Veriferia att $\vec{X}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}e^{-\frac{3t}{2}}$

är en lösning till $\vec{X}'=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ 1 & -1\end{pmatrix}\vec{X}$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_2}{4}-x_1\\ x_1-x_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}\underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)}_{\lambda}e^{-\frac{3t}{2}}\overset{?}{=}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\ 1 & -1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}e^{-\frac{3t}{2}}$$

Egentligen behöver vi verifiera att $\lambda\vec{v}=\mathbf{A}\vec{v}$, det vill säga att $\vec{v}$ är en egenvektor för **A** med egenvärdet λ.

$$\mathbf{A}\vec{v}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{2}{4}\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}\\ -1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ -3\end{pmatrix}=-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\lambda\vec{v}$$

Stämmer!

Bestem den allmänna lösnngen till

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x+2y\\11x-2y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}7 & 2\\ 11 & -2\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Sök egenvärden till **A**

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}7-\lambda & 2\\ 11 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(-2-\lambda)-22=$$

$$=\lambda^2-5\lambda-36=(\lambda+4)(\lambda-9)$$

$\lambda_1 = 9$ söker $\vec{v_1}$ så att

$$(\mathbf{A}-9\mathbf{I})\vec{v_1}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -11 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -4$

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = t \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

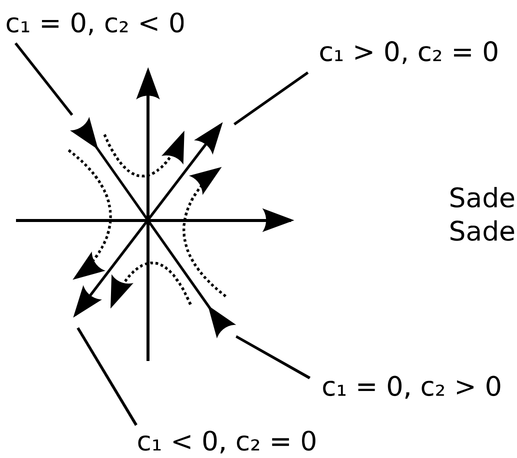
Vi har två linjärt oberoende lösningar:

$$\vec{X}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} \quad \text{och} \quad \vec{X}_2 = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

$$\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} e^{-4t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ange hastighetsvektorn i punkten (2; 11)!

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' = 7x + 2y = 14 + 22 = 36 \\ y' = 11x - 2y = 22 - 22 = 0 \end{pmatrix}$$



Sadelpunkt
Sadelbeteende

Bestäm lösningen till BVP

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\vec{X}\quad , \quad \vec{X}(0)=\begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}6-\lambda & -1\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(4-\lambda)+5=\lambda^2-10\lambda+29$$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$

$$\begin{pmatrix}6-5-2i & -1\\ 5 & 4-5-2i\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}1-2i & -1\\ 5 & -1-2i\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$$

Rad 1 och rad 2 är alltid linjärt beroende.

$$(1-2i)\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{0}$$

$$\vec{v}=t\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}e^{(5+2i)t}=\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}e^{5t}\text{ cis }2t=e^{5t}\begin{pmatrix}\text{cis }2t\\ (1-2i)\text{ cis }2t\end{pmatrix}=$$

$$=e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t+i\sin 2t\\ \cos 2t+2\sin 2t-2i\cos 2t+i\sin 2t\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+2\sin 2t\end{pmatrix}}_{\vec{x}_1}+\underbrace{ie^{5t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ -2\cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}}_{\vec{x}_2}$$

$\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \qquad\qquad \vec{v}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \qquad\qquad \vec{v}=t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_h}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^0+c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^t$$

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}$$

Formeln (se sida 330 eller Beta)

$$\overrightarrow{X_p}=\mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt \qquad\qquad \vec{F}(t) \text{ är den inhomogena delen.}$$

Söker $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=\frac{\operatorname{adj}\mathbf{\Phi}(t)}{\det\mathbf{\Phi}(t)}=\begin{pmatrix} 2e^t & -3e^t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-e^t}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \frac{1}{e^t} & -\frac{1}{e^t} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_p}=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \frac{1}{e^t} & -\frac{1}{e^t} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{F}}dt=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -8-3 \\ \frac{4+1}{e^t} \end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -11 \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11t \\ -5e^{-t} \end{pmatrix}+C=\{*\}=\begin{pmatrix} -11t-15 \\ -11t-10 \end{pmatrix}$$

{*} Som vanligt sätter vi C till 0 eftersom vi bara vill ha en lösning i partikulärlösning.