[Moduluppgift 10]

Lös $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i området.

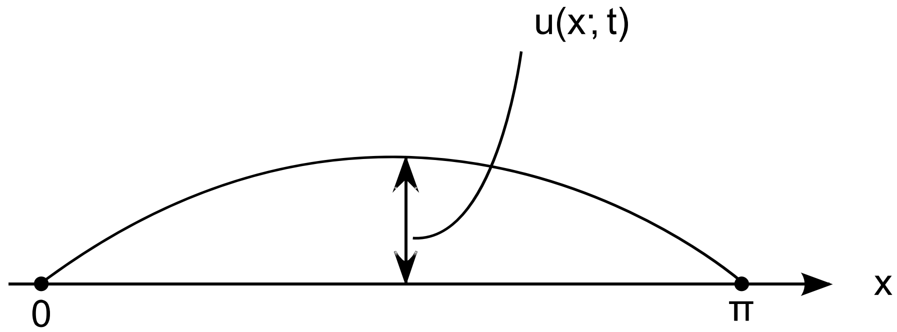
$0 < x < \pi$, $t > 0$

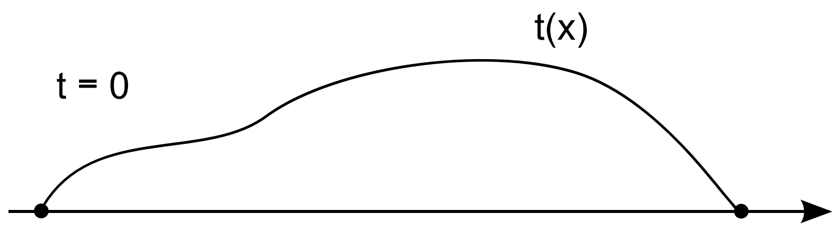
(vågekvationen)

Med randvillkor $u(0; t) = u(\pi; t) = 0$

och begynnelsevillkor $u(x; 0) = \sin^2 x + 4 \sin 4x = f(x)$

$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$





Använd separation av variabler.

Söker $u(x; t) = X(x)T(t)$

Sätter in i ekvationen:

$$X(x) \cdot T''(t) = 4X(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{4T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

VL beror ej av x.
HL beror ej av t.

Det innebär att HL = VL = “konstant” = λ.

$T''(t) - 4T(t)\lambda = 0$
$X''(x) - X(x)\lambda = 0$

Löser $X'' - \lambda X = 0$

Formen av lösningen beror på λ.

För att villkoret $u(0; t) = u(\pi; t) = 0$ ska vara uppfyllt måste $X(0)T(t) = 0$ för alla t samt att $X(\pi)T(t) = 0$ för alla t.

$X(0) = X(\pi) = 0$

Vi får randvärdesproblem:

$X'' - \lambda X = 0 \quad X(0) = X(\pi) = 0$

Karakteristisk ekvation:

$r^2 - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\lambda}$

Fall 1: $\lambda > 0$:

$$X_1(x)=A_1 e^{\sqrt{\lambda}x}+B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$X(0) = 0 \Rightarrow A_1 + B_1 = 0$
$X(\lambda) = 0 \Rightarrow A_1 = B_1 = 0$

$A_1 = B_1 = 0$

Fall 2: $\lambda = 0$:

Ger oss ekvationen $X'' = 0$

$X_2 = A_2 x + B_2$

Villkor:
$X(0) = 0 \Rightarrow 0 \cdot A_2 + B_2 = 0 \Leftrightarrow B_2 = 0$
$X(\lambda) = 0 \Rightarrow \pi \cdot A_2 + 0 = 0 \Leftrightarrow A_2 = 0$

$A_2 = B_2 = 0$

Fall 3: $\lambda < 0$:

$r = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$$X_3(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x) ¿$$

$$X(x) = \underbrace{X_1}_{0} + \underbrace{X_2}_{0} + X_3 = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

Randvillkor: $0 = X(0) = C_1$ Det vill säga:

$$X(x) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

$$X(\pi) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, \pi) = 0$$

$C_2 \neq 0$ $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$ $\sqrt{-\lambda}\pi = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{R}$

$\sqrt{-\lambda} = n$ $-\lambda = \pm n^2$ $\lambda = \pm n^2$

Vi får icke-triviala lösningar

$$X(x) = C \sin nx$$

Vi löser T.

$T'' - 4\lambda T = 0$

$r^2 - 4\lambda = 0$

$r = \pm\sqrt{4\lambda} = \pm\sqrt{-4n^2} = \pm i2n \sim i2n$ $\because$ $z \sim \bar{z}$

$\lambda > 0$:

$$T(x) = D_1 \cos 2nt + D_2 \sin 2nt$$

Således för varje heltal, n, är

$u(x, t) = X(x) \cdot Y(y) = C_2 \sin nx \cdot (D_1 \cos 2nt + D_2 \sin 2nt)$

Om $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$ är lösningar till ekvationen och uppfyller villkoren samt är linjärt oberoende så är $u(x;t) = u_1(x;t), u_2(x;t), u_3(x;t), \ldots, u_k(x;t)$ också en lösning.

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot (A_n \cos 2nt + B_n \sin 2nt)$$

$$(A_n = C_{2;n} \cdot D_{1;n}, \ \ B_n = C_{2;n} \cdot D_{2;n})$$

Låt oss välja A_n och B_n så att, de snart definierade, (†) och (‡) uppfylls.

$$u(x;0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = (†) = \sin 2x + 4 \sin 4x$$

$A_2 = 1$, $A_4 = 4$, resten $A_n = 0$

För att bestämma B_n, använd:

(‡)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-2nA_n \sin nt + 2nB_n \cos 2nt\right) \sin nx$$

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx$$

Alla $B_n = 0$.

Vi har alltså

$$u(x;t) = \cos 4t \cdot \sin 2x + 5 \cos 8t \cdot \sin 4x$$

Ungefär samma problem som ovan.

(‡) : $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = g(x)$

$$g(x) = \begin{cases} 5, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{för övriga } x \end{cases}$$

Man för på samma sätt som ovan.

Bestämmer A_n på samma sätt.

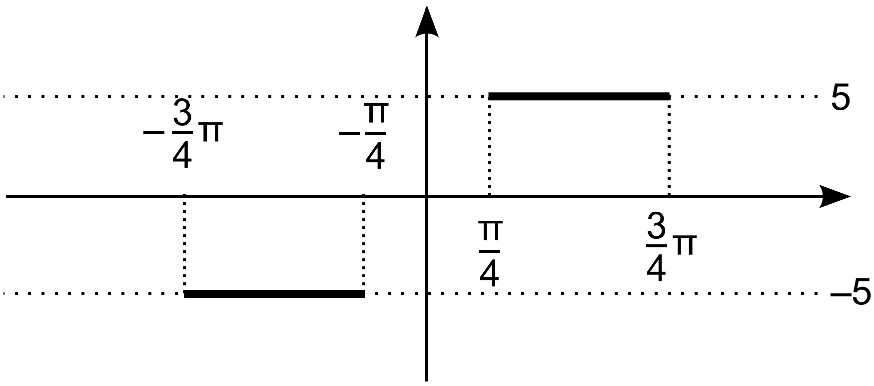
För att bestämma B_n:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx = g(x)$$

Utveckla g(x) i sinusserie.

För detta behöver vi att g(x) är udda.

Låt oss ändra g(x) utanför [0; π] och definiera den som udda och periodisk.



g(x) kan utvecklas som $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\pi}\left(\cos\frac{3\pi n}{4} - \cos\frac{\pi n}{4}\right)$.

(‡) ger:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\pi}\left(\cos\frac{3\pi n}{4} - \cos\frac{\pi n}{4}\right) \sin nx$$

Hitta B_n genom att identifiera koefficienterna.