Stabilitetsundersökning av icke-linjära system

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X})$$

Läraren skrev med punkt övanför, vilket innebär att det är första derivatan, två punkter är andra derivatan, och så vidare. Punkt används oftast i mekaniken för vid derivata med avseende på tiden.

Stationär lösning:

$$\dot{\vec{X}} = \vec{0} = \vec{f}(\vec{X})$$

$$\vec{X} = \vec{X_0}$$

Taylorutveckling kring den kritiska punkten

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X}) = \vec{f}(\vec{X_0}) + \vec{f}(\vec{X_0})(\vec{X} - \vec{X_0}) + \vec{R_2}$$

Linjäriserat system

$$\dot{\vec{X}} = \vec{f}(\vec{X_0})(\vec{X} - \vec{X_0})$$

$$\vec{f}(\vec{X}) = \begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(\vec{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{“Jacobimatris”}$$

[z.c.10.3.14.]

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y^2 \\ -y + xy \end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(\vec{X})$$

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ -y + xy = -y(1-x) = 0 \end{cases}$$

a) $y = 0 \Rightarrow x = 0$, $(x;y) = (0;0)$

b) $x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$, $(x;y) = (1; \pm\sqrt{2})$

$$\mathbf{g}'(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ y & -1+x \end{pmatrix} = \text{“Funktionalmatris”}$$

$$\mathbf{g}'(0;0)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$ (↗-diagonalen kallas “bidialgonalen”)

↘-diagonalen kallas “huvuddiagonalen”. **g'**(0; 0) är en (huvud)diagonalmatris.

(0; 0) är en sadelpunkt, ty signum(λ_1) = –signum(λ_2) ≠ 0.
Därmed är diagonalen även instabil.

$$\mathbf{g}'(1;\sqrt{2})=\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\lambda+4=\lambda^2-2\lambda+4$$

$$\lambda=1\pm\sqrt{1-4}=1\pm i\sqrt{3}$$

$\Re\,\lambda > 0$ ∴ Instabil spiral i (1; $\sqrt{2}$)

Alternativ framställning:

(0; 0)

$$D\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\ -y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-y^2\\ xy\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-y^2\\ xy\end{pmatrix}$$

(1; $\sqrt{2}$)

Sätt: $\begin{cases}u=x-1\\ v=y-\sqrt{2}\end{cases}\left|\begin{array}{l}u'=x'\\ v'=y'\end{array}\right.$

$$\begin{cases}u=x-1\\ v=y-\sqrt{2}\end{cases}\left|\begin{array}{l}u'=x'\\ v'=y'\end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}u'\\ v'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(u+1)-(v+\sqrt{2})^2\\ -(v+\sqrt{2})+(u+1)(v+\sqrt{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2u-v^2-2v\sqrt{2}\\ uv+u\sqrt{2}\end{pmatrix}=$$

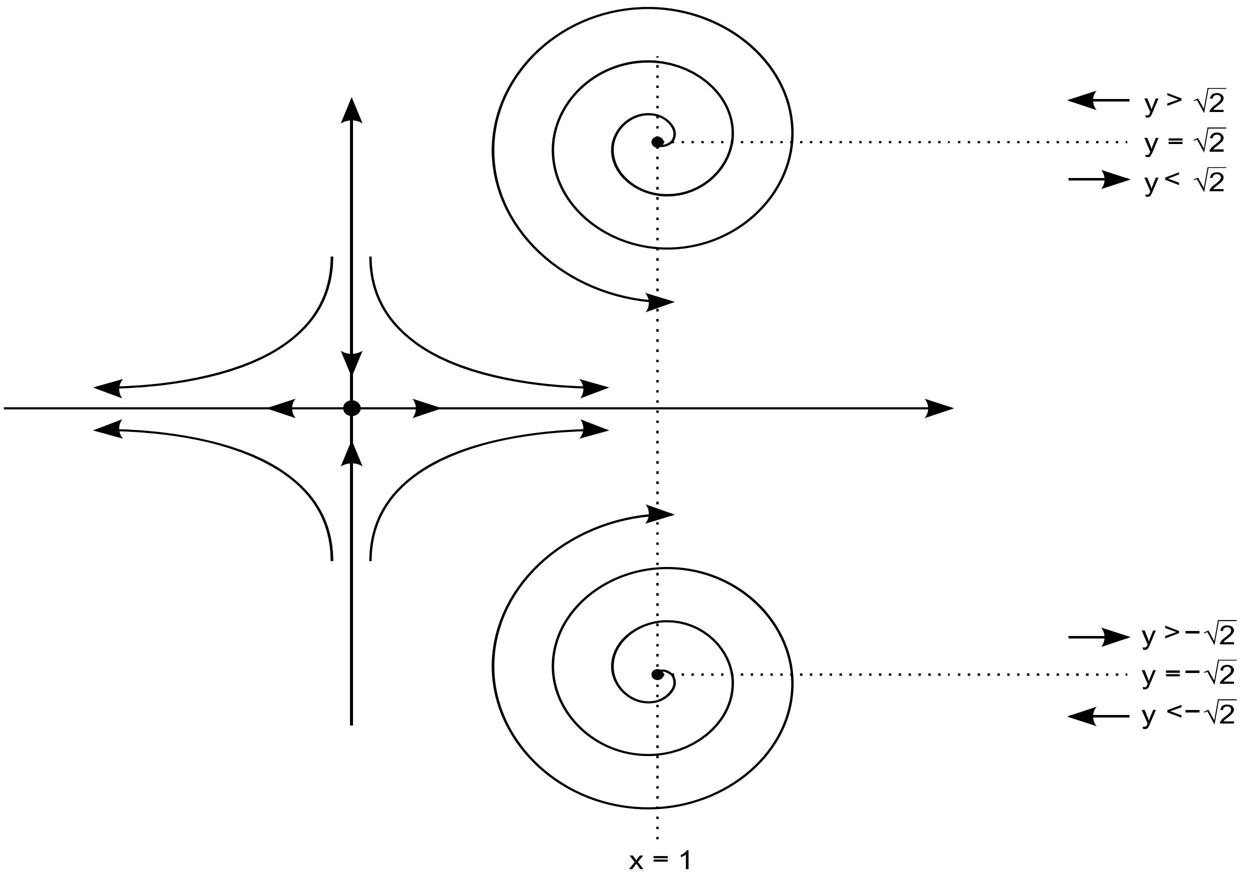
$$=\begin{pmatrix}2 & -2\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-v^2\\ uv\end{pmatrix}$$

$$\vec{0}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\begin{pmatrix}2-\lambda & 0\\ 0 & -1-\lambda\end{pmatrix}\vec{v}$$

$$\lambda_1=2,\quad \vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\quad \lambda_2=-1,\quad \vec{v_2}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Fasporträtt:

$$\vec{X}'(x \triangleq 1) = \begin{pmatrix} 2 - y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Modul 3

Laplacetransformer (andra än CL)
Fouriertransformer (CL)

PDE och randvärdesproblem i rektangulära koordinater

Ortogonala funktioner och fourierserier

Partiella differentialekvationer och randvärdesproblem

12.1. Separabla PDE
12.2. Klassiska ekvationer och randvärdesproblem
12.3. Värmesledningsekvationer
12.4. Vågekvationer
12.5. Laplace ekvation

Variableseparation

$$u_x' = u + u_y'$$

Ansats: $u(x; y) = X(x)Y(y)$

$X'(x)Y(y) = X(x)Y(y) + X(x)Y'(y)$

Dividera med $X(x)Y(y)$.

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1) Y(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda-1)y} \end{cases}$$

$u_\lambda(x; y) = (AB)_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} = c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$

$$u(x; y) = \sum_{\forall \lambda} c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$$

Villkor:

$$u(x; 0) = 5e^{-3x} - 4e^{x}$$

$$u(x; 0) = 5e^{-3x} - 4e^{x} = \sum_{\forall \lambda} c_\lambda e^{\lambda x}$$

Identifiering ger:

$$\begin{cases} \lambda=-3\,; & c_{-3}=5 \\ \lambda=1\,; & c_1=-4 \\ \text{Övriga} & c_\lambda=0 \end{cases}$$

$u(x; 0) = 5e^{-3x} – 4e^{x}$

Variableseparation

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ Vågekvationen.

Ansats: $u(x; t) = X(x)T(t)$

$a^2X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}$$

Ett system av okopplade ODE erhålls.

$X''(x) = \lambda X(x) = 0$
$T''(t) – \lambda a^2T(t) = 0$

Linjära med konstant kefficienter

Tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) – \mu^2X(x) = 0$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1e^{\mu x} + B_1e^{-\mu x}$

Motsvarande för “T-ekvationen” ges:

$T(t) = C_1e^{a\mu t} + D_1e^{-a\mu t}$

$\lambda = 0$:

$$X''(x) = 0$$

$$X(x) = A_2 x + B_2$$

$$T(t) = C_2 t + D_2$$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$$

$$T(t) = C_3 \cos a\mu x + D_3 \sin a\mu x$$