Första ordningens ODE:

$$\frac{dy}{dx} = f(x;y)$$

- Separabla: $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$
- Linjära: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$

Separabla

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

1. $h(y) = 0 : y =$ konstant
2. $h(y) \neq 0 :$ $\frac{1}{h(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = g(x)$

Integrera med avseende på x.

Linjära

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$$

Multiplicera med $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} \cdot P(x)y = e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx} y\right) = e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

Integrera med avseende på x.

Substitutioner:

Homogena:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sätt z = y/x. y = xz, y' = xz' + z

xz' + z = f(z)

xz' = f(z) – z

Separabel!

Bernoullska:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y = f(x)y^{\alpha}, \ \ 1 \neq \alpha \neq 2, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

Sätt $z = y^{1-\alpha}, z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = f(x)$$

Linjärt!

Begynnelsevärdesproblem (BVP)

$$\frac{dy}{dx} = f(x; y), \ \ y(x_0) = y_0$$

Exemple på derivatagraf:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Rita up koordinatsystem och rita in lutning för (x; y) punkter då

- y = 0, x' = ±∞
- x = 0, y' = 0
- y = –x, y' = 1
- y = x, y' = –1

Man ser att cirklar bildas.
Stämmer det?

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\int \left(2y\frac{dy}{dx} + 2x\right)dx = \int \, dx$$

$$\int 2y\frac{dy}{dx}dx + \int 2x \, dx = \int \, dx$$

$$\int 2y \, dy + \int 2x \, dx = \int \, dx$$

$$y^2 + x^2 = C$$

Ja, det stämmer!

$$y^2 + x^2 = r^2$$

Exempel på stabilitet

$$\frac{dy}{dx}=y^2-3y$$

Kritiska punkter: $\frac{dy}{dx}=y^2-3y=y(y-3)=0$

Kritiska punkter: y = 0 och y = 3

Fasporträtt (faslinje)

$$\longrightarrow\!\!\longrightarrow\!\!\!\underset{0}{|}\!\!\longleftarrow\!\!\longleftarrow\!\!\!\underset{3}{|}\!\!\longrightarrow\!\!\longrightarrow$$

\+ – + :derivata

y = 0 är asymptotiskt stabil.
y = 3 är instabil.