Idag: Titta på kopplingen kontinuum och rumsderivata — diskret/partikelmodell (vågekvation och mass–fjäder)

Visa att mass–fjärdenmodellen representerar en rumsderivata
Diskret ⇒ Kontinuum

Detta gör att vi kan beskriva ekvationen mer kompakt som en partiell differentialekvation (vågekvation)

Först:

Vi har tittat på diskretisering av differentialekvationer i tiden (ODE/begynnelsevärdesproblem) — vad är diskretisering i rummet (PDE/randvärdesproblem)?

Vad händer när upplösningen (antalet pariklar) ökar?

Introducera finita elementmetoden (FEM)
Kontinuum ⇒ Diskret

Knyta ihop flera moment i kursen till ett sammanhang:
styckvisa linjära funktioner definierade av basfunktioner på ett nät/mesh (M2) ,
kvadratur/integrering (M2) och tidsstegning (M1/M3) knyts ihop för att definiera finita elementmetoden .
Vi kommer att jämföra med vågekvation/mass–fjäder (M4).

Referenser för dagen lektion:

Elastisk sträng — ekvivalens mellan mass–fjädermodell och vågekvation (45 kap.)

Partiella differentialekvationer, finita elementmetoden (149-150 kap.)

Modell: mass–fjäder, representerar vågutbredning i 1D.
u är skalär för enkelhets skull.

ODE:

$$\begin{cases} \dot{u}^i = v^i \\ Mh\dot{v}^i = F^i \end{cases}$$

Fjäderkrafter på en partikel, i (index i):

$$F_{i,i+1} = \frac{E}{h}\left(u^{i+1} - u^i\right) \quad \text{och} \quad F_{i,i-1} = -\frac{E}{h}\left(u^i - u^{i-1}\right)$$

Totalkraft på partikeln, i:

$$F_i = F_{i,i+1} + F_{i,i-1} = \frac{E}{h}\left(u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}\right)$$

$$Mh\dot{v}^i = \frac{E}{h}\left(u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}\right)$$

$$\frac{E}{M} = 1 \;\Rightarrow\; \dot{v}^i(t) = \ddot{u}^i(t) \triangleq \frac{u^{i+1} - 2u^i + u^{i-1}}{h^2}, \quad i = 1, \ldots, J$$

Definitioner: $\Delta x = h, \quad \Delta u^i = u^{i+1} - u^i, \quad E = 1$

Fjäderkraft:

$$F_{i,i+1} = \frac{\Delta u^i}{\Delta x} = \frac{u^{i+1} - u^i}{h}$$

Derivata (för infinitesimala h; små approximerar):

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$$u''(x) = \frac{u'(x+h) - u'(x)}{h} = \frac{\frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{u(x) - u(x-h)}{h}}{h} =$$

$$= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$$

Vi kan alltså skriva mass–fjädermodellen som vågekvationen:

$$\ddot{u}(x;t)=u''(x;t) \qquad \text{för } x \in]0;1[, \ t>0$$

$$u(0;t)=u(1;t)=0 \qquad \text{för } t>0$$

$$u(x;0)=u^0(x), \quad \dot{u}(x;0)=\dot{u}^0(x) \qquad \text{för } x \in]0;1[$$

där $u^0(x)$ och $\dot{u}^0(x)$ är givna funktioner.
$u(0;t)$ och $u(1;t)$ är randvillkor som vi har modellerat med stora massor i ändarna.

$$\dot{u}=v$$

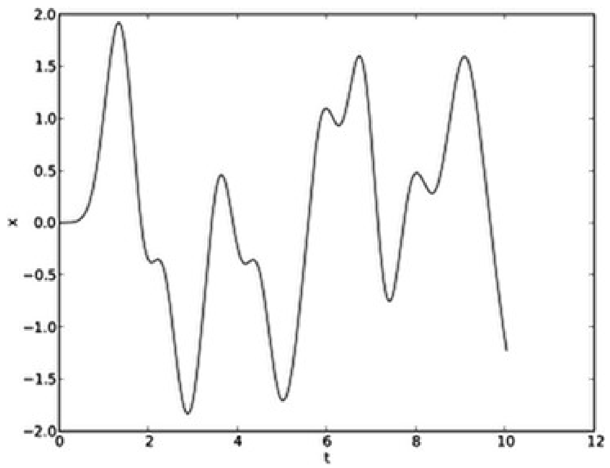
$$\dot{v}=F'$$

$$F=u'$$

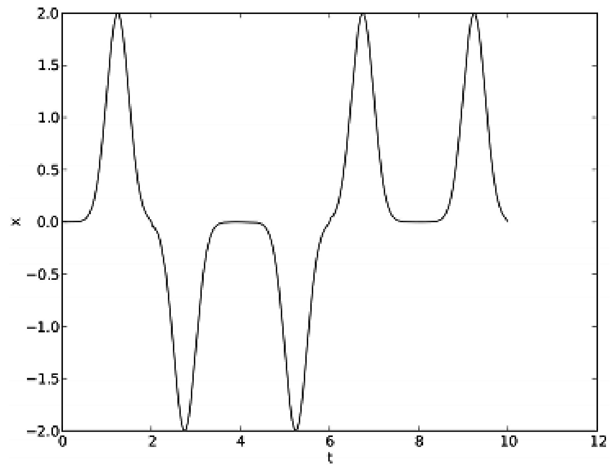
där u är förskjutning, v är hastighet och F är fjäderspänning samt att F' är fjäderkraft som agerar på partiklar.

När antalet partiklar ökar från 20 (M = 20) till 1280 förfinas simulationen:

M = 20



M = 1280



Vi vill börja direkt från kontinuummodellen (rums och tidsderivata) och automatiskt konstruera en diskret modell. Vi formulerar finita elementmetoden som ett sätt att göra det.

Hur ska vi göra i 2D/3D?
Hur ska vi sätta fjäderparametrar systematiskt &c?
Hur ska vi modellera andra fenomen?

Hur ser lösningen ut mellan punkterna?

Finns det ett systematiskt sätt att gå från kontinuum till diskret för generella partiella differentialekvationer?

Vi vill börja med att lösa differentialekvationen

$$R(u) = Au - g = 0$$

där A är någon operator på u (till exempel differentialoperator)

Exempel: $Au = \ddot{u} - u''$ och $g = 0 \Rightarrow \ddot{u} - u'' = 0$ (Vågekvation)

Exempel: $Au = Iu \Rightarrow u = g$

A är identitet (I).
Blir en L2-projektion.
Enkelt exempel för att förstå metoden.

Som lösning söker vi en funktion u(x; t) som en linjärkombination:

$$u(x;t) = \sum_{j=1}^{J} u_j(t)\,\varphi_j(x)$$

Repetition:

Sida 1 till 3
2010-(11)nov-01
(4:e dagen)

av J givna basfunktioner, $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_J(x)$, som beror av x, med okända koefficienter, $u_1(t), \ldots, u_J(t)$, som beror av t.
Basfunktionerna är styckvis linjära “hattfunktioner”.

$\varphi_i(jh) = 1$ om $j = i$, $\varphi_i(jh) = 0$ om $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, J$. Linjär interpolas!

Finita elementmetoden: L2-projektion

Exempel: Lös u = g med FEM.

1. Välj ett beräkningsnät (bestämmer basfunktionerna)

2. Definiera lösningen som en linjärr kombination

$$u(x;t)=\sum_{j=1}^{J} u_j(t)\varphi_j(x)$$

3. Definiera villkor/ekvationer för koefficienter:

$$\int_a^b R(u)\varphi_i\,dx=0, \quad i=0, 1, \dots, J$$

$$\int_a^b u\varphi_i\,dx=\int_a^b g\varphi_i\,dx, \quad i=0, 1, \dots, J$$

(Vi har J koefficienter (från u) och j villkor/ekvationer.)

4. Lös systemet för koefficienterna.
I det här fallet blir systemet ett linjärt ekvationssystem: $\mathbf{A}u_j=\vec{b}$

Finita elementmetoden: Vågekvation

Exempel: Lös ü − u'' = 0 med FEM.

Samma första och andra steg.

3. Definiera villkor/ekvationer för koefficienter:

$$\int_a^b R(u)\varphi_i\,dx=0, \quad i=0, 1, \dots, J$$

$$\int_a^b \ddot{u}\varphi_i\,dx+\int_a^b u'\varphi'_i=0\,dx, \quad i=0, 1, \dots, J$$

Vi partialintergrerar rumsferivatorna så att en hamnar på basfunktionen φ_i, ty u har inte två derivator.

(Vi har J koefficienter (från u) och j villkor/ekvationer.)

4. Lös systemet för koefficienterna.
I det här fallet blir systemet en ODE: $\ddot{u}^i+\mathbf{A}u^i=\vec{0}$