Fourierserieutveckling av styckvis kontinuerliga funktionene ƒ definierad i intervallet]–p; p[.

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \qquad b_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$

Det brukar vara bra att räkna ut a_0 separat:

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx$$

Om a_n eller b_n inte blir definierad för ett visst n måste man sätta in det n:et och räkna ut värdet separat. Till exempel:

$$a_2 = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{2\pi x}{p}\, dx$$

Om ƒ(x) är en jämn funktion gäller:

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}_c(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}$$

Om ƒ(x) är en udda funktion gäller:

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}_s(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}$$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

kan användas för att räkna ut värdet där ƒ(x) inte är kontinuerlig.

$$\alpha \frac{\partial^a u}{\partial x^a} = \frac{\partial^b u}{\partial y^b}$$

$u(x; y) = X(x)Y(y)$

$\alpha X^{(a)}(x)Y(y) = X(x)Y^{(b)}(y)$

Dividera med $\alpha X(x)Y(y)$

$$\frac{X^{(a)}(x)}{X(x)} = \frac{Y^{(b)}(y)}{\alpha Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

ty X är oberoende av y,
och Y är oberoende av x.

$$\begin{cases} X^{(a)}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y^{(b)}(y) - \lambda\alpha Y(y) = 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X_1^{(a)}(x) - \mu^2 X_1(x) = 0$

$\lambda = 0$:

$X_2^{(a)}(x) = 0$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X_3^{(a)}(x) + \mu^2 X_3(x) = 0$

$X = X_1 + X_2 + X_3$

Utför motsvarande för Y.

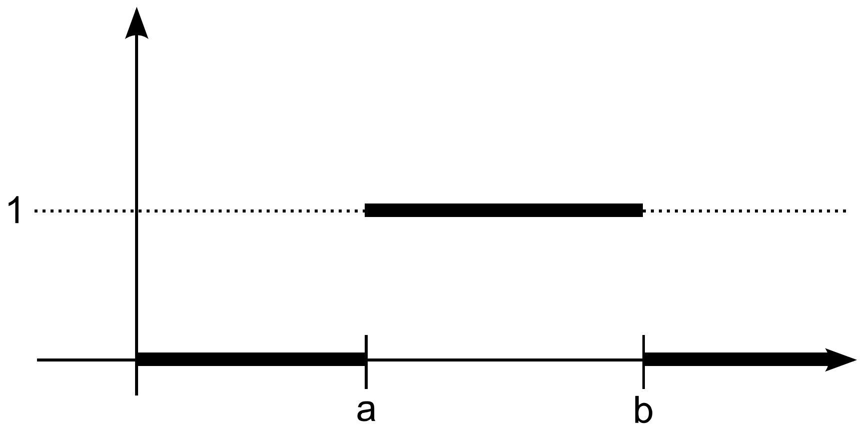
$u(x; y) = X(x)Y(y)$

Om ett godtyckligt (eventuellt med restriktion) tal, n, uppkommer i u(x; y) gäller dock:

$u_n(x; y) = X(x; n)Y(y; n)$

$$u(x; y) = \sum_{\forall n} u_n(x; y)$$

Heavisides funktion (U):



$$f(t) = U(t - a) - U(t - b)$$

$$U(t-a)=\begin{cases}1 & t>a\\ 0 & t<a\end{cases}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad , \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

Transformera ekvationen med hjälp av substitutionen

$$\begin{aligned} z &= x + at \\ v &= x - at \end{aligned}$$

Vi tänker att $u(x; t) = \tilde{u}(z(x; t); v(x; t))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}}_{a}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}}_{-a} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}a-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)=$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z \partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} =$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\underbrace{\partial v \partial z}_{\partial z \partial v}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\right)}_{\text{på analogt sätt}}$$

Ekvationen $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (*) skrivs om.

Lös ekvationen $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v \partial z} = 0$

$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)=0$ $\qquad$ $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}$ beror inte på v.

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}=P(z)$ P är någon funktion.

$$\tilde{u}(z;v)=\underbrace{\int P(z)\,dz}_{\triangleq F(z)}+G(v)$$

Vi fick att lösningarna till (*) är:

$$\tilde{u}(z;v)=F(z)+G(v)$$

där F och G är godtyckliga funktioner.