2011-(02)feb-28: dag 12

1)

n stycken likadana tärningar.
Hur mång möjliga utfall? (Vi antar att de har 6 sidor vardera.)

Oordat urval med upprepning.

$\binom{n+6-1}{n}=\binom{n+5}{n}=\binom{n+5}{5}$

2)

Antalet 5-siffriga tal (eventuellt med inledande 0:or).

a)

Totalt 10^5 stycken (ordnat urval med upprepnnig)

b)

Strikt växande, till exempel 02578.

$\binom{10}{5}=252$ stycken

c)

Växande inte strikt, till exempel 46889.

Ges biljektivt av hur många gånger varje siffra ingår.
Oordnat val med upprepning.

$\binom{5+10-1}{5}=\binom{14}{5}=2002$ stycken

d)

Ej strikt växande eller ej strikt avtagande (inklusive konstant)

$2\cdot\binom{14}{5}-10=2\cdot 2002-10=3994$

… − 10 ty konstant igår i både växande och avtagande.
($|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$)

3)

Givet 12 strycken tvåsiffriga tal (bas 10).
Visa att två har skillnad aa_{10} ($a = 0, 1, \dots, 9$).

Av 12 tal är minst 2 stycken lika (mod 11), skillnaden 0 (mod 11).

Lösning:

$a \cdot 11$ något a skillnaden: $0 \leq aa \leq 99$

4)

$a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$
Visa att någon icke-tom delmängd har summan delbar med n.

Låt $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

Antingen är något s_i delbart med n (så klara) ller sååär vå av dem lika (mod n) (postfacksprincipen) och deras skillnad ($s_j - s_i =$
$= a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$) delbar med n, också klart.

5)

Bokstäverna A, B, D, G, J och U kastas om.
På hur många sätt kan det ske utan att "DU" eller "JAG" ingår?

Låt A = {de som innehåller "DU"}

B = {de som innehåller "JAG"}

$\mathcal{U}$ = {alla}

Sökt $|\mathcal{U} \setminus (A \cup B)| = |\mathcal{U}| - |A \cup B| =$

$= |\mathcal{U}| - |A| - |B| + |A \cap B| =$

$= 6! - 5! - 4! + 3! =$

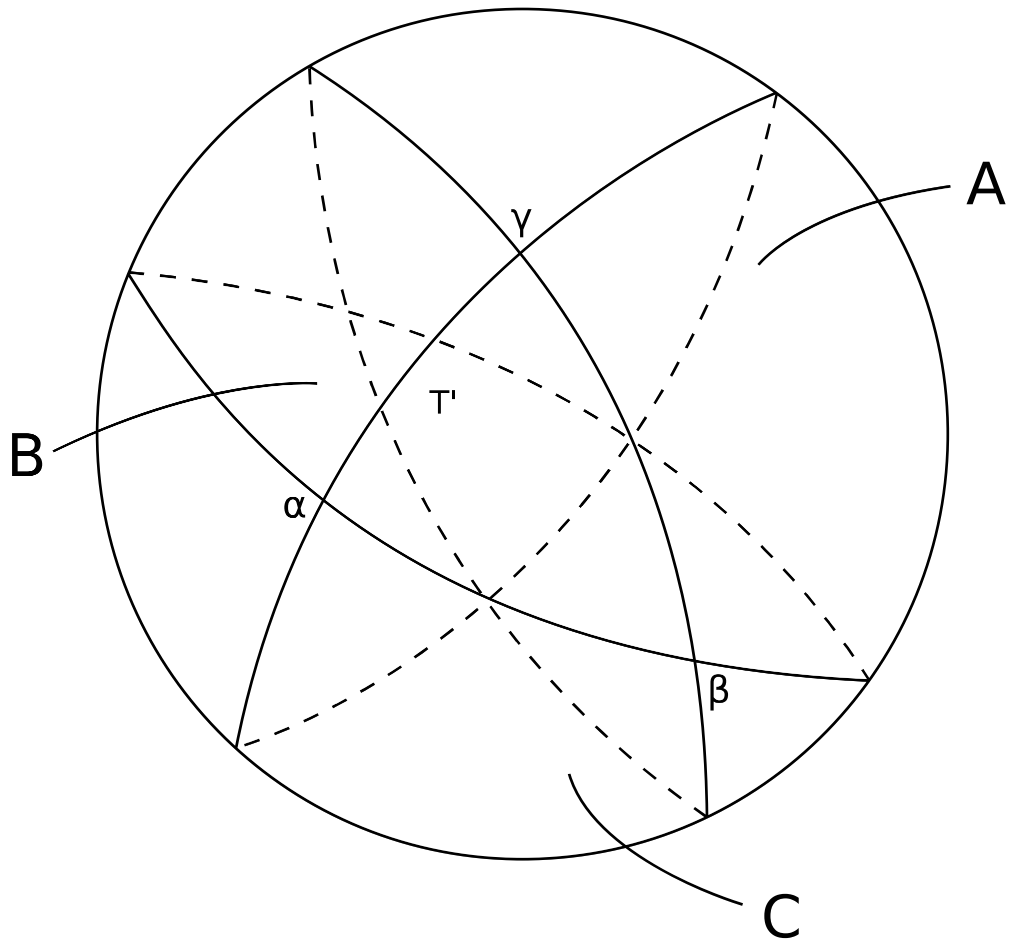
$= 720 - 120 - 24 + 6 = 582$

6)

En sfärisk triangel har vinklarna α, β och γ och sfären har radien R.
Vad är dess area?

Jo, inklusion och exklusion för areor

T = A ∩ B ∩ C
med A, B, C som halv-sfärer enligt figuren.



Triangeln T' ("mittemot" T) har samma area som T.

T' = S \ (A ∪ B ∪ C)

$$|T| = |T'| = |S \setminus (A \cup B \cup C)| =$$

$$= |S| - |A \cup B \cup C| =$$

$$= \underbrace{|S|}_{4\pi R^2} - \underbrace{(|A| + |B| + |C|)}_{3 \cdot 2\pi R^2} + (\underbrace{|A \cap B|}_{\frac{\gamma}{2\pi}4\pi R^2} + \underbrace{|B \cap C|}_{\frac{\alpha}{2\pi}4\pi R^2} + \underbrace{|C \cap A|}_{\frac{\beta}{2\pi}4\pi R^2}) - \underbrace{|A \cap B \cap C|}_{|T|} =$$

$$= -2\pi R^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\cdot 2R^2 - |T|$$

$$2\cdot|T| = -2\pi R^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\cdot 2R^2$$

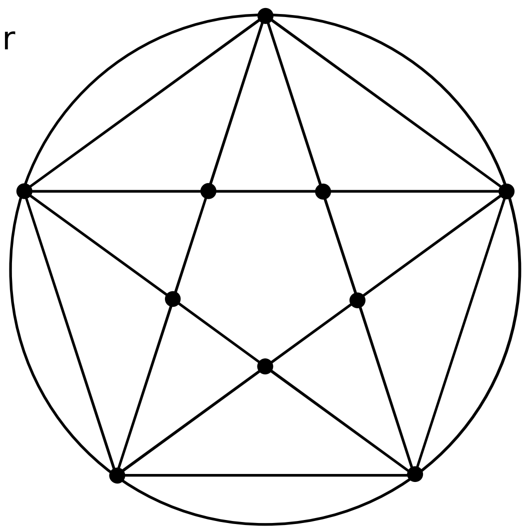
$$|T| = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)\cdot 2R^2$$

7)

Hur många skärpunkter mellan diagonalerna (kordorna!) i cirkeln

Observera att skärningspunkterna motsvarar bijektivt mängder av fyra av punkterna på cirkeln.

$$\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$$



Så antalet skärningspunkter = antalet 4-delmängder till en n-mängd, det vill säga

$$\binom{n}{4}.$$

9)

Hur många fördelningar av 7 synder bland 4 personer är möjliga?

a)

Fördelningen kan beskrivas som en funktion

{synderna} → {personerna}

(ingen synd hos mer än en person) och den funktionen
är en surjektion.
(varje person har minst en synd).

Så sökt är antalet surjektioner från en 7-mängd till en 4-mängd.

$4!\cdot S(7;\, 4) = 24\cdot 350 = 8400$

b)

Om ingen är girig och lat: dra port de fördelningarna.

$4!\cdot S(6;\, 4) = 24\cdot 65 = 1560$

Så svaret i b: $8400 - 1560 = 6840$

10)

På hur många sätt kan 7 kulor fördelas på
4 (särskiljbara) lådor i följande fall:

	kulor	tomma	svar:
a)	olika	ja	7-mängd → 4-mängd = $4^7 = 16384$
b)	olika	nej	Surjektion $(\lvert\cdot\rvert=7) \to (\lvert\cdot\rvert=4) = 4!\cdot S(7;4) = 8400$
c)	identiska	ja	Oordnat val med upprepning. $\binom{7+4-1}{4-1}=120$
d)	identiska	nej	$\binom{3+4-1}{4-1}=20$

Och för 4 icke-särskiljbara lådor, men 7 särskiljbara kulor:

tomma

e) ja $S(7; 1) + S(7; 2) + S(7; 3) + S(7; 4) = 715$

f) nej $S(7; 4) = 350$

Interlude…

Partitioner av heltal $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 1$.
Antalet partioner av n i k delar $P_k(n)$ ($\neq S(n; k)$).

identiska element särskiljbara element

Exempel:

Partitioner av n = 5

$[5], [4, 1], [3, 2], [3, 1^2], [2^2, 1], [2, 1^3], [1^5]$

$P_1(5) = 1$, $P_2(5) = 2$, $P_3(5) = 2$, $P_4(5) = 1$, $P_5(5) = 1$

… end of interlude.

(10) Och för icke-särskiljbara lådor och kulor:

tomma

g) ja $P_1(7) + P_2(7) + P_3(7) + P_4(7) = 1 + 3+ 4 + 3 = 11$

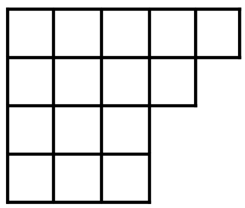
h) nej $P_4(7) = 3$

Exempel:

Låt $f_m(n)$ vara antalet partitioner av n i högst m delar,
och $g_m(n)$ vara antalet partitioner av m i delar $\leq$ m.

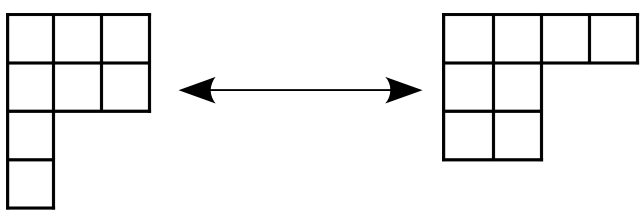
Visa att $f_m(n) = g_m(n)$.

Varje partition svarar mot en tablå.
Till exempel $[5, 4, 3^2]$



$f_m(n)$ antalet tablåer med högst m rader.
$g_m(n)$ antalet tablåer med varje rad $\leq$ m.

En bijektion mellan mängderna tablåer är
spegling i diagonalen (transponering):



Så lika många.