[Moduluppgift 2]

Bestäm dem kritiska punkterna till

$$\begin{cases} x' = x - y = P(x;y) \\ y' = 1 - x^2 = Q(x;y) \end{cases}$$

Avgör stabilitet och typ hos dessa.

1. Kritisk punkt: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$

a) $x = 1$
$y = x = 1$

(1; 1) är en kritisk punkt.

b) $x = -1$
$y = x = -1$

(–1; –1) är en kritisk punkt.

2a) Linjärisera i punkten (1; 1)

$$\mathbf{A_1} = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}\right]_{(1;1)} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}\right]_{(1;1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A_1} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

sadelpunkt (signum λ_1 = –signum $\lambda_2 \neq 0$)

2b) punkt (–1; –1)

$$\mathbf{A_2} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}\right]_{(-1;-1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A_2} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

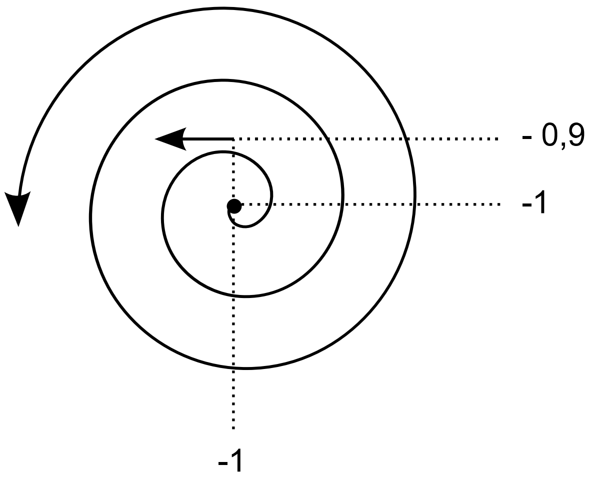
Instabil $\because\ \Re\,\lambda > 0$
Spiral $\because\ \Im\,\lambda \neq 0$

Åt vilket håll roterar spiralen?

Tag, till exempel, (–1; –0,9)

Riktningsvektorn i (–1; –0,9) är

$$\left[\begin{pmatrix} x-y \\ 1-x^2 \end{pmatrix}\right]_{(-1;\,-0,9)} = \begin{pmatrix} -1+0,9 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



[Moduluppgift 3]

Visa att $\{\sin nx \mid n = \mathbb{Z}_+\}$ utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet $[0; \pi]$.

Lösning:

Vi måste visa att $(\sin nx;\, \sin mx) = \int_0^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx\, dx = 0$ för alla $m \neq n$.

Kom ihåg: $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$
$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \tfrac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$

$$\int_0^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^{\pi} = \frac{\sin((n-m)\pi)}{2(n-m)} - \frac{\sin((n+m)\pi)}{2(n+m)}$$

Skriv funktionen $\sin^3 x$ på intervallet $[0; \pi]$ som linjärkomination av ovan.

Se Beta sida 128:

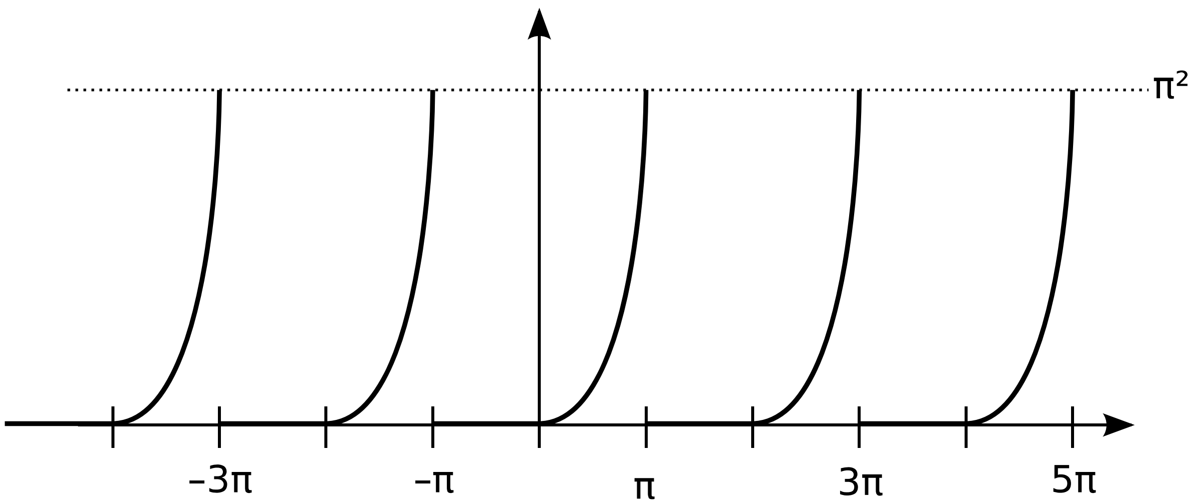
$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$$

Vi vet att funktionerna kan uttryckas som linjärkombination av linjärt oberoende vektorer bara på ett enda sätt.

Beräkna Fourierserien av

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & \Leftarrow \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Periodisk utvidning:



$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p} \right)$$

$f \simeq \mathcal{F}(f)$ Om f är helt kontinuerlig så är $f = \mathcal{F}(f)$, annars så är $f \sim \mathcal{F}(f)$.

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{x^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l|r} \multicolumn{2}{l}{\text{Partial integration}} \\ u_1 = x^2 & v_1' = \cos nx \\ u_2 = x & v_2' = \frac{1}{n}\sin nx \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}x^2 \sin nx + \frac{2}{n^2}\left(x\cos x - \frac{1}{n}\sin nx\right)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2}\cdot\pi\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} = \frac{2}{n^2}(-1)^n$$

Observera att det är blir skillad i a_n om $n = 0$, så för a_n så måste $n \neq 0$.

b_n — se facit

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n \cdot \frac{2}{n^2}\cos nx + b_n \sin nx\right)$$

$f(x) = \mathcal{F}(f)(x)$ för alla x där f är kontinuerlig.

I punkterna $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

Exempel: $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{\pi^2 + 0}{2} = \dfrac{\pi^2}{2}$

Visa att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (En av Ramanujans formler)

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n^2} \cdot (-1)^n = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

3) Antag att $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i
a) Fourierserie
b) sinus-serie
c) cosinus-serie

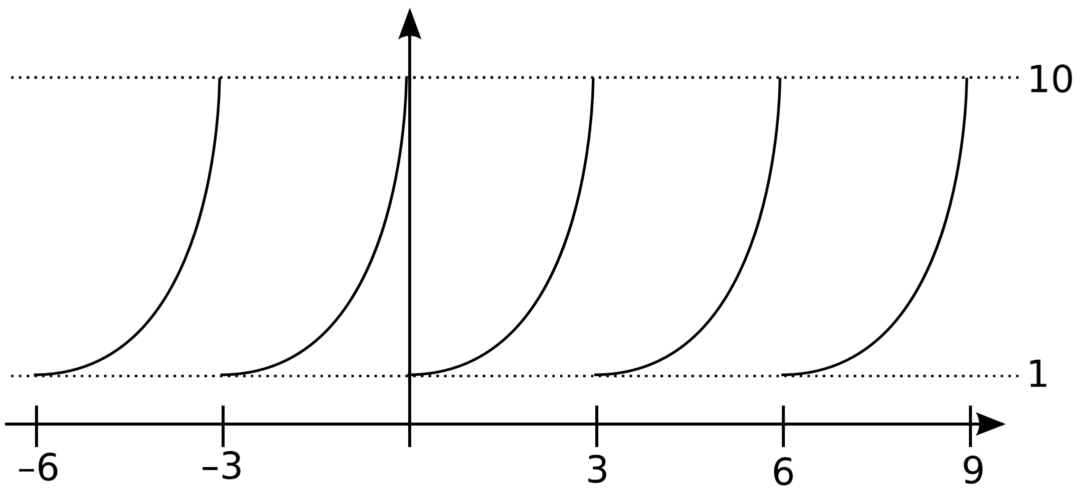
Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar för $x = 0$.

a) $\mathcal{F}$ konvergerar 5,5 se bild på nästa sida

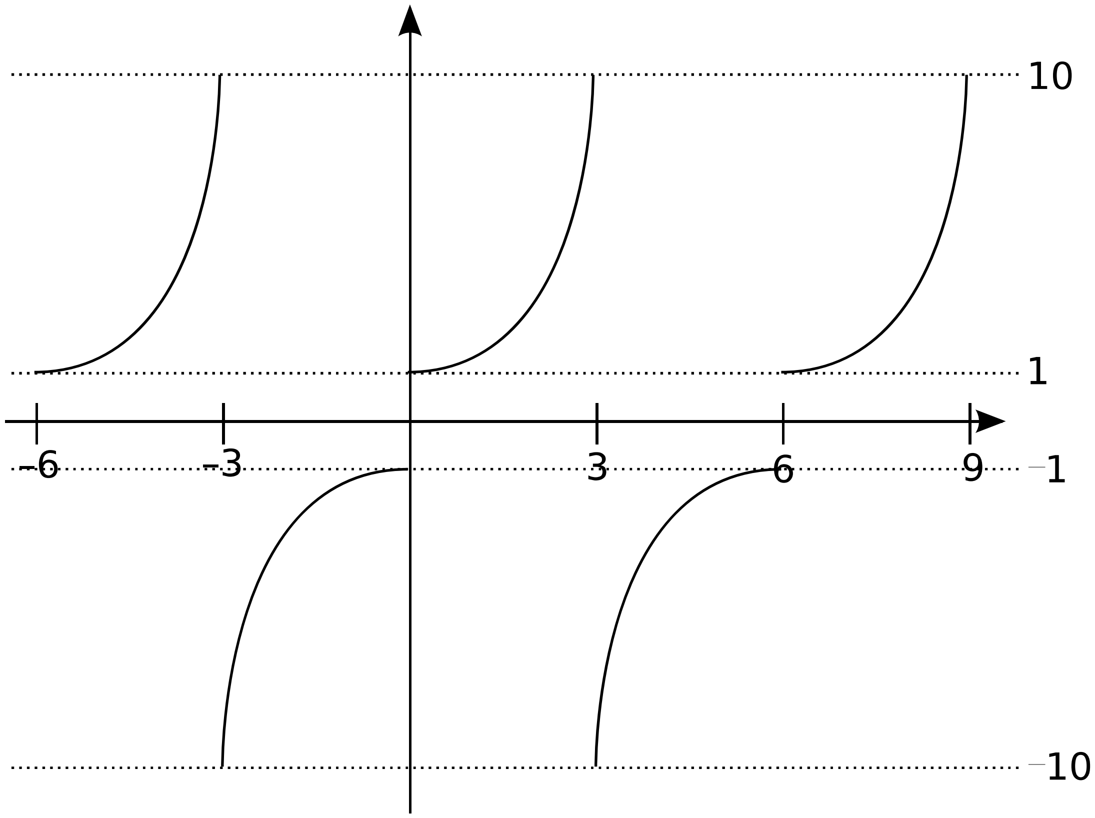
b) $\mathcal{F}_s$ konvergerar 0 se bild på nästa sida udda f

c) $\mathcal{F}_c$ konvergerar 1 se bild om två sidor jämna f

a)



b)



c)