System av linjära första ordningens ODE

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F}$$

Bestäm egenvärderna λ:

$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$

λ reella och enkla ($\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$	Instabil nod
$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$	Stabil nod

λ reella och multipla ($\lambda_1 = \lambda_2$):

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instabil degenererad nod
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil degenererad nod

λ komplex ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$):

$$\vec{Z} = e^{(\alpha + i\beta)t}\vec{K_1} = e^{\alpha t} \operatorname{cis} \beta t \cdot \vec{K_1}$$

$\vec{X_1} = \Re \vec{Z}$ ($\Re$ skrivs ofta Re)

$\vec{X_2} = \Im \vec{Z}$ ($\Im$ skrivs ofta Im)

$\alpha > 0$	Instabil spiral
$\alpha = 0$	Centrum, stabil (ellipsformad)
$\alpha < 0$	Stabil spiral

Vid λ reella och enkla:

$\vec{X_h} = \sum_{n=1}^{N} C_n \vec{X_n}$ där $\vec{X_n} = \vec{v_n} e^{\lambda_n t}$ där $\vec{v_n}$ är egenvektorn för λ_n som beräknas genom: $(\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I})\vec{v_n} = \vec{0}$

Vid λ reella och multipla:

$$\vec{X_h} = C_1 \underbrace{\vec{v_1} e^{\lambda_1 t}}_{\vec{X_1}} + C_2 \underbrace{\left(t\vec{v_1} + \vec{v_2}\right) e^{\lambda_1 t}}_{\vec{X_2}}$$

Där $\vec{v_1}$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\vec{v_1} = \vec{0}$

och $\vec{v_2}$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\vec{v_2} = \vec{v_1}$

Vid λ komplexa:

$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \ \ \lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$\vec{X}_h = C_1 \Re \vec{Z} + C_2 \Im \vec{Z} \quad \text{där} \quad \vec{Z} = e^{(\alpha + i\beta)t} \vec{v}_1 = e^{\alpha t} \operatorname{cis} \beta t \cdot \vec{v}_1$$

där $\vec{v}_1$ beräknas genom $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{v}_1 = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} a+ib & c \\ p & q \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -a+ib \\ \xi \end{pmatrix}_{\xi = \frac{a^2+b^2}{c}}$$

(p; q) är linjärt beroende (a + ib; c)

Inhomogena delen:

$$\vec{X}_p = \mathbf{\Phi}(t) \int \mathbf{\Phi}^{-1}(t) \vec{F}(t)\, dt$$

Om $\vec{F}$ saknas $(\vec{F} = \vec{0})$ är $\vec{X}_p = \vec{0}$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \text{“Fundamentalmatris”} = \begin{pmatrix} \vec{X}_1 & \cdots & \vec{X}_N \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = \vec{X}_h + \vec{X}_p$$

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{“Funktionalmatris”}} \vec{X}$$

Högre ordningens ODE

Wronskian (eller wronskideterminant):

För flera variabler:

$$W\left(\coprod_{i=0}^{n} y_i\right)=\left|\coprod_{i=0}^{n}{}^{\downarrow}\ \coprod_{j=0}^{n}{}^{\rightarrow}\ y_j^{(i)}\right|$$

Om alla $y_i(x)$ är linjärt oberoende lösningar till en inhomogen ekvation på ett intervall, I, så är $W(y) \neq 0$, $\forall\ x \in I$.

$$W_n=\begin{vmatrix} y_0 & \cdots & y_{n-1} & 0 & y_{n-1} & \cdots & y_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ y_0^{(N-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(N-1)} & 0 & y_{n-1}^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)} \\ y_0^{(N)} & \cdots & y_{n-1}^{(N)} & f(x) & y_{n-1}^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} \end{vmatrix}$$

Där $f(x)$ är den inhomogena delen.

$y = y_h + y_p$

$y_h = C_1y_1 + C_2y_2$

$y_p = y_1u_1(x) + y_2u_2(x)$

$$u_n=\int \frac{W_n}{W}$$

Vid en känd icke-trivial lösning kan $y(x)$ substitueras med $u(x)y_1(x)$, vilket är den allmäna homogena lösningen.

En fundamentalmängd är en mängd av alla lösningar som är linjärt oberoende av varandra och består av en term.