2011-(02)feb-10: dag 8

Dagens innehåll

Kombinatorik

- Additionsprincipen
  - Lite om Ramseytal $r(s; t)$
- Multiplicationsprincipen

Lite sannolikhet

- $P(A \cup B)$ Om A, B disjunkt
- $P(A \cup B)$ Allmänt
- $P(A \cap B)$ Om A, B, oberoende
- Betingade sannolikheten $P(A \mid B)$

Mer kombinatorik

- Ordnat val med upprepning
  - Antalet funktion $f : X \to Y$
- Ordnat val utan upprepning
  - Antalet injektioner $f : X \to Y$
  - Antalet permutationer av X   (bijektioner $f : X \to X$)
- Oordnat val utan upprepning
  - Binomialtalen $\binom{n}{k}$, Pascals triangel
  - Multinomialtalen $\binom{n}{k_1 \quad k_2 \quad \dots \quad k_m}$ eller $\binom{n}{k_1, k_2, \cdots, k_m}$

Kombinatorik; att räknaa “saker” (antalet element i mängder)

Additionsprincipen:

Om A, B är ändliga och disjunktiona ($A \cap B = \emptyset$)

så $|A \cup B| = |A| + |B|$.

(Kan visas med induktion över $\underbrace{\text{antalet element över B}}_{|B|}$ (r över n)

Med induktion:

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_m| = |A_1| + \ldots + |A_n| \quad \text{om } A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j$$

Exempel:

En klass har 12 pojkar och 11 flickor. Hur många barn i klassen?

Låt A = {porjkarna}, B = {flickorna}

$|A \cup B| = |A| + |B| = 12 + 11 = 23$

Förutsatt att varje barn är antligen pojke eller flicka (har exakt ett kön).

Exempel:

Bland 6 personer finns måste det finns 3 som alla känner varandra
eller 3 som inte känner varandra.

Ty: Betrakta en person, Lisa (L).

Övriga fem delas in i två delar:

A: De som L känner
B: De som L inte känner

$A \cap B = \emptyset$, $|A \cup B| = 5 = \{\text{additionsprincipen}\} = |A| + |B|$
så $|A| \geq 3$ eller $|B| \geq 3$.

1) Om $|A| \geq 3$:

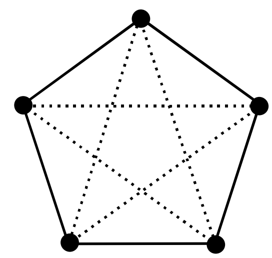
Om två i A känner varandra, de $\cup$ {L} känner alla varandra.
3 st, annars $|A| \geq 3$, ingen känner varandra.

2) Om $|B| \geq 3$:

På samma sätt.

Skulle det räcka med 5 personer?

Nej



Alltmänt:

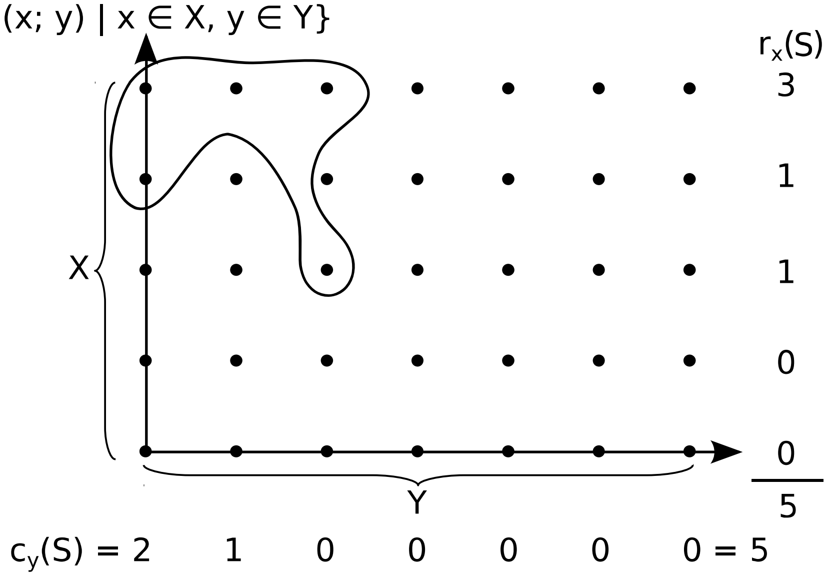
Låt r(s; t) vara minsta antalet personer så att det säkert finns 5 personer som alla känner barandra eller t personer som inte känner varandra.

Vi har visat att $r(3; 3) = 6$

<u>Svåra att finna</u> Ramsey

$r(2; t) = t$

Om X, Y är mängder, $X \times Y = \{(x; y) \mid x \in X, y \in Y\}$



Sats: Om $S \subseteq X \times Y$, X, Y ändliga

$$|S| = \sum_{x \in X} r_x(S) = \sum_{y \in Y} c_y(S)$$

där $r_x(S) = |\{y \in Y \mid (x; y) \in S\}|$
$c_y(S) = |\{x \in X \mid (x; y) \in S\}|$

Speciellt:
$S = X \times Y$ $\quad$ $|X \times Y| = |X|\cdot|Y|$ (multiplicationsprincipen)

Exempel:

Hur många stavelser (Konsonant(C) — Vokal(V)) finns i svenskan?

$|\{ba, be, bi, \ldots, zå, zä, zö\}| = |C \times V| = |C|\cdot|V| = 19\cdot9 = 171$ st

Exempel:

I en klass finns 32 pojkar. Varje pojke känner 5 flickor i klassen
och varje flicka känner 8 pojkar.

Hur många flickor finns i klassen.

Låt X = {flickorna}, Y = {pojkarna}

$S \subseteq X \times Y$, $\quad S = \{(x; y) \in X \times Y \mid x \text{ och } y \text{ känner varandra}\}$

Då $\quad r_x(S)$ = antalet pojkar x känner = 8 $\quad$ alla x
$\quad\quad c_y(S)$ = antalet flickor y känner = 5 $\quad$ alla y

$$|S| = \begin{cases} \sum_{x \in X} r_x(S) = 8\cdot|X| \\ \sum_{y \in Y} c_y(S) = 5\cdot|Y| = 5\cdot32 = 160 \end{cases}$$

Så $|X| = 20$ $\quad \because \quad$ $160/8 = 20$

Lite om <u>sannolikheter</u>

Om vi har ett ändligt utfallsrum (alla elementarhändelser),
Ω, där varje element är <u>lika sannolikt</u> ("likafördelning"),
så har händelen $A \subseteq \Omega$.

Sannolikheten $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Exempel: Vad är sannolikheten för 1 krona(1) och 1 klave(0) då ett mynt singlas 2 gånger?

1) Utfallen $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$

En av varje: $A = \{01, 10\}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2) Utfallen Ω = {11, 00, (1 av varje (01 eller 10))}

A= {1 av varje}

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{3}$$

2) är felaktig eftersom händelserna inte är lika sannolika.

Händelser A, B kallas oberoende om $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Om A, B är disjunkta: $(A \cap B = \emptyset)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Om X, Y är (ändliga) mängder,
$|X| = m$, $|Y| = n$:

Sats: Antalet funktioner $f : X \to Y$ är $n^m = |Y|^{|X|} =$

$= \text{antalet element i } Y^m = \underbrace{Y \times \cdots \times Y}_{\times m} =$

= antalet ord av längden m, alfabet Y =

= antalet ordnade val av m stycken ur Y med upprepning

“Ordnat val med upprepning”

Exempel: Hur många ord av längden m finns i alfabetet {a, b, c, d, e}?

Enligt ovan: 5^m stycken

Hur många av dem innehåller ‘b’?

Jo, alla utom de som *inte* innehåller ‘b’:
$5^m - 4^m$ (additionsprincipen)

Nästa fall:

Sats: Antalet injektioner $f : X \to Y$ = antalet ord av längden m, alfabetet Y, utan upprepning =
= antalet ord, ordnade val av m st ur Y utan upprepning =

$$= \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}_{\times m} = (n)_m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Multiplicationsprincipen

“Ordnat val utan upprepning”

Exempel: Hur många injektioner $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, \ldots, 6\}$ finns?

Som i satsen $(m = 4, n = 6) : (6)_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Hur många av dem tar värdet 3?

Jo, alla utom dem som inte gör det.

$(6)_4 - (5)_4 = 360 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 360 - 120 = 240$ stycken

Alternativt:

$$\underset{\text{3:ans position}}{4} \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{övriga}} = 240$$

Speciellt: Om $X = Y$ (ändliga), injektioner blir bijektioner, permutationer?

$m = n$ så antalet

$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) =$
$= n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$

$|x| = n$

Tredje fallet:

Oordnade urval utan upprepning

Låt X vara en n-mängd, det vill säga $|X| = n$.

Definiera: Antalet oordnade val av k stycket från X, utan upprepning.

Binomialtalet $\binom{n}{k}$ “n över k”

Exempel:

$\binom{5}{3} = 10$, ty alla 3-delmängder till $\{a, b, c, d, e\}$ ges av

abc, abd, abe, acd, ace,
ade, bcd, bce, bde, cde.