2011-(01)jan-24: dag 3

Övning idag

1) Beräkna $a + b$, $c \cdot d$ med $a = 218$, $b = 137$, $c = 89$, $d = 43$ (bas 10)

a) I bas 10
b) I bas 2
c) I bas 7

a)

$$\begin{array}{r} \underline{1}\\ 218 \\ \underline{+137} \\ 355 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 89 \\ \underline{\cdot 43} \\ 167 \\ \underline{+356\ \ } \\ 3827 \end{array}$$

verifera första

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle \underline{10}}\ \\ 3\cancel{5}5 \\ \underline{-137} \\ 218 \end{array}$$

b) Uttryck a, b, c, d i bas 2:

$$\begin{aligned} 218 &= 2\cdot 109 + 0 \\ 109 &= 2\cdot 54 + 1 \\ 54 &= 2\cdot 37 + 0 \\ 17 &= 2\cdot 13 + 1 \\ 13 &= 2\cdot 6 + 1 \\ 6 &= 2\cdot 3 + 0 \\ 3 &= 2\cdot 1 + 1 \\ 1 &= 2\cdot 0 + 1 \end{aligned}$$

så: $a = 11011010_2$
på samma sätt: $b = 10001001_2$
$c = 1011001_2$
$d = 101011_2$

a + b)

$$\begin{array}{r} 11011010 \\ \underline{+10001001} \\ 101100011 \end{array}$$

Verifiera:

$$\begin{array}{r} 1\ \ \ \ \cancel{1}2\ \ \ \ \ \ \ \\ \cancel{1}01\cancel{1}00011 \\ \underline{-10001001} \\ 11011010 \end{array}$$

$c \cdot d$) Gör själv!

c) Bas 7

$$\begin{aligned} 218 &= 7\cdot 31 + 1 \quad \Rightarrow \quad a = 431_7 \\ 31 &= 7\cdot 4 + 3 \\ 4 &= 7\cdot 0 + 4 \end{aligned}$$

På samma sätt: $b = 254_7$
$c = 155_7$
$d = 61_7$

$$\begin{array}{r} 155 \\ \cdot\quad 61 \\ \hline 155 \\ +1362 \\ \hline 14105 \end{array} \qquad 6\cdot 5 = 42_7$$

2) $n = 10'1100'1111'0101_2 = 2CF5_{16} = \{10'110'011'110'101_2\} = 26365_8$

16-tal 8-tal

$m = 364401_8 = 11'110'100'100'000'001_2 = 1E901_{16}$

3) sgd(2373; 1638) ? största gemensama delaren

sgd(m; n) = sgd(n; m − kn)

$$\begin{aligned} 2373 &= 1\cdot 1638 + 735 \\ 1638 &= 2\cdot 735 + 168 \\ 735 &= 4\cdot 168 + 63 \\ 168 &= 2\cdot 63 + 42 \\ 63 &= 1\cdot 42 + 21 \\ 42 &= 2\cdot 21 + 0 \end{aligned}$$

Så största gemensama delaren är 21
sgd(2373; 1638) = 21

mgm(2373; 1638) ?

mgm = minsta gemensamma multipel

$\mathrm{sgd}(m;\ n) \cdot \mathrm{mgm}(m;\ n) = m \cdot n =$

$$= \frac{2373 \cdot 1638}{21} = \cdots = 113 \cdot 1638 = 185094$$

sgd

4) k heltal

$\mathrm{sgd}(3k + 2;\ 5k + 3) =$ ((5k + 3) − (3k + 2) = 2k + 1)

$= \mathrm{sgd}(3k + 2;\ 2k + 1) =$ ((3k + 2) − (2k + 1) = k + 1)

$= \mathrm{sgd}(k + 1;\ 2k + 1) =$

$= \mathrm{sgd}(k + 1;\ k) = \mathrm{sgd}(1;\ k) = 1$

5) Emma har 75 kr i 1-, 5- & 10-kr-mynt.
Totalt har hon 16 mynt.
Hur många har hon av varje sort?

Antag att gon har x stycken 1 kr, y stycken 5 kr, z stycken 0 kr.

$$\begin{cases} x + 5y + 10z = 75 \\ x + y + z = 16 \\ x,\ y,\ z \ \text{ heltal} \geq 0 \end{cases}$$

Ett diofantiskt ekvationssystem.

(Vi söker heltalslösningar)

$x + 5y + 10z - x - y - z = 75 - 16$ (x elemineras)

$4y + 9z = 59$

$\mathrm{sgd}(4, 9) = 1$
$\mathrm{sgd}(m;\ n) = ma + nb$

Så

$$4 \cdot (-118) + 9 \cdot 59 = 59$$

Så en lösning till till ekvationen

$$\begin{cases} y_0 = -118 \\ z_0 = 59 \end{cases}$$

Om y, z är en lösning:

$4(y - y_0) + 9(z - z_0) = 0$
$4(y - y_0) = -9(z - z_0)$

4 & 9 är relativt prima

så $z = z_0 - 4k$
$y = y_0 - 9k$

Vilket k?

$y, z \geq 0$, $59 + 4k \geq 0$ ger

$$k \geq -\frac{59}{4} = -14\,\frac{3}{4}$$

$-118 - 95 \geq 0$ ger $k \leq -\dfrac{118}{9} = -13\,\dfrac{1}{9}$

Det vill säga $k = -14$

Så enda lösningen till ekvationen med $y, z > 0$:

$y = -118 - 9(-14) = 8$
$z = 59 + 4(-14) = 3$

Motsvarande $x = 16 - 4 - 7 = 5$

Så Emma har 5 stycken 1-kr,
8 stycken 5-kr och
3 stycken 10-kr.

6) Visa att om $am + bn = 1$ så $\text{sgd}(m; n) = 1$ (a, b, m, n heltal)
$d|m$, $d|n \Rightarrow d|am + bn = 1$ så $d = \pm 1$ så $\text{sgd}(m; n) = 1$

8) Primtalsfaktorisera talen 111, 467, 314000 och 10300_6 (det talet som i bas 6 skrivs 10300).

$111 = 3 \cdot 37$

467 Man testar primtal till man kommer upp till ett tal vars kvadrart är större än talet.

$314000 = 314 \cdot 1000 = 2 \cdot 157 \cdot 1000 =$ {157 är ett primtal}
$= 2 \cdot 157 \cdot 10^3 = 2 \cdot 157 \cdot 2^3 \cdot 5^3 =$
$= 2^4 \cdot 5^3 \cdot 157$

$103000_6 = 103_6 \cdot 6^2 = 39 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 13$

10) $10|n^2 \Leftrightarrow 2, 5|n^2 \Leftrightarrow 2, 5|n \Leftrightarrow 10|n$

Svar: Ja

$9|n^2 \Leftrightarrow 3|n$ Motexempel: $n = 3$

Svar: Nej $9|3^2 = 9$, $9\nmid 3$

11) a, b, c bland 0, 1, …, 9

$(abc\ abc)_{10}$ delbart med 3 olika primtal.

$(abc\ abc)_{10} = (abc)_{10} \cdot 1001$

$1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$