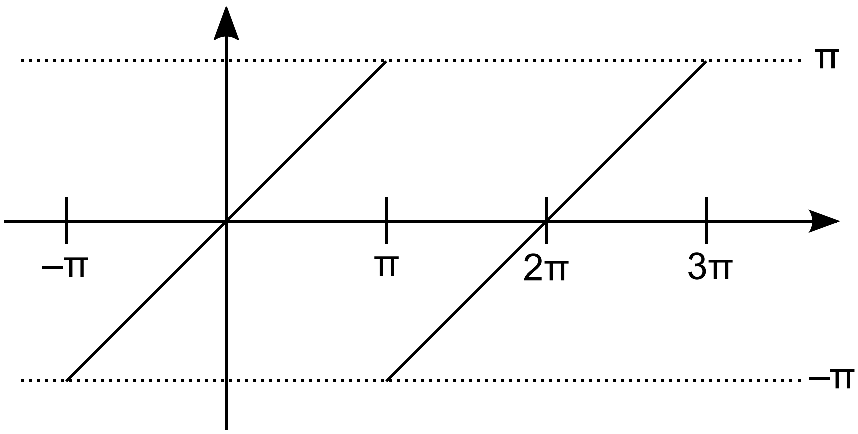
[Moduluppgift 7]

Bestäm den allmäna lösningen till

$y'' + 5y = f(x)$,   där $f(x) = x$

för $-\pi \le x < \pi$

$f(x)$ och 2π-periodisk



$y = y_h + y_p$

1) Lös den homogena ekvationen

$$y_h = A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x \qquad (*)$$

A och B är konstanter.

(*) ∵ Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{-5} = \pm i\sqrt{5}$$

2) f är udda

Utveckla f i $\mathcal{F}_s$ (sinusserie)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \sin nx\,dx = \left\{ \begin{array}{c|c} f = x & f' = 1 \\ g' = \sin nx & g = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} fg'\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[fg \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'g\,dx \right) =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\underbrace{\sin n\pi}_{0}=-\frac{2}{n}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}=$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Antag att } y_p \text{ är udda.}\\ \text{Då utvecklas } y_p \text{ i } \mathcal{F}_s\text{:}\\ \quad y_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx\end{array}\right\}\quad\text{Inte alltid sant!}$$

Vi ska bestämma B_n.

Sätt in ansatsen för y_p i ekvationen.

$$y_p'=\sum_{n=1}^{\infty}nB_n\cos nx\qquad y_p''=-\sum_{n=1}^{\infty}n^2B_n\sin nx$$

$$\left\{\begin{array}{l|l}\overbrace{-\sum_{n-1}^{\infty}n^2B_n\sin nx+5\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx}^{\alpha}= & \\ =\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx}_{\beta} & \alpha-\beta=0\end{array}\right\}$$

Identifiera koefficienter för sin nx

$$B_n(-n^2+5)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$B_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n(5-n^2)}$$

$$y_p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\underbrace{(5-n^2)}_{\neq 0}}(-1)^{n+1}\sin nx$$

$\{\sin nx \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ är ett ortogonalt system

$\therefore$ alla sin nx där $n \in \mathbb{Z}$ (egentligen $n \in \mathbb{R}$) är linjärt oberoende.

[MU 13]

Bestäm lösningen till den partiella differential ekvationen (PDE):

$$u'_x=u'_y+u$$

som uppfyller $u(x; 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$.

Det är svårt att hitta alla lösningar till en PDE, därför söker vi bara en lösning.

Lösning: Söker $u(x; y) = X(x)Y(y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)Y(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=X(x)Y'(y)$$

Sätt in u i ekvationen

$$\underbrace{X'Y=XY'+XY}_{\text{ekvationen}}=X\cdot(Y'+Y)$$

$$\left(\frac{X'}{X}\right)(x)=\left(\frac{Y'}{Y}+1\right)(y)$$ (Jo, läraren skrev med den nomenklaturen.)

VL beror inte på y,
HL beror inte på x.

Då måste HL och VL vara en konstant, λ.

Ekvationen är ekvivalent med en serie av system för olika λ.

$$\begin{cases} X_\lambda = C_{1,\lambda} e^{\lambda x} \\ Y_\lambda' = Y_\lambda \cdot (\lambda - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_\lambda = C_{1,\lambda} e^{\lambda x} \\ Y_\lambda = C_{2,\lambda} e^{(\lambda-1)y} \end{cases}$$

$u_\lambda(x; y) = X_\lambda(x) + Y_\lambda(y) = (C_{1,\lambda}C_{2,\lambda})\, e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} = C_\lambda\, e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$

Dessutom om u_1 och u_2 är lösningar till urekvationen $\left(u'_x = u'_y + u\right)$ så är

$c_1u_1 + c_2u_2$

en lösning till urekvationen.

(Verifiera!)

Lös BVP:en $u(x; 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

Vi vet att urekvationen har lösningar

$u(x; y) = D_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} + D_\mu e^{\mu x + (\mu - 1)y}$

Välj D_λ, D_μ, λ och μ så att $u(x; y)$ är som ovan ($3e^{-5x} + 2e^{-3x}$).

Väljer $D_\lambda = 3$, $D_\mu = 2$, $\lambda = -5$, $\mu = -3$.

[MU 8]

Den vertikala förflyttningen $u(x; t)$ för en oändligt lång sträng beskrivs av:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

(vågekvationen)

a) Transformera ekvationen med hjälp av substitutionen

$z = x + at$
$v = x - at$

Vi tänker att $u(x; t) = \tilde{u}(z(x; t); v(x; t))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}}_{a}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}}_{-a} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}a-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)=$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z \partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} =$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\underbrace{\partial v \partial z}_{\partial z \partial v}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\right)}_{\text{på analogt sätt}}$$

Ekvationen $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (*) skrivs om.

b) Lös ekvationen $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z} = 0$

$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)=0$ $\qquad$ $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}$ beror inte på v.

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}=P(z)$ P är någon funktion.

$$\tilde{u}(z;\ v)=\underbrace{\int P(z)dz}_{\triangleq F(z)}+G(v)$$

Vi fick att lösningarna till (*) är:

$$\tilde{u}(z;v)=F(z)+G(v)$$

där F och G är godtyckliga funktioner.