Sammanfattning av modul 2

Postfacksprincipen:

Om $|X| = n > |Y| = m$ så finns ingen injektion $f : X \to Y$.

"Om $n > m$ och n saker läggs i m låder, får minst en låda minst två saker."

Additionsprincipen:

För ändliga, disjunkta A, B $(A \cap B \neq \emptyset)$ gäller:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

För flera ändliga, disjunkta A_i $(A_i \cap A_j \neq \emptyset,\ i \neq j)$ gäller:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n|$$

Principen om inklusion/exklusion (sållprincipen):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \ldots + (-1)^{n+1} \alpha_n$$

där $\alpha_i = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_i \leq n} \left(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}\right)$

Antalet med en viss egenskap = totala antalet − antalet utan egenskapen.

Om X, Y är mängder, $X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X, y \in Y\}$

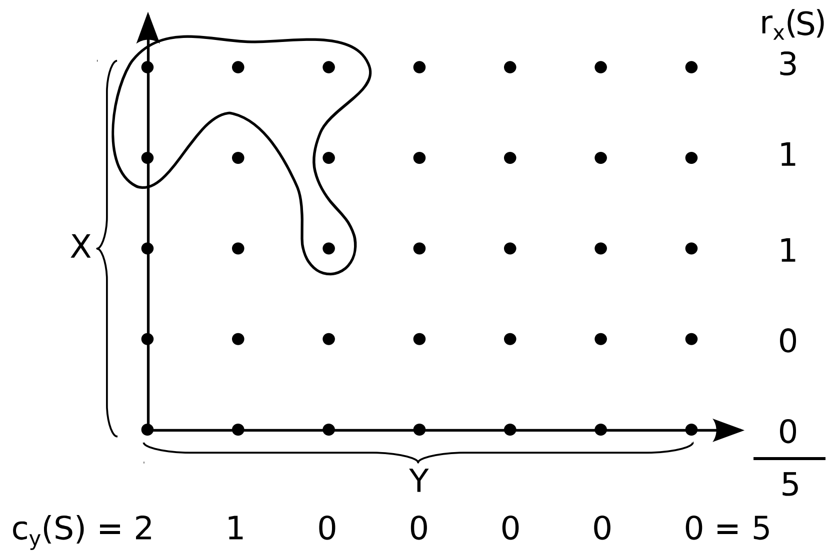
Sats: Om $S \subseteq X \times Y$, X, Y ändliga

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S)$$

där $r_x(S) = |\{y \in Y \mid (x; y) \in S\}|$ radsumma
$c_y(S) = |\{x \in X \mid (x; y) \in S\}|$ kolumnsumma (kolonnsumma)

Multiplicationsprincipen:

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$$



Sannolikheter

ω utfall
Ω utfallsrum
A händelse

$\omega \in \Omega$
$A \subseteq \Omega$

Om alla $\omega \in \Omega$ har samma sannolikhet (likafördelning) är sannolikheten för $A \subseteq \Omega$:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

För två händelse, A, B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Omm A och B är disjunkta ($A \cap B = \emptyset$):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Omm A och B är oberoende gäller:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sannolikheten gör A betingat att B inträffar:

$$P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Omm A och B är oberoende:

$$P(A|B)=P(A)$$

Om $|X| = m$, $|Y| = n$, ändliga:

Antalet funktioner $f : X \to Y$ =

= antalet element i $Y^m = Y \times \ldots \times Y$ (m stycken Y) =

= antalet ord av längden m i Y =

= antalet <u>ordnade val med upprepning</u> av m stycken ur Y =

$= n^m = |Y|^{|X|}$

Antalet injektioner $f : X \to Y$ =

= antalet ord av längden m i Y utan upprepning

= antalet <u>ordnade val utan upprepning</u> av m stycken ut Y =

$= n(n-1)\ldots(n-m+1) = (n)_m = {}_nP_m = \frac{n!}{(n-m)!}$

Antalet bijektioner $f : X \to Y$ =

$$= \begin{cases} n! = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 & \text{om } |X| = |Y| \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Antalet k-delmängder till en n-mängd =

= antalet <u>oordnade val</u> av k stycken från en n-mängd <u>utan upprepning</u> =

= binomialtalet $\binom{n}{k}$, (läses “n över k”; en. “n choose k”)

Antalet <u>oordnade val</u> av k stycken från en n-mängd <u>med upprepning</u> =

= antalet sätt att skriva $k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $x_i \geq 0$ =

$$= \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

Binomialtal:

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Binomialsatsen:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Multinominaltal:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} \qquad \left(k_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n \right) \qquad =$$

= antalet sätt att fördela n olika element i m olika lådor,
med k_i stycken i låda i =

= antalet sätt att <u>ordna</u> en <u>multimängd</u> som har k_i exemplar av element i =

= antalet funktioner $f : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$ som antar värdet i precis k_i gånger,
(där $[\![r]\!] = \{1, 2, \ldots, r-1\}$)

Multinominalsatsen:

$$(x_1+\ldots+x_m)^n = \sum_{\substack{\sum k_i = n \\ k_i \geq 0}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$$

Genererande funktioner:

En talföljd $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ motsvarar funktionen $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

som kan användas för att bestämma a_n.

Se sida 2f för 2011-(02)feb-23, dag 11, för ett exempel.

Stirlingtalen (av andra slaget) $S(n; k)$:

Antalet partitinoner (uppdelningar) av en
n-mängd i precis k icke-tomma delar.

$S(n; k)$ bestämms rekursivt av:

$$\begin{cases} S(n; k) = S(n-1; k-1) + k \cdot S(n-1; k), & 1 < k < n \\ S(n; 1) = S(n; n) = 1, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Om $|X| = n$ och $|Y| = k$ så är antalet surjektioner $f : X \to Y = k! \cdot S(n; k)$.

Antalet ekvivalensrelationer på X = antalet partitioner av X = $\sum_{k=1}^{|X|} S(|X|; k)$

En partition av ett naturligt tal n (inte som en partition av en mängd)

$n = n_1 + \ldots + n_k, \quad n_1 \geq \ldots \geq n_k \geq 1$

Kan ses som en partition av n stycken identiska (inte särskiljbara) objekt.
Ett exempel på samband mellan antalen partitioner av olika slag:

Antalet partitioner av n i högst m delar =
= antalet partitioner av n i delar som alla är ≤ m.