Partiell differentialekvation med hjälp av Fouriertransformer (2010-(10)okt-07):

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty<x<\infty$$

$$u(x;0)=f(x)=\begin{cases} u_0 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

(Beskriver temperaturen i en oändlig tråd.)

Låt:

$$\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}\left(u(x;t)\right)(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x;t)e^{i\alpha x}\,dx$$

(Med avseende på x, t är fixerad)

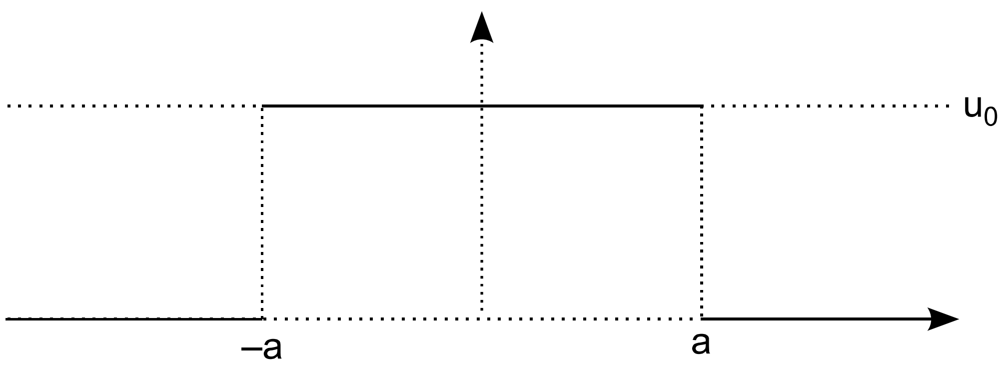
(För varje fixerat t söks FT av u(x; t))

Transformera begynnelsevillkor:

Vi har u(x; 0) = ƒ(x).

$$\mathcal{F}\left(u(x;0)\right)(\alpha;0)=\hat{u}(\alpha;0)=\mathcal{F}\left(f(x)\right)(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx=\int_{-1}^{1} u_0\cdot e^{i\alpha x}\,dx=$$

$$=u_0\left[\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\right]_{x=-1}^{1}=u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right)=2u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i\alpha}\right)=2u_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



Transformera DE:

$$k\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}\right)=k(i\alpha)^2\cdot\mathcal{F}(u(x;t))=k(-\alpha^2)\hat{u}(\alpha;t)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x;t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\cdot e^{ixt}\,dx\overset{(*)}{=}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{ixt}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha;t)$$

Förklarning av (*):

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t;s)\right)_{t=t_0}ds=\int\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}\,ds=$$

$$=\{\int \text{ är absolut konvergent}\}=\lim_{\Delta t\to 0}\int\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}\,ds=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int u(t_0;s)\,ds-\int u(t_0+\Delta t;s)\,ds}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\int(u(t;s))_{t=t_0}ds$$

Ekvationen tar formen

$$-k\alpha^2\hat{u}(\alpha;t)=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha;t)$$

För varje fixerat α är ekvationen

$$\hat{u}'_t=-k\alpha^2\hat{u}$$

Separabel!

$$\hat{u}(\alpha;t)=Ce^{-k\alpha^2 t}$$

Begynnelsevillkor (BV) ger:

$$2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\overset{BV}{=}\hat{u}(\alpha;0)=Ce^{-k\alpha^2\cdot 0}=C$$

$$C=2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Alltså:

$$\hat{u}(\alpha;t)=\frac{2u_0\sin\alpha}{\alpha}e^{-kx^2t}$$

Tillbaka-transformation:

$$u(x;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}e^{-k\alpha^2t}e^{-i\alpha x}\,d\alpha=\{\text{Se boken sida 506}\}=$$

$$\frac{u_0}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\alpha}\cdot e^{-k\alpha^2t}\,d\alpha$$

Olika böcker transformerar olika:

Vissa använder $\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}(u(x;t))(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{i\alpha x}\,dx$ och andra använder

$$\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}(u(x;t))(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{-i\alpha x}\,dx\ .$$

Om man använder – vid fouriertransformationen ska man vid fourierintegralen och fourierinversetransformationen använda +.

Använder + vid fouriertransformationen ska man vid fourierintegralen och fourierinversetransformationen använda –.