Sannstat
2011-(08) aug - 31

Tärningskast

$A = 6{:}a$
$B =$ jämnt antal ögon

$P(A) = \frac{1}{6}$
$P(A \mid B^*) = 0$ ← betingat   kan inte vara 6 om antal ögon är udda.

Exempel:

Samla in 10'000 e-brev.

Av dessa 6243 spam, 3757 ej spam

Av spambreven innehåller 5494 stycken ordet "free" av de andra innehåller 182 stycken också ordet "free".

	Spam	Ej spam	
free	5494	182	5676
ej free	749	3575	4324
	6243	3757	10'000

S = händelse att e-brev är spam

F = händelse att e-brev innehåller "free"

Då är

$P(F|S)$ den betingade sannolikheten för F givet att S har inträffat

Uppenbarligen

$$P(F|S) = \frac{5494}{6243} \approx 0,88$$

Dessutom

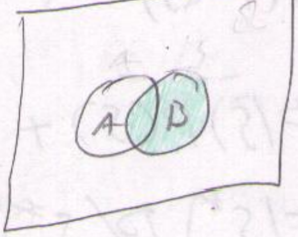
$$P(F|S) = \frac{5494/10000}{6243/10000} = \frac{P(F\cap S)}{P(S)}$$

Definition: För händelser A och B, definierar vi den betingade sannolikheten

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

för B givet att A har inträffat

P(B)



givet att
A har
inträffat
(P(B|A))

Exempel:

$$P(F|S^*) = \frac{182}{3757} \approx 0,048$$

Exempel:

$$P(\text{dra 2 hjärter}) = ?$$

Noterа att

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Sökt sannolikhet $= \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51}$

2:a kortet hjärter givet att första kortet är hjärter

1:a kortet hjärter

Fler händelser:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$$

Vad är nu $P(S|F)$?

vi har

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{5494/10000}{5676/10000} = \frac{5494}{5676} \approx 0,97$$

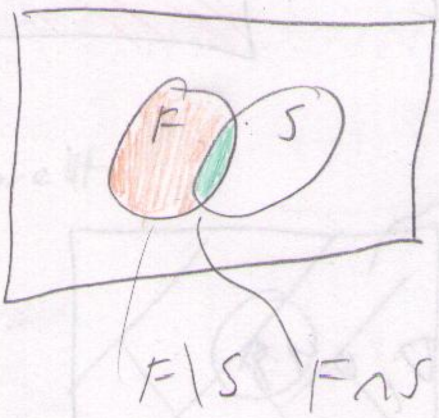
1 är [illegible]

$A \setminus B = A \cap B^*$

Vidare

$$P(F) = P((F\cap S)\sqcup(F\setminus S)) = P(F\cap S) + P(F\setminus S) =$$

$$= P(F|S)P(S) + P(F|S^*)P(S^*)$$



"satsen om total sannolikhet"

Exempel:

Två tärningar: en vanlig och en fusktärning (sannolikhet för 6:a = 1/3)

$$\overset{\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{18}}{P(V\cap F^*)} + \overset{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{18}}{P(F\cap V^*)} + \overset{\frac{1}{18}}{P(V\cap F)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$\neq$ man =

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Tar en tärning på måfå och slå

Vad är sannolikheten för 6:a?

Den är $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

Formellt:

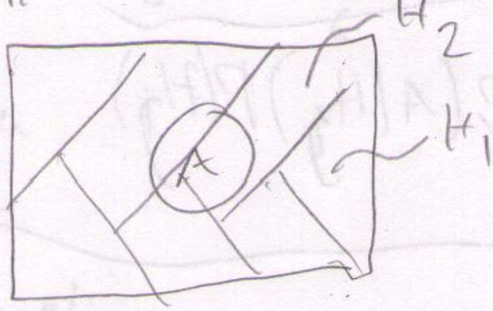
A: slår 6:a

B: får korrekt tärning

$$P(A) = P(A|B)\,P(B) + P(A|B^*)\,P(B^*) =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Generellt



$H_1, \ldots, H_2$ är disjunkta händelser med $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

(täcker alla utfall)

Vi får

$$P(A) = P(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} H_i) =$$

$$= P(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap H_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)\,P(H_i)$$

Bayes sats

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_i)P(H_i)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \mid H_i)\,P(H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid H_j)\,P(H_j)}$$

Oberoende

Två händelser, A och B, är <u>oberoende</u> om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

~~(($P(A \cup B) = P(A) + P(B)$))~~ disjunkta oberoende

Notera att det medför

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Exempel:

Slå tärning många gånger

Sannolikheten för 6:a för första gången i kast k är

= Sannolikhet för ≠ 6:a kast 1, ..., k−1 och 6:a i kast k

$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_k)$

$$\left[\begin{array}{l} A_i = \text{"ej 6:a i kast } i\text{"}, \quad 1 \le i \le k-1 \\ A_k = \text{"6:a i kast } k\text{"} \end{array}\right]$$

$$= P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_{k-1})P(A_k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$$

oberoende händelser

Exempel:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ oberoende klasser.

$P(\underline{\text{alla}}\ A_i \text{ inträffar}) =$

$= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$

$= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$

$P(\text{minst en av } A_1, \ldots, A_n \text{ inträffar}) =$

$= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$

$= 1 - P(\underline{\text{ingen av}}\ A_1, \ldots, A_n \text{ inträffar}) =$

$= 1 - P(A_1^* \cap A_2^* \cap \cdots \cap A_n^*) =$

oberoende

$= 1 - P(A_1^*)P(A_2^*)\cdots P(A_n^*)$