

SF1637 (SF1633 för andra än CL)

Diff & Trans III CL2

Hans Tranberg
KTH Matematik

Literatur:

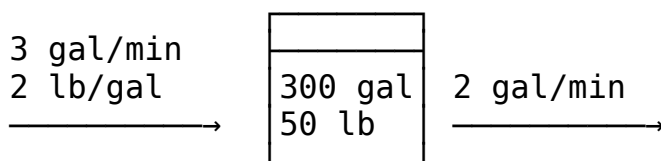
Differential Equations with Boundary-Value Problems 7:th ed. (7, inte 8)
[Zill / Cullen]

Mathematics Handbook BETA
[Råde / Westergren]

Introduktion till differentialekvationer (diff.ekv.)
Första ordnings ordinära diff.ekv. (ODE)

Modeller med första ordningens ODE.

[Z.C.1.3.10]



$A(t)$ är mängden salt i tanken vid tiden t i pounds.

$$\frac{dA}{dt} \text{ lb/min} = 3 \text{ gal/min} \cdot 2 \text{ lb/gal} - 2 \text{ gal/min} \cdot \frac{A(t)}{300+t(3-2)} \text{ lb/gal}$$

$$\frac{dA}{dt} + 2 \cdot \frac{A(t)}{300+t} = 6, \quad A(0) = 50$$

Innehåll:

Högre ordningens ODE.

System av första ordningens ODE.

Plana autonoma system och stabilitet.

Laplacetransformer (för CBIOT & CKEMV)

Fouriertransformer (för CL)

Båge är integraler.

Partiella diff.ekv. (PDE) och randvärdesproblem i rektangulära koordinater.

Ortogonal funktioner och fourierserier.

Modul 1:

Första & andra ordningens ODE
KS 1

Modul 2:

Högre ordningens ODE
System av linjära ODE
Autonoma system. Stabilitet
KS 2

Modul 3:

Laplacetransformer (för BIO & K)
Fouriertransformer (för CL)
PDE. Fourierserier
Inlämningsuppgift 1 (i grupper om max 3)

CL har första salen på schemat.

Två-delad tentamen:

Del 1 är avsedd för betyg E och består av 3 uppgifter.

Godkänd modul ger godkänd uppgift.
3 godkända moduler ger godkänt.
5 av 9 poäng ger godkänd KS.

Del 2 för högre betyg. 20 poäng.
8-9 KS-poäng ger bonuspoäng till del 2.

Exempel

Befolkningsmängden är $P(t)$.

Relativa tillväxthastigheten är $\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt}$

Modell 1:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = a > 0$$

$$P(t) = Ce^{at}$$

Växer konstant.
Överbefolkning!

Modell 2:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = a - bP(t)$$

$$\frac{dP}{dt} = aP(t) - bP^2(t) = \{\text{Sätt}\} = 6P(t) - P^2(t)$$

Inget sker vid $P=0$ och $P=6$.

Stationära lösningar: $\frac{dP}{dt} = 0$

$P=0$, $P=6$

$P > 6$ ger minskning. Negativ derivata.

$0 < P < 6$ ger ökning. Positiv derivata.

Utvandring!

Modell 3:

$$\frac{dP}{dt} = aP(t) - bP^2(t) - h = \{\text{Sätt}\} = 6P(t) - P^2(t) - 8$$

h har storheten personer / tid.

$P > 6$ ger minskning. Negativ derivata.

$2 < P < 6$ ger ökning. Positiv derivata.

$P < 2$ ger minskning. Negativ derivata.

Första ordningens ODE:

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y)$$

- Separabla

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

- Linjära

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Separabla

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

1. $h(y) = 0$: $y = \text{konstant}$

2. $h(y) \neq 0$: $\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$

Integrera med avseende på x .

Linjära

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Multipluera med $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} \cdot P(x)y = e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(e^{\int P(x)dx} y \right) = e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

Integrera med avseende på x .

Exempel

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - x \quad \text{separabel}$$

1) Stationära lösningar:

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad x=0, \quad x=1$$

2) $x \neq 0, \quad x \neq 1$

$$\frac{1}{x^2 - x} \cdot \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} = ?$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \quad (*)$$

Handpåläggning

$$A = \left(\frac{1}{x-1} \right)_{x=0} = -1$$

$$B = \left(\frac{1}{x} \right)_{x-1=0} = 1$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

Integration av (*) ger:

$$-\ln|x| + \ln|x-1| = t + \ln|C|$$

$$\ln \left| \frac{x-1}{x} \right| = t + \ln|C|$$