2011-(05)maj-04: dag 27

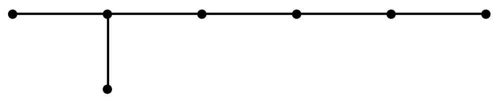
Övning 9

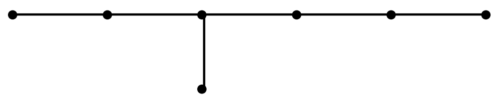
1) Rita alla (icke-isomorfa) träd (sammanhängande, acyklisk graf) med 7 hörn.
En av varje isomorfityp.

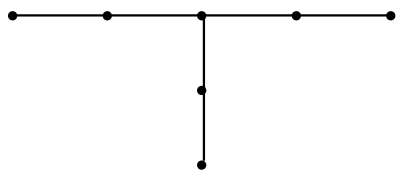
Max valens:

2:

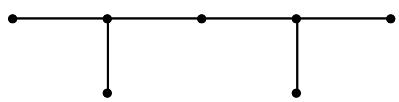
3: 1) 1 hörn med valens 3:

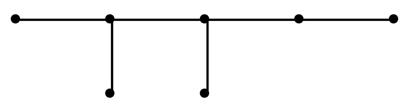




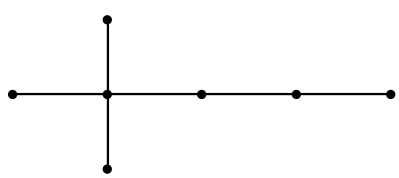


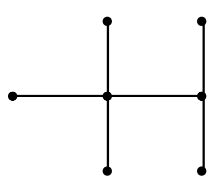
2) 2 hörn med valens 3:

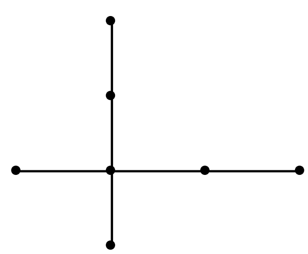




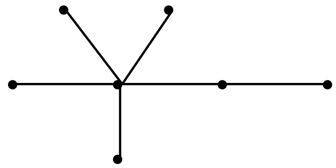
4:



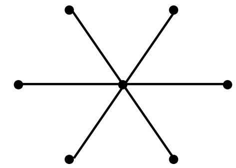




5:



6:



Totalt 11 olika.

2) Grafen $G = (V, E)$ saknar cykler, $|V| = 143$, $|E| = 100$.
Hur många komponenter?

(G är en skog.) Varje komponent är ett träd (sammanhängande och acyklisk), så antelet hörn i den är 1 mer än kanter, i den.
k stycken komponenter ger alltså $143 - 100 = 43$ komponenter.

3) $G = (V, E)$ med $\delta(x) + \delta(y) \geq n + 1$, $(n = |V|)$, alla, $x, y \in V$.
Vi skall visa att G är sammanhängande.

Motsägelsevis:

Antag att G inte är sammanhängande, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, och inga kanter mellan $u \in V_1$ och $v \in V_2$.

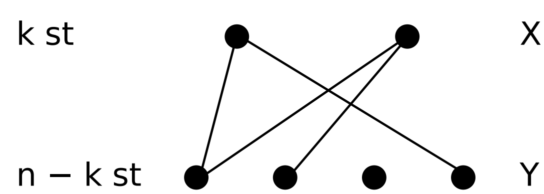
Om $x \in V_1 : \delta(x) \leq |V_1| - 1$
$y \in V_2 : \delta(y) \leq |V_2| - 1$

då $\delta(x) + \delta(y) \leq |V_1| + |V_2| - 2 = n - 2$.
Motsägelse!

4) $G = (V, E)$ bipartit $(V = X \sqcup Y)$ ($\sqcup$ används inte av läraren; $V = X \sqcup Y$ betyder $V = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$.)

$|V| = n$, låt $|X| = k$, $|Y| = n - k$

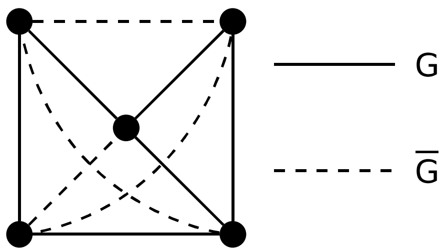
Då: $$e = |E| = \sum_{x \in X} \underbrace{\delta(x)}_{\leq n-k} \leq k(n-k) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(k - \frac{n}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2$$



5) Till grafen $G = (V, E)$ bildas dess komplementgraf
$\overline{G} = (V, E')$ så att $E \cap E' = \emptyset$, $K_n \cong (V, E \cup E')$, $(|V| = n)$,

isomorfisk med (skrivs ibland $\simeq$, $\approx$)

det vill säga; det går kanter i $\overline{G}$ mellan hörn x och y
omm det inte går en kant mellan dem i G.



Om ett hörn har valens δ i G, har det valens $(n - 1) - \delta$ i $\overline{G}$.

a) Valenssekvensen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ger valenssekvensen i $\overline{G}$:

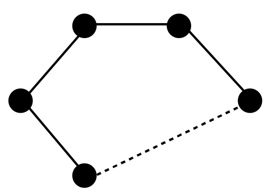
$$n - 1 - \delta_1, \ldots, n - 1 - \delta_n$$

b) Om G är k-reguljär (det vill säga $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = k$
(kan skrivas $\delta \backcong k$, notera spegelvänt tilde))
är $\overline{G}$ således $(n - 1 - k)$-reguljär.

Så enda möjliga $\overline{G}$:

C_8, $C_5 + C_3$, $C_4 + C_4$

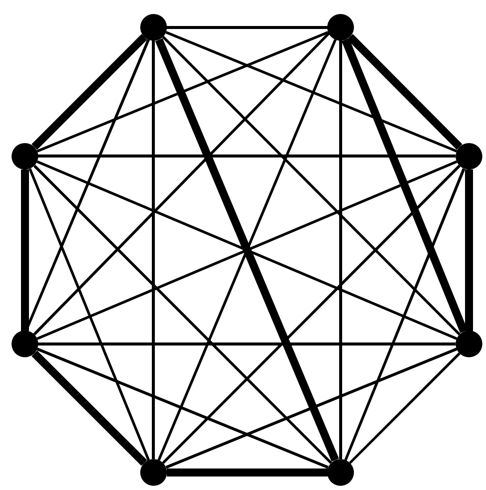
C_n, $n \geq 3$



Till exempel G som svarar mot
$\overline{G} = C_5 + C_3$:

G smal

$\overline{G}$ tjock

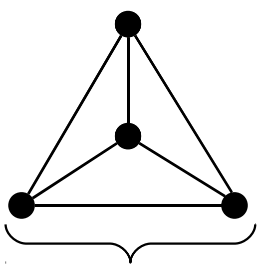
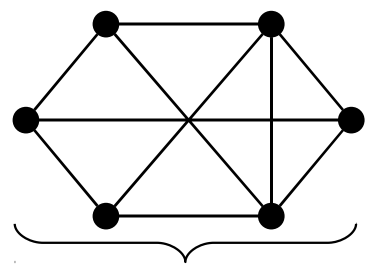


7) $G = (V, E)$, $\delta(v) \geq 3$ alla $v \in V$, $|E| = 28$
Hur stort kan $|V|$ vara?

$$\underbrace{\sum_{v \in V} \delta(v)}_{\geq 3|V|} = 2|E|, \text{ så } |V| \leq \frac{2\cdot 28}{3} = 18\frac{2}{8}$$

Alltså $|V| \leq 18$.

Men finns en sådan?

3 ×  + 

V:	12	+	6	=	18
E:	18	+	10	=	28

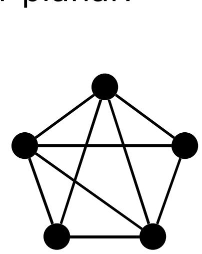
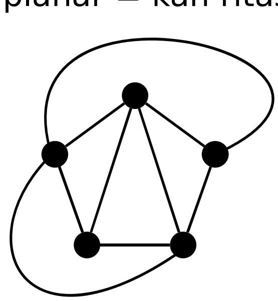
Så ja, $|V| = 18$ är möjligt.

8) Visa G osammanhängade $\Rightarrow \overline{G}$ sammanhängande.

x, y inet grannar i G: xy en väg mellan dem i $\overline{G}$.

x, y grannar i G, z i en annan komponent: xzy en väg i $\overline{G}$.

9) (K_5 − 1 kant) är planär: (planär = kan ritas som en plan graf.)

10) $G = (V, E)$ sammanhängande, 4-reguljär och planär, $e = |E| = 16$.

Vad är r, antalet ytor för en plan ritning av G?

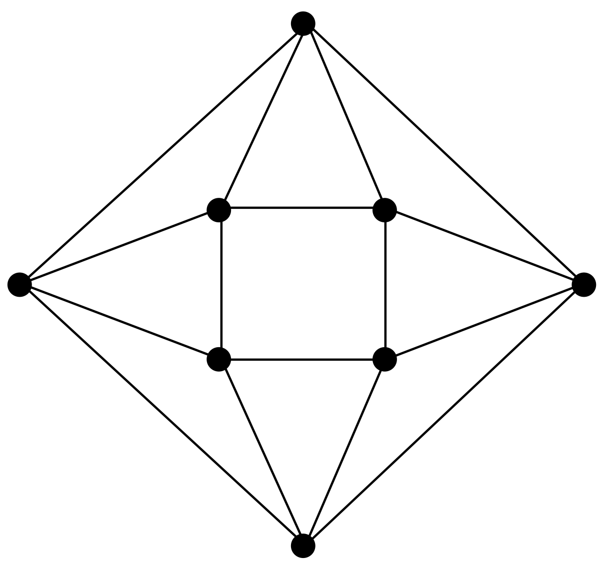
Eulers polyederformel för sammanhängande grafer:

$$v - e + r = 2 \qquad \text{(r kallas ibland f.)}$$

$4v = \sum_{x \in V} \delta(x) = 2e = 32$ så $v = 8$ och

$r = 2 - v + e = 2 - 8 + 16 = 10$

Exempel:



11) $G = (V, E)$ sammanhängande planär har ingen cykel av längd $< k$, $k \geq 3$.

Då är $k \cdot r \leq \sum_{\text{alla ytor}} \underbrace{(\text{antalet kanter kring utan})}_{\geq k} = 2e$

Så $r \leq \frac{2}{k} e$ (varje biparitit graf: $k = 4$)

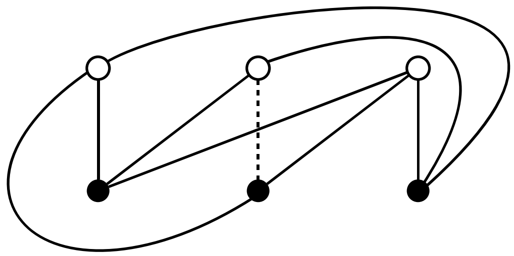
$$2 = v - e + r \leq v + \underbrace{\left(\frac{2}{k} - 1\right)}_{< 0} e, \quad e \leq \frac{k}{k-2}(v-2)$$

K = 3: $e \leq 3(v-2)$
K = 4: $e \leq 2(v-2)$

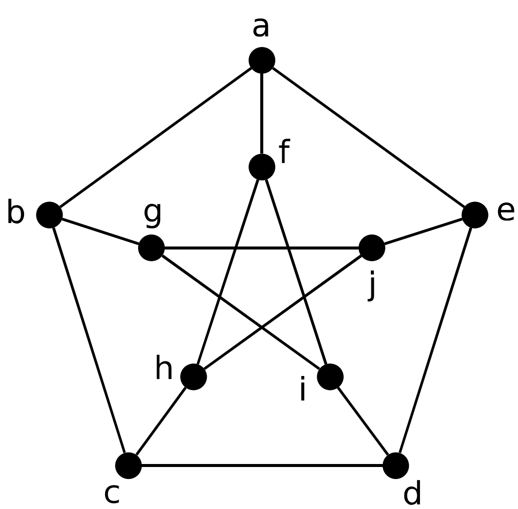
$K_{3,3}$ är inte planär:

$e = 9$, $v = 6$, $2(v-2) = 8$

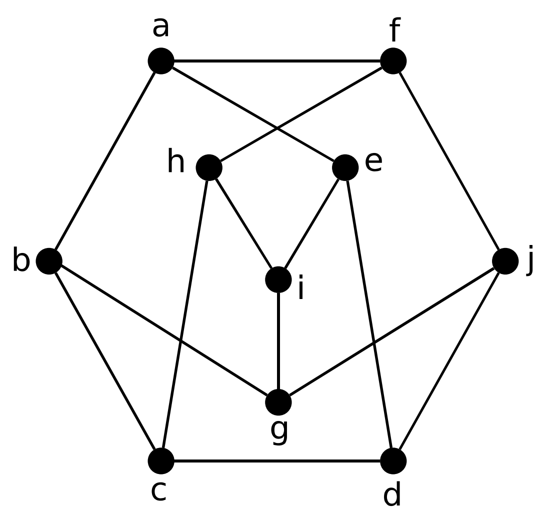
$e > 2(v-2)$ inte planär



Petersens graf:



(Alternativt:)



Petersens graf har inga cykler av längd ≤ 4, det vill säga k = 5 i:

$$e \leq \frac{k}{k \cdot 2}(v-2) = \frac{5}{3}v - 2$$

$e = 15$, $v = 10$

$$\frac{5}{3}(v-2) = \frac{5}{3}8 = 13\frac{1}{3}$$

Så grafen är inte planär (inte ens om man tar bort ett hörn och dess kanter).

Kuratowskis sats:

Varje icke-planär graf “innehåller” antingen K_5 eller $K_{3,3}$.

det finns en delgraf som är isomorf
med en “subdivision” av K_5 eller $K_{3,3}$.

Den graf med extra hörn på kanter.

Wagners sats:

Detsamma med “innehåller” betyder att den har K_5 eller $K_{3,3}$ som minor.
Det vill säga någon kantkontraktion av grafen har K_5 eller $K_{3,3}$ som delgraf.

Bort tagning av hörn i Petersensgraf:

Se: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kuratowski.gif