2011-(03)mar-09: dag 14

Mer algebra

- Delgrupper
    - Att känna igen dem.
    - Z(G), C(g)
- Sidoklasser
    - Lagranges sats
    - Grupper av primtalsordning är cykliska
- Gruppisomorfi
    - “Strukturlikhet”

Från 2011-(03)mar-02, dag 13:

(G; $\ast$) är en grupp om

G1) $\forall\, x, y \in G : x \ast y \in G$
“slutenhet”

G2) $\forall\, x, y, z \in G : (x \ast y) \ast z = x \ast (y \ast z)$
“associativitet”

G3) $\exists\, I \in G : \forall\, x \in G \;:\; I \ast x = x \ast I = x$
“identitetselement”

G4) $\forall\, x \in G : \exists\, x^{-1} \in G \;:\; x \ast x^{-1} = x^{-1} \ast x = I$
“invers”

Idag om delgrupper

Definition:

Om $H \subseteq G$ och $(G; *)$ är en grupp så kallas H en delgrupp till G omm $(H; *)$ är en grupp.

Exempel:

$H = \{i, y\}$ är en delgrupp till $G_{\triangle}$.

Ty:

G1 OK

G2 OK (ty, uppfyllt i $G_{\triangle}$)

G3 OK (i, identitetselement)

G4 OK $\begin{cases} i^{-1} = i \\ y^{-1} = y \end{cases}$

Sats:

Om $H \subseteq G$ och $(G; *)$ är en grupp så är H en delgrupp till G omm:

$$\begin{cases} \text{S0:} \quad H \neq \emptyset \\ \text{S1:} \quad x, y \in H \Rightarrow x * y \in H \\ \text{S2:} \quad x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H \end{cases}$$

Om H är ändlig räcker S0 och S1, ty:

$\Rightarrow$: klart

$\Leftarrow$: S1 $\Rightarrow$ G1; G2 i G $\Rightarrow$ G2 i H;

$x \in H \overset{S2}{\Rightarrow} x^{-1} \in H$, så $\underbrace{xx^{-1} = 1 \in H}_{S1}$, så G3.

S2 $\Rightarrow$ G4

Om H är ändlig, H = $\{h_{1,} h_2, \ldots, h_n\}$ så om $x \in H \Rightarrow$

$\overset{S1}{\Rightarrow}\ x^2, x^3, \ldots \in H$, så $x^k = x^l$ några $k > l \geq 0$ så

$x^{k-l} = 1$, $\underbrace{x \cdot x^{k-l-1}}_{x^{-1}} = 1 = (xx^{-1}) \Rightarrow x^{-1} \in H$, S2

Fler exempel på delgrupper till G:

{1} och {G} är delgrupper till G

{i, r, s} och {i, z} delgrupper till $G_\triangle$

$SL(n; \mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in GL(n; \mathbb{R}) \mid \det \mathbf{A} = 1\}$ delgrupp till $GL(m; \mathbb{R})$

$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz$, alla $g \in G\}$, G:s centrum, en delgrupp till S:

S0 OK ($1 \in Z(G)$)

S1 OK ($x, y \in Z(G) \Rightarrow xyg = gxy$, alla $g \in G$ så $xy \in Z(G)$)

S2 OK:

$z \in Z(G) \Rightarrow zg = gz$, alla $g \in G \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z^{-1}zgz^{-1} = gz^{-1} \\ z^{-1}zgz^{-1} = z^{-1}gzz^{-1} = z^{-1}g \end{cases} \quad \text{alla } g \in G$$

$$\Downarrow$$

$$z^{-1} \in Z(G)$$

Exempel:

$Z(G_\square) = \{i, r^2\}$, $Z(G_\triangle) = \{i\}$

G abelsk $\Leftrightarrow Z(G) = G$

$C(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ för alla $g \in G$

"centralisatorn" till G

är en delgrupp till G.

Ty:

S0: $1 \in G$

S1: $xy \in C(g) \Rightarrow xyg = gxy \Rightarrow xy \in C(g)$

S2: $x \in C(g) \Rightarrow xg = gx \Rightarrow gx^{-1} = x^{-1}g \Rightarrow x^{-1} \in C(g)$

Då

$$Z(G) = \bigcap_{g \in G} C(g), \quad g \in Z(G) \Rightarrow C(g) = G$$

Till exempel:

$G_\square$: $C(i) = C(r^2) = G_\square$,

$C(r) = C(r^3) = \{i, r, r^2, r^3\}$,

$C(x) = \{i, r^2, x, xr^2\} = C(xr^2)$

Varje $g \in G$ $(o(g) = m)$ genererar en delgrupp
$\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ till G, en cyklisk delgrupp.

Exempel:

$x \in G_\triangle$ genererar $\{i, x\} = \langle x \rangle$
$r \in G_\triangle$ genererar $\{i, r, s\} = \langle r \rangle$

då $o(g) = |\langle g \rangle|$

Sidoklasser (en. cosets)

Definition: Om H är en delgrupp till G, $g \in G$, så är $gH = \{gh \mid h \in H\}$ en vänstersidoklass till H (en. left coset) och $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ en högersidoklass till H (en. right coset).

Exempel:

$G_{\square}$: $r\{i, x\} = \{r, xr^3\}$ vänstersidoklass

$\{i, x\}r = \{r, xr\}$ högersidoklass

Sats:

Om H är en delgrupp till G så är g_1H och g_2H identiska eller disjunkta.

Ty: Låt $x \in g_1H \cap g_2H$, vi skall visa att $g_1H = g_2H$.

$x = g_1h_1 = g_2h_2$, $h_1, h_2 \in H$ så $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$ och om

$y = g_1H \Rightarrow y = g_1(h \in H) = g_2h_2h_1^{-1}h\ (\in H) \Rightarrow y_1 \in g_2H$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{så} & g_1H \subseteq g_2H \\ \text{på samma sätt} & g_2H \subseteq g_1H \end{array}\right\} \Rightarrow g_1H = g_2H$$

De ger en partition av G (ekvivalensrelationen $g_2^{-1} g_1 \in H$)

(Om H är ändlig är) dessutom $|H| = |gH| = |Hg|$

Ty: $f : H \to gH$, $f(h) = gh$ är en bijektion.
(surjektion enligt defintionen av gH, injektion: $gh_1 = gh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$)

Så vänter- och högersidoklasser ger partitioner av G i lika stora mängder.

Exempel:

$G_{\square}$, $H = \{i, x\}$:

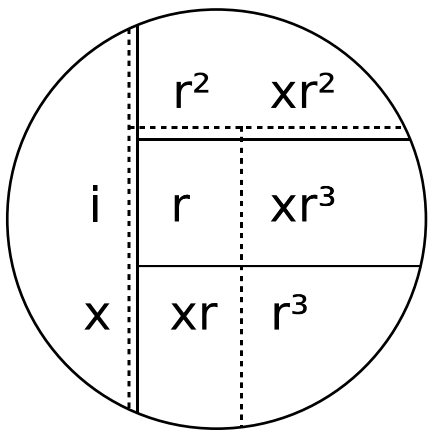
Vänstersidoklasser:

$iH = \{i, x\} = xH$
$rH = \{r, xr^3\} = xr^3H$
$r^2H = \{r^2, xr^2\} = xr^2H$
$r^3H = \{r^3, xr\} = xrH$

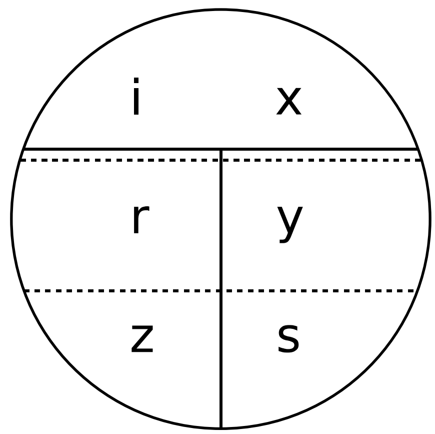
Högersidoklasser:

$Hi = \{i, x\} = Hx$
$Hr = \{r, xr\} = Hxr$
$Hr^2 = \{r^2, xr^2\} = Hxr^2$
$Hr^3 = \{r^3, xr^3\} = Hxr^3$

så:
$G_{\square}$



på samma sätt:
$G_{\triangle}$



Vänster- (heldraget) och höger- (halvdraget) -sidoklasser

$\{i, x\}y = \{y, r\}$
$y\{i, x\} = \{y, s\}$

Så Lagranges sats: Om G är ändlig, H en delgrupp till G:

$|H| \,\Big|\, |G|$ (snyggare skrivit: $|H| \setminus |G|$, *vilket jag kommer använda*.)

(Definition:)

$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}$, H:s index i G, antalet (vänster eller höger) sidoklasser.

Om $g \in G$, $o(g) = m$ så är $\langle g \rangle$ en delgrupp av ordning m.

Så sats:

OM G är en ändlig grupp och $g \in G$, $o(G) \backslash |G|$ och $g^{|G|} = 1$.

Exempel:

$G_\triangle$ har element av ordningarna 1, 2 och 3 $\quad |G_\triangle| = 6$
$G_\square$ har element av ordningarna 1, 2 och 4 $\quad |G_\square| = 8$

Sats:

Om G är en grupp, $|G| = p$, p primtal så är G cyklisk.

Ty:

$x \in G$, $x \neq 1$, $o(x) > 1$, $o(x) \mid p \Rightarrow o(x) = p$

Alla element utom 1 är generatorer för G.

Definition:

En gruppisomorfi mellan $(G_1; *)$ och $(G_2; \circ)$ är en bijektion
$\phi : G_1 \to G_2$ så att $\phi(g * g') = \phi(g) \circ \phi(g')$ för alla $g, g' \in G_1$.

Grupperna $(G_1; *)$, $(G_2; \circ)$ kallas isomorfa om det finne en isomorfi mellan dem.

$(G_1; *) \approx (G_2; \circ)$ (Beteckningen $(G_1; *) \cong (G_2; \circ)$ är mycket vanligare.)

Isomorfi är en ekvivalensrelation mellan grupper.

Exempel:

$(\mathbb{R}; +) \cong (\mathbb{R}_+; \cdot)$ (≈)

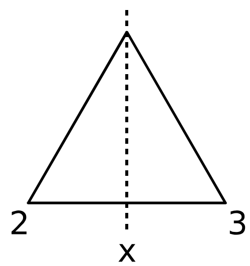
En isomorfi $\phi(x) = e^x$, ty ϕ är en bijektion och

$\phi(x + y) = e^{x + y} = e^x \cdot e^y = \phi(x) \cdot \phi(y)$

Exempel:

$G_\triangle \cong S_3$-gruppen av bijektioner $\{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$.

Isomorfin ges av avbildningen av triangelns hörn.



$$\phi(x): \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \\ 3 \mapsto 3 \end{cases}$$

(Kan även skivas:)

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exempel:

$(\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}; \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4; +)$