Övning 1

I slutet av kursen ska vi göra beräkningar av viktiga problem.

Vi ska titta på en metod med tidsteg.

Kommer ta fram en approximativ lösning.

Konceptet: tidstegning

$$\frac{du}{dt} = f(t;\, u) \qquad \text{given funktion} = f(t;\, u)$$

Enklare $f = f(t)$ enbart.

Exempel: Newtons andra lag

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= F & f(t) &= F \\ \frac{dx}{dt} &= v & f(t) &= v \end{aligned}\right\} \text{Samma form som } \frac{du}{dt} = f(t)$$

Idén: $dv = F \cdot dt$

$dv = v^{n+1} - v^n$

$dt = t_{n+1} + f^n$

Differenskvot:

$$v' = \lim_{dt \to 0} \frac{dv}{dt}$$

$v^{n+1} - v^n = F \cdot dt$

$v^{n+1} = v^n + dt \cdot F(t^n)$, $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad$ Kallas Euler framåt

För att inte få oändligt med lösningar måste vi fixera u vid en punkt.

$t = 0 \qquad v = 0$

$n = 0 \;\Rightarrow\; v^1 = v^0 + dt\, F(t_0) \;\Rightarrow\; v' = 0 + dt\, F(t_0)$

$t_1 = t_0 + dt$

$t = 1$

$$v^2 - v^2 \cdot dt\, t_1 = dt\, F(t_0) + dt\, F(t_1)$$

$$t_2 - t_1 + dt$$

För den generella formen $\frac{du}{dt} = f(t)$

Euler framåt

$$u^{n+1} = u^n + dt\, f(t_n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

Trapetsmetoden

$$u^{n+1} = u^n + \frac{dt}{2}\left(f(t_n) + f(t_{n+1})\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

Om man använder sig av Euler kommer man få ett fel som väger som Δt.

I andra fallet [Trapetsmetoden] så växer felet kvadratisk,
vilket kallas för ordning två.

Uppgift 1

En given kraft $f(t) = \cos(t)$ verkar på en partikel med massan, $m = 1$.
Rörelsen hos partikeln kan beskrivas med Newtons andra lag enligt

$$m \frac{dv}{dt} = \cos(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

Vid tiden $t = 0$ har partikeln hastigheten $v = 0$ och befinner sig vid $x = 0$.
Vilken hastighet har partikeln och var befinnr den sig vid $t = 0,2$?

Om kraften istället ges av ƒ(t) sin(t) / t,
vilken hastighet och position kommer partikeln ha vid t = 1,2?

I det här fallet vet vi att den vid t = 1 har hastigheten v = 0 och positionen x = 0.

$v^{n+1} = v^n + dt \cos(t_0)$

$x^{n+1} = x + dt\, v^n$

Man börjar med att välja ett tidssteg: dt = 0,2

t = 0, x = 0, v = 0

n = 0 $v^{0+1} = v^0 + 0{,}2 \cos(t^0) = 0 + 0{,}2 \cos 0 = 0{,}2$

$x^1 = x^0 + dt\, v^0 = 0$

$$0 = 0 + \underbrace{0{,}2 \cdot 0}_{\text{skumt}}$$

Fel! För stort steg!

Analytisk lösning

$$m \frac{dv}{dt} = \cos(t), \quad m=1, \ t=0, \ v=0, \ x=0$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \cos(t) \qquad \begin{array}{l} v(t) = \sin(t) + C_1 \\ v(0) = \sin(0) + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{array}$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin(t) \qquad \begin{array}{l} x(t) = -\cos(t) + C_2 \\ x(0) = -\cos(0) + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 1 \end{array}$$

$x(t) = 1 - \cos(t)$

$v(0{,}2) = \sin(0{,}2) \approx 0{,}19867$

$x(0{,}2) = 1 - \cos(0{,}2) \approx 0{,}019933$

Igen med ett mindre steg, dt = 0,1 (2 steg)

$$v_{0,1}^{2}=0{,}1995$$

$$x_{0,1}^{2}=0{,}01$$

$$\left.\begin{aligned}\left|v_{ex}(0{,}2)-v^{1}\right|&\approx 0{,}00133\\ \left|x_{ex}(0{,}2)-x^{1}\right|&\approx 0{,}0199\end{aligned}\right\}\quad dt=0{,}1$$

$$\left|v_{ex}(0{,}2)-v^{2}\right|\approx 0{,}00083$$

$$\left|x_{ex}(0{,}2)-x^{2}\right|\approx 0{,}00933$$

```
t = 0
x = 0
v = 0
dt = 0,5
tslut = 0,2

varray = array(v)
xarray = array(x)
tarray = array(t)

N = (tslut - t) / dt

print N

for i in range(0, N):
     t0 = t
     x0 = x
     v0 = v

     t = t0 + dt
     v = timestep(f, t0, v0, dt, "Euler")
     x = x0 + dt * v0

     varray = append(varray, v)
     xarray = append(varray, x)
     tarray = append(varray, t)

err_v = v_ex(t) - varray[-1]
err_x = x_ex(t) - xarray[-1]

print
print
```

0,5 ger felen

$$\left|v_{ex}(0{,}2) - v^{4}\right| \approx 0{,}00046$$
$$\left|x_{ex}(0{,}2) - x^{4}\right| \approx 0{,}0056 \qquad dt = 0{,}05$$

Med midpoint

dt = 0,2

$err_r = 6{,}63 \cdot 10^{-4}$

dt = 0,1

$err_r = 1{,}66 \cdot 10^{-4}$

Halvering av dt gör att felet blir en fjärdedel av vad det var innan.

Fundamentalsatsen

Relationen mellan derivata och integral

$\frac{du}{dt} = f(t),\ u(0)=0$ u(t) är en primitiv funktion till f(s)

$u(t) = \int_0^t f(s)\,ds$ är lösningen till

$$u(T) - \bar{u}(T) \leq \frac{LT}{4}\,dt$$

Approximativ lösning med dt, u(T)

Approximativ lösning med $\frac{dt}{2},\ \bar{u}(T)$

$$L = \text{“Lipschitz-konstanten”} = \max_{t_0 \leq t \leq T} \left|\frac{df}{dt}\right|$$