2011-(04)apr-28: dag 25

Mer om grafteori

- Resten från övning 8.
- Träd
  - Spännande träd
  - Minimala spännande träd, Kruskals algoritm
  - Binära rotade träd
- Planära grafer
  - Eulers polyederformel
  - K_5 och $K_{3,3}$ är inte planära, Kuratowskis sats
- Övnings-KS 4

Anmälan till tentan senast 15 maj.

En Hamiltonstig/-cykel passerar varje hörn i grafen precis en gång.

Man kan sätta ihop en Eulerväg/-krets med flera Eulerkretsar.

Försättning av övning 8.

5) G är en graf, $|V| = 2$. Visa att två hör har samma valens.

$G = (V, E)$ $\quad$ $|V| = n$

Möjliga valenser: $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, n stycken olika.

n hörn, men valensen 0 och $n - 1$ kan inte förekomma samma graf.

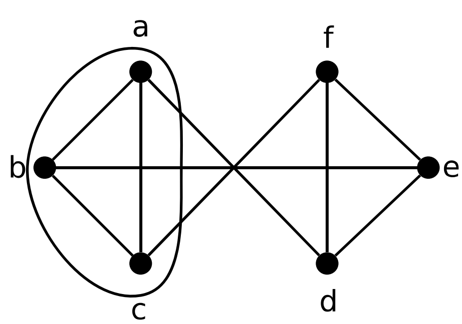
I varje fall $n - 1$ möjliga värden, enligt postfacksprincipen har två hörn samma valens.

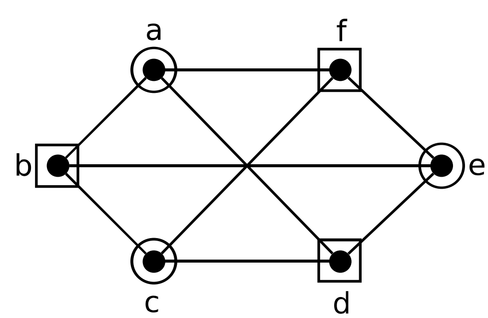
6) Granntabeller för G_1, G_2:

a	b	c	d	e	f
b	a	a	a	b	c
c	c	b	e	d	d
d	e	f	f	f	e

&

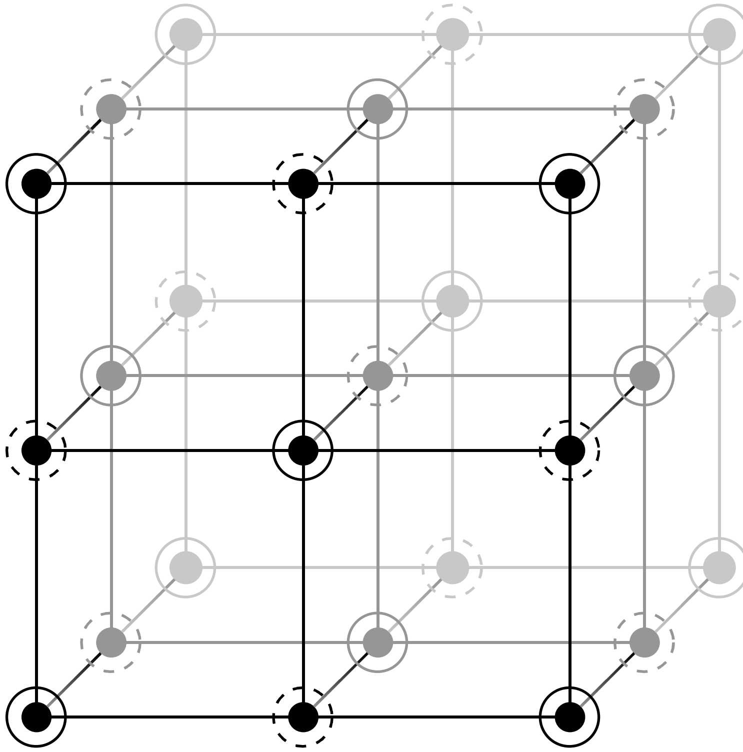
1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	2	1
4	3	4	5	4	3
6	5	6	1	6	5





G_2 är bipartit; G_1 inte, så de är inte isomorfa.

7)



3×3×3-ost

Musen vill följa e Hamiltonstig i ostgrafen, se figuren ovan.
Vi skall visa att han itne kan sluta i mitten hörnet.
(Hörn faller inte ned, när de förlorar sitt stöd, se svävar.)

Experiment visar att det verkar vara så, men varför?

Grafen är bipartit, se ringarna.

Heldragna: $|X| = 14$
Sträckade: $|Y| = 13$

En Hamiltonstig måste börja och sluta i X-hörn. Mitt hörnet är ett Y-hörn.

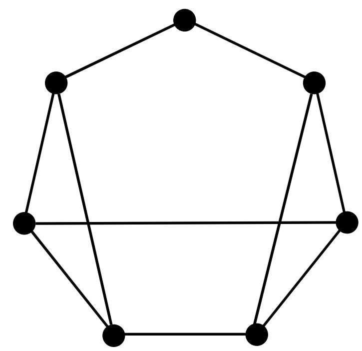
8) Finns (enkla) grader med 7 hörn med valenserna:

a) 0, 2, 3, 3, 4, 4, 5?

Nej, ty summan av valenserna måste vara $2|E|$, ett jämnt tal.

b) 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3?

Ja. Exempel:



c) 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6?

Granne med alla. −1 på alla valenser och bort med den.

Ingen sådan graf finns, varje 1-hörn har kant till högst 4-hörn,
så ett 4-hörn skall ha högst 3 grannar.

Alternativt:

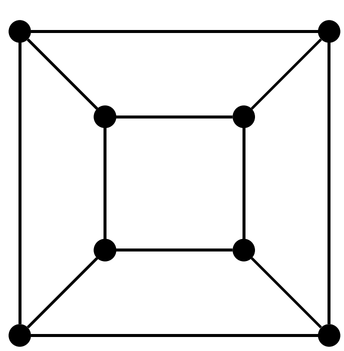
(2, 2, 3) har högst 7 kanter ut,
(5, 5, 5, 6) har minst 9 kanter ut.

Omöjligt.

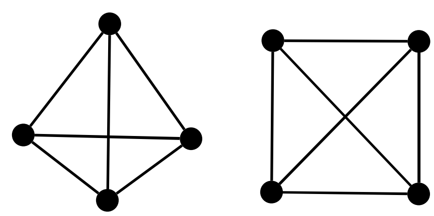
(Finns med öglor.)

9) 3-reguljära grafer med 8-hörn.

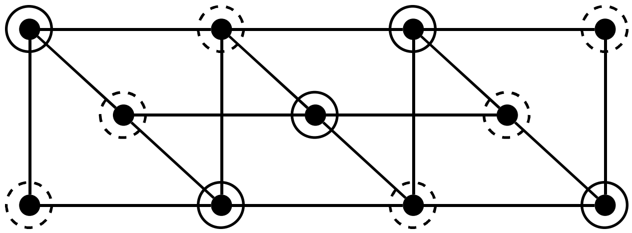
Kubgrafen:



Inte sammanhängande:

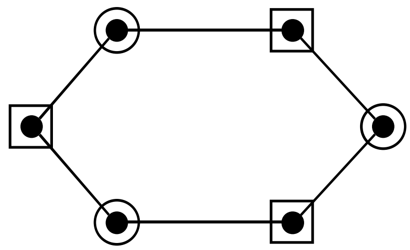


12)



Grafen har ingen Hamiltoncykel ty den är bipartit med $|X| = 6$, $|Y| = 5$.

En cykel i en bipartit graf har lika många hörn av varje typ.



Övnings-KS 4

1 a) $n = 46 = 2 \cdot 23$, $m = (2-1)(23-1) = 22$

Krav: $\text{sgd}(e, m) = 1$, $\text{sgd}(2, 22) = 2$

b) $e = d = 5$

Möjligt om det finns primtal, p, q, med $e \cdot d \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$.

$p = 7$, $q = 3$
$e \cdot d = 25$

$(p-1)(q-1) = 6 \cdot 2 = 12$

$25 - 2 \cdot 12 = 1$

Så: Ja.

d) Antalet ord: 2^k, k dimensioner. Längden $n = k + r$. r — H:s rang
8 ord $k = 3$, $n = 7$, så minst 4

e) $f(x_1, \ldots, x_n)$

Antalet punkter (rader i värdetabellen): 2^n

totala antalet funktioner: 2^{2^n}

2 a)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mottaget 111111

Vi försöker rätta:

$$H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Inte än kolonn, så inte <u>ett</u> fel, minst två fel.

b)

$f(x, y, z) = xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z$

Karnaughdiagram

		z = 0	z = 1
xy	00	0	0
	01	0	0
	10	1	1
	11	0	1

Så $f(x, y, z) = x\bar{y} + xz$

c) RSA med $n = 65$, finn möjligt e

$n = 5 \cdot 13, \quad m = 4 \cdot 12 = 48$

Krav: $\operatorname{sgd}(e, m) = \operatorname{sgd}(2, 48) = 1$

Till exempel: 5

3) $f(x, y, z) = (xy + \overline{(x + y)})z = (xy + \bar{x}\bar{y})z = xyz + \bar{x}\bar{y}z$

5) Finn en kontrollmatris, H, till en 1-felrättande kod $\mathcal{C}$ med 16 ord, så att $1011000 \in \mathcal{C}$.

$n = 7, \qquad 16 = 2^4, \qquad$ så dim $k = 4$

så H:s rang $= r - k = 3$

H av typ 3×7, alla kolonner olika $\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Villkoret att $1011000 \in \mathcal{C}$ get att summan av kolonn 1, 3, 4 är $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Till exempel:

$$\underset{1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \underset{4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad \text{fyll på med olika kolonner.}$$

Till exempel:

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$