2011-(03)mar-31: dag 19

Sats: I S_n ($n \geq 2$) är hälfen av permutationerna jämna och hälfen udda.

Ty: En bijektion jämna ↔ udda ges av

$f(\pi) = \pi\tau$, τ en transposition i S_n, tar udda till jämna och vice versa.

finns om $n \geq 2$

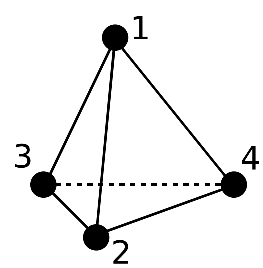
Bijektion ty $f^2 = \mathrm{id} \Leftrightarrow f = f^{-1}$.

Determinanater:

$$\det \underset{n \times n}{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \ \ a_{\pi(1)} a_{\pi(2)2} \cdots a_{\pi(n)n}$$

Ö6:5)

Tetraeder (regelbunden)



Stella avbildningar (symmetrier för tetraederna)
motvierar element i $G = S_4$; permutationer av hörnen.

Konjugatklasser: a motsvarar typer av symmetrier.

Klass	antal	paritet	exempel	typ av avbildning
$[1^4]$	1	jämna	id	identitetsavbildningen
$[1^2\ 2]$	$\binom{4}{2} = 6$	udda	(1 2)	spegling i ett plan genom 34
$[2^2]$	3	jämn	(1 2)(3 4)	rotation π kring en axel genom mitten av 12 och mitten av 34

Klass	antal	paritet	exempel	typ av avbildning
[1 3]	8	jämn	(1 2 3)	rotation $\pm\frac{2}{3}\pi$ kring en axel genom 4.
	4 sätt att välja ettan, 2 sätt att kombinera trean.			
[4]	$3 \cdot 2 = 6$	udda	(1 2 3 4)	rotation kring $\pm\frac{1}{2}\pi$ kring en axel genom 13, 24:s mitt och spegling

b) Jämna: rotationer (1 + 3 + 8 = 12 stycken)
Udda: innhåller spegling (6 + 6 = 12 stycken)

c) $N = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$
är sluten under · (...), så delgrupp och

$(1\ 2)N = \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\} = N(1\ 2)$

På samma sätt: $\underbrace{gN = Ng}_{gNg^{-1} = N}$ för alla $g \in G$.

Så N är en normal grupp.

Kvotgruppen: $G/N = \{gN : g \in G\}$

Multipikation: $g_1 N g_2 N = g_1 g_2 N$

Man finner:

$$G/N \cong S_n$$

Felrättande koder

En binär kod $C \leq \mathbb{Z}_2^n$ $(\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\})$
n är kodens längd.

Exempel: $C = \{001, 010, 110\}$

Viktiga egenskaper för en kod:

Hur många fel koden säkert kan upptäcka.

Hur många fel koden säkert kan rätta.

C ovan kan inte upptäcka 1 fel:

010 med ett fel kan bli 110, ett kodord.

Men $C = \{0010, 0100, 0111, 1011\}$ kan upptäcka ett fel
och $C = \{010, 101\}$ kan rätta ett fel.

Minimala avståndet för koden C:

$\delta = \min\{\partial(a, b) : a, b \in C, a \neq b\}$

antalet positioner i med $a_i \neq b_i$

Koder kan upptäcka $\delta - 1$ fel och rätta e fel om $\delta \geq 2e + 1$,
det vill säga upp till $\left\lfloor \frac{\delta - 1}{2} \right\rfloor$ fel.

Exempel:

Givet $x, y \in \mathbb{Z}_2^n$, $n \geq 2$

$x = 01001 \in S_2(x)$
$y = 11000 \in S_2(x)$

Låt $S_2(x)$ = mängden ord (element i $\mathbb{Z}_2^n$) som fås från x med högst 2 fel.

$$S_2(x) = \underset{\text{fel: } 0}{1} + \underset{1}{n} + \underset{2}{\binom{n}{2}} = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$$

Visa att om E är en kod av längd n = 8 som rättar 2 fel så är $|E| \leq 6$.

Inget ord skall kunna fås md högst två fel från två olika kodord så

$$|E||S_2(x)| \leq 2^8 = 256$$

$$\{ \quad |S_2(x)| = ½(8^2 + 8 + 1) = 37 \quad \}$$

$$|E| \leq \frac{256}{37} < 7 \qquad |E| \leq 6$$

På samma sätt, sfärpackningssatsen:

Om koden C av längd n rättar e fel:

$$|C|\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{e}\right) \leq 2^n$$

Mer systematiskt (algebraiskt)

C är en linjär kod omm

$a, b \in C \Rightarrow a + b \in C$

Addition position för positon i $\mathbb{Z}_2$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Exempel:

11010 + 01110 = 10100

Detta betyder att C är ett delrum (delgrupp) till $\mathbb{Z}_2^n$.

Så

$|C| \setminus 2^n$ dett vill säga $|C| = 2^k$ för något k (C:s dimension) $\in \mathbb{N}$

I en linjär kod:

$\delta = \omega_{min} = \min\{\omega(c) : c \in C, c \neq 00\ldots00\}$

vikten för c, det vill säga antalet 1:or i c

Ty:

$\omega_{min} = \omega(c^*) = \partial(c^*, 0) \geq \delta$

och

$\delta = \partial(c_1, c_2) = \omega(c_1 + c_2) \geq \omega_{min}$