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0} \ \Leftrightarrow \ \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

Ansätt andra lösningen $\vec{X}_2=(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}$

$$(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}+\vec{L}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{A}\vec{L}\,te^{\lambda_1 t}+\mathbf{A}\vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{L}=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}\,t+(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}$$

t^1: $\qquad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}=\vec{0}$

t^0: $\qquad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=\vec{L}$

$\vec{L}$ är en egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\vec{P}=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+C_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

[z.c.8.2.36.]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x+5y \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x+6y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}=(4-\lambda)(6-\lambda)+10=(\lambda-5)^2+9$$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 3i$

$$\begin{pmatrix} 4-5-3i & 5 \\ -2 & 6-5-3i \end{pmatrix}\vec{v}_1=\begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0} \iff \vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}=e^{(5+3i)t}\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2 \end{pmatrix}=e^{5t}(\cos 3t+i \sin 3t)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases} \vec{X}_1=\Re\vec{Z}=e^{5t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\cos 3t+\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 3t\right)=e^{5t}\begin{pmatrix} \cos 3t+3\sin 3t \\ 2\cos 3t \end{pmatrix} \\ \vec{X}_2=\Im\vec{Z}=e^{5t}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 3t+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\sin 3t\right)=e^{5t}\begin{pmatrix} \sin 3t-3\cos 3t \\ 2\sin 3t \end{pmatrix} \\ \vec{X}=C_1\vec{X}_1+C_2\vec{X}_2 \end{cases}$$

[z.c.8.3.13.]

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{X}=\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}e^t$$

Bestäm en fundamentalmatris $\mathbf{\Phi}(t)$!

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\vec{X}$$

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+1$$

$\lambda_{1,\,2} = 1 \pm i$

Bestäm en komplex egenvektor!

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix}1-(1+i) & -1\\ 1 & 1-(1+i)\end{pmatrix}\vec{v}_1=\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\vec{v}_1=\vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}=e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=e^t\underbrace{(\cos t+i\sin t)}_{\text{cis } t=e^t}\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{X}_1=\Re\vec{Z}=e^t\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\sin t\right)=e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\\ \vec{X}_2=\Im\vec{Z}=e^t\left(\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin t\right)=e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}\end{cases}$$

Fundamentalmatrisen: $\mathbf{\Phi}(t)=e^t\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}$

$$\vec{X}_p\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}=\mathbf{\Phi}(t)\int\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{U}=\int e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}dt=\int\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_p=e^t\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\mathbf{\Phi}(t)\vec{C}+\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}=e^t\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}\vec{C}+e^t\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

2010–(09)sep–14: dag 6, 11

Veriferia att $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}e^{-\frac{3t}{2}}$

är en lösning till $\vec{x}\,'=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}\vec{x}$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_2}{4}-x_1\\x_1-x_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}\underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)}_{\lambda}e^{-\frac{3t}{2}}\overset{?}{=}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}e^{-\frac{3t}{2}}$$

Egentligen behöver vi verifiera att $\lambda\vec{v}=\mathbf{A}\vec{v}$, det vill säga att $\vec{v}$ är en egenvektor för **A** med egenvärdet λ.

$$\mathbf{A}\vec{v}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{2}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{pmatrix}=-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\lambda\vec{v}$$

Stämmer!

Bestem den allmänna lösnngen till

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x+2y\\11x-2y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}7 & 2\\11 & -2\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Sök egenvärden till **A**

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}7-\lambda & 2\\11 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(-2-\lambda)-22=$$

$$=\lambda^2-5\lambda-36=(\lambda+4)(\lambda-9)$$

$\lambda_1 = 9$ söker $\vec{v}_1$ så att

$$(\mathbf{A}-9\mathbf{I})\vec{v}_1=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 11 & -11\end{pmatrix}\vec{v}_1=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1=t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -4$

$$\begin{pmatrix}11 & 2\\ 11 & 2\end{pmatrix}\vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2=t\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}$$

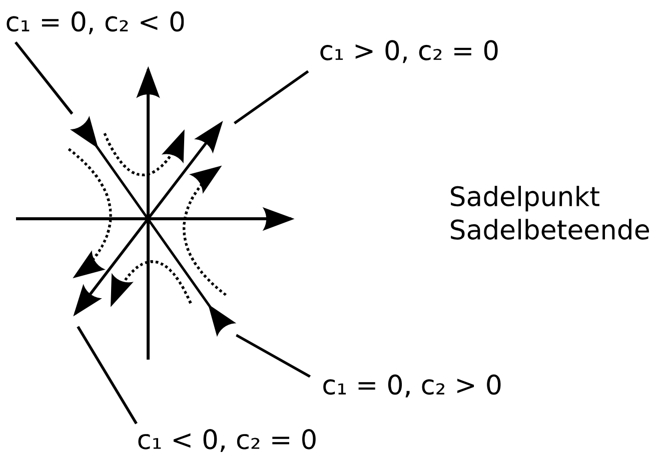
Vi har två linjärt oberoende lösningar:

$$\vec{X}_1=\vec{v}_1e^{\lambda_1 t}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{9t} \quad \text{och} \quad \vec{X}_2=\vec{v}_2e^{\lambda_2 t}=\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}e^{-4t}$$

$$\vec{X}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{9t}+c_2\begin{pmatrix}2\\-11\end{pmatrix}e^{-4t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ange hastighetsvektorn i punkten (2; 11)!

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}x'=7x+2y=14+22=36\\ y'=11x-2y=22-22=0\end{pmatrix}$$



Bestäm lösningen till BVP

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\vec{X} \quad , \quad \vec{X}(0)=\begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}6-\lambda & -1\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(4-\lambda)+5=\lambda^2-10\lambda+29$$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$

$$\begin{pmatrix}6-5-2i & -1\\ 5 & 4-5-2i\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}1-2i & -1\\ 5 & -1-2i\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$$

Rad 1 och rad 2 är alltid linjärt beroende.

$$(1-2i)\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{0}$$

$$\vec{v}=t\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}e^{(5+2i)t}=\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}e^{5t}\text{ cis }2t=e^{5t}\begin{pmatrix}\text{cis }2t\\ (1-2i)\text{ cis }2t\end{pmatrix}=$$

$$=e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t+i\sin 2t\\ \cos 2t+2\sin 2t-2i\cos 2t+i\sin 2t\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+2\sin 2t\end{pmatrix}}_{\vec{x}_1}+i\underbrace{e^{5t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ -2\cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}}_{\vec{x}_2}$$

$\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix}3 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \qquad \vec{v}=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & -3\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \qquad \vec{v}=t\begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^0 + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}$$

Formeln (se sida 330 eller Beta)

$$\vec{X}_p = \mathbf{\Phi}(t) \int \mathbf{\Phi}^{-1}(t) \vec{F}(t)\, dt$$ $\vec{F}(t)$ är den inhomogena delen.

Söker $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \frac{\operatorname{adj} \mathbf{\Phi}(t)}{\det \mathbf{\Phi}(t)} = \begin{pmatrix} 2e^t & -3e^t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-e^t} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \frac{1}{e^t} & -\frac{1}{e^t} \end{pmatrix}$$

Som vi lärde oss i flervariabeln är adjunkten (adj) av en 2×2-matris:

$\begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$ om 2×2-matrisen är $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \frac{1}{e^t} & -\frac{1}{e^t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{F}} dt = \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -8-3 \\ \frac{4+1}{e^t} \end{pmatrix} dt =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} -11 \\ 5e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11t \\ -5e^{-t} \end{pmatrix} + C = \{*\} = \begin{pmatrix} -11t-15 \\ -11t-10 \end{pmatrix}$$

{*} Som vanligt sätter vi C till 0 eftersom vi bara vill ha en lösning i partikulärlösning.

2010–(09)sep–15: dag 7, 12

Plana autonoma system och stabilitet.

[10.1.] Autonoma system

Kritiska punkter.
Periodiska lösningar.

[10.2.] Stabilitet hos linjära system

[10.3.] Linjärisering och lokala stabiliteter

Plant autonomt system

$$\frac{dx}{dt}=P(x;y)$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x;y)$$

Vektorfält:

$$\vec{v}(x;y)=\left(P(x;y)\quad Q(x;y)\right)$$

Lösningstyper:

Statinära punkter
Båge
Periodisk lösning

Stabilitetsundersökning av linjära system

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

Egenvärden till matrisen:

Reella	Komplexa
• Enkla • Multipla	

Stationära punkter: $\vec{X}'=\vec{0}=\mathbf{A}\vec{X}$

det **A** ≠ 0 ∵ Entydlig lösning

(0 0) är den enda stationära punkten.

λ reella och enkla ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Instabil nod
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Stabil nod

λ reella och multipla ($\lambda_1 = \lambda_2$)

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instabil degenererad nod
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil degenererad nod

Egentligen kan man också få instabila och stabila stjärnor.

λ komplex ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)

$$\vec{Z}=e^{(\alpha+i\beta)t}\vec{K}_1=e^{\alpha t}\text{ cis } \beta t\cdot\vec{K}_1$$

$\vec{X}_1=\Re\vec{Z}$ ($\Re$ skrivs ofta Re)

$\vec{X}_2=\Im\vec{Z}$ ($\Im$ skrivs ofta Im)

$\alpha > 0$	Instabil spiral
$\alpha = 0$	Centrum, stabil (ellipsformad)
$\alpha < 0$	Stabil spiral

Stabilitetskriterium för linjära system

$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$, $\vec{X}(0)=\vec{X}_0\neq\vec{0}$, det **A** ≠ 0

1. $\lim\limits_{t\to\infty}\vec{X}(t)=\vec{0} \Leftrightarrow \Re\lambda<0$

2. $\vec{X}(t)$ är periodisk $\Leftrightarrow \Re\lambda=0$

3. I övriga fall finns det minst ett $\vec{X}_0$ för vilket $\vec{X}(t)$ blir obegränsat då t växer.

Skilda reella egenvärden

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K}_1e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{K}_2e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda_2 < \lambda_1$

$$\vec{X}(t)=e^{\lambda_1 t}\left(C_1\vec{K}_1+C_2\vec{K}_2e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\vec{X}(t)=\lim_{t\to\infty}e^{\lambda_1 t}C_1\vec{K}_1$$

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer.

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K}_1e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{K}_2e^{\lambda_1 t}=\left(C_1\vec{K}_1+C_2\vec{K}_2\right)e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K}_1e^{\lambda_1 t}+C_2\left(\vec{K}_1t+\vec{P}\right)e^{\lambda_1 t}=t\,e^{\lambda_1 t}\left(C_2\vec{K}_1+\frac{C_1}{t}\vec{K}_1+\frac{C_2}{t}\vec{P}\right)$$

[z.c.10.1.16.]

$$\begin{cases}x'=-x(4-y^2)\\ y'=4y(1-x^2)\end{cases}$$

Bestäm de kritiska (stationära) punkterna.
I de stationära punkterna är tangentvektorn (x'; y') = (0; 0)

$$\begin{cases}-x(4-y^2)=0 & (1)\\ 4y(1-x^2)=0 & (2)\end{cases}$$

$$(1):\ \begin{cases}\text{a)}\ x=0 \quad \text{insatt i (2):}\ y=0 \quad (0;0)\\ \text{b)}\ 4-y^2=0\ \Leftrightarrow\ y=\pm 2 \quad \text{insatt i (2):}\\ \quad \pm 8(1-x^2)=0\ \Leftrightarrow\ x=\pm 1\end{cases}$$

De stationära lösningarna är (0; 0) och ($\pm_1$ 1; $\pm_2$ 2)

[z.c.10.2.11.]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(4+\lambda)+6 = -25+\lambda^2+6 = -19+\lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{19}$$

Skilda tecken hos egenvärderna.
(0; 0) är en sadelpunkt.

[z.c.10.2.11.]

Bestäm μ så att vi får en stabil spiral.

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \vec{X}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & \mu-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\mu + 1$$

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2-4}}{2}$$

(0; 0) är en stabil sprital då:

$$\begin{cases} \mu^2-4<0 & \text{(spiral)} \\ \mu<0 & \text{(stabil)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^2<4 \;\Leftrightarrow\; -2<\mu<2 \\ \mu<0 \end{cases}$$

$-2 < \mu < 0$

2010–(09)sep–17: dag 8, 13

Se förra föreläsningen för stabilitetsundersökning av linjära system.

Tre fall av enkla (stabil, instabil, sadelpunkt).

Två fall av multipla (sammanfallande positiv/negativ → instabil/stabil degenererad nod).

Komplexa, tre fall (instabil/stabil spiral, centrum).

Vad krävs för att $x(t) \to 0$?

Stabilitet för en 1:a ordningens autonomt system

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) \quad \dot{x} = f(x)$$

Stationär lösning:

$\dot{x} = 0 = f(x), \qquad x = x_0$

Lokal undersökning, ersätt funktionen med ett polynom (Taylorutveckligen).

$$\dot{x} = f(x) - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{funktionsvärde}}}{f(x_0)} + (x - x_0)f'(x_0) + R_2$$

Vi förenklar genom insättning av $f(x) = 0$.

$\dot{x} = (x - x_0)f'(x_0) + R_2$

$$\begin{cases} \text{Linjäriserad differential ekvation} \\ \dot{x} = (x - x_0)f'(x_0) \end{cases} \qquad \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Vi integrerar!

$\ln|x - x_0| = \ln|C_1| + tf'(x_0)$

Vi hyfsar!

$$x - x_0 = \pm C_1 e^{tf'(x_0)} = Ce^{tf'(x_0)}$$

$$x = x_0 + Ce^{tf'(x_0)}$$

$x = x_0$ (partikulär)
$x = Ce^{tf'(x_0)}$ (homogen)

Funktionen går mot x_0 då derivatan är negativ
annars mot $\pm\infty$ (om derivatan är positiv).

$$\begin{cases} f'(x_0) > 0 & \text{instabil} \\ f'(x_0) < 0 & \text{asymptotisk stabil} \end{cases}$$

Exempel:

$\dot{x} = (x - 1)(x - 2)$
Kritiska punkter $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. $(\dot{x} = 0 = (x - 1)(x - 2))$

Lösning:

$\dot{x} = x^2 - 3x + 2 = f(x)$

Vi deriverar och sätter in stationär punkt.

$f'(x) = 2x - 3$

$$\begin{cases} f'(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0 & (\text{asymptotisk stabil}) \\ f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1 > 0 & (\text{instabil}) \end{cases}$$

Stabilitetsundersökning av icke-linjära system (vektorer istället för skalerär)

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{0} = f(\vec{x})$$

$$\vec{x} = \vec{x_0}$$

Taylorutveckling kring kritisk punkt

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) = f(\vec{x_0}) + f'(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0}) + \vec{R_2}$$

Linjäriserat system

$\vec{x} = f'(\vec{x_0})(\vec{x} - \vec{x_0})$

Sätt $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x_0}$, $\vec{y} = \vec{x}$
$\dot{\vec{y}} = \mathbf{B}\vec{y}$ samma som $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x}$.

Studera det lineariserade systemet och jämför med icke-linjärt.

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{cases}$$

$$f'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$ Jämför med Jacobimatrisen.

Bestäm de stationära punkterna

Lineariserade — Icke-lineariserade
samma geometriska beteende $\Rightarrow$ Stabil nod, Stabil spiralpunkt, Instabil nod, Instabil spiralpunkt, Sadelpunkt

om det inte är någon av ovanstående:

Fas–plan-betoden: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Q(x;y)}{P(x;y)}$$

Jämför $$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dt}{dy} \end{pmatrix} = \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$$

[10.3.18]

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}x(1-x^2-3y)\\y(3-x^2-3y^2)\end{pmatrix}}_{1.}=g(\vec{x})$$

$\left.\begin{array}{l}\text{Om } \vec{x}=\vec{0} \text{ i (1)}\\ \text{sätt in i (2)}\\ \\ y(3-3y^2)=0\\ 3y^2=3\\ y^2=1\\ y=\pm 1\end{array}\right\}$ Samma gäller med y = 0 från (2) till (1)

Lösning:

1\. = $g(\vec{x}) = 0$

ger oss:

(0; 0), (0; ±1), (±1; 0)

Vi ersätter den icke-linjär med en linjär för att beräkna stationära punkter.

$$g'(\vec{x})=\begin{pmatrix}1-3x^2-3y^3 & -6xy\\ -2xy & 2-x^2-9y^2\end{pmatrix}$$ (Jacobimatris)

Insättning av respektive punkter:

$$g'(0;0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

Egenvärden:
$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ (ty diagonalmatris)
(skilda positiva egenvärden ⇒ instabil nod)

$$g'(1;0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$g'(-1;0)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Samma egenvärden $\lambda_1 = -2$
(olika tecken) $\lambda_2 = 2$
sadelpunkter, det vill säga instabil

$$g'(0;1)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$$

$$g'(0;-1)=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -6\end{pmatrix}$$

Samma egenvärden $\lambda_1 = -2$
(skilda negativa egenvärden) $\lambda_2 = -6$
Stabila noder

[10.3.30]

$$x''=\varepsilon\left(\frac{1}{3}(x')^3-x'\right)+x=0$$

Lösning:

Sätt y = x'

Vi deriverar och löser ut.

hastighetsvektor

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ \varepsilon\left(-\frac{1}{3}y^3+y\right)-x \end{pmatrix}}_{(*)}=g(\vec{x})$$

Kritiska punkter: (*) = $\vec{0}$

(0; 0) blir vår enda vektor.

Vi använder oss av Jacobi- oc funktionalmatris

$$g'(\vec{x})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon(-y^2+1) \end{pmatrix}$$

$$g'(0;0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Egenvärderna blir:

$$0=\det(0-\lambda \quad 1 \quad -1 \quad \varepsilon-\lambda)=(0-\lambda)(\varepsilon-\lambda)+1=\lambda^2-\varepsilon\lambda+1=$$

$$=\{\text{genom kvadrat komplitering}\}=$$

$$=\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+1\Rightarrow\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2=-1+\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2=\left(\frac{\varepsilon^2-4}{4}\right)^2$$

$$\lambda=\frac{\varepsilon\pm\sqrt{\varepsilon^2-4}}{2}$$

Beroende om ε är positiv eller negativ får vi imagionära eller reella rötter.

2.) (0; 0) är stabil då $\varepsilon < 0$

(0; 0) är stabil spiralpunkt då $\begin{cases} \varepsilon < 0 \\ \varepsilon^2 - 4 < 0 \end{cases}$ $-2 < \varepsilon < 0$

3.) (0; 0) är centrum då $\varepsilon = 0$

Det sista fallet [3.] är inte ekvivialent med injära/icke-linjära utan måste undersökas genom

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Egenvärderna är $\lambda = \pm i$ för (0; 0): punkten är ett center.

Autonomt system (10.1 kap.)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = g_1(x_1; x_2; \ldots; x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = g_n(x_1; x_2; \ldots; x_n) \end{cases}$$

då

$$\begin{cases} n = 2 \\ x_1 = x \\ x_2 = y \\ \dfrac{dx}{dt} = P(x; y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x; y) \end{cases}$$

Vi vill hitta där g_1 och så vidare = 0 det vill säga Kritiska punkter fås då $P = Q = 0$.

Typiskt tentatal (10.1.5 kap.)
Felräknad men med rätt körordning.

$x'' + x = \varepsilon x^{3,}$ $\varepsilon > 0$

Skriv om till ett system av 1:a ordningens ekvation. [sida 364]

Lösning:

Sätt $x' = y \Rightarrow x'' = y'$
men $x'' = -x + \varepsilon x^3$

Vi får

$$\begin{cases} x' = y & \Rightarrow P(x;y) \\ y' = x'' = -x + \varepsilon x^3 & \Rightarrow Q(x;y) \end{cases}$$

Kritiska punkter: $\begin{cases} y = 0 \\ -x + \varepsilon x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{matrix}$

$(0; 0)$, $(\pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}; 0)$ Se kaptiel 5.1 och 5.3, sida 182 och 207.

Linjära 1:a ordnings system (autonomt) (10.1.19 kap.)

$x' = 4x - 5y$
$y' = 5x - 4y$

$$\boxed{\begin{matrix} \cos at = a(t + T) = at + 2\pi \\ T = 2\pi / a \end{matrix}}$$

Enda kritiska punkten (0; 0).

Bestäm lösning då $x(0) = 4$, $y(0) = 5$.

Lösningen fås av problem 37, 8.2 kap.
Gör denna hemma.

Man får: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\cos 3t + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\sin 3t\right] + C_2\left[\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\sin 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\cos 3t\right)\right]$

Villkoret ger:

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=C_1\left[\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\cdot 1\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\cdot 0\right]+C_2\left[\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\cdot 0\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\cdot 1\right]=C_1\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}5C_1+0+0+0=4 & \Rightarrow & C_1=4/5\\ 4C_1+0+0-3C_2=5 & \Rightarrow & C_2=-3/5\end{bmatrix}$$

Vi får:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{4}{5}\left[\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\cos 3t+\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\sin 3t\right]-\frac{3}{5}\left[\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\sin 3t-\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}\cos 3t\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}4\cos 3t & -3\sin 3t\\ 5\cos 3t & -2\sin 3t\end{pmatrix}\qquad \text{Periodisk med } T=\frac{2\pi}{3}$$

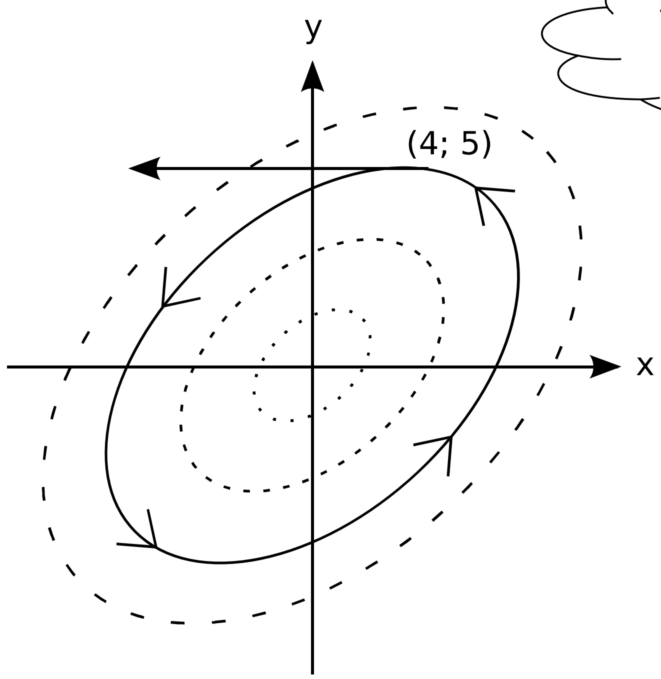
Blir en snett liggande ellips.

$$\begin{cases}x=4\cos 3t-3\sin 3t\\ y=5\cos 3t-2\sin 3t\end{cases}\Rightarrow\begin{array}{l}\cos 3t=7^{-1}(3y-2x)\\ \sin 3t=7^{-1}(4y-5x)\end{array}$$

Användning av trigonometriska ettan:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot(3y-2x)^2+\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot(4y-5x)^2=1\;\Rightarrow\; ax^2+bxy+cy^2=1$$

Via diagonalisering visas att detta en snett liggande ellips.



Stabil kritisk punkt
Startar man med andra värden så ligger det ellipser innanför och utanför.

[10.2]

1.)

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -5\end{pmatrix}$$

$$x(t)=C_1\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{K}_1}e^{-t}+C_2\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{K}_2}e^{-6t}$$

Lösning:

Koll av egenvärden:

$$\det(\mathbf{A}-\mathbf{I}\lambda)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -2\\ -2 & -5-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)(-5-\lambda)-4=$$

$$=(2+\lambda)(5+\lambda)-4=10+7\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2+7\lambda+6=0$$

$$\lambda = -\frac{7}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2-6} = -\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{24}{4}} = -\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}} =$$

$$= -\frac{7}{2}\pm\frac{5}{2} = \frac{-7\pm5}{2}$$

$$\begin{cases}\lambda_1 = \dfrac{-7+5}{2}=-\dfrac{2}{2}=-1\\ \lambda_2 = \dfrac{-7-5}{2}=-\dfrac{12}{2}=-6\end{cases}$$

Enda kritiska punkt = (0; 0)

Vi undersöker vad som händr runt origo.

$$\left.\begin{aligned}x'&=-2x-2y\\ y'&=-2x-5y\end{aligned}\right\}\rightarrow(0;\ 0)$$

då $t \to \infty$ så går

$$x(t)=C_1\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{-t}+C_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-6t}$$

mot

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$ Det vill säga stabil kritisk punkt för systemet.

Krav:

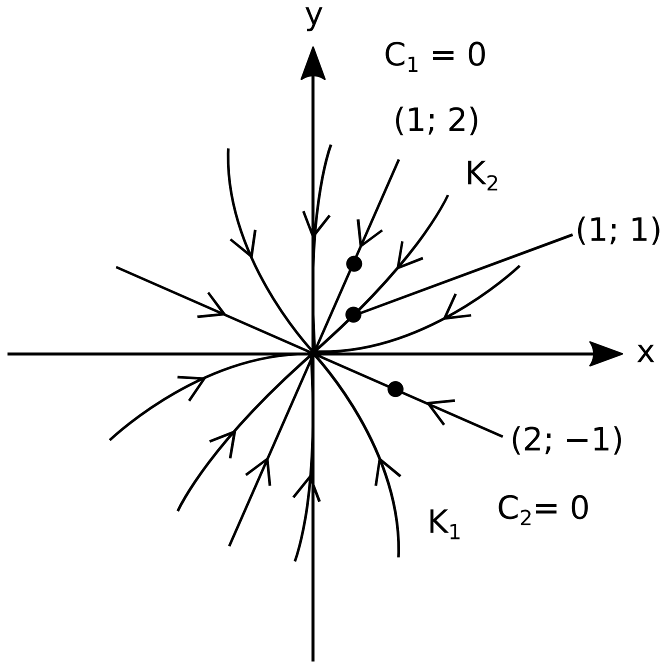
$$\vec{x}_0 = (1\,;\,1) = C_1(2 \quad -1)\cdot 1 + C_2(1 \quad 2)\cdot 1 \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3/5 \\ C_2 = -1/5 \end{cases}$$

Skissa lösningarna:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + \left(-\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-6t} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{-t} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{-6t}$$

Om $t \gg 1 : x \approx \frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{-t}$

Startar vi i (1; 1) så blir det



Stabil nod.
Kännetecken: reella negativa egenvärden.

[10.2.7]

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ Kolla e-värderna $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)+3 = -(2-\lambda)(2+\lambda)+3 =$$

$$=(\lambda-2)(\lambda+2)+3 = \lambda^2-2^2+3 = \lambda^2-4+3 = \lambda^2-1 = 0$$

$\lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$

$$x(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

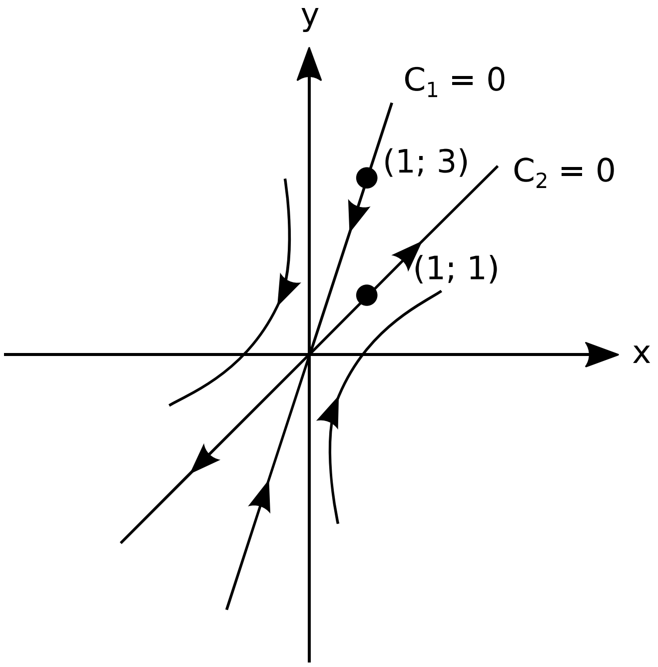
Krav: $x_0 = (1;1)$

Lösning:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 & C_2 = 0 \\ C_1 + 3C_2 = 1 & C_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Längden } x}}{\|\vec{x}(t)\|} \to \infty \quad \text{då } t \to \infty$$

Detta ger oss en sadelpunkt ty olika egenvärden med olika tecken.



[10.3]

$x' = P(x; y)$ $\quad$ $P(x_0; y_0) = 0$
$y' = Q(x; y)$ $\quad$ $Q(x_0; y_0) = 0$

Lösning:

Taylorutveckla P och Q till $(x_0; y_0)$

$$P(x; y) = P(x_0; y_0) + P'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + P'_y(x_0; y_0)(y - y_0) + \dots$$
$$Q(x; y) = Q(x_0; y_0) + Q'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + Q'_y(x_0; y_0)(y - y_0) + \dots$$

Sätt $x - x_0 = u$, $y - y_0 = v$
$x' = u'$, $y = v'$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} u' \triangleq P'_x u + P'_y v \\ v' \triangleq Q'_x u + Q'_y v \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

[10.3.13 a]

$x' = y - x^2 + 2 = P$ $\quad$ (Icke-linjärt system)
$y' = x^2 - xy = Q$

Bestäm kritiska punkter.

Lösning:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & y - x^2 + 2 = 0 \\ (2) & x^2 - xy = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} 1) & x = 0 \\ 2) & x = y \end{array}$$ Insättning i (1)

ger oss

$$x = 0 \;\rightarrow\; y - 0 + 2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -2$$
$$x = y \;\rightarrow\; x - x^2 + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

Kritiska punkter blir: $(0;-2)$, $(2;2)$, $(-1;-1)$

Linearisering med Jacobi:

$$J=\begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 2x-y & -x \end{pmatrix}$$

1)

$$(0;-2) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda^2-2=0 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}$$

Sadelpunkt både i linjära och icke-linjära system. (Instabil)

2)

$$(2;2) \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (4+\lambda)(2+\lambda)-2=$$

$$=8+6\lambda+\lambda^2-2=\lambda^2+6\lambda+6=0 \Rightarrow \lambda=-3\pm\sqrt{6}$$

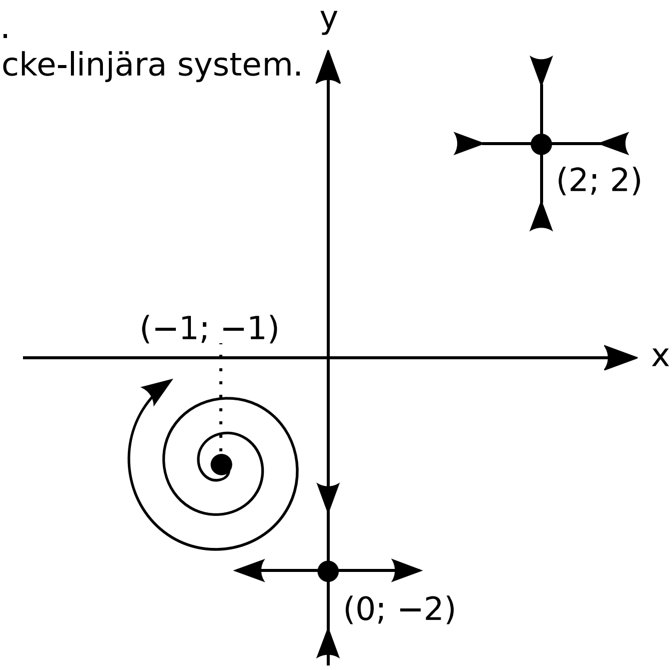
Båda mindre än 0.
Stabil nod.
Gäller både i linjära och icke-linjära system.

3)

$$(-1;-1) \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda-1)+3=$$

$$=\lambda^2-3\lambda+2+3=\lambda^2-3\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Instabil spiral, ty $\Re\,\lambda > 0$.
Gäller både i linjära och icke-linjära system.



2010–(09)sep–20: dag 9, 14

Stabilitetsundersökning av icke-linjära system

$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X})$

Läraren skrev med punkt övanför, vilket innebär att det är första derivatan, två punkter är andra derivatan, och så vidare. Punkt används oftast i mekaniken för vid derivata med avseende på tiden.

Stationär lösning:

$$\dot{\vec{X}} = \vec{0} = \vec{f}(\vec{X})$$

$$\vec{X} = \vec{X}_0$$

Taylorutveckling kring den kritiska punkten:

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X}) = \vec{f}(\vec{X}_0) + \vec{f}(\vec{X}_0)(\vec{X} - \vec{X}_0) + \vec{R}_2$$

Taylorutveckling lästes i tidigare matematikkurs.
“Analys i en variabel” går genom taylorutveckling i 9 kap.

Linjärisert system:

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X}_0)(\vec{X} - \vec{X}_0)$$

$$\vec{f}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{“Jacobimatris”}$$

I Matematik II, för CL, (Fler variabeln) läser man om Jacobimatrisen. Den anger derivatan för n antal funktioner i avseende på n antal variabler.

[z.c.10.3.14.]

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y^2 \\ -y + xy \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(\vec{X})$$

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ -y + xy = -y(1-x) = 0 \end{cases}$$

a) $y = 0 \Rightarrow x = 0$, $(x; y) = (0; 0)$

b) $x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$, $(x; y) = (1; \pm\sqrt{2})$

$$\mathbf{g}'(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ y & -1+x \end{pmatrix} = \text{“Funktionalmatris”}$$

$$\mathbf{g}'(0;0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (↗-diagonalen kallas “bidialgonalen”)

↘-diagonalen kallas “huvuddiagonalen”. **g'**(0; 0) är en (huvud)diagonalmatris.

(0; 0) är en sadelpunkt, ty signum(λ_1) = –signum(λ_2) ≠ 0.
Därmed är diagonalen även instabil.

Man bör känna till signum i denna kurs, och nämns en gång,i föreläsningarna. Signum-funktionen är förklarad i nomenklaturlistan i slutet av dokumentet.

$$\mathbf{g}'(1;\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\lambda + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 4$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$\Re\,\lambda > 0 \therefore$ Instabil spiral i $(1; \sqrt{2})$

Alternativ framställning:

(0; 0)

$$D\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-y^2\\xy\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-y^2\\xy\end{pmatrix}$$

(1; $\sqrt{2}$)

Sätt: $\begin{cases}u=x-1\\v=y-\sqrt{2}\end{cases}\left|\begin{matrix}u'=x'\\v'=y'\end{matrix}\right.$

$$\begin{cases}u=x-1\\v=y-\sqrt{2}\end{cases}\left|\begin{matrix}u'=x'\\v'=y'\end{matrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}u'\\v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(u+1)-(v+\sqrt{2})^2\\-(v+\sqrt{2})+(u+1)(v+\sqrt{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u-v^2-2v\sqrt{2}\\uv+u\sqrt{2}\end{pmatrix}=$$

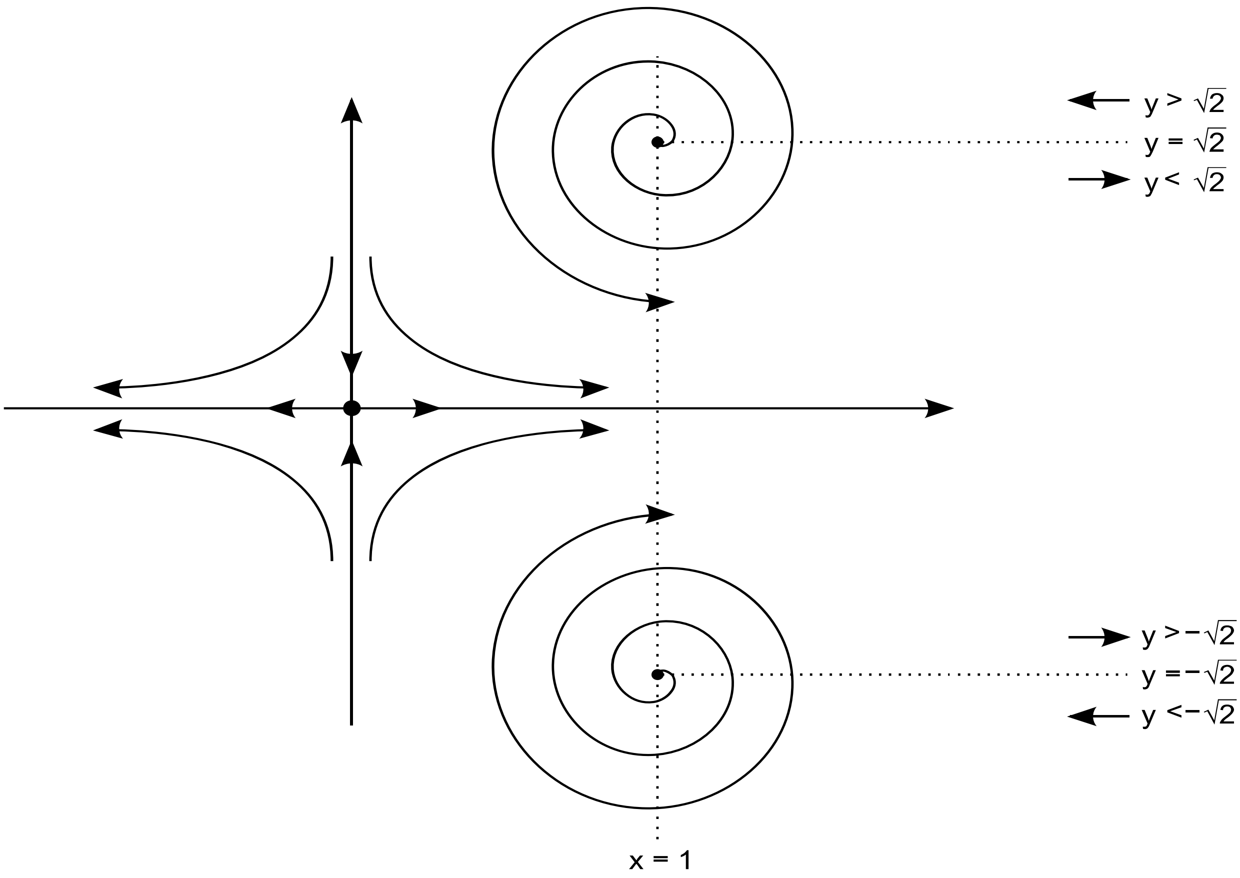
$$=\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-v^2\\uv\end{pmatrix}$$

$$\vec{0}=(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\vec{v}=\begin{pmatrix}2-\lambda & 0\\0 & -1-\lambda\end{pmatrix}\vec{v}$$

$$\lambda_1=2,\qquad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad \lambda_2=-1,\qquad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Fasporträtt:

$$\vec{X}'(x \triangleq 1) = \begin{pmatrix} 2 - y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Spiralers rotationsriktning kan fås genom att
kolla derivatan i en närliggande punkt, eller genom
att titta på en stationär punkt med kända riktningsderivator.

Modul 3

2010–(09)sep–20: dag 1, 14

Modul 3

Laplacetransformer (andra än CL)
Fouriertransformer (CL)

PDE och randvärdesproblem i rektangulära koordinater

Ortogonala funktioner och fourierserier

Partiella differentialekvationer och randvärdesproblem

12.1. Separabla PDE
12.2. Klassiska ekvationer och randvärdesproblem
12.3. Värmesledningsekvationer
12.4. Vågekvationer
12.5. Laplace ekvation

Variableseparation

$$u'_x = u + u'_y$$

Ansats: $u(x; y) = X(x)Y(y)$

$X'(x)Y(y) = X(x)Y(y) + X(x)Y'(y)$

Dividera med $X(x)Y(y)$.

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1)Y(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda - 1)y} \end{cases}$$

$u_\lambda(x; y) = (AB)_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} = c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$

$$u(x; y) = \sum_{\forall \lambda} c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$$

Villkor:

$u(x; 0) = 5e^{-3x} - 4e^{x}$

$$u(x;0) = 5e^{-3x} - 4e^{x} = \sum_{\forall \lambda} c_\lambda e^{\lambda x}$$

Identifiering ger:

$$\begin{cases} \lambda = -3; & c_{-3} = 5 \\ \lambda = 1; & c_1 = -4 \\ \text{Övriga} & c_\lambda = 0 \end{cases}$$

$u(x; 0) = 5e^{-3x} - 4e^{x}$

Variableseparation

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ Vågekvationen.

Ansats: $u(x; t) = X(x)T(t)$

$a^2X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$$

Ett system av okopplade ODE erhålls.

$X''(x) = \lambda X(x) = 0$
$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$

Linjära med konstant kefficienter

Tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$

Motsvarande för “T-ekvationen” ges:

$T(t) = C_1 e^{a\mu t} + D_1 e^{-a\mu t}$

$\lambda = 0$:

$X''(x) = 0$

$X(x) = A_2 x + B_2$

$T(t) = C_2 t + D_2$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

$T(t) = C_3 \cos a\mu x + D_3 \sin a\mu x$

2010−(09)sep−22: dag 2, 15

Variabelseparation:

$u'_x = u - u'_y$

Ansats: $u(x; y) = X(x) \cdot Y(y)$

$\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$

$\begin{cases} X'(x) + \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1) Y(y) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda - 1)y} \end{cases}$

Variabelseparation för vågekvation:

$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

Ansats: $a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t) = X(x) \cdot T''(t)$

$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \text{“konstant”} = \lambda$

Ett system av okopplade ODE erhålls: $\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0 \end{cases}$

Linjär md konstant koefficienter.

Tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$

1) $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$
$T(t) = C_1 e^{a\mu t} + D_1 e^{-a\mu t}$

Se förra sidan (del av förra föreläsningen) för fall 2 och 3.

[12.4.1]

Vi söker den lösning som uppfyller de givna randvillkoren.

Lösning:

$u(0; t) = u(L; t) = 0$

Därefter anpassar vi lösningen till begynnelsevillkoren.

$$\begin{cases} u(x;0)=\frac{1}{4}x(L-x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x;0)=0 \end{cases}$$

Variabelseparation (Vågekvation)

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Substitution en ger att randvillkoren kan skrivas

$$\begin{cases} 0=u(0;t)=X(x)\cdot T(t) \\ 0=u(L;t)=X(x)\cdot T(t) \end{cases}$$

Dessa samband skall gälla för alla t.
Detta innebär att 0 = X(0), 0 = X(L).

Vi studerar de tre olika fallen.

1) $\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$

Lösningarna ges av $X(x)=A_1 e^{\mu x}+B_1 e^{-\mu x}$

$$\begin{cases} 0=X(0)=A_1+B_1 \\ 0=X(L)=A_1 e^{\mu L}+B_1 e^{-\mu L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_1=-A_1 \\ A_1\left(e^{\mu L}-e^{-\mu L}\right)=0 \end{cases}$$

Endast triviala lösningen:

$A_1 = B_1 = 0$

2) $\lambda = 0$

$$\begin{cases} X(x) = A_2 x + B_2 \\ T(t) = C_2 + D_2 \qquad (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = X(0) = B_2 \\ 0 = X(L) = A_2 L + B_2 \end{cases}$$

Endast triviala lösningen:

$$A_2 = B_2 = 0$$

3) $\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

$$\begin{cases} 0 = X(0) = A_3 \\ 0 = X(L) = A_3 \cos \mu L + B_3 \sin \mu L \end{cases}$$

$B_3 \sin \mu L = 0$

$B_3 = 0$ ger endast de trivial lösningarna.
Däremot ger $\sin \mu L = 0$: $\mu L = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Motsvarande T-lösning blir (*).

$$\begin{cases} X(x) = B_3 \sin \dfrac{n\pi}{L} x \\ T(t) = C_3 \cos a \dfrac{n\pi}{L} t + D_3 \sin a \dfrac{n\pi}{L} t \end{cases}$$

En lösning som satisifierar differential ekvationen
och de givna randvillkoren är

$$u_n(x;\, t) = B_3 \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \left(C_3 \cos \frac{n\pi}{L} t + D_3 \sin \frac{n\pi}{L} t \right)$$

Varje linjärkombination av lösningen är en lösning.

$$u(x;\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos a \frac{n\pi}{L} t + b_n \sin a \frac{n\pi}{L} t \right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Insättning av villkor för att bestämma konsterna a_n och b_n:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x;\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a\frac{n\pi}{L}\left(-a_n \sin a\frac{n\pi}{L}t + b_n \cos a\frac{n\pi}{L}t\right)\sin \frac{n\pi}{L}x$$

$$u(x;\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L}x = \frac{1}{4}x(L-x)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x;\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a\frac{n\pi}{L}b_n \sin \frac{n\pi}{L}x = 0$$

Trigonometrisk serie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p}\right)$$

Ortogonala funktioner och Fourierserier:

11.1. Ortogonala funktioner.
11.2. Fourierserier
11.3. Fouriercosinus- och -sinusserier

Inre produkt av den trigonometriska serien:

$$\langle f_1;\, f_2\rangle = \int_a^b f_1(x) f_2(x)\, dx$$

Funktionsföljden

$$\left\{1,\ \cos\frac{\pi x}{p},\ \cos\frac{2\pi x}{p},\ \ldots,\ \cos\frac{m\pi x}{p},\ \ \sin\frac{\pi x}{p},\ \sin\frac{2\pi x}{p},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi x}{p}\right\}$$

är ortogonal på intervallet [p; −p], med den inre produkten

$$\langle f_1;\, f_2\rangle = \int_{-p}^{p} f_1(x) f_2(x)\, dx$$

Ortogonalrelationer

$$\int_{-p}^{p} 1 \cdot \cos \frac{m\pi x}{p}\, dx = \left[\frac{p}{m\pi x} \sin \frac{m\pi x}{p} \right]_{-p}^{p} = 0, \quad m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} 1 \cdot \sin \frac{m\pi x}{p}\, dx = \left[-\frac{p}{m\pi x} \cos \frac{m\pi x}{p} \right]_{-p}^{p} = 0, \quad m > 0$$

Detta ger

1) $$\int_{-p}^{p} \cos \frac{m\pi x}{p} \cdot \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-p}^{p} 2 \cos \frac{m\pi x}{p} \cdot \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx$$

2) $$\int_{-p}^{p} \cos \frac{m\pi x}{p} \cdot \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-p}^{p} 2 \cos \frac{m\pi x}{p} \cdot \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$$

3) $$\int_{-p}^{p} \sin \frac{m\pi x}{p} \cdot \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n \end{cases}$$

Fourierserien till en funktion f definierad på intervallet $]-p; p[$ ges av

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$\int_{-p}^{p} f(x)\, dx = \int_{-p}^{p} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \right] dx$$

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx}$$

$$\int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{m\pi x}{p}\, dx = \int_{-p}^{p} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{p}\, dx$$

$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx$	$b_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx$

2010–(09)sep–23: dag 3, 16

[Moduluppgift 2]

Bestäm dem kritiska punkterna till

$$\begin{cases} x' = x - y = P(x; y) \\ y' = 1 - x^2 = Q(x; y) \end{cases}$$

Avgör stabilitet och typ hos dessa.

1. Kritisk punkt: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$

a) $x = 1$
$y = x = 1$

$(1; 1)$ är en kritisk punkt.

b) $x = -1$
$y = x = -1$

$(-1; -1)$ är en kritisk punkt.

2a) Linjärisera i punkten $(1; 1)$

$$\mathbf{A_1} = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}\right]_{(1;1)} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}\right]_{(1;1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A_1} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

sadelpunkt (signum λ_1 = –signum $\lambda_2 \neq 0$)

2b) punkt (–1; –1)

$$\mathbf{A_2}=\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}\right]_{(-1;\,-1)}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A_2}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)(-\lambda)-2=\lambda^2-\lambda+2=0$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\pm i\frac{1}{2}\sqrt{7}$$

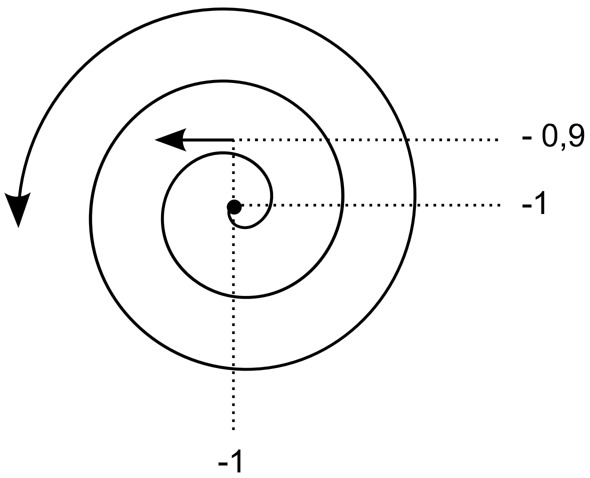
Instabil $\because$ $\Re\,\lambda > 0$
Spiral $\because$ $\Im\,\lambda \neq 0$

Åt vilket håll roterar spiralen?

Tag, till exempel, (–1; –0,9)

Riktningsvektorn i (–1; –0,9) är

$$\left[\begin{pmatrix} x-y \\ 1-x^2 \end{pmatrix}\right]_{(-1;\,-0{,}9)}=\begin{pmatrix} -1+0{,}9 \\ 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



[Moduluppgift 3]

Visa att {sin nx | n = $\mathbb{Z}_+$} utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet [0; π].

Lösning:

Vi måste visa att $(\sin nx; \sin mx) = \int_0^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = 0$ för alla m ≠ n.

Kom ihåg: cos (α ± β) = cos α · cos β ∓ sin α · sin β
sin α · sin β = ½(cos (α – β) – cos (α + β))

$$\int_0^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left[\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{\pi} = \frac{\sin((n-m)\pi)}{2(n-m)} - \frac{\sin((n+m)\pi)}{2(n+m)}$$

Skriv funktionen $\sin^3 x$ på intervallet [0; π] som linjärkomination av ovan.

Se Beta sida 128:

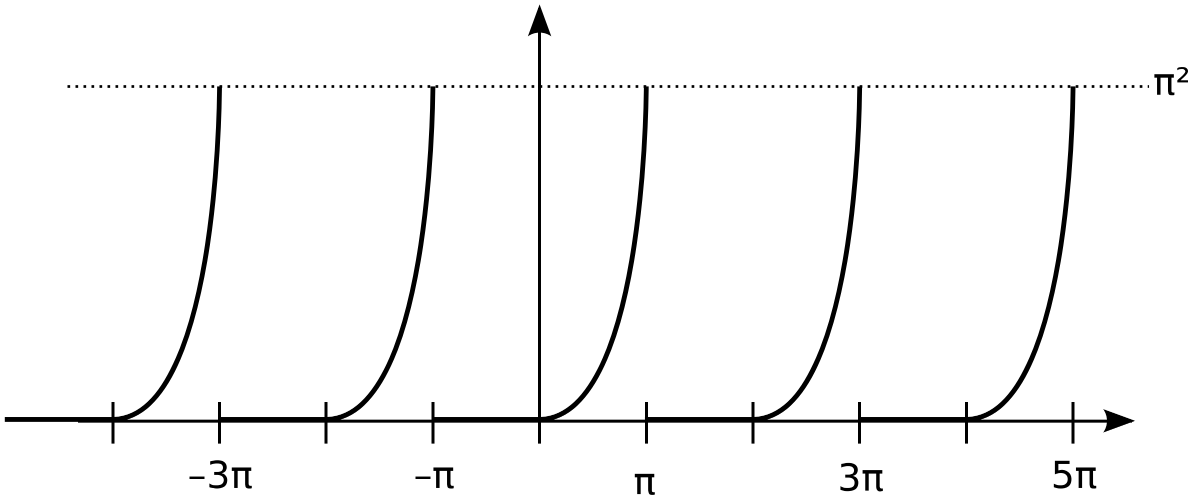
$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$$

Vi vet att funktionerna kan uttryckas som linjärkombination av linjärt oberoende vektorer bara på ett enda sätt.

Beräkna Fourierserien av

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & \Leftarrow \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Periodisk utvidning:



$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$f \simeq \mathcal{F}(f)$ Om f är helt kontinuerlig så är $f = \mathcal{F}(f)$, annars så är $f \sim \mathcal{F}(f)$.

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{x^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} \, dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l|c} \multicolumn{2}{l}{\text{Partial integration}} \\ u_1 = x^2 & v_1' = \cos nx \\ u_2 = x & v_2' = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin nx + \frac{2}{n^2} \left(x \cos x - \frac{1}{n} \sin nx \right) \right]_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{n^2} \cdot \pi \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} = \frac{2}{n^2} (-1)^n
\end{aligned}$$

Observera att det är blir skillad i a_n om $n = 0$, så för a_n så måste $n \neq 0$.

b_n — se facit

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{2}{n^2} \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

$f(x) = \mathcal{F}(f)(x)$ för alla x där f är kontinuerlig.

I punkterna $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

Exempel: $\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\pi^2 + 0}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (En av Ramanujans formler)

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n^2} \cdot (-1)^n = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

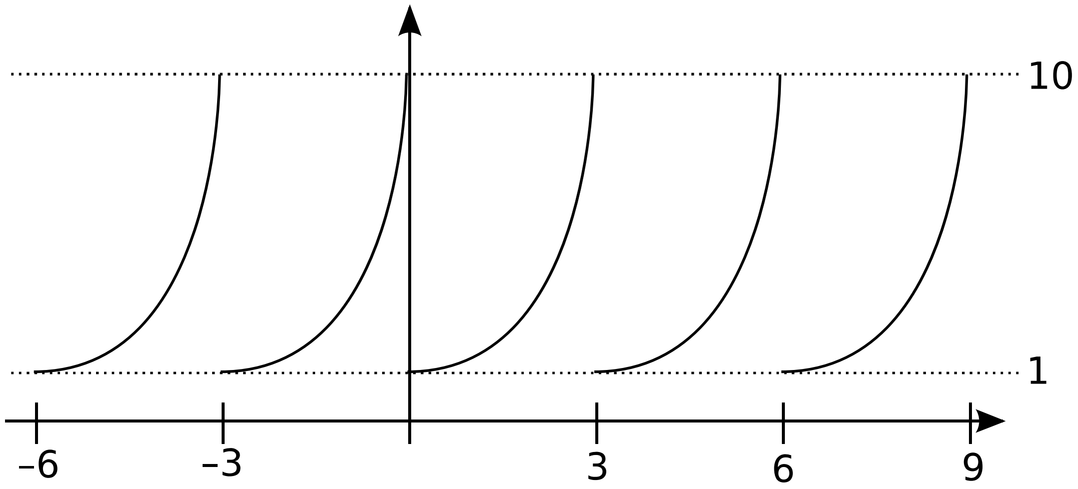
3) Antag att $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i
a) Fourierserie ($\mathcal{F}$)
b) sinus-serie ($\mathcal{F}_s$)
c) cosinus-serie ($\mathcal{F}_c$)

Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar för x = 0.

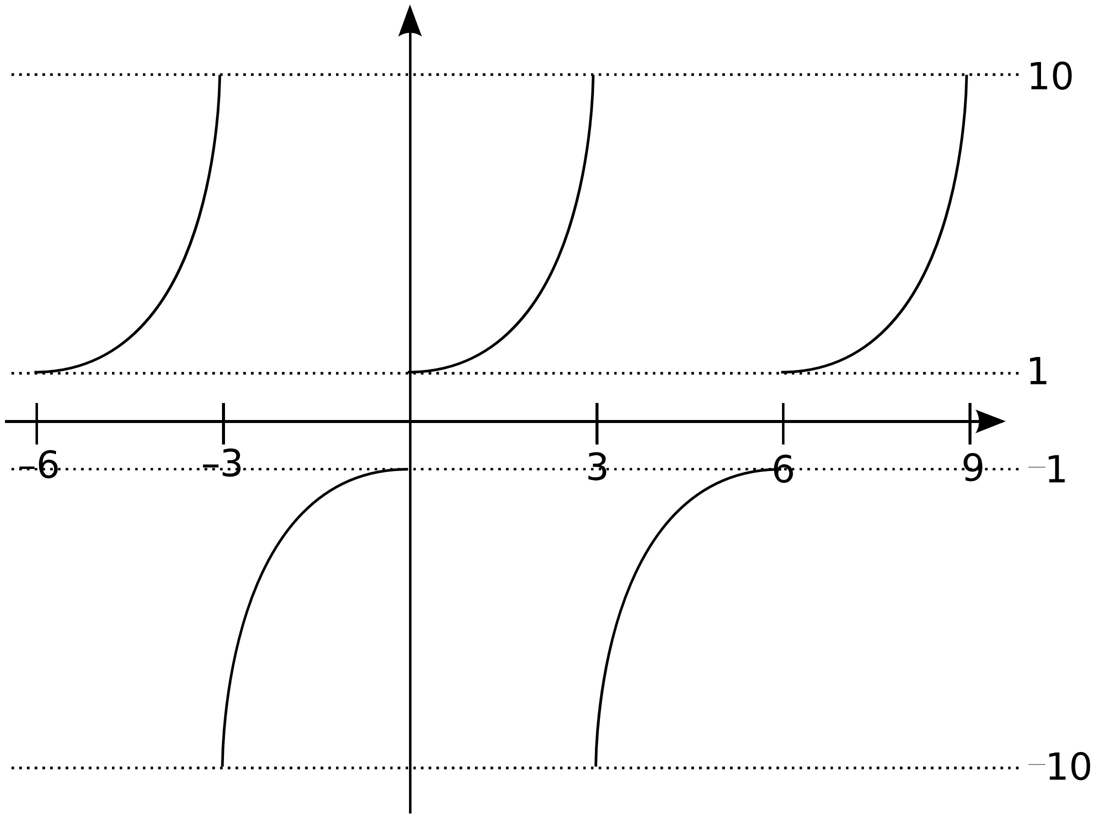
a) $\mathcal{F}$ konvergerar mot 5,5 se bild på nästa sida

b) $\mathcal{F}_s$ konvergerar mot 0 se bild på nästa sida udda f

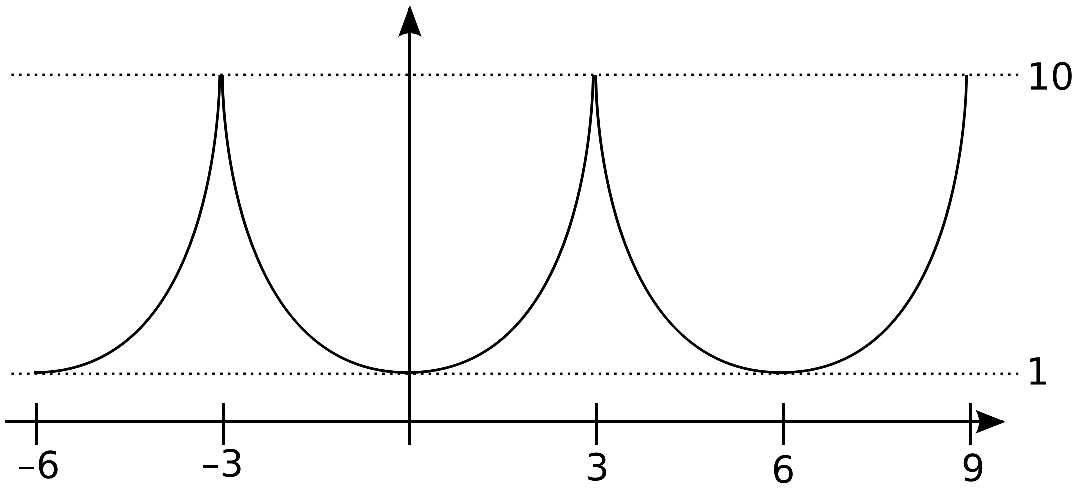
c) $\mathcal{F}_c$ konvergerar mot 1 se bild om två sidor jämna f a)



b)



c)



2010–(09)sep–24: dag 4, 17

Funktionsmängden

$$\{1\} \cup \left(\coprod_{i=1}^{n} \cos \frac{i\pi x}{p} \right) \cup \left(\coprod_{i=1}^{n} \sin \frac{i\pi x}{p} \right)$$

är ortogonal på intervallet [–p; p] med den inre produkten

$$\langle f_1; f_2 \rangle = \int_{-p}^{p} f_1(x) \cdot f_2(x)\, dx$$

Fourierserien till en funktion ƒ definierad på intervallet]–p; p[ges av:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx$$

$$n \neq 0 \qquad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx$$

Fourierserien för en jämn funktion på intervallet]–p; p[:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\, dx$$

Fourierserien för en udda funktion på intervallet]–p; p[:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right) \qquad b_n = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\, dx$$

Konvergensvillkor:

Låt ƒ och ƒ' vara styckvis kontinuerliga på intervallet]–p; p[.

Då konvergerar ƒ:s Fourierserie mot $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.

[z.c.11.2.7.]

ƒ(x) = x + π,   –π < x < π

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)dx=\frac{1}{\pi}(0+\pi 2\pi)=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\ dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[(x+\pi)\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{\text{udda}}dx=0,\qquad (n\neq 0)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\ dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[(x+\pi)\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}(2\pi)\frac{-\cos nx}{n}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{2\pi}{\pi n}\cos nx+0=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

[z.c.12.4.1.]

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{an\pi t}{L}+b_n \sin\frac{an\pi t}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Det återstår nu att bestämma konstanterna a_n och b_n.

Begynnelsevillkoret ger oss:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{L}\left(b_n \cos\frac{an\pi t}{L}-a_n \sin\frac{an\pi t}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Fourierserien för en udda funktion på intervallet]–p; p[:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n \sin\frac{n\pi x}{p}, \quad b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$u(x;0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \sin\frac{n\pi x}{L}=\underbrace{\frac{1}{4}x(L-x)}_{\text{Givet}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x;0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{L}b_n \sin\frac{n\pi x}{L}=\{\text{Givet}\}=0 \quad , \quad b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L \frac{1}{4}x(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=\{\text{slut...}\}$$

[z.c.12.3.3.]

Värmeledesekvation.

Find the temperature u(x; t) in a rod of length L if the initial temperature is ƒ(x) throughout and if the ends x = 0 and x = L are insulated.

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\quad ,\qquad 0 < x < L,\quad t > 0$$

Randvillkor: $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}u(0;t)=0 \\ \frac{\partial}{\partial x}u(L;t)=0 \end{cases}$, $t > 0$

Begynnelsevillkor: $u(x; 0) = ƒ(x)$, $0 < x < L$

Separera variablerna: $u(x; t) = X(x)T(t)$

$kX''(x)T(t) = X(x)T'(t)$

Dividera med $kX(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=\text{“konstant”}=\lambda$$

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ T'(t)-\lambda kT(t)=0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$

Lösningarna ges av

$X(x) = A_1e^{\mu x} + B_1e^{-\mu x}$

$\lambda = 0$:

$X''(x) = 0$

$X(x) = A_2x + B_2$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

Substitutionen ger att randvilloren kan skrivas

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} u(0;t) = X'(0) T(t)$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} u(L;t) = X'(L) T(t)$$

Dessa samband skall stämma för alla t.

Detta innebär att: $0 = X'(0)$, $0 = X'(L)$.

$\lambda > 0$:

$$X'(x) = \mu \cdot (A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$$

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu \cdot (A_1 - B_1) \\ 0 = X'(L) = \mu \cdot (A_1 e^{L\mu} - B_1 e^{-L\mu}) \end{cases}$$

$$A_1 = B_1 = 0$$

Endast den triviala lösningarna $\mu = 0$

$\lambda = 0$:

$$X'(x) = A_2$$

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = A_2 \\ 0 = X'(L) = A_2 \end{cases}$$

$$X(x) = B_2$$

$$T(t) = C_2$$

λ < 0:

$X'(x) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu x - B_3 \cos \mu x)$

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu \cdot (B_3) \\ 0 = X'(L) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu L + B_3 \cos \mu L) \end{cases}$$

$B_3 = 0$

$A_3 \sin \mu L = 0$

Icke-triviala lösningar erhålles då $\mu L = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$X(x) = A_3 \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$T(t) = C_3 e^{\overbrace{-\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2}^{\lambda = -\mu^2} kt}$$

$$u(x;t) = B_2 C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_3 C_3)_n \cos \frac{n\pi x}{L}\ e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}\ e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}$$

Begynnelsevillkoret ger:

$$f(x) = u(x;0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

2010–(09)sep–27: dag 5, 18

Fourierserien till en funktion, ƒ, definierad på intervallet]–p; p[ges av

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right.}_{\mathcal{F}_c} + \underbrace{\left. b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)}_{\mathcal{F}_s}$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

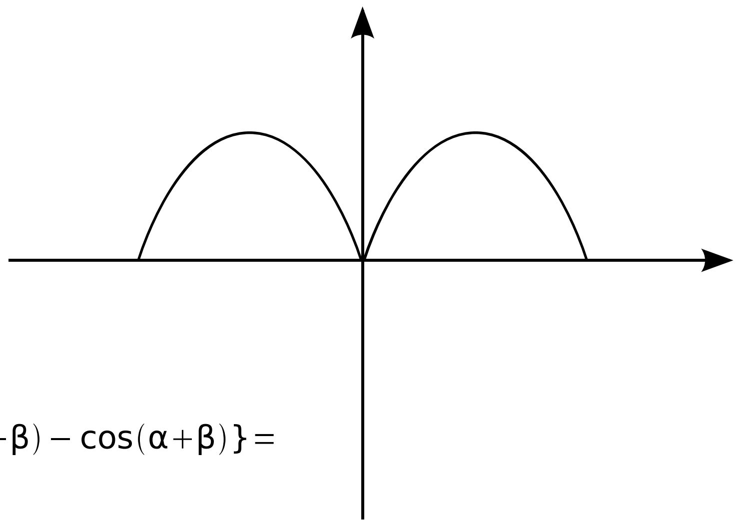
Omm intervallet är helt slutet och kontinuerligt ersätts ~ med =, generellt sätt skrivs förhållandet ≃.

[z.c.11.3.28.]

$f(x) = \sin x, \qquad 0 < x < \pi$

a) Jämn utvidning:

Fourierserien är på formen $\mathcal{F}_c$



$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,dx =$$

$$= \{2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(nx+x) - \sin(nx-x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx+x)}{n+1} + \frac{\cos(nx-x)}{n-1}\right]_0^{\pi} = \qquad n \neq 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(\overbrace{n\pi+\pi}^{\varphi})}{n-1} - \frac{1-\cos(\overbrace{n\pi-\pi}^{\theta})}{n-1}\right) = \{\varphi - \theta = 2\pi\} =$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{1-(-1)^{n+1}}{n-1}\right)=$$

$$=\frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=-2\frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}$$

n = 1:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \ \cos x \ dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \ dx=\frac{1}{\pi}\cdot 0=0$$

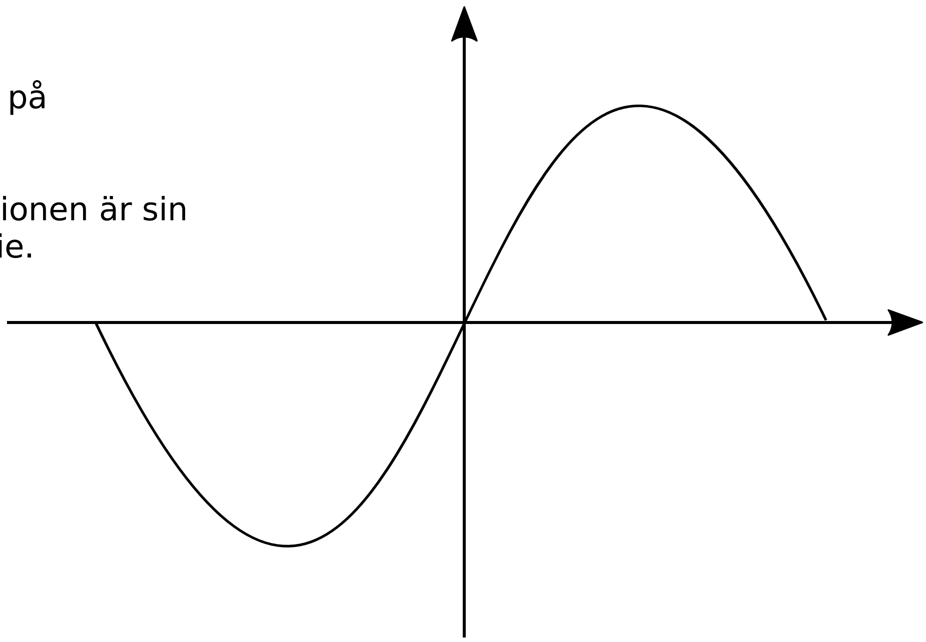
$$a_0=-2\frac{1+(-1)^0}{\pi(0^2-1)}=-2\frac{1+1}{\pi(0-1)}=2\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$$f\sim\frac{2}{\pi}+0+\sum_{n=2}^{\infty} 2\frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)} \cos nx = \frac{2}{\pi}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)} \cos 2mx$$

b) Udda utvidning:

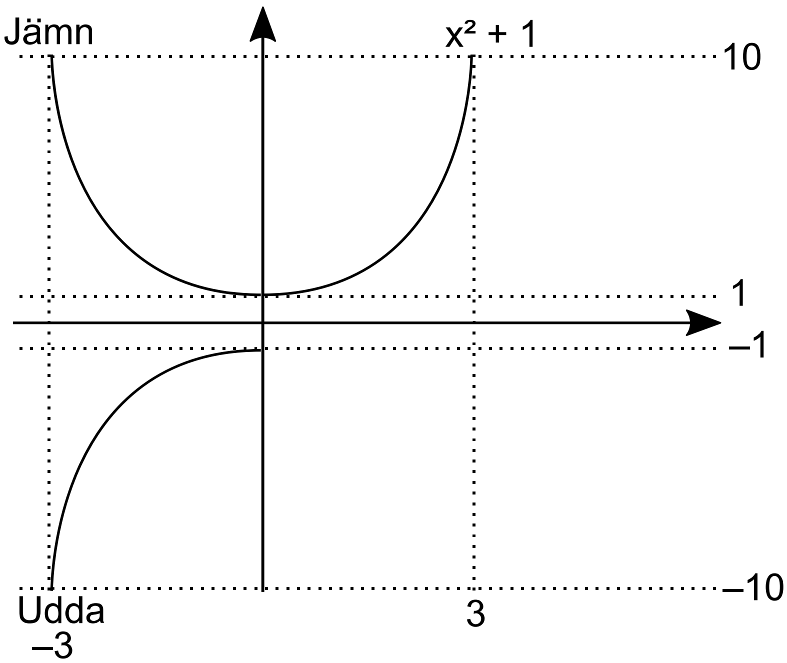
Fourierserien är på formen $\mathcal{F}_s$

Den givna funktionen är sin egen Fourierserie.



[Exempel 2]

Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i en cosinusserie ($\mathcal{F}_c$) och i en sinusserie ($\mathcal{F}_s$). Bestäm värdet som respektive serie konvergerar mot för x = 0.



Konvergensvillkor:

Låt ƒ och ƒ' vara stycklis kontinuerliga på intervallet]–p; p[.
Då konvergerar ƒ:s Fourierserie mot

$$\frac{f(x^+) - f(x^-)}{2} \quad .$$

$\mathcal{F}_c(f)$ konvergerar mot 1.
$\mathcal{F}_s(f)$ konvergerar mot 0.

[z.c.12.5.12.]

Laplace' /la'plas/ ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi$$

$$\text{Randvillkor:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0;\, y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi;\, y) = 0 \\ u(x;\, 0) = f(x) \\ u(x;\, y) \text{ begränsad då } y \to \infty \end{cases}$$

Separera variablerna: $u(x; u) = X(x)Y(y)$.

$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$

$\lambda = 0$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

X.x) = $A_2 x + B_2$
X.xi)

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Substitutionen ger att randvillkoren kan skrivas:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = X'(0)Y(y) \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi; y) = X'(\pi)Y(y) \end{cases}$$

Dessa samband skall gälla för alla y.
Detta innebär att $0 = X'(0)$ och $0 = X'(\pi)$.

$\lambda > 0$:

$X'(x) = \mu \cdot (A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$

$0 = X'(0) = \mu \cdot (A_1 - B_1)$

$0 = X'(\pi) = \mu \cdot (A_1 e^{\mu\pi} - B_1 e^{-\mu\pi})$

$A_1 = B_1 = 0$

Endast den triviala lösningen: u = 0

$\lambda = 0$:

$X'(x) = A_2$

$0 = X'(0) = A_2$

$0 = X'(\pi) = A_2$

$X(x) = A_2$

$Y(y) = C_2 y + D_2$

$u(x; y)$ begränsad då $y \to \infty \Rightarrow C_2 = 0$

$\lambda < 0$:

$X'(x) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x)$

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu \cdot (B_3) \\ 0 = X'(\pi) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu\pi + B_3 \cos \mu\pi) \end{cases}$$

$B_3 = 0$

$A_3 \sin \mu\pi = 0$

Icke-triviala lösningar erhålles då $\mu \in \mathbb{Z}$.

$X(x) = A_3 \cos n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

$Y(y) = C_3 e^{ny} + D_3 e^{-ny}$

$u(x; y)$ är begränsad då $y \to \infty \therefore C_3 = 0,\ Y(y) = D_3 e^{-ny}$

$$u(x; y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\ e^{-ny}$$

$$f(x) = u(x; 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

2010–(09)sep–29: dag 6, 19

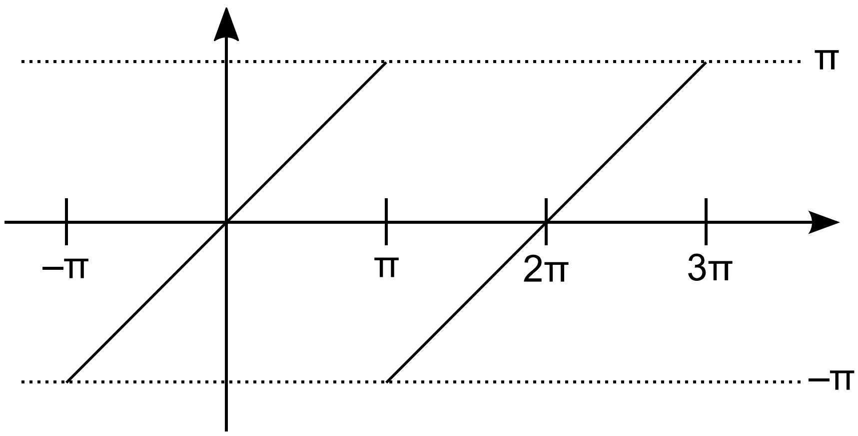
[Moduluppgift 7]

Bestäm den allmäna lösningen till

$y'' + 5y = f(x)$, där $f(x) = x$

för $-\pi \le x < \pi$

$f(x)$ och 2π-periodisk



$y = y_h + y_p$

1) Lös den homogena ekvationen

$y_h = A \cos \sqrt{5}x + B \sin \sqrt{5}x$ (*)

A och B är konstanter.

(*) ∵ Karaktäristisk ekvation:

$r^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{-5} = \pm i\sqrt{5}$

2) f är udda

Utveckla f i $\mathcal{F}_s$ (sinusserie)

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{x}_{f(x)}\cdot\sin nx\,dx=\left\{\begin{array}{c|c} f=x & f'=1 \\ g'=\sin nx & g=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} fg'dx=\frac{2}{\pi}\left(\Big[\,fg\,\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'g\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\underbrace{\sin n\pi}_{0}=-\frac{2}{n}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}=$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Antag att } y_p \text{ är udda.}\\ \text{Då utvecklas } y_p \text{ i } \mathcal{F}_s\text{:}\\ \qquad y_p(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin nx\end{array}\right\}\ \text{Inte alltid sant!}$$

Vi ska bestämma B_n.

Sätt in ansatsen för y_p i ekvationen.

$$y_p'=\sum_{n=1}^{\infty} nB_n\cos nx \qquad y_p''=-\sum_{n=1}^{\infty} n^2B_n\sin nx$$

$$\left(\begin{array}{l|c} \overbrace{-\sum_{n-1}^{\infty} n^2 B_n \sin nx + 5\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx}^{\alpha} = & \\ = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \sin nx}_{\beta} & \alpha-\beta=0 \end{array}\right)$$

Identifiera koefficienter för sin nx

$$B_n(-n^2+5)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$B_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n(5-n^2)}$$

$$y_p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\underbrace{(5-n^2)}_{\neq 0}}(-1)^{n+1}\sin nx$$

{sin nx | n ∈ $\mathbb{Z}_+$} är ett ortogonalt system

∴ alla sin nx där n ∈ $\mathbb{Z}$ (egentligen n ∈ $\mathbb{R}$) är linjärt oberoende.

[Moduluppgift 13]

Bestäm lösningen till den partiella differential ekvationen (PDE):

$$u'_x=u'_y+u$$

som uppfyller u(x; 0) = $3e^{-5x} + 2e^{-3x}$.

Det är svårt att hitta alla lösningar till en PDE, därför söker vi bara en lösning.

Lösning: Söker u(x; y) = X(x)Y(y).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)Y(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=X(x)Y'(y)$$

Sätt in u i ekvationen

$$\underbrace{X'Y=XY'+}_{\text{ekvationen}}XY=X\cdot(Y'+Y)$$

$$\left(\frac{X'}{X}\right)(x)=\left(\frac{Y'}{Y}+1\right)(y)$$ (Jo, läraren skrev med den nomenklaturen.)

VL beror inte på y,
HL beror inte på x.

Då måste HL och VL vara en konstant, λ.

Ekvationen är ekvivalent med en serie av system för olika λ.

$$\begin{cases} X_\lambda = C_{1,\lambda} e^{\lambda x} \\ Y_\lambda' = Y_\lambda \cdot (\lambda - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_\lambda = C_{1,\lambda} e^{\lambda x} \\ Y_\lambda = C_{2,\lambda} e^{(\lambda-1)y} \end{cases}$$

$u_\lambda(x; y) = X_\lambda(x) \cdot Y_\lambda(y) = (C_{1,\lambda}C_{2,\lambda})\, e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} = C_\lambda\, e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$

Dessutom om u_1 och u_2 är lösningar till urekvationen $\left(u_x' = u_y' + u\right)$ så är

$c_1u_1 + c_2u_2$

en lösning till urekvationen.

(Verifiera!)

Lös BVP:en $u(x; 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

Vi vet att urekvationen har lösningar

$u(x; y) = D_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} + D_\mu e^{\mu x + (\mu - 1)y}$

Välj D_λ, D_μ, λ och μ så att u(x; y) är som ovan ($3e^{-5x} + 2e^{-3x}$).

Väljer $D_\lambda = 3$, $D_\mu = 2$, $\lambda = -5$, $\mu = -3$.

[Moduluppgift 8]

Den vertikala förflyttningen u(x; t) för en oändligt lång sträng beskrivs av:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

(vågekvationen)

a) Transformera ekvationen med hjälp av substitutionen

$z = x + at$
$v = x - at$

Vi tänker att $u(x; t) = \tilde{u}(z(x; t); v(x; t))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}}_{a}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}}_{-a} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}a-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)=$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z\,\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\,\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} =$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\underbrace{\partial v\,\partial z}_{\partial z\,\partial v}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\,\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\right)}_{\text{på analogt sätt}}$$

Ekvationen $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (*) skrivs om.

b) Lös ekvationen $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\,\partial z} = 0$

$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)=0$ $\qquad$ $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}$ beror inte på v.

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}=P(z)$ P är någon funktion.

$$\tilde{u}(z;\, v)=\underbrace{\int P(z)dz}_{\triangleq F(z)}+G(v)$$

Vi fick att lösningarna till (*) är:

$$\tilde{u}(z;v)=F(z)+G(v)$$

där F och G är godtyckliga funktioner.

2010−(09)sep−30: dag 7, 20

[z.c.12.3.3.]

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \qquad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Randvillkor: $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0;t)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L;t)=0 \end{cases}$ $\qquad t > 0$

Begynnelsevillkor: $u(x; 0) = f(x), \quad 0 < x < L$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

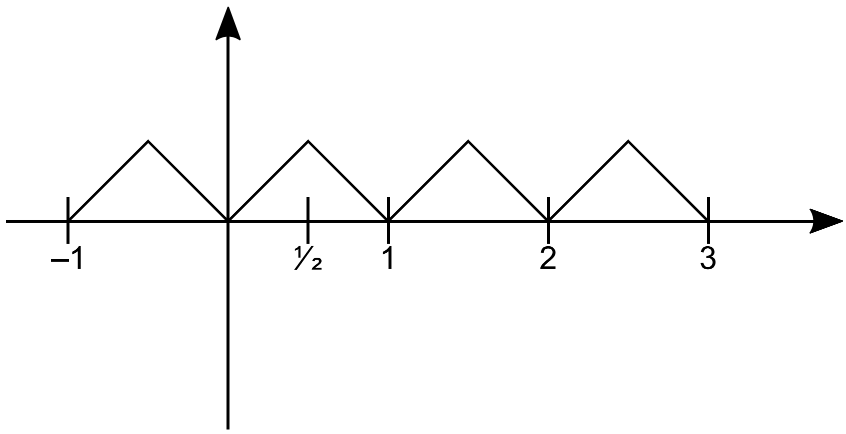
$$u(x;t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}$$

[z.c.11.3.42.]

$$m\ddot{x}+kx=f(t)=\begin{cases} t & 0<t<\frac{1}{2} \\ 1-1 & \frac{1}{2}\le t<1 \end{cases}$$

$f(t + 1) = f(t)$

$$m=\frac{1}{4}, \quad k=12, \quad \ddot{x}+48x=4f(t)$$



Jämn

Fourierutveckla 4ƒ.

$$4f(x) \sim \mathfrak{F}(4f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{1/2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi t$$

$$a_n = \frac{2}{1/2}\int_0^{1/2} 4t\cos\frac{n\pi t}{1/2}\,dt = 8\int_0^{1/2} 2t\cos 2n\pi t\;dt = \{\text{Partiell integration}\} =$$

$$= 8\left(\left[t\frac{\sin 2n\pi t}{n\pi}\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} 1\cdot\frac{\sin 2n\pi t}{n\pi}\,dt\right) =$$

$$= 8\left[\frac{\cos(2n\pi t)}{2(n\pi)^2}\right]_0^{1/2} = 4\frac{\cos(n\pi)-1}{(n\pi)^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{1/2}\int_0^{1/2} 4t\;dt = 8\left[t^2\right]_0^{1/2} = 2$$

$$4f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2}\cos 2n\pi t$$

Vi ansätter $\qquad a_n = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2n\pi t$

$$\ddot{x}_p = \sum_{n=1}^{\infty} -4n^2\pi^2 A_n \cos 2n\pi t$$

Insättning i den givna ekvationen ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} -4n^2\pi^2 A_n \cos 2n\pi t + 48\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2n\pi t\right) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\,\frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} \cos 2n\pi t$$

$$48\frac{A_0}{2} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-4n^2\pi^2 A_n + 48A_n - 4\frac{\cos n\pi}{t}\right) \cos 2n\pi t = 0$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{2}{48}, \quad A_n = \frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2(12 - n^2\pi^2)}$$

I ett tabellverk står det att

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2} \text{ är lka med } \frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2) \text{ då } 0 < x < 1.$$

Beräkna s(-8/3).

Fourierserie för en jämn funtkion ƒ.

ƒ är periodisk med perioden 2, Det vill säga ƒ(x + 2) = ƒ(x).

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2) \text{ då } 0 < x < 1.$$

$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = f\left(-2 - \frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \{\text{Jämn}\} = f\left(\frac{2}{3}\right)$$

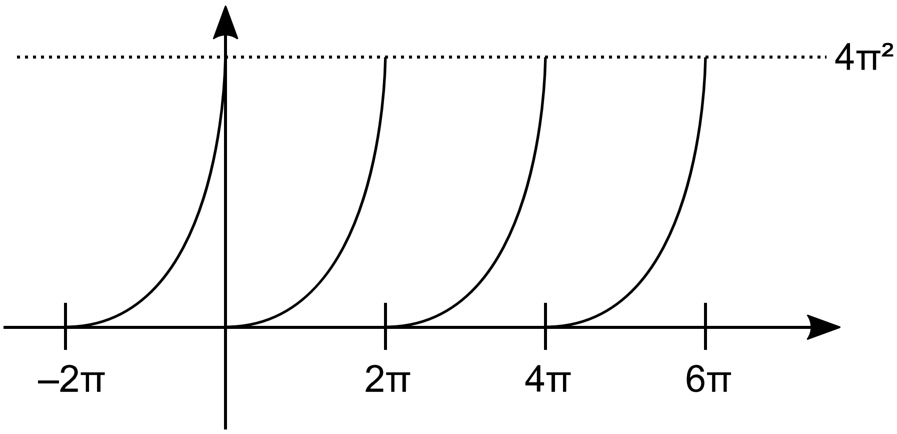
$$s\left(-\frac{8}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{12}\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^2 6\left(\frac{2}{3}\right)+2\right)$$

$$s\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{\pi^2}{36}(4-12+6)=-\frac{\pi^2}{18}$$

$f(x) = x^2, \quad 0 < x < \pi$

$f(x + 2\pi) = f(x)$



Varken jämn eller udda.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \; dx=\{\text{Dubbel partiell integration}\}=\frac{4}{n^2}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \, dx=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \; dx=-\frac{4}{n}$$

$$f\sim\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4}{n}\sin nx\right)$$

Vi söker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

X = 0:

$$\frac{0+4\pi^2}{3}=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

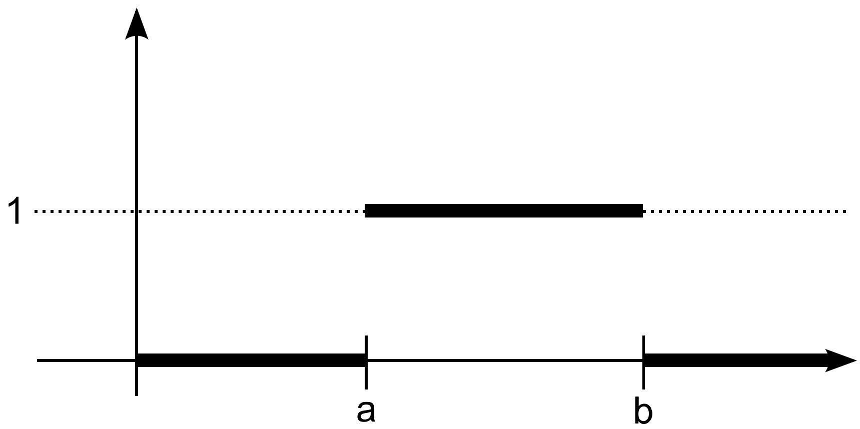
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{6}$$

x = π:

$$\pi^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{3}=-\frac{\pi^2}{12}$$

Heavisides funktion (U):



$f(t) = U(t - a) - U(t - b)$

$$U(t-a)=\begin{cases}1, & t>a\\ 0, & t<a\end{cases}$$

2010–(10)okt–01: dag 8, 21

[Moduluppgift 10]

Lös $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i området.

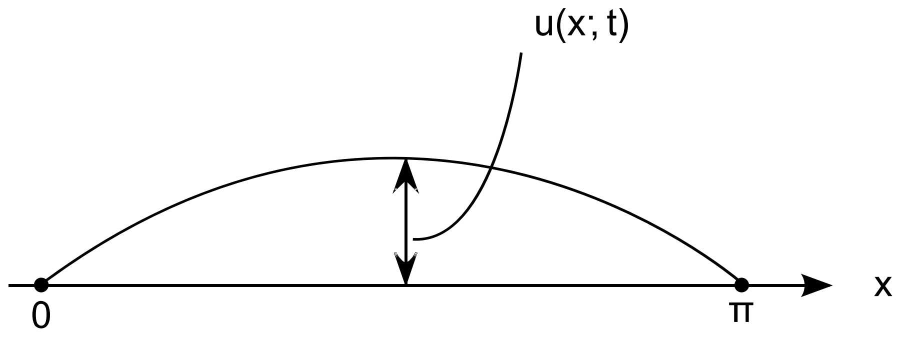
$0 < x < \pi, \quad t > 0$

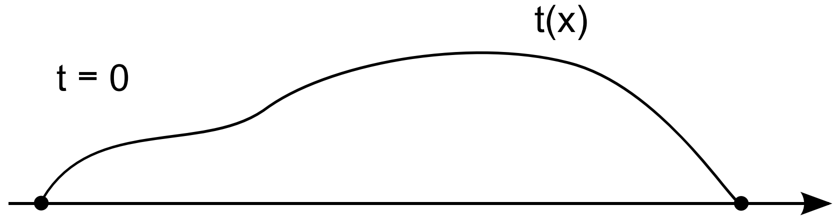
(vågekvationen)

Med randvillkor $u(0; t) = u(\pi; t) = 0$

och begynnelsevillkor $u(x; 0) = \sin^2 x + 4 \sin 4x = f(x)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$





Använd separation av variabler.

Söker $u(x; t) = X(x)T(t)$

Sätter in i ekvationen:

$$X(x)\cdot T''(t) = 4X(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{4T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

VL beror ej av x.
HL beror ej av t.

Det innebär att HL = VL = “konstant” = λ.

$T''(t) - 4T(t)\lambda = 0$
$X''(x) - X(x)\lambda = 0$

Löser $X'' - \lambda X = 0$

Formen av lösningen beror på λ.

För att villkoret $u(0; t) = u(\pi; t) = 0$ ska vara uppfyllt måste $X(0)T(t) = 0$ för alla t samt att $X(\pi)T(t) = 0$ för alla t.

$X(0) = X(\pi) = 0$

Vi får randvärdesproblem:

$$X'' - \lambda X = 0 \quad X(0) = X(\pi) = 0$$

Karakteristisk ekvation:

$$r^2 - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\lambda}$$

Fall 1: $\lambda > 0$:

$$X_1(x)=A_1e^{\sqrt{\lambda}x}+B_1e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$X(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 + B_1 = 0$
$X(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = B_1 = 0$

$A_1 = B_1 = 0$

Fall 2: $\lambda = 0$:

Ger oss ekvationen $X'' = 0$

$X_2= A_2x + B_2$

Villkor:

$X(0) = 0 \Rightarrow 0 \cdot A_2 + B_2 = 0 \Leftrightarrow B_2 = 0$

$X(\lambda) = 0 \Rightarrow \pi \cdot A_2 + 0 = 0 \Leftrightarrow A_2 = 0$

$A_2 = B_2 = 0$

Fall 3: $\lambda < 0$:

$r = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$$X_3(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)¿$$

$$X(x) = \underbrace{X_1}_{0} + \underbrace{X_2}_{0} + X_3 = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

Randvillkor: $0 = X(0) = C_1$ Det vill säga:

$$X(x) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

$$X(\pi) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, \pi) = 0$$

$C_2 \neq 0 \quad \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \quad \sqrt{-\lambda}\,\pi = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{R}$

$\sqrt{-\lambda} = n \qquad -\lambda = \pm n^2 \qquad \lambda = \pm n^2$

Vi får icke-triviala lösningar

$$X(x) = C \sin nx$$

Vi löser T.

$T'' - 4\lambda T = 0$

$r^2 - 4\lambda = 0$

$r = \pm\sqrt{4\lambda} = \pm\sqrt{-4n^2} = \pm i2n \sim i2n \qquad \because\ z \sim \bar{z}$

$\lambda > 0$:

$$T(x) = D_1 \cos 2nt + D_2 \sin 2nt$$

Således för varje heltal, n, är

$u(x, t) = X(x) \cdot Y(y) = C_2 \sin nx \cdot (D_1 \cos 2nt + D_2 \sin 2nt)$

Om $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$ är lösningar till ekvationen och uppfyller villkoren samt är linjärt oberoende så är $u(x; t) = u_1(x; t), u_2(x; t), u_3(x; t), \ldots, u_k(x; t)$ också en lösning.

$$u(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot (A_n \cos 2nt + B_n \sin 2nt)$$

$(A_n = C_{2;n} \cdot D_{1;n}, \; B_n = C_{2;n} \cdot D_{2;n})$

Låt oss välja A_n och B_n så att, de snart definierade, (†) och (‡) uppfylls.

$$u(x; 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = (\dagger) = \sin 2x + 4 \sin 4x$$

$A_2 = 1$, $A_4 = 4$, resten $A_n = 0$

För att bestämma B_n, använd:

(‡)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2nA_n \sin nt + 2nB_n \cos 2nt) \sin nx$$

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx$$

Alla $B_n = 0$.

Vi har alltså

$$u(x; t) = \cos 4t \cdot \sin 2x + 5 \cos 8t \cdot \sin 4x$$

Ungefär samma problem som ovan.

$$(\ddagger):\quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=g(x)$$

$$g(x)=\begin{cases}5, & \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}\\ 0, & \text{för övriga } x\end{cases}$$

Man för på samma sätt som ovan.

Bestämmer A_n på samma sätt.

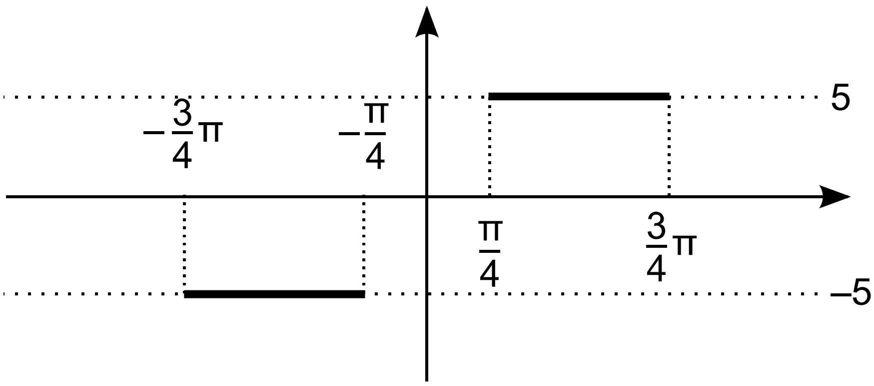
För att bestämma B_n:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx=g(x)$$

Utveckla g(x) i sinusserie.

För detta behöver vi att g(x) är udda.

Låt oss ändra g(x) utanför [0; π] och definiera den som udda och periodisk.



g(x) kan utvecklas som $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\pi}\left(\cos\frac{3\pi n}{4}-\cos\frac{\pi n}{4}\right)$.

(‡) ger:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\pi}\left(\cos\frac{3\pi n}{4}-\cos\frac{\pi n}{4}\right)\sin nx$$

Hitta B_n genom att identifiera koefficienterna.

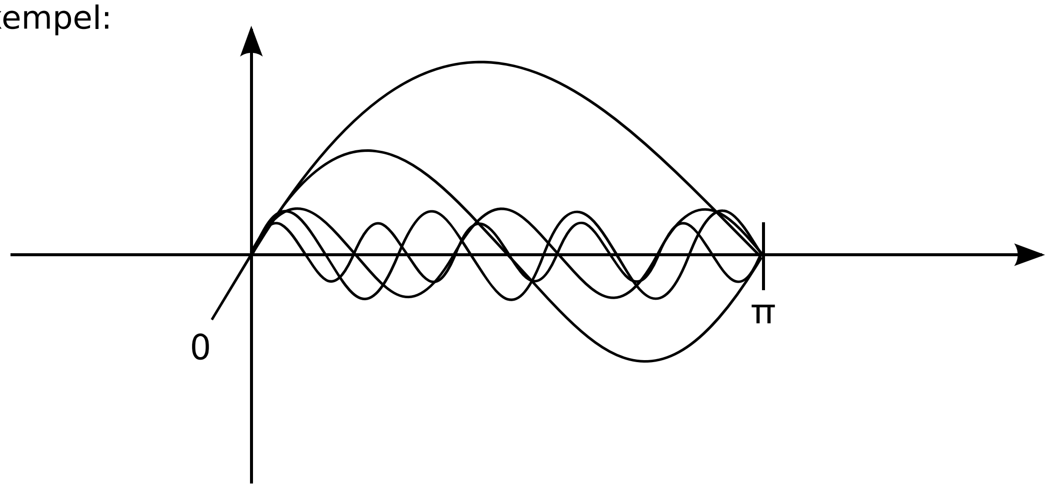
2010–(10)okt–04: dag 9, 22

Fouriertransformer

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \qquad t>0, \quad 0<x<\pi$$

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)}_{A(t)=\text{“frekvensinnehåll”}}\underbrace{\sin nx}_{\text{“frekvens”}}$$

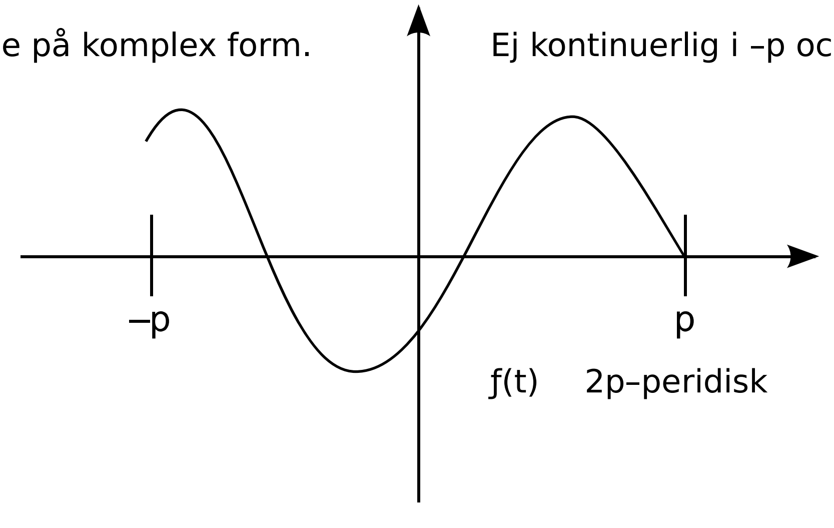
Exempel:



Randvillkor: $\begin{cases} u(0;t)=0 \\ u(\pi;t)=0 \end{cases}$

Fourierserie på komplex form.

Ej kontinuerlig i –p och p.



ƒ(t) 2p–peridisk

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{p}t}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\cdot e^{-in\frac{\pi}{p}t}\,dt$$

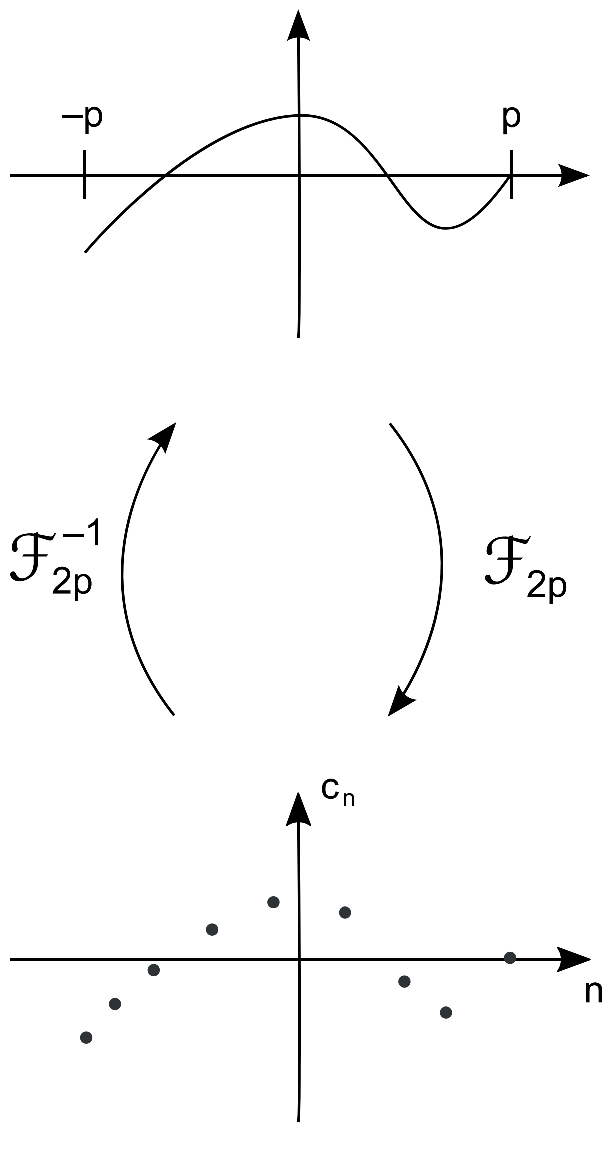
Eulers formel:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

Se sida 7 i kompendiet.

f, 2p-periodisk



Frekvensinnehåll motsvarande frekvens $\frac{n\pi}{p}$

Vad händer om $p \to \infty$?

Man kan resonera med Riemann-summor:

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \qquad (\dagger)$$

där

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \, dt \qquad (\ddagger),$$

$\omega \in \mathbb{R}, \qquad |e^{i\omega t}| = 1$

Definition:

Om $f(t)$ är absolut integrabel, det vill säga om

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt < \infty \quad ,$$

så existerar Fouriertransformen av $f(t)$.

$\because$

$$\underbrace{\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \right|}_{<\infty} \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot \underbrace{|e^{-i\omega t}|}_{1} \, dt$$

Definition:

Fourierintegralen till $f(t)$, vars Fouriertransform är $\hat{f}(\omega)$, är

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$$

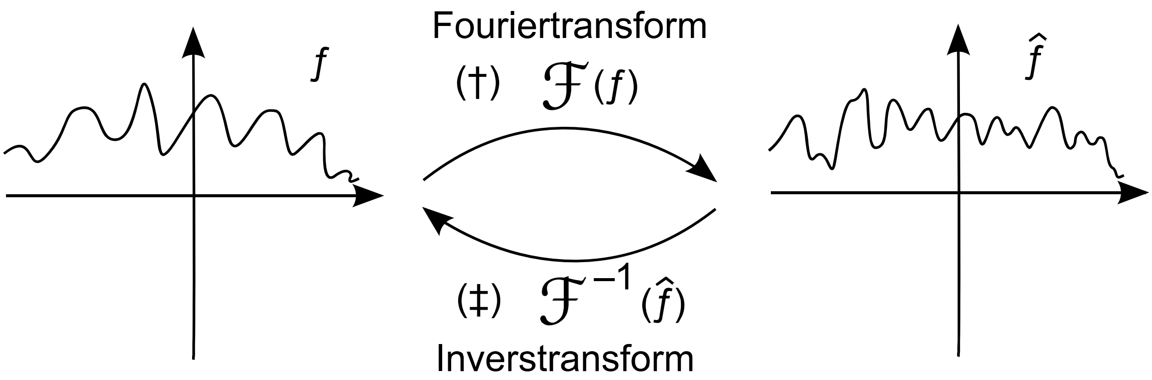
Sats:

Om f är absolut integrabel på intervallet $]-\infty; \infty[$ och f och f' är styckvis kontinuerliga på varje ändligt intervall så gäller att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega = \frac{f(t^+) - f(t^-)}{2}.$$ Om dessutom f är kontinuerlig för

alla $t \in \mathbb{R}$ så är $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega$.

Operationerna $\mathcal{F}(f)$ och $\mathcal{F}^{-1}(f)$:



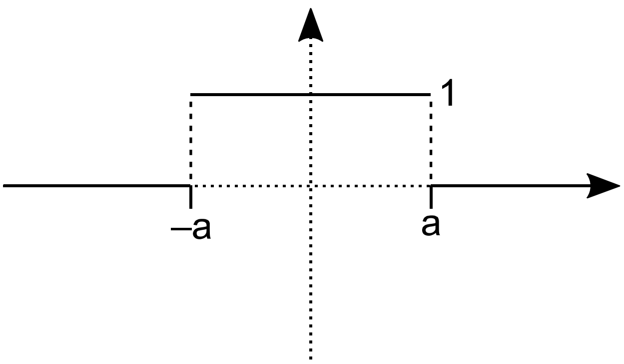
$\left|\hat{f}(\omega)\right|$="frekvenspektrum"

$\hat{f}(\omega)$="amplitud"

Exempel

Beräkna Fouriertransformen till

$f(t)=\begin{cases}1, & |t|<a\\ 0, & |t|\geq a\end{cases}$ (Ej oändligt integrabel)



$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\,dt=\left[-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega i}\right]_{t=-a}^{a}=-\frac{e^{-i\omega a}-e^{i\omega a}}{\omega i}=\frac{2\sin\omega a}{\omega}\quad,\quad \omega\neq 0$$

$$\hat{f}(0)=\int_{-a}^{a} dt=[t]_{-a}^{a}=2a$$

Är $\hat{f}(\omega)$ kontinuerlig?

$$\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{2\sin\omega a}{\omega}=\lim_{\omega\to 0}\frac{2a\sin\omega a}{\omega a}=\lim_{\omega\to 0}2a\,\mathrm{sinc}\,\omega a=2a$$

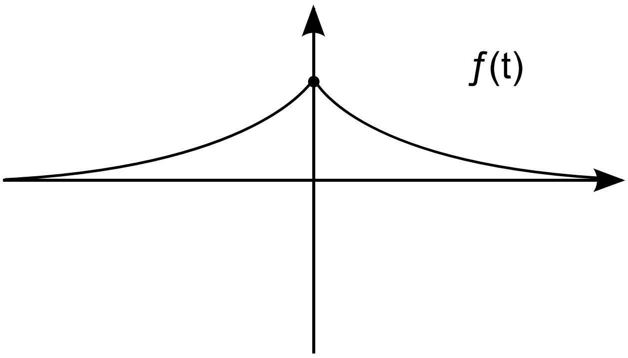
Ja! $\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)=\hat{f}(0)$

Vi kan skriva f som Fourierintegral:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\omega a}{\omega}e^{i\omega t}\,dt \quad \text{då } t\neq\pm a$$

Exempel

Beräkna Fouriertransformen till $f(t) = e^{-a|t|}$



$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt+\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-t(a+i\omega)}\,dt+\int_{-\infty}^{0}e^{t(a-i\omega)}\,dt=\left[\frac{-e^{-t(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right]_{t=0}^{\infty}+\left[\frac{e^{t(a+i\omega)}}{a-i\omega}\right]_{t=-\infty}^{0}=$$

$$=\lim_{h\to-\infty}\left(-\frac{e^{h(a+i\omega)}}{a+i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a-i\omega}-\frac{e^{h(a+i\omega)}}{a-i\omega}\right)=\frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a-i\omega}=\frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2}+\frac{a+i\omega}{a^2+\omega^2}=$$

$$=\frac{a-i\omega+a+i\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

$\alpha/z = \alpha\bar{z}/z\bar{z} = a\bar{z}/(\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z)$

2010–(10)okt–06: dag 10, 23

Angående uppgift 3 i inlämningen imorgon; se sida 605 (14 kap.) i Zill-Cullen.

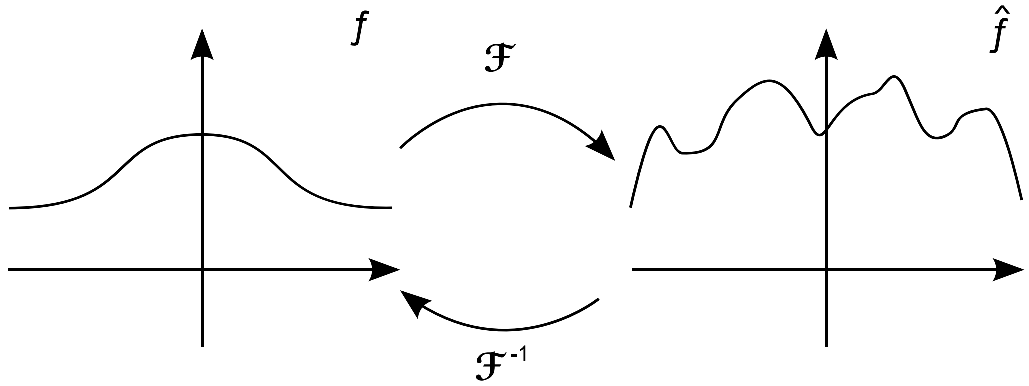
Förra gången:

ƒ(t) är absolut integrerbar

$$\hat{f}=\mathcal{F}(f(t))(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$$

Om ƒ och ƒ' är styckvis kontinuerliga i varje ändligt intervall så gäller:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f(t)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$



Vi beräknade $\mathcal{F}\big(\underbrace{e^{-a|t|}}_{a>0}\big)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

Egenskaper hos Fouriertransformer (FT):

FT är linjär.

Om ƒ och g är absolut kontinuerliga så är

$$\mathcal{F}(af(T)+bg(t))(\omega)=a\mathcal{F}(f(t))(\omega)+b\mathcal{F}(g(t))(\omega)$$

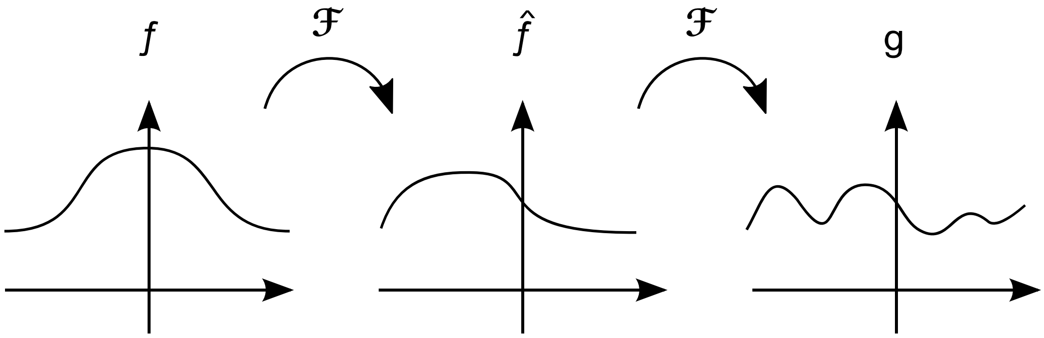
Vilket följer från integralens injäritet.

Exempel: $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1^2+\omega^2}=\frac{1}{1+\omega^2}$

Dualitet. Motsvarande exemplet.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(\omega) \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} e^{i\omega t}\, dt$$

Saknar elementär primitiv funktion.



f och g är relaterade.

$$g(t) = \mathcal{F}\left(\hat{f}(\omega)\right)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{it\omega}\, d\omega = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-i(-t)\omega} d\omega \right) = 2\pi\, f(-t)$$

$$\therefore \ \mathcal{F}\left(\hat{f}(\omega)\right)(t) = 2\pi\, f(-t)$$

där $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$

I vårt exempel:

Vi vet att $\dfrac{1}{1+\omega^2} = \mathcal{F}\left(\dfrac{1}{2} e^{-|t|}\right)$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right) = \mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{2} e^{-|t|}\right)\right) = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-|t|} = \pi e^{-|t|}$$

Dualitet: $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = 2\pi f(-1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega = ?$$

$$\pi e^{-|t|} \underbrace{\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)}_{\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)\right)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{1+\omega^2}\,d\omega$$

Tag t = 0

$$\pi = \pi e^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^0}{1+\omega^2}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega$$

Derivering och transformering:

$\mathcal{F}(f'(t))(\omega) = i\omega \hat{f}(\omega)$ där $\hat{f}$ är FT av f.

På samma sätt:

$$\mathcal{F}(f^{(n)}(t))(\omega) = (i\omega)^n \hat{f}(\omega)$$

[4.14]

Finn en partikulärlösning till

$y'' - y = e^{-|t|}$

Lösning: Fouriertransformera bägge leden:

$\mathcal{F}(y'' - y) = \mathcal{F}(e^{-|t|})$

$\mathcal{F}(y'') = (i\omega)^2 \cdot \mathcal{F}(y)$

$Y(\omega) \triangleq \mathcal{F}(y)(\omega)$

$$\underbrace{(i\omega)^2}_{-\omega^2} \cdot Y(\omega) - Y(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$-Y(\omega)(\omega^2+1)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$Y(\omega)=-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}$$

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}\Big(\underbrace{Y(\omega)}_{-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}}\Big)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(1+\omega^2)^2}e^{i\omega t}dt$$ (Svår integral!)

Man kan visa att $\mathcal{F}\left(|t|e^{-|t|}\right)(\omega)=\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}$

(Se Beta)

Vi vet att $\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$

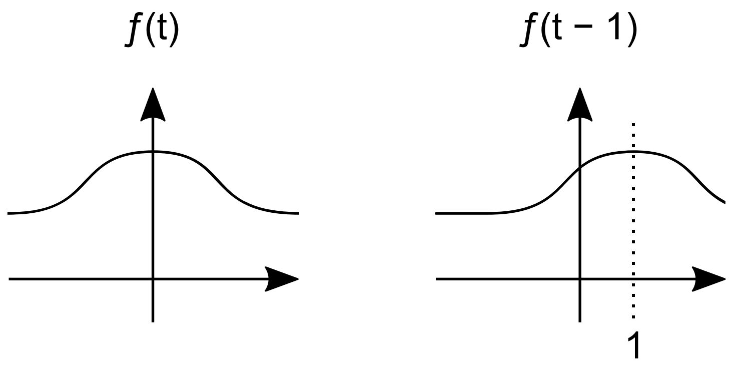
$$\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}+\frac{2}{1+\omega^2}=\frac{2(1-\omega^2)+2(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}=\frac{4}{(1+\omega^2)^2}=-2\left(-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}+\frac{2}{1+\omega^2}\right)\right)=-\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}\right)+\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[|t|e^{-|t|}+e^{-|t|}\right]=-\frac{1}{2}(|t|+1)e^{-|t|}$$

Exempel:

Om ƒ(t) har TF, $\hat{f}(\omega)$, vad är då FT för ƒ(t – 1)?



$$\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)(\omega)=\left\{s\stackrel{\Delta}{=}t-1 \middle| t=s+1\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{i\omega(s+1)}\,ds=e^{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{i\omega s}\,ds=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)(\omega)=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

Frekvensspektra för ƒ(t) och ƒ(t – 1) är samma.

$\left|\hat{f}(\omega)\right|$ = “frekvensspektrum”

$$\left|\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)\right|=\left|e^{i\omega}\hat{f}(\omega)\right|=\underbrace{\left|e^{i\omega}\right|}_{1}\cdot\left|\hat{f}(\omega)\right|=\left|\hat{f}(\omega)\right|$$

$\left|\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)\right|$ är frekvensspektrumet för ƒ(t – 1).

2010–(10)okt–07: dag 11, 24

Lös värmeledningsekvationen:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty<x<\infty$$

$$u(x\,;\,0)=f(x)=\begin{cases} u_0 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

(Beskriver temperaturen i en oändlig tråd.)

Låt:

$$\hat{u}(\alpha;\,t)=\mathcal{F}\left(u(x\,;\,t)\right)(\alpha;\,t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x;\,t)e^{i\alpha x}\,dx$$

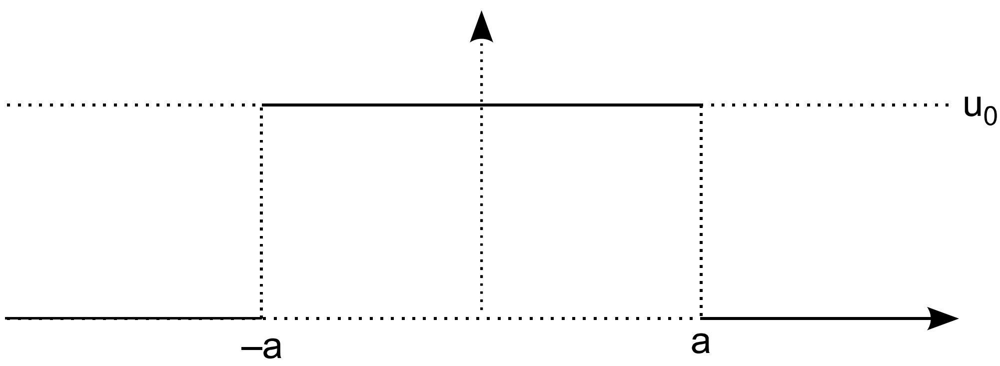
(Med avseende på x, t är fixerad)

(För varje fixerat t söks FT av u(x; t))

Transformera begynnelsevillkor:

Vi har u(x; 0) = f(x).

$$\mathcal{F}\left(u(x;\,0)\right)=\hat{u}(\alpha;\,0)=\mathcal{F}\left(f(x)\right)(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx=\int_{-1}^{1} u_0\cdot e^{i\alpha x}\,dx=$$



$$=u_0\left[\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\right]_{x=-1}^{1}=u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right)=2u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i\alpha}\right)=2u_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Transformera DE:

$$k\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}\right)=k(i\alpha)^2\cdot\mathcal{F}(u(x;t))=k(-\alpha^2)\hat{u}(\alpha;t)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x;t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\cdot e^{ixt}\,dx\overset{(*)}{=}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{ixt}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha;t)$$

Förklarning av (*):

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t;s)\right)_{t=t_0}ds=\int\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}\,ds=$$

$$=\{\int \text{ är absolut konvergent}\}=\lim_{\Delta t\to 0}\int\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}\,ds=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int u(t_0;s)\,ds-\int u(t_0+\Delta t;s)\,ds}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\int(u(t;s))_{t=t_0}ds$$

Ekvationen tar formen

$$-k\alpha^2\hat{u}(\alpha;t)=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha;t)$$

För varje fixerat α är ekvationen

$$\hat{u}_t'=-k\alpha^2\hat{u}$$

Separabel!

$$\hat{u}(\alpha;t)=Ce^{-k\alpha^2 t}$$

Begynnelsevillkor (BV) ger:

$$2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\overset{BV}{=}\hat{u}(\alpha;0)=Ce^{-k\alpha^2\cdot 0}=C$$

$$C=2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Alltså:

$$\hat{u}(\alpha;\, t) = \frac{2u_0 \sin\alpha}{\alpha} e^{-kx^2 t}$$

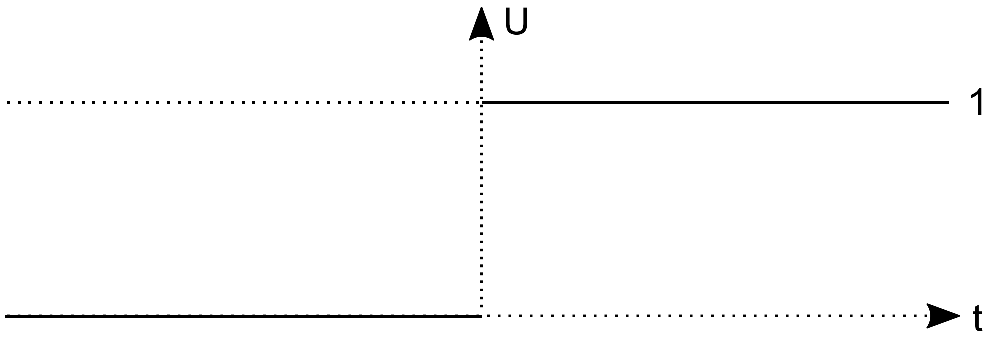
Tillbaka-transformation:

$$u(x;\, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2u_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x}\, d\alpha = \{\text{Se boken sida 506}\} =$$

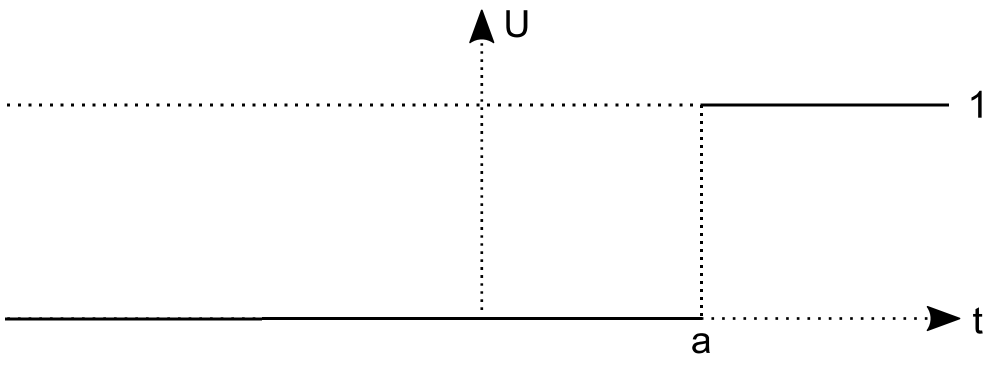
$$\frac{u_0}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\alpha} \cdot e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha$$

Heaviside funktionen:

$$U(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

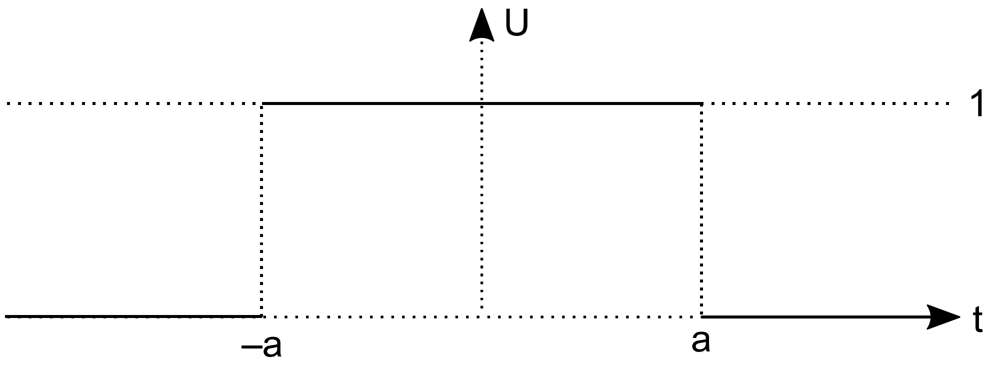


U(t – a), a > 0



Exempel:

$U(t + a) – U(t – a)$



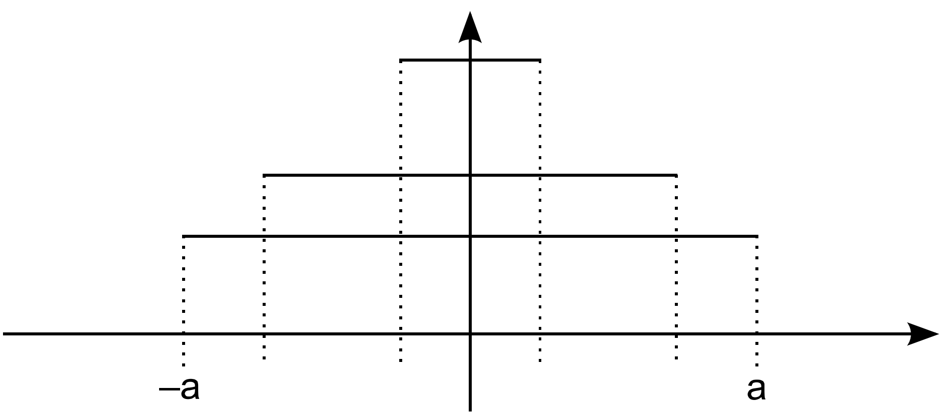
Exempel: |t| med Heavisides funktion:

$$
\begin{aligned}
|t| &= (2\,U(t) - 1)t &&= \\
&= 2t\,U(t) - t &&= \\
&= (U(t) - U(-t))t &&= \\
&= t\,U(t) - t\,U(-t) &&= \\
&= \mathbf{t\,U(t) + (-t)\,U(-t)}
\end{aligned}
$$

Dirac pulser:

Betrakta gränsvärdet

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{2a}\left(U(t+a)-U(t-a)\right) \coloneqq \delta(t)$$



I vanlig mening konvergerar det inte.

Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}\left(U(t+a)-U(t-a)\right)\,dt=1 \quad \text{för alla a.}$$

För en glatt funktion ƒ:

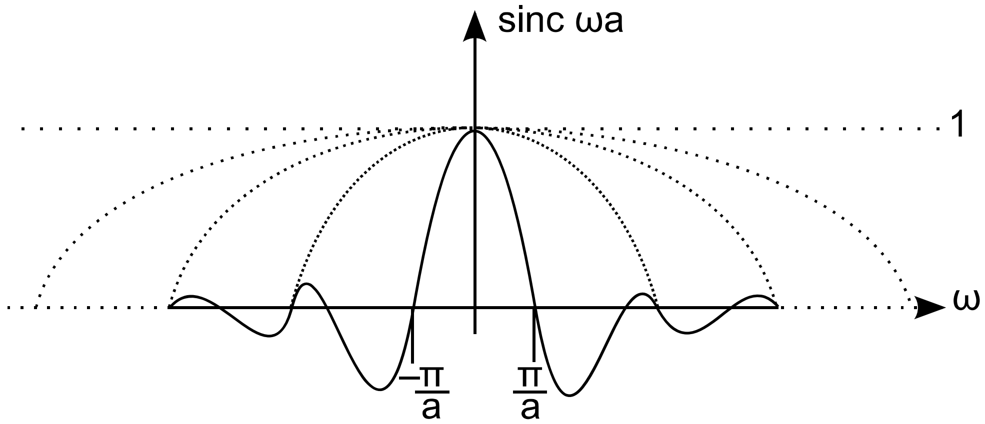
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{1}{2a}\left(U(t+a)-U(t-a)\right)\,dt \underset{a\to 0^+}{\simeq} f(0)\cdot\frac{1}{2a}\cdot 2a=f(0)$$

Definiera δ(t) som en sådan funtion att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt=f(0)$$

För varje oändligt deriverbar ƒ(t).

Vi såg att $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2a}\left(U(t+a)-U(t-a)\right)\right)=\frac{2\sin\omega a}{2\,a\omega}=\underbrace{\frac{\sin\omega a}{\omega a}}_{\text{sinc }\omega a}$



Breddar ut sig med a.

sinc ωa ≃ 1, a → ∞ (sinc används inte av läraren)

Faktiskt:

$$\mathcal{F}\left(\delta(t)\right)(\omega)=1$$

$$\because \qquad \mathcal{F}\left(\delta(t)\right)(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\cdot e^{i\omega t}\,dt=e^{i\omega\cdot 0}=e^0=1$$

2010–(10)okt–13: dag 12, 25

Då en produkt tas ut ur ugnen har den temperaturen 700°C. Den svalar; avsvalkningstakten är proportionell med skillnaden i temperaturen mellan produkten och omgivningen.

Vilken av följande modeller är rimlig?

1)
$$\frac{dT}{dt}=-\left(\frac{T-40}{3}\right)$$

2)
$$\frac{dT}{dt}=\frac{T-30}{3}$$

1:an, ty temperaturen ska avta vilket kräver negativ derivata.

Bestäm lösningen till

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{T}{3}+\frac{40}{3}$$

Vi söker en allmän lösning till motsvarande homogent system.

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{T}{3}$$

$$dT=-\frac{T}{3}dt$$

$$\frac{dT}{T}=-\frac{1}{3}dt$$

$$\int\frac{dT}{T}=\int -\frac{1}{3}dt$$

$$\int\frac{dT}{T}=-\frac{1}{3}\int dt$$

$$\ln|T|=-\frac{1}{3}t+C$$

$$|T|=e^{-\frac{1}{3}t+C}=e^{-\frac{1}{3}t}e^{C}=Ce^{-\frac{1}{3}t}$$

$$T=Ce^{-\frac{1}{3}t}$$

En partikulärlösning till det ursprungliga systemet. Man kan gissa: $T(t) = 40$ är en lösning. ($(40 – 40) / 3 = 0 = D_t(40)$)

Den allmänna lösningen är alltså $T(t)=Ce^{-\frac{t}{3}}+40$.

Låt $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ vara en lösning till differentialekvationen

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Bestäm två linjärt oberoende lösningar.

Insätt $y = x^a$ i ekvationen.

$$x^2\underbrace{a(a-1)x^{a-2}}_{y''}+4x\underbrace{ax^{a-1}}_{y'}+2\underbrace{x^a}_{y}=0$$

$$a(a-1)x^a+4ax^a+2x^a=0$$

$$x^a\left(a(a-1)+4a+2\right)=0$$

$$a(a-1)+4a+2=0$$

$$a^2-a+4a+2=0$$

$$a^2+3a+2=0$$

$$a_1=-1 \quad , \qquad a_2=-2$$

Vi fick att $y_1 = x^{-1}$ och $y_2 = x^{-2}$ är lösningar.

De är linjärt oberoende. (Eftersom $x^{-1} \neq kx^{-2}$, för en konstant, k.)

Den allmänna lösningen till ekvationen är

$$y = Cx^{-1} + Dx^{-2}$$

Låt $y_p = x^3$ vara en partikulärlösning till

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = f(x)$$

Bestäm $f(x)$.

Lösning: insätt $y_p = x^3$ i ekvationen:

$$x^2\underbrace{6x}_{y_p''}+4x\cdot\underbrace{3x^2}_{y_p'}+2\underbrace{x^3}_{y_p}=f(x)$$

$$6x^3+12x^3+2x^3=f(x)$$

$$(6+12+2)x^3=f(x)$$

$$f(x)=20x^3$$

[4.2.19.]

Bestäm den allmänna lösningen till

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$$

givet att $y_1 = x^4$ är en lösning.

Lösning: Vi söker den andra linjärt oberoende lösningen på formen $y_2 = u(x)\cdot y_1(x)$.

Insätter y_2 i ekvationen:

$$y_2'=u'y_1+uy_1'$$

$$y_2''=u''y_1+\underbrace{u'y_1'+u'y_1'}_{2u'y_1'}+uy_1''$$

$$x^2\left(u''y_1+2u'y_1'+\underline{uy_1''}\right)+7x\left(u'y_1+\underline{uy_1'}\right)+\underline{16uy_1}=0$$

$$VL=u\underbrace{\left(\underline{x^2y_1''-7x_1'+16y_1}\right)}_{=0,\ \text{ty } y_1 \text{ är en lösning}}+x^2u''y_1u+2x^2u'y_1'-7xu'y_1=\{y_1=x^4\}=$$

$$=u''x^6+u'x^5=x^5(\underbrace{u''x+u'}_{\text{för alla x}})=0$$

$$\Updownarrow$$

$$u''x+u'=0$$

Beteckna $z(x) \triangleq u'(x)$.

För z har vi ekvationen

$$z'x + z = 0$$

$$\frac{dz}{dx}x=-z$$

$$x\,dz=-z\,dx$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int-\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|=-\ln|x|+C$$

$$\ln|z|=-\ln|x|+\ln C$$

$$\ln|z|=\ln\frac{C}{|x|}$$

$$|z|=\frac{C}{|x|}=\frac{C}{x}$$

$$z=\frac{C}{x}$$

$$u'=\frac{C}{x}$$

$$u=\int\frac{C}{x}\,dx$$

$$u=C\ln|x|+D$$

Vi fick en lösning:

$$y_2 = uy_1 = (C \ln|x| + D)x^4$$

med godtyckliga konstanter, C och D.

Tag $C = 1$, $D = 0$.

$y_2 = x^4 \ln|x|$

är linjärt oberoende av $y_1 = x^4$.

Den allmänna lösningen till ekvationen ovan är $y = Ax^4 + Bx^4 \ln|x|$

Låt **A** vara en reel matris.

Betrakta systemet av differential ekvationer: $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$

En lösning till detta system ges av

$\vec{Z} = \vec{X}_1 + i\vec{X}_2$ där $\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ är reella och vektorvärda funktioner.

Visa att även $\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ är lösningar.

Insätt $\vec{Z}$ i systemet:

$$\left(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2\right)' = \mathbf{A}\left(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2\right)$$

$$\vec{X}_1' + i\vec{X}_2' = \mathbf{A}\vec{X}_1 + i\mathbf{A}\vec{X}_2$$

$$\underbrace{\left(\vec{X}_1' - \mathbf{A}\vec{X}_1\right)}_{P_1} + i\underbrace{\left(\vec{X}_2' - \mathbf{A}\vec{X}_2\right)}_{P_2} = 0$$

Både P_1 och P_2 ska vara noll.

Både $\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ är lösningar till systemet.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}\vec{X}$$

Vi söker egenvärden till $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -4\\ 5 & -3-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(-3-\lambda)+20=$$

$$=\lambda^2+2\lambda+17=(\lambda+1)^2+16=0$$

$$(\lambda+1)^2=-16$$

$$(\lambda+1)=\pm 4i$$

$$\lambda=-1\pm 4i$$

Vi söker egenvektorn $\vec{v}$ motsvarande $\lambda = -1 \pm 4i$.

$$\mathbf{A}\vec{v}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow 0=\mathbf{A}\vec{v}-\lambda\vec{v}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -4\\ 5 & -3-\lambda\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}2-4i & -4\\ 5 & -2-4i\end{pmatrix}\vec{v}$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\ 1-2i\end{pmatrix}$$

En komplex lösning är

$$\vec{Z}=e^{(-1+4i)t}\begin{pmatrix}2\\ 1-2i\end{pmatrix}=e^{-t}\operatorname{cis}(4t)\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1-2i\end{pmatrix}=$$

= Bla, bla, bla, se äldre anteckningar!

2010–(10)okt–14: dag 13, 26

Differential ekvation

$xy' - y = x^2$, $x > 0$ (1) har en lösning som också uppfyller ekvationen

$x^3 y' - x^2 y = y^2$, $x > 0$ (2) bestäm denna lösning.

Löser ekvationen (1). Den är linjär av första ordningen.

Löses med hjälp av integrerande faktor.

Skriv ekvationen på normal form.

$$y' - \frac{1}{x} y = x$$

Multiplicera ekvationen med den integrerande faktorn $e^{\int -\frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x} y\right) = 1$$

$$\frac{y}{x} = x + C$$

$$y = x^2 + Cx$$

Löser ekvation (2).

Omforma (2) till $x^3 y^{-2} y' - x^2 y^{-2} y = 1$

$x^3 y^{-2} y' - x^2 y^{-1} = 1$

$u \triangleq y^{-1}$

$u' = -y^{-2} y'$

$-x^3 u' - x^2 u = 1$

$$u' + \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x^3}$$

$$\text{“Integrerande faktor”} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = x$$

$$u'x + u = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(x \cdot u) = -x^{-2}$$

$$xu = x^{-1} + B$$

$$u = x^{-2} + \frac{B}{x} = \frac{1+Bx}{x^2}$$

$$y^{-1} = \frac{1+Bx}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2}{1+Bx}$$

Vi vill att för några C och B att

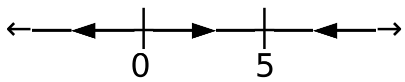
$$x^2 + Cx = \frac{x^2}{1+Bx}$$

Tag C = B = 0

Den sökta lösningen är $y = x^2$

Bestäm stationära lösningen och deras stabilitet till $\frac{dx}{dt} = x(5-x)$.

Stationär vid x = 0 och x = 5.



Instabil vid 0 och stabil vid 5.

Klassifiera kritiska punkter hos $x'(t) = x(5 - x)$, $y'(t) = y(x - 1)$.

Vi söker kritiska punkter.

$x(5 - x) = 0$ ekvationen (1) get $x = 0$ och $x = 5$.
$y(x - 1) = 0$

För $x = 0$:

Ekvationen (2) ger $y(0; -1) = -y = 0$ Kritisk punkt: $(0; 0)$

För $x = 5$:

Ekvationen (2) ger $4y = 0 \Rightarrow y = 0$ Kritisk punkt: $(5; 0)$

Vi linjäriserar system i närheten av de kritiska punkterna.

Förklarning:

$$\frac{dx}{dt}=P(x;y)$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x;y)$$

$(x_1; y_1)$ är en kritisk punkt.

$P(x_1; y_1) = 0 = Q(x_1; y_1)$

$$\frac{dy}{dt}=P(x;y)=\{(x;y)\simeq(x_1;y_1)\}=$$

$$=\underbrace{P(x_1;y_1)}_{=0}+\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(x_1;y_1)}\cdot\underbrace{(x-x_1)}_{h}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_1;y_1)}\cdot\underbrace{(y-y_1)}_{k}+\text{H.O.T.}$$

$$\frac{dy}{dt}=h\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(x_1;y_1)}+k\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_1;y_1)}+\text{H.O.T.}$$ (H.O.T. är en restterm)

För $(x; y) \approx (x_1; y_1)$

$$\frac{dx}{dt} \approx \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_{(x_1;\, y_1)} & \left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]_{(x_1;\, y_1)} \\ \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_{(x_1;\, y_1)} & \left[\frac{\partial Q}{\partial y}\right]_{(x_1;\, y_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

x' = 5x – x^2

y' = xy – y

$$\mathbf{A}(x;\, y) = \begin{pmatrix} 5-2x & 0 \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(0;\, 0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenvärden: 5 och –1

Sadelpunkt!

$$\mathbf{A}(5;\, 0) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Egenvärden: –5 och 4

Sadelpunkt!

Sammanfattningar

Sammanfattning, modul 1: dag 1-6, 1-6

Första ordningens ODE:

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y)$$

- Separabla: $\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$
- Linjära: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$

Separabla

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$$

1. h(y) = 0 : y = konstant
2. h(y) ≠ 0 : $\frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}=g(x)$

Integrera med avseende på x.

Linjära

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Multiplicera med $e^{\int P(x)dx}$ Integrerande faktorn

$$e^{\int P(x)dx}\cdot\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}\cdot P(x)y=e^{\int P(x)dx}\cdot f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)=e^{\int P(x)dx}\cdot f(x)$$ Detta är det viktiga att komma ihåg.

Integrera med avseende på x.

Substitutioner:

Homogena:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sätt z = y/x. y = xz, y' = xz' + z

xz' + z = f(z)

xz' = f(z) – z

Separabel!

Bernoullska:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y=f(x)y^{\alpha},\ \ 1\neq\alpha\neq 2,\alpha\in\mathbb{R}$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=f(x)$$

Sätt $z=y^{1-\alpha},z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{z'}{1-\alpha}+P(x)z=f(x)$$

Linjärt!

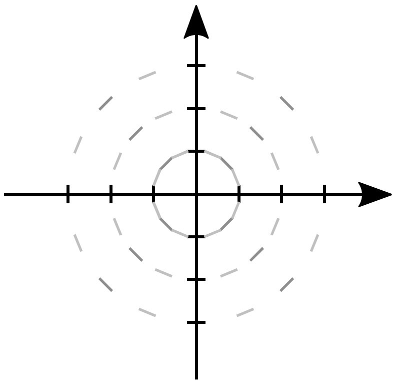
Begynnelsevärdesproblem (BVP)

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y),\ \ y(x_0)=y_0$$

Exemple på derivatagraf:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Rita up koordinatsystem och rita in lutning för (x; y) punkter då



- y = 0, x' = ±∞
- x = 0, y' = 0
- y = –x, y' = 1
- y = x, y = –1

Man ser att cirklar bildas.
Stämmer det?

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

Läraren är synsk!

Onödigt och odidaktiskt steg ända skillnaden skulle vara delat med 2, och då kan man flyttar över den 2:an om sätta in den i C:et

$$\int \left(2y\frac{dy}{dx} + 2x\right) dx = \int dx$$

$$\int 2y\frac{dy}{dx} dx + \int 2x\, dx = \int dx$$

$$\int 2y\, dy + \int 2x\, dx = \int dx$$

$$y^2 + x^2 = C$$

Ja, det stämmer!

$$y^2 + x^2 = r^2$$

Exempel på stabilitet

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$$

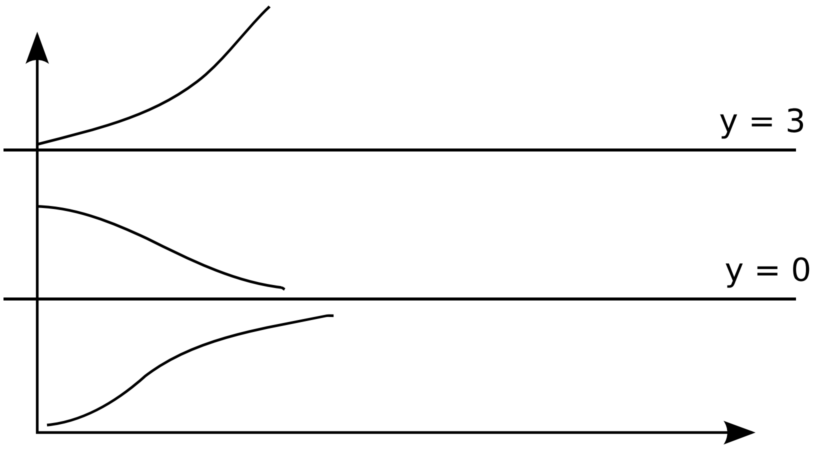
Kritiska punkter: $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y = y(y-3) = 0$

Kritiska punkter: y = 0 och y = 3

Fasporträtt (faslinje)

——→——|——←——|——→——
0 3
\+ – + :derivata

y = 0 är asymptotiskt stabil.
y = 3 är instabil.



Sammanfattning, modul 2: dag 1-9, 6-14

System av linjära första ordningens ODE

$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}+\vec{F}$

Bestäm egenvärderna λ:

det($\mathbf{A}$ – λ$\mathbf{I}$) = 0

λ reella och enkla ($\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Instabil nod
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Stabil nod

λ reella och multipla ($\lambda_1 = \lambda_2$):

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instabil degenererad nod
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil degenererad nod

λ komplex ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$):

$\vec{Z}=e^{(\alpha+i\beta)t}\vec{K}_1=e^{\alpha t}\text{ cis } \beta t \cdot \vec{K}_1$

$\vec{X}_1=\Re\vec{Z}$ ($\Re$ skrivs ofta Re)

$\vec{X}_2=\Im\vec{Z}$ ($\Im$ skrivs ofta Im)

$\alpha > 0$	Instabil spiral
$\alpha = 0$	Centrum, stabil (ellipsformad)
$\alpha < 0$	Stabil spiral

Vid λ reella och enkla:

$\vec{X}_h=\sum_{n=1}^{N} C_n\vec{X}_n$ där $\vec{X}_n=\vec{v}_n e^{\lambda_n t}$ där $\vec{v}_n$ är egenvektorn för λ_n som

beräknas genom: $(\mathbf{A}-\lambda_n\mathbf{I})\vec{v}_n=\vec{0}$

Varje lösning, med en godtycklig koefficient, bestäms genom att bestäma en egenvektor till ett egenvärde och multiplicera den med e upphöjt till egenvektor, multiplicerat med t.

Vid λ reella och multipla:

$$\vec{X}_h = C_1 \underbrace{\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}}_{\vec{x}_1} + C_2 \underbrace{\left(t\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) e^{\lambda_1 t}}_{\vec{x}_2}$$

Där $\vec{v}_1$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\vec{v}_1 = \vec{0}$

och $\vec{v}_2$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\vec{v}_2 = \vec{v}_1$

Vid multipla reella egenvärden bestämer man först egenvektorn och seden bestämer man en vektor på samma sätt som egenvektorn fast byter ut nollvektor mot egenvektor, detta blir den andra "egenvektorn".

Den första lösningen bestäms på vanligt vis, och den andra lösningens bestäms genom att använda samma egenvärde med man byter ut egenvektorn mot den andra "egenvektorn" adderat med t multiplicerat med egenvektorn.

Vid λ komplexa:

$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \ \lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$\vec{X}_h = C_1 \Re \vec{Z} + C_2 \Im \vec{Z} \quad \text{där} \quad \vec{Z} = e^{(\alpha + i\beta)t}\vec{v}_1 = e^{\alpha t} \operatorname{cis} \beta t \cdot \vec{v}_1$$

$$e^{i\beta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Den reella delen och den imagionära delen är separata lösningar. Det är lättast att räkna med det egenvärdet som har positiv imagionärdel. Naturligtvis spelar inte det någon roll eftersom sin och cos är udda och jämna funktioner som kommer ha godtyckliga koefficienter.

där $\vec{v}_1$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} a+ib & c \\ p & q \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -a+ib \\ \xi \end{pmatrix}_{\xi = \frac{a^2+b^2}{c}}$$

Detta är ett lätt sätt att bestämma egenvektorn vid komplexa matriselement.

(p; q) är linjärt beroende (a + ib; c)
Detta gäller även för reella värden eftersom determinanten är 0.

Inhomogena delen:

$$\vec{X}_p = \mathbf{\Phi}(t) \int \mathbf{\Phi}^{-1}(t) \vec{F}(t)\, dt$$

Om $\vec{F}$ saknas $\left(\vec{F} = \vec{0}\right)$ är $\vec{X}_p = \vec{0}$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \text{“Fundamentalmatris”} = \begin{pmatrix} \vec{X}_1 & \cdots & \vec{X}_N \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrisen har en determinant skild från noll eftersom lösningarna är linjärt oberoende.

$$\vec{X} = \vec{X}_h + \vec{X}_p$$

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{“Funktionalmatris”}} \vec{X}$$

Högre ordningens ODE

Wronskian (eller wronskideterminant):

För flera variabler:

$$W\left(\coprod_{i=0}^{n} y_i\right)=\left|\coprod_{i=0}^{n}{}^{\downarrow}\ \coprod_{j=0}^{n}{}^{\rightarrow}\ y_j^{(i)}\right|$$

Om alla $y_i(x)$ är linjärt oberoende lösningar till en inhomogen ekvation på ett intervall, I, så är $W(y) \neq 0,\ \forall\ x \in I$.

$$W_n=\begin{vmatrix} y_0 & \cdots & y_{n-1} & 0 & y_{n-1} & \cdots & y_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ y_0^{(N-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(N-1)} & 0 & y_{n-1}^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)} \\ y_0^{(N)} & \cdots & y_{n-1}^{(N)} & f(x) & y_{n-1}^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} \end{vmatrix}$$

Där $f(x)$ är den inhomogena delen.

$y = y_h + y_p$

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$

$$u_n=\int \frac{W_n}{W}$$

Vid en känd icke-trivial lösning kan $y(x)$ substitueras med $u(x)y_1(x)$, vilket är den allmäna homogena lösningen.

En fundamentalmängd är en mängd av alla lösningar som är linjärt oberoende av varandra och består av en term.

Sammanfattning, modul 3: dag 1-13, 14-26

Fourierserieutveckling av styckvis kontinuerliga funktionene f definierad i intervallet $]-p; p[$.

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \qquad b_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$

Det brukar vara bra att räkna ut a_0 separat:

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx$$

Om a_n eller b_n inte blir definierad för ett visst n måste man sätta in det n:et och räkna ut värdet separat. Till exempel:

$$a_2 = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{2\pi x}{p} dx$$

Om $f(x)$ är en jämn funktion gäller:

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}_c(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}$$

Om $f(x)$ är en udda funktion gäller:

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}_s(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}$$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

kan användas för att räkna ut värdet där $f(x)$ inte är kontinuerlig.

$$\alpha \frac{\partial^a u}{\partial x^a} = \frac{\partial^b u}{\partial y^b}$$

$u(x; y) = X(x)Y(y)$

$\alpha X^{(a)}(x)Y(y) = X(x)Y^{(b)}(y)$

Dividera med $\alpha X(x)Y(y)$

$$\frac{X^{(a)}(x)}{X(x)} = \frac{Y^{(b)}(y)}{\alpha Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

ty X är oberoende av y,
och Y är oberoende av x.

$$\begin{cases} X^{(a)}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y^{(b)}(y) - \lambda\alpha Y(y) = 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X_1^{(a)}(x) - \mu^2 X_1(x) = 0$

$\lambda = 0$:

$X_2^{(a)}(x) = 0$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X_3^{(a)}(x) + \mu^2 X_3(x) = 0$

$X = X_1 + X_2 + X_3$

Utför motsvarande för Y.

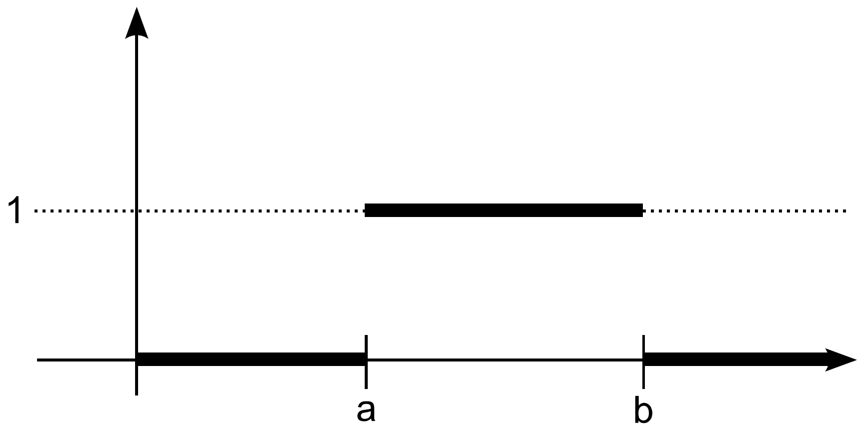
$u(x; y) = X(x)Y(y)$

Om ett godtyckligt (eventuellt med restriktion) tal, n, uppkommer i u(x; y) gäller dock:

$u_n(x; y) = X(x; n)Y(y; n)$

$$u(x; y) = \sum_{\forall n} u_n(x; y)$$

Heavisides funktion (U):



ƒ(t) = U(t – a) – U(t – b)

$$U(t-a)=\begin{cases}1 & t>a\\ 0 & t<a\end{cases}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

Transformera ekvationen med hjälp av substitutionen

z = x + at
v = x – at

Vi tänker att u(x; t) = ũ(z(x; t); v(x; t))

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}}_{a}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}}_{-a} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}a-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)=$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z \partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} =$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + 2\underbrace{\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z}}_{\partial z \partial v} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\right)}_{\text{på analogt sätt}}$$

Ekvationen $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (*) skrivs om.

Lös ekvationen $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z} = 0$

$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)=0$ $\qquad$ $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}$ beror inte på v.

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}=P(z)$ P är någon funktion.

$$\tilde{u}(z;v)=\underbrace{\int P(z)\,dz}_{\triangleq F(z)}+G(v)$$

Vi fick att lösningarna till (*) är:

$$\tilde{u}(z;v)=F(z)+G(v)$$

där F och G är godtyckliga funktioner.

$u_x' = u + u_y'$

Ansats: $u(x; y) = X(x)Y(y)$

$X'(x)Y(y) = X(x)Y(y) + X(x)Y'(y)$

Dividera med $X(x)Y(y)$.

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1)Y(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-1)y} \end{cases}$$

$u_\lambda(x; y) = (AB)_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} = c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$

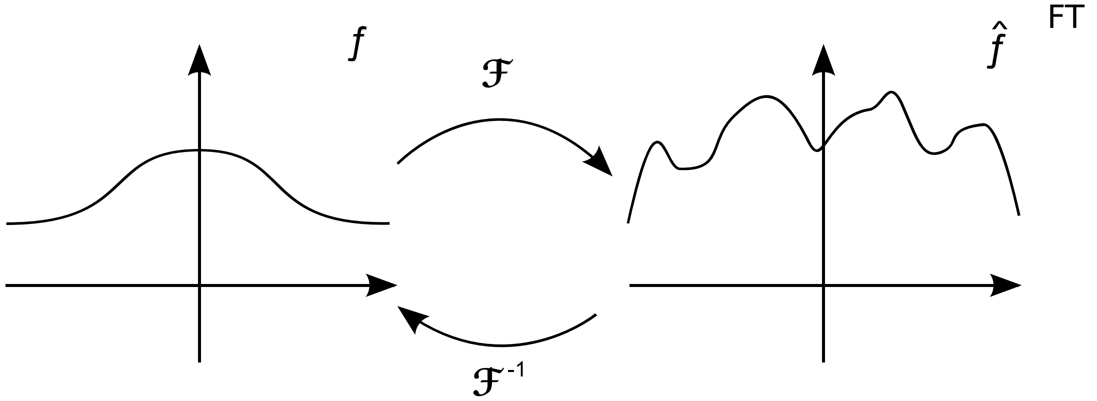
$$u(x; y) = \sum_{\forall \lambda} c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$$

Om $f(t)$ är absolut integrabel:

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$$

Om f och f' är styckvis kontinuerliga i varje ändligt intervall så gäller:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$

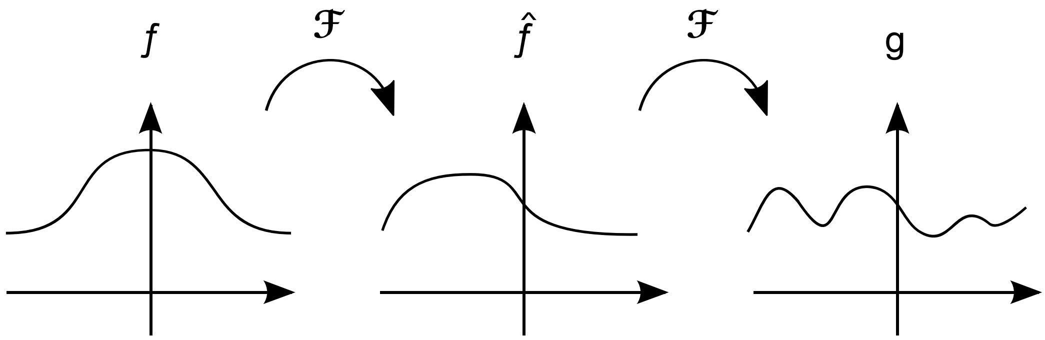


(Fouriertransformer) är linjära:

Om f och g är absolut kontinuerliga så är

$\mathcal{F}(af(T)+bg(t))(\omega)=a\mathcal{F}(f(t))(\omega)+b\mathcal{F}(g(t))(\omega)$

Dualitet:



$\mathcal{F}(\hat{f}(\omega))(t)=2\pi\, f(-t)$

Derivering och transformering:

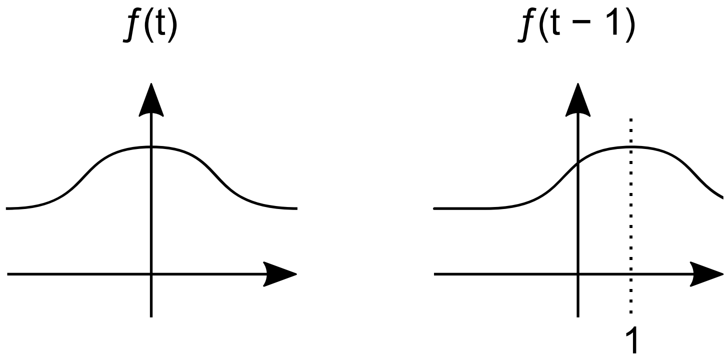
$\mathcal{F}(f'(t))(\omega)=i\omega\hat{f}(\omega)$ där $\hat{f}$ är FT av f.

På samma sätt:

$\mathcal{F}(f^{(n)}(t))(\omega)=(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$

Frekvensspektrum för stegade funktioner:

Om ƒ(t) har TF, $\hat{f}(\omega)$, vad är då FT för ƒ(t – 1)?



$$\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)(\omega)=\left\{s\stackrel{\Delta}{=}t-1\middle|t=s+1\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{i\omega(s+1)}\,ds=e^{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{i\omega s}\,ds=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)(\omega)=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

Frekvensspektra för ƒ(t) och ƒ(t – 1) är samma.

$\left|\hat{f}(\omega)\right|$ = “frekvensspektrum”

$$\left|\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)\right|=\left|e^{i\omega}\hat{f}(\omega)\right|=\underbrace{\left|e^{i\omega}\right|}_{1}\cdot\left|\hat{f}(\omega)\right|=\left|\hat{f}(\omega)\right|$$

$\left|\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)\right|$ är frekvensspektrumet för ƒ(t – 1).

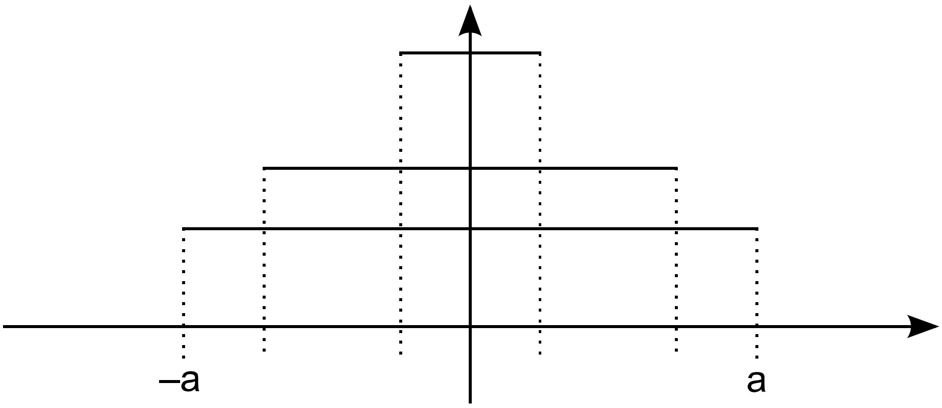
|t| med Heavisides funktion:

|t| = (2 U(t) – 1)t =
= 2t U(t) – t =
= (U(t) – U(–t))t =
= t U(t) – t U(–t) =
= **t U(t) + (–t) U(–t)**

Dirac pulser:

Betrakta gränsvärdet

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{2a}\left(U(t+a)-U(t-a)\right) \coloneqq \delta(t)$$



I vanlig mening konvergerar det inte.

Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}\left(U(t+a)-U(t-a)\right)\,dt=1 \quad \text{för alla a.}$$

För en glatt funktion ƒ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{1}{2a}\left(U(t+a)-U(t-a)\right)\,dt \underset{a\to 0^+}{\simeq} f(0)\cdot\frac{1}{2a}\cdot 2a=f(0)$$

Definiera δ(t) som en sådan funtion att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt=f(0)$$

Partiell differentialekvation med hjälp av Fouriertransformer (2010-(10)okt-07):

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty<x<\infty$$

$$u(x;0)=f(x)=\begin{cases} u_0 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

(Beskriver temperaturen i en oändlig tråd.)

Låt:

$$\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}\left(u(x;t)\right)(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x;t)e^{i\alpha x}\,dx$$

(Med avseende på x, t är fixerad)

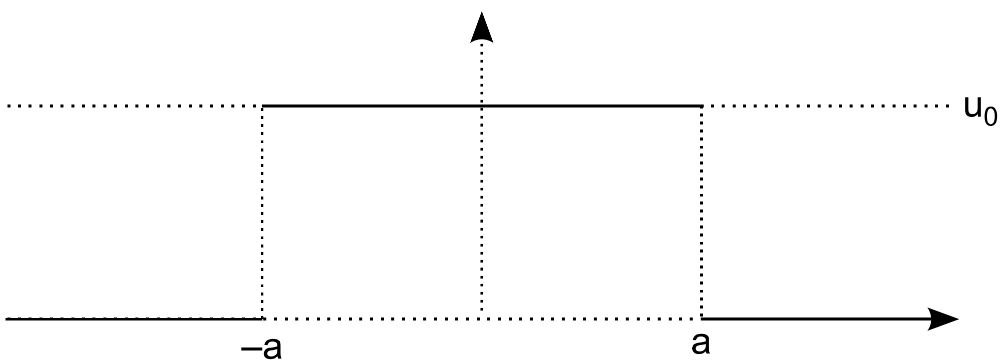
(För varje fixerat t söks FT av u(x; t))

Transformera begynnelsevillkor:

Vi har $u(x; 0) = f(x)$.

$$\mathcal{F}\left(u(x;0)\right)(\alpha;0)=\hat{u}(\alpha;0)=\mathcal{F}\left(f(x)\right)(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx=\int_{-1}^{1} u_0\cdot e^{i\alpha x}\,dx=$$

$$=u_0\left[\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\right]_{x=-1}^{1}=u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right)=2u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i\alpha}\right)=2u_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



Transformera DE:

$$k\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}\right)=k(i\alpha)^2\cdot\mathcal{F}(u(x;t))=k(-\alpha^2)\hat{u}(\alpha;t)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x;t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\cdot e^{ixt}\,dx\overset{(*)}{=}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{ixt}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha;t)$$

Förklarning av (*):

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t;s)\right)_{t=t_0}ds=\int\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}ds=$$

$$=\{\int \text{ är absolut konvergent}\}=\lim_{\Delta t\to 0}\int\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}ds=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int u(t_0;s)\,ds-\int u(t_0+\Delta t;s)\,ds}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\int(u(t;s))_{t=t_0}ds$$

Ekvationen tar formen

$$-k\alpha^2\hat{u}(\alpha;t)=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha;t)$$

För varje fixerat α är ekvationen

$$\hat{u}_t'=-k\alpha^2\hat{u}$$

Separabel!

$$\hat{u}(\alpha;t)=Ce^{-k\alpha^2 t}$$

Begynnelsevillkor (BV) ger:

$$2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\overset{BV}{=}\hat{u}(\alpha;0)=Ce^{-k\alpha^2\cdot 0}=C$$

$$C=2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Alltså:

$$\hat{u}(\alpha;t)=\frac{2u_0\sin\alpha}{\alpha}e^{-kx^2t}$$

Tillbaka-transformation:

$$u(x;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}e^{-k\alpha^2t}e^{-i\alpha x}\,d\alpha=\{\text{Se boken sida 506}\}=$$

$$\frac{u_0}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\alpha}\cdot e^{-k\alpha^2t}\,d\alpha$$

Olika böcker transformerar olika:

Vissa använder $\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}\left(u(x;t)\right)(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{i\alpha x}\,dx$ och andra använder

$\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}\left(u(x;t)\right)(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{-i\alpha x}\,dx$.

Om man använder – vid fouriertransformationen ska man vid fourierintegralen och fourierinversetransformationen använda +.

Använder + vid fouriertransformationen ska man vid fourierintegralen och fourierinversetransformationen använda –.

Reduktion av ordning:

$\mathcal{L}(D)y = 0$
y_1 är en känd icke-trivial lösning.

$y(x) \triangleq u(x)y_1(x)$
$\mathcal{L}(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende
lösningar till den homogena ekvationen

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

En partikulärlösning sökes.
Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$
Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f$

Sammanfattning av kompendiet, modul 3

Fourierserieutveckling:

ƒ(t) är definierad och styckvis kontinuerlig i intervallet]d; d+T[.

$$f(t) \sim \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right)$$

$$a(0) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) dt$$

$$a(n) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$b(n) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

ƒ sägs har den fundamentala perioden T om det finns ett minsta tal, T, så att ƒ(t + T) = ƒ(t) för alla reella t.

ƒ:s grundfrekvens $\Phi = 1/T$. Grundfrekvensen talar om hur många perioder (grundsvängningar) som förlöper per tidsenhet.

Grundvinkelfrekvensen $\Omega = 2\pi\Phi = 2\pi/T$.

Koefficienterna a(n) och b(n) talar om hur mycket vi har av vinkelfrekvensen $\omega_n = n\Omega$.

$$f(t) \sim \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(n) \cdot \cos \Omega t + b(n) \cdot \sin \Omega t \right)$$

a och b kallas Fourierkoefficienter.

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

Detta kan används för att skriva om

$$a(n)\cdot\cos\Omega t+b(n)\cdot\sin\Omega t$$

till

$$a(n)\left(\frac{e^{in\Omega t}+e^{-in\Omega t}}{2}\right)+b(n)\left(\frac{e^{in\Omega t}-e^{-in\Omega t}}{2i}\right)=$$

$$=\left(\frac{a(n)-ib(n)}{2}\right)e^{in\Omega t}+\left(\frac{a(n)+ib(n)}{2}\right)e^{-in\Omega t}$$

Sätt:

$$c(\pm n)=\frac{a(n)\mp ib(n)}{2} \quad , n\in\mathbb{Z}_+$$

$$c(0)=\frac{a(0)}{2}$$

Du kan vi skriva om

$$f(t)\sim\frac{a(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{a(n)-ib(n)}{2}\right)e^{in\Omega t}+\left(\frac{a(n)+ib(n)}{2}\right)e^{-in\Omega t}\right)$$

till

$$f(t)\sim c(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c(n)e^{in\Omega t}+c(-n)e^{-in\Omega t}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c(n)e^{in\Omega t}$$

Notera att

$$c(n)=\frac{a(n)-ib(n)}{2}=\frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{d}^{d+T}\left(\cos n\Omega t-i\sin n\Omega t\right)f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T}f(t)e^{-in\Omega t}dt \quad ,$$

$$c(-n)=\frac{a(n)+ib(n)}{2}=\frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{d}^{d+T}\left(\cos(n\Omega t)+i\sin(n\Omega t)\right)f(t)dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{in\Omega t}dt=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-i(-n)\Omega t}dt$$

samt att

$$c(0)=\frac{a(0)}{2}=\frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{i0\Omega t}$$

Detta innebär att

$$c(m)=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-im\Omega t}dt \quad \text{för alla heltal m.}$$

Alltså:

$$f(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\Omega t} \quad \text{där} \quad c(n)=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-in\Omega t}dt$$

eller

$$f(t)\sim\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c(n)e^{in\Omega t}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-in\Omega t}dt\right)$$

Vi kan beteckna den T-periodiska tillförordningen (=funktionen) $\mathcal{F}_T$, som ger

$$\mathcal{F}_T\{f(t)\}=c(n)$$

Vi kan även beteckna inversen:

$$\mathcal{F}_T^{-1}\{c(n)\}=f(t)$$

Korrespondansen kan skrivas:

$$f(t) \underset{\mathcal{F}_T^{-1}}{\overset{\mathcal{F}_T}{\rightleftarrows}} c(n)$$

Endast periodiska funktioner kan skrivs som Fourierserier, om man vill skriva om en operiodisk funktion på intervallet]–∞; ∞[måste man inställlet använda en Fourierintegral:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \quad \text{(Fourierintegral av } f\text{)}$$

där

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt \quad \text{(Fouriertransform av } f\text{)}$$

Mnemonik:

En *integral* är en summa av en *serie* med infinitesimala steg.

Frekvensspektrat $A(\omega)=\left|\hat{f}(\omega)\right|$.

En signal (funktion) som bara har frekvenser inom ett begränsat intervall sägs vara bandbegränsad.

$A(\omega)=\left|\hat{f}(\omega)\right|$ är ett mått på "hur mycket" av av frekvensen ω som förekommer i signalen $f(t)$.

$F(\omega)$ kan betäkna $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$, på samma sätt kan $G(\omega)$ betäkna $\mathcal{F}(g(t))(\omega)$, och så vidare.

Daulitet, linjäritet samt derivering och transformering (inte kopplat till varandra) tas upp; detta är sammafattat i modulsammafattningen.

Även inverstransformen, $\mathcal{F}^{-1}$, är linjär.

Skalnings egenskap hos FT:

Om ƒ(t) har har FT:en $\hat{f}(\omega)$ och a ≠ 0 är en reell konstant sådan att $\mathcal{F}$(ƒ(at)) existerar så är:

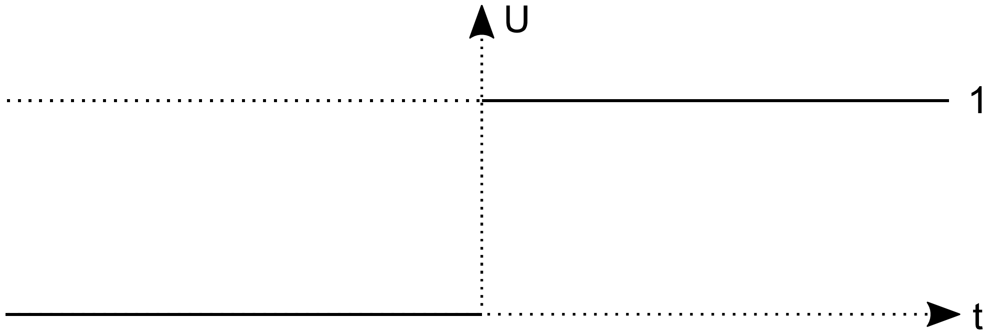
$$\mathcal{F}\left(f(at)\right)(\omega)=\frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

signum ±α = sign ±α = **sgn** ±α = ±1, α > 0
signum 0 = 0, Bör dock oftast i matematisken hanteras som odefinerat!!

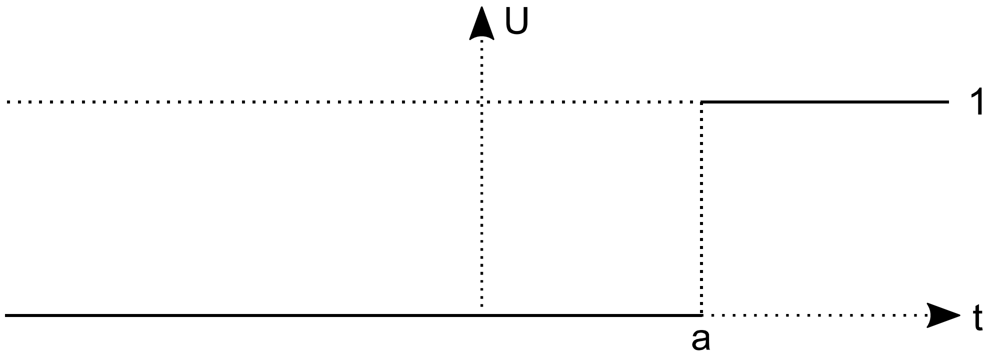
Heavisidefunktionen:

Egen kallad “Unit step function”.

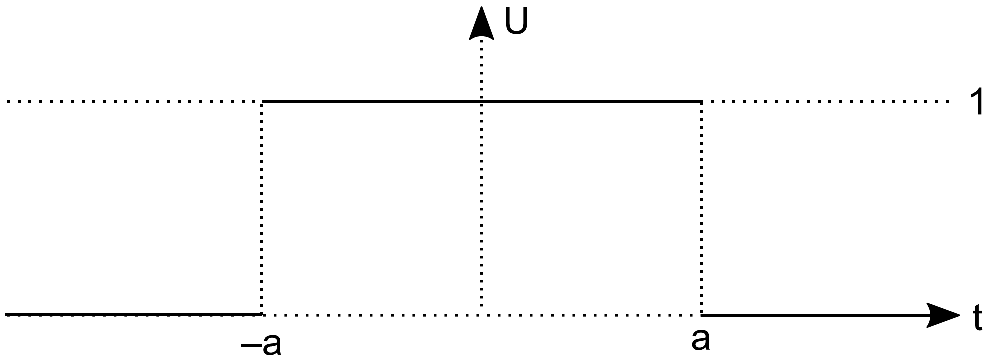
$$U(t)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$



U(t – a), a > 0



$U(t + a) – U(t – a)$



$|t| = t\, U(t) + (–t)\, U(–t)$

Använda beteckningar:

$U(t)$
$H(t)$
$\Theta(t)$
men framför allt
$\mathcal{U}(t)$, vilket vi inte använder på grund av brister inom vissa program.

Dirac-pulser finns sammanfattat i modulsammafattningen.

Nomenklaturlista

&c	et cetera	
$\mathbb{C}$	Alla komplexa tal	
$\mathbb{N}$	Alla naturliga tal (inklusive eller exklusive 0)	
$\mathbb{Q}$	Alla rationalla tal	
$\mathbb{R}$	Alla reella tal	
$\mathbb{Z}$	Alla heltal tal	
$\Re$	Reella delen $\Re(\alpha + i\beta) = \alpha$	
$\Im$	Imagionära delen $\Im(\alpha + i\beta) = \beta \neq i\beta$	
ℓ	liter	
$\mathcal{F}$	Fourierserieutveckling, eller Fouriertransformering	script F
$\mathcal{L}$	Linjär operation ($\mathcal{L}(D)$, skrivs ofta $L(D)$)	script L
$\forall$	För alla	
∂	Partial differential	
$\exists$	Det existerar	
$\nexists$	Det existerar inte	
Δ	Inkrement (delta)	
$\in$	Element av	
$\notin$	Inte element av	
∎	(Matematisk) gravsten (Q.E.D.; slut av bevis)	
$\prod$	Produkt	
$\coprod$	Coprodukt (se längre ner)	
$\sum$	Summa	
$\pm$	Plus-minus: plus eller minus (se längre ner)	
$\mp$	Minus-plus: $\alpha \mp \beta = \alpha \pm (-\beta)$ (se längre ner)	
$\setminus$	Differens, till exempel $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Alla icke-reella komplexa tal	
$\circ$	Ring operator, till exempel $(f\circ g)(\ ) = f(g(\ ))$	
( )	Variabel, precis som x, men saknar bokstav	
$\propto$	Propotionellt med tillexempel om $y(x) = kx$ så är $y \propto x$	
$\therefore$	Alltså	
$\because$	För att	
$\wr$	Värde saknas	
$\sim$	Är likartad med	
$\nsim$	Är inte likartad med	
$\simeq$	Asymptotiskt lika med ($x^{-1} \simeq 0,\ x \to \infty$) — eller — Är likartad med eller lika med ($f(x) \simeq \mathcal{F}(x)$)	
≄	Inte asymptotiskt lika med	
$\approx$	Ungefär lika med	
≉	Inte ungefär lika med	
$\cong$	Approximativt lika med. Nästa samma sak som $\approx$.	
≆	Approximativt lika med, men inte faktiskt lika med	
≇	Varken approximativt lika med eller faktiskt lika med	
≊	Ungefär lika med, eller lika med	
≌	Alla lika med	

$\asymp$ Ekvivalent med
$\bumpeq$ Skillnad mellan
$\doteq$ Närmar sig gränsen
$\stackrel{\frown}{=}$ Korresponderar med
$\stackrel{\wedge}{=}$ Uppskattar
$\stackrel{\vee}{=}$ likvinkligt med
$\triangleq$ Är lika med enligt ny definition för denna beräkning. Till exempel $y \triangleq uy_1$.
$\stackrel{\text{def}}{=}$ Är lika med enligt definition. Till exempel $i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(-1)}$.
$\stackrel{\text{m}}{=}$ Mätt med
$\stackrel{?}{=}$ Ifrågasatt lika med
$\neq$ Inte lika med
$\equiv$ Identiskt med, till exempel $5 \equiv 1$ (Mod 2)
$\not\equiv$ Inte identiskt med
$≣$ Strikt ekvivalent med
$\leq$ Mindre eller lika med
$\geq$ Mer eller lika med
$\lneqq$ Mindre, men inte lika med
$\gneqq$ Mer, men inte lika med
$\ll$ Mycket mindre än
$\gg$ Mycker mer än
$\not\asymp$ Inte ekvivalent med
$\prec$ Är innan
$\succ$ Är efter

« $\alpha \ll \beta = \alpha \cdot 2^{\beta}$ $\alpha \ll_{\xi} \beta = \alpha \cdot \xi^{\beta}$
» $\alpha \gg \beta = \alpha / 2^{\beta}$ $\alpha \gg_{\xi} \beta = \alpha / \xi^{\beta}$

$\cup$ Union $\{a\} \cup \{b\} = \{a; b\}$ $\{a; c\} \cup \{b; c\} = \{a; b; c\}$
$\cap$ Snitt $\{a; c\} \cap \{b; c\} = \{c\}$

$\vee$ Logiskt eller, $a \vee b$ är sant omm a eller b, eller båda är sant
$\wedge$ Logiskt och (men), $a \wedge b$ är sant omm både a och b är sanna

{…} En mängd med elementen …

omm Om och endast om

$\text{cis } x = \cos x + i \sin x = e^{ix}$

Pil ovanför = vektor
Tjock text = matris

$\mathbb{Z}_{+}$ Alla positiva heltal ($\mathbb{Z}$ = heltal)
$\mathbb{Z}_{-}$ Alla negativa heltal
$\mathbb{Z}_{0+}$ Alla positiva heltal samt 0 (icke-negativa heltal)
$\mathbb{Z}_{0-}$ Alla negativa heltal samt 0 (icke-positiva heltal)
$\mathbb{Z}_{m..n}$ Alla heltal mellan m (inklusivt) och n (exklusivt)

$\mathbb{N}$ är i mina dokument inklusiva 0, alltså samma mängd som $\mathbb{Z}_{0+}$

$$a \pm b \pm c = a \pm_1 b \pm_1 c = \begin{cases} a+b+c \\ a-b-c \end{cases}$$

$$a \pm b \mp c = a \pm_1 b \mp_1 c = \begin{cases} a+b-c \\ a-b+c \end{cases}$$

$$a \pm_1 b \pm_2 c \mp_2 d = \begin{cases} a+b+c-d \\ a+b-c+d \\ a-b+c-d \\ a-b-c+d \end{cases}$$

$$a = \coprod_{n=s}^{N} a_n = (a_s, a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_{N-2}, a_{N-1}, a_N)$$

$$\left(\coprod_{i=0}^{n} {}^{\downarrow} \coprod_{j=0}^{m} {}^{\rightarrow} f(i;j) \right) = \begin{pmatrix} f(0;0) & f(0;1) & f(0;2) & \cdots & f(0;m) \\ f(1;0) & f(1;1) & f(1;2) & \cdots & f(1;m) \\ f(2;0) & f(2;1) & f(2;2) & \cdots & f(2;m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(n;0) & f(n;1) & f(n;2) & \cdots & f(n;m) \end{pmatrix}$$

Funktionskombinationer:

Antag att ƒ, g, h och k är funktioner.

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (fg)(x)$

$(f / g)(x) = f(x) / g(x)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$(fg + hk)(x) = f(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot k(x)$

signum $\pm\alpha$ = sign $\pm\alpha$ = sgn $\pm\alpha = \pm 1$, $\alpha > 0$
signum 0 = 0; Bör oftast hanters som odefinierat
signum $(re^{i\theta})$ = cis θ, $r > 0$