Fourierserien till en funktion, ƒ, definierad på intervallet]–p; p[ges av

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\right.}_{\mathcal{F}_c} + \underbrace{\left. b_n \sin\frac{n\pi x}{p}\right)}_{\mathcal{F}_s}$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

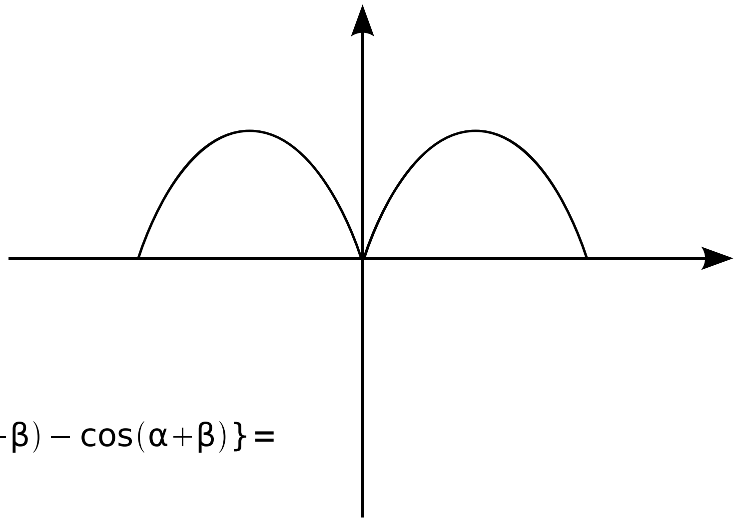
Omm intervallet är helt slutet och kontinuerligt ersätts ~ med =, generellt sätt skrivs förhållandet ≃.

[z.c.11.3.28.]

ƒ(x) = sin x, $\quad 0 < x < \pi$

a) Jämn utvidning:

Fourierserien är på formen $\mathcal{F}_c$



$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\,dx =$$

$$= \{2\sin\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(nx+x) - \sin(nx-x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx+x)}{n+1} + \frac{\cos(nx-x)}{n-1}\right]_0^{\pi} = \qquad n \neq 1$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(\overbrace{n\pi+\pi}^{\varphi})}{n-1} - \frac{1-\cos(\overbrace{n\pi-\pi}^{\theta})}{n-1}\right) = \{\varphi - \theta = 2\pi\} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1-(-1)^{n+1}}{n-1}\right) =$$

$$=\frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=-2\frac{1+(-1)^{n}}{\pi(n^2-1)}$$

n = 1:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \; dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \; dx=\frac{1}{\pi}\cdot 0=0$$

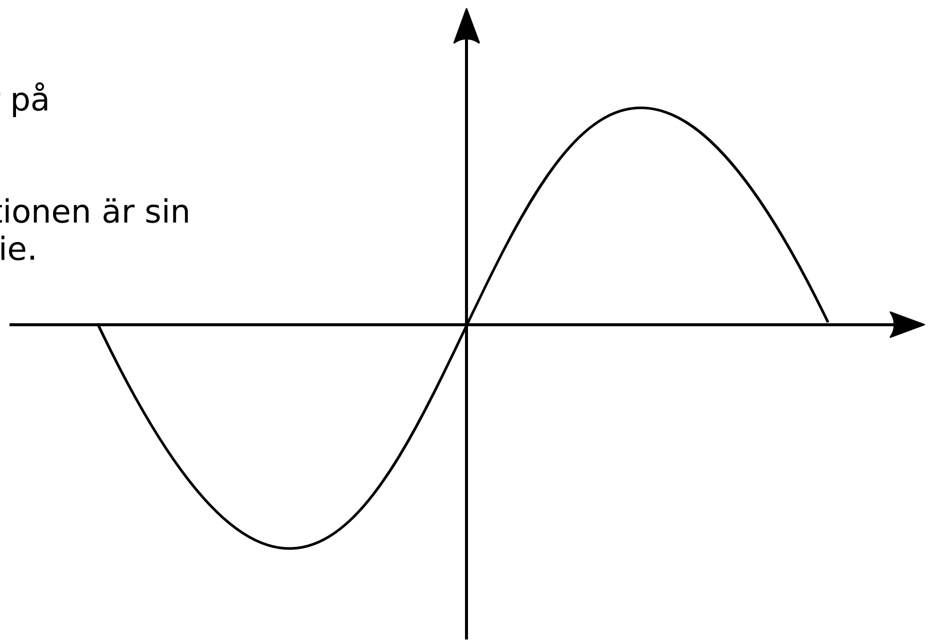
$$a_0=-2\frac{1+(-1)^0}{\pi(0^2-1)}=-2\frac{1+1}{\pi(0-1)}=2\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$$f\sim\frac{2}{\pi}+0+\sum_{n=2}^{\infty} 2\frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}\cos nx = \frac{2}{\pi}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^2-1)}\cos 2mx$$

b) Udda utvidning:

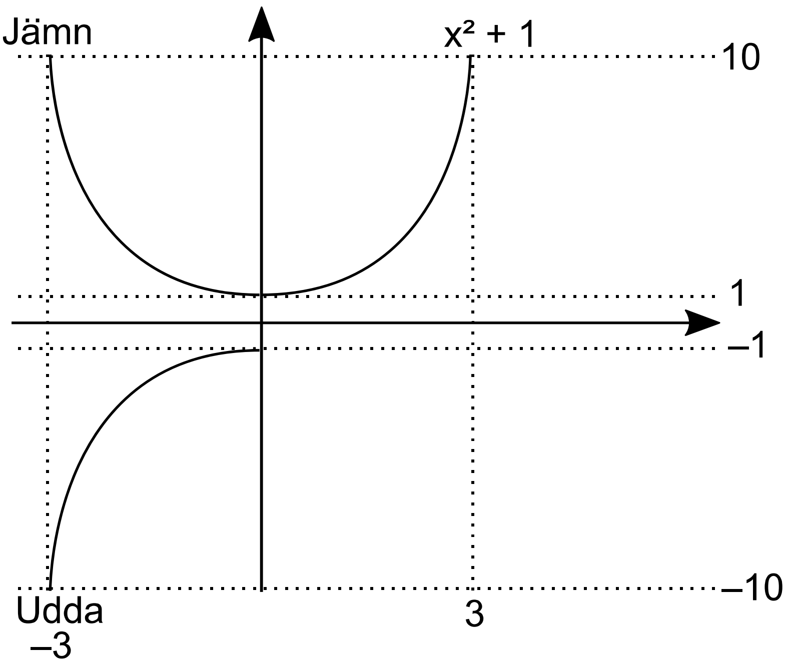
Fourierserien är på formen $\mathcal{F}_s$

Den givna funktionen är sin egen Fourierserie.



[Exempel 2]

Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i en cosinusserie ($\mathcal{F}_c$) och i en sinusserie ($\mathcal{F}_s$). Bestäm värdet som respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.



Konvergensvillkor:

Låt f och f' vara stycklis kontinuerliga på intervallet $]-p; p[$.
Då konvergerar f:s Fourierserie mot

$$\frac{f(x^+) - f(x^-)}{2} \quad .$$

$\mathcal{F}_c(f)$ konvergerar mot 1.
$\mathcal{F}_s(f)$ konvergerar mot 0.

[z.x.12.5.12.]

Laplace' /la'plas/ ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi$$

Randvillkor: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0; y) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(\pi; y) = 0 \\ u(x; 0) = f(x) \\ u(x; y) \text{ begränsad då } y \to \infty \end{cases}$

Separera variablerna: $u(x; u) = X(x)Y(y)$.

$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$

$\lambda = 0$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

$X(x) = A_2 x + B_2$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Substitutionen ger att randvillkoren kan skrivas:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = X'(0)Y(y) \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi; y) = X'(\pi)Y(y) \end{cases}$$

Dessa samband skall gälla för alla y.
Detta innebär att $0 = X'(0)$ och $0 = X'(\pi)$.

$\lambda > 0$:

$X'(x) = \mu \cdot (A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$

$0 = X'(0) = \mu \cdot (A_1 - B_1)$

$0 = X'(\pi) = \mu \cdot (A_1 e^{\mu\pi} - B_1 e^{-\mu\pi})$

$A_1 = B_1 = 0$

Endast den triviala lösningen: $u = 0$

$\lambda = 0$:

$X'(x) = A_2$

$0 = X'(0) = A_2$

$0 = X'(\pi) = A_2$

$X(x) = A_2$

$Y(y) = C_2 y + D_2$

$u(x; y)$ begränsad då $y \to \infty \Rightarrow C_2 = 0$

$\lambda < 0$:

$X'(x) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x)$

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu \cdot (B_3) \\ 0 = X'(\pi) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu\pi + B_3 \cos \mu\pi) \end{cases}$$

$B_3 = 0$

$A_3 \sin \mu\pi = 0$

Icke-triviala lösningar erhålles då $\mu \in \mathbb{Z}$.

$X(x) = A_3 \cos n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

$Y(y) = C_3 e^{ny} + D_3 e^{-ny}$

$u(x; y)$ är begränsad då $y \to \infty \therefore C_3 = 0, Y(y) = D_3 e^{-ny}$

$$u(x; y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \; e^{-ny}$$

$$f(x) = u(x; 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$