2010–(08)aug–27: dag 1, 1

SF1637 (SF1633 för andra än CL)

Diff & Trans III CL2

Hans Tranberg
KTH Matematik

Literatur:

Differential Equavations with Boundary-Value Problems 7:th ed. (7, inte 8)
[Zill / Cullen]

Mathematics Handbook BETA
[Råde / Westergren]

Introduktion till differentialekvationer (diff.ekv.)
Första ordnings ordinära diff.ekv. (ODE)

Modeller med första ordningens ODE.

[Z.C.1.3.10]

```
3 gal/min      ┌──────────┐
2 lb/gal       ├──────────┤
               │300 gal   │ 2 gal/min
────────────→  │50 lb     │ ────────────→
               └──────────┘
```

A(t) är mängden salt i tanken vid tiden *t* i pounds.

$$\frac{dA}{dt}\,\mathrm{lb/min} = 3\,\mathrm{gal/min}\cdot 2\,\mathrm{lb/gal} - 2\,\mathrm{gal/min}\cdot\frac{A(t)}{300+t(3-2)}\,\mathrm{lb/gal}$$

$$\frac{dA}{dt} + 2\cdot\frac{A(t)}{300+t} = 6, \quad A(0) = 50$$

Innehåll:

Högre ordningens ODE.

System av första ordningens ODE.

Plana autonoma system och stabilitet.

Laplacetransformer (för CBIOT & CKEMV)

Fouriertransformer (för CL)

Båge är integraler.

Partiella diff.ekv. (PDE) och randvärdesproblem i rektangulära koordinater.

Ortogonala funktioner och fourierserier.

Modul 1:

Första & andra ordningens ODE
KS 1

Modul 2:

Högre ordningens ODE
System av linjära ODE
Autonoma system. Stabilitet
KS 2

Modul 3:

Laplacetransformer (för BIO & K)
Fouriertransformer (för CL)
PDE. Fourierserier
Inlämningsuppgift 1 (i grupper om max 3)

CL har första salen på schemat.

Två-delad tentamen:

Del 1 är avseed för betyg E och består av 3 uppgifter.

Godkänd modul ger godkänd uppgift.
3 godkända moduler ger godkänt.
5 av 9 poäng ger godkänd KS.

Del 2 för högre betyg. 20 poäng.
8-9 KS-poäng ger bonuspoäng till del 2.

Exempel

Befolkningsmängden är P(t).

Relativa tillväxthastigheten är $\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt}$

Modell 1:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = a > 0$$

$$P(t) = Ce^{at}$$

Växer konstant.
Överbefolkning!

Modell 2:

$$\frac{1}{P(t)} \cdot \frac{dP}{dt} = a - bP(t)$$

$$\frac{dP}{dt} = aP(t) - bP^2(t) = \{\text{Sätt}\} = 6P(t) - P^2(t)$$

Inget sker vid $P=0$ och $P=6$.

Stationära lösningar: $\frac{dP}{dt} = 0$

P=0, P=6

P > 6 ger minskning. Negativ derivata.
0 < P < 6 ger ökning. Positiv derivata.

Utvandring!

Modell 3:

$$\frac{dP}{dt}=aP(t)-bP^2(t)-h=\{\text{Sätt}\}=6P(t)-P^2(t)-8$$

h har storheten personer / tid.

$P > 6$ ger minskning. Negativ derivata.
$2 < P < 6$ ger ökning. Positiv derivata.
$P < 2$ ger minskning. Negativ derivata.

Första ordningens ODE:

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y)$$

• Separabla

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$$

• Linjära

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Separabla

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$$

1. $h(y) = 0$: y = konstant

2. $h(y) \neq 0$: $\frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}=g(x)$

Integrera med avseende på *x*.

Linjära

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Multiplicera med $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} \cdot P(x)y = e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right) = e^{\int P(x)dx} \cdot f(x)$$

Integrera med avseende på x.

Exempel

$$\frac{dx}{dt}=x^2-x \qquad \text{separabel}$$

1) Stationära lösningar:

$$\frac{dx}{dt}=0;\quad x=0,\quad x=1$$

2) $x \neq 0,\ x \neq 1$

$$\frac{1}{x^2-x}\cdot\frac{dx}{dt}=1$$

$$\int\frac{dx}{x^2-x}=?$$

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1} \quad (*)$$

Handpåläggning

$$A=\left(\frac{1}{x-1}\right)_{x=0}=-1$$

$$B=\left(\frac{1}{x}\right)_{x-1=0}=1$$

$$\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$$

Integration av (*) ger:

$$-\ln|x|+\ln|x-1|=t+\ln|C|$$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=t+\ln|C|$$

2010−(08)aug−30: dag 2, 2

Linjär:

$$xy'-2y=x^3,\ \ x>0$$

$$y'-\frac{2}{x}y=x^2 \quad (*)$$

$$P(x)=-\frac{2}{x}$$

$$\int P(x)\,dx=\int -\frac{2}{x}\,dx$$

$$\int P(x)\,dx=-2\ln x$$

$$e^{\int P(x)\,dx}=e^{-2\ln x}=\frac{1}{x^2} \quad (\dagger)$$

Multiplicera (*) med (†).

$$\frac{1}{x^2}y'-\frac{2}{x^3}y=1 \quad (\ddagger)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right)=1 \quad (\ddagger)$$

Kontrollera både (‡).

Integrera med avseende på *x*.

$$\frac{y}{x^2}=x+C$$

$$y=\underset{\substack{\uparrow\\ y_p}}{x^3}+\underset{\substack{\uparrow\\ y_h}}{Cx^2}$$

Substitutioner:

Homogena:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sätt z = y/x. y = xz, y' = xz' + z

xz' + z = f(z)

xz' = f(z) – z

Separabel!

Bernoullska:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y=f(x)y^{\alpha},\ \ 1\neq\alpha\neq2,\alpha\in\mathbb{R}$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=f(x)$$

Sätt $z=y^{1-\alpha},z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{z'}{1-\alpha}+P(x)z=f(x)$$

Linjärt!

Begynnelsevärdesproblem (BVP)

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y),\ \ y(x_0)=y_0$$

Exempel:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Rita up koordinatsystem och rita in lutning för (x; y) punkter då

- y = 0, x' = ±∞
- x = 0, y' = 0
- y = –x, y' = 1
- y = x, y = –1

Man ser att cirklar bildas.
Stämmer det?

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

Läraren är synsk!

$$\int \left(2y\frac{dy}{dx} + 2x\right)dx = \int \, dx$$

$$\int 2y\frac{dy}{dx}dx + \int 2x\,dx = \int \, dx$$

$$\int 2y\,dy + \int 2x\,dx = \int \, dx$$

$$y^2 + x^2 = C$$

Ja, det stämmer!

$$y^2 + x^2 = r^2$$

[z.c.2.1.17.]

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$$

Kritiska punkter: $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y = y(y-3) = 0$

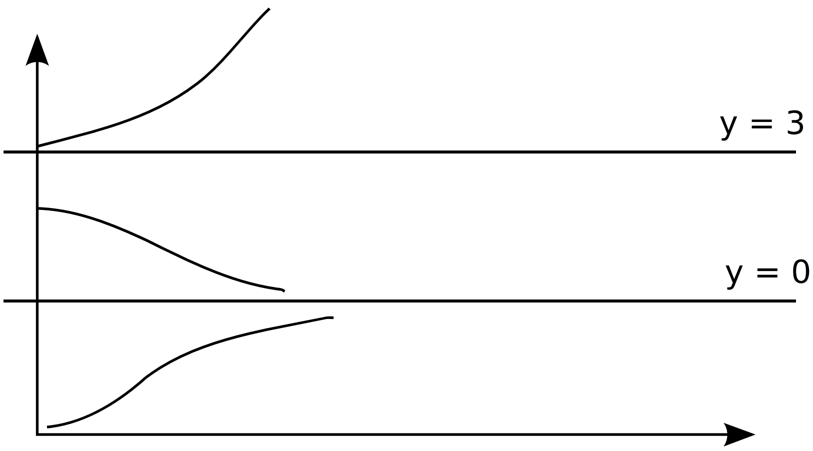
Kritiska punkter: y = 0 & y = 3

Fasporträtt (faslinje)

$$\longrightarrow \overset{}{\underset{0}{|}} \longleftarrow \underset{3}{|} \longrightarrow$$

+ – + :derivata

y = 0 är asymptotiskt stabil.
y = 3 är instabil.



Bernoullsk, separabel & autonom.

[z.c.2.5.6.]

$$(y^2+xy)dx+x^2dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}=0$$

Homogent högerled & bernoullsk!

Sätt $z = y/x$, $y = xz$, $y´ = xz´ + z$.

$xz´ + z + z^2 + z = 0$
$xz´ = z(z + 2)$

Separabel!

a)

$z = 0$, $z = –2$, $y = 0$, $y = –2x$

b)

$0 \neq z \neq 2$:

$$\frac{z'}{z(z+2)}=-\frac{1}{x}$$

Handpåläggning eller annan metod ger:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)z'=-\frac{1}{x}$$

$\int \ldots dx$ ger:

$\ln |z| - \ln |z + 2| = –2 \ln |x| + \ln |C|$

$$\ln\left|\frac{z}{z+2}\right|=\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|$$

$$\frac{z}{z+2}=\pm\frac{C}{x^2}=\frac{C}{x^2}$$

$$C=\frac{x^2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+2}=\frac{xy}{\frac{y}{x}+2}=\frac{x^2y}{y+2x}$$

$x^2y = C(y + 2x)$

$y = 0$ finns med

$y = -2x$ finns också med

[z.c.2.2.24.]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x^2-1}, \quad y(2)=2$$

Separabel!

Ansätt y = x:

V.L. = 1

H.L. = $\frac{x^2-1}{x^2-1}$ = 1

y(2) = 2

OK!

Enda lösningen.

2010–(08)aug–31: dag 3, 3

[z.c.1.1.21.]

Verifiera att:

$$P(t)=\frac{Ce^t}{1+Ce^t}$$

är en lösning till

$$P'(t)=P(1-P)$$

$$\frac{P'}{P(1-P)}=\Leftrightarrow\left\{\frac{A}{P}+\frac{B}{1-P}:\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}\right\}\Leftrightarrow P'\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{1-P}\right)=1$$

Integrera!

ln |P| – ln |1 – P| = t + C

$$\ln\left|\frac{P}{1-P}\right|=t+C$$

$$\frac{P}{1-P}=\{P>0\}=e^{t+C}\Rightarrow P=e^{t+C}-Pe^{t+C}$$

$P + Pe^{t+C} = e^{t+C}$

$P(1 + e^{t+C}) = e^{t+C}$

$$P=\frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}}=\{\text{nytt } C\}=\frac{Ce^t}{1+Ce^t}$$

$y' = y^2 + 4$

Konstanta lösningar?

Nej, ty derivatan är aldrig 0.

Lokal extrempunkter?

Nej, ty derivatan är aldrig 0.

Sant/Falskt?

BVP:

$3y^{2/3}, \ y(0)=0$

Har begynnelsevärdeproblemet en entydlig lösning?

$y(x) = 0$ ger $y'(x) = 3\cdot 0 = 0$

$\therefore$ En lösning

Sats:

$y'_x = f(x; y), \qquad (x; y) \in \mathbb{R}^2$

$y(x_0) = y_0$

om $f(x; y)$ och f'_y är kontinuerliga så har BVP:et ovan en entydlig lösning för $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$

$f(x; y)$ är oven $3y^{2/3}$, vilket är kontinuerligt.
$f'_y = 2y^{-1/3}$, vilket är icke-kontinuerligt.
Satsen kan inte användas.

Antag: $y \neq 0$

$\therefore$ $y' = 3y^{2/3}$

Separabel!

$$\frac{y'}{y^{2/3}} = 3 \Leftrightarrow y' \cdot y^{-2/3} = 3$$

Integrera!

$$3y^{1/3} = 3x + C$$

$$y^{1/3}=\frac{3x+C}{3}$$

$$y^{1/3}=x+C$$

$$y=(x+C)^3$$

$y(0) = 0$ ger:

$$0=(0+C)^3=C^3=C \quad \Leftrightarrow \quad C=0$$

$y = x^3$

En andra lösning, alltså falskt.

Entydlig lösning

$\because$

$$y'_x=f(x;y) \text{ där } f'_y \text{ är kontinuerlig.}$$

Exempel:

Klassificera med avseende på stabilitet dem kritiska punkterna till

$$y' = y(2 - y)(4 - y)$$

Bestäm dem värden där

$$\left|\lim_{x\to\infty} y(x)\right|<\infty$$

Lösning:

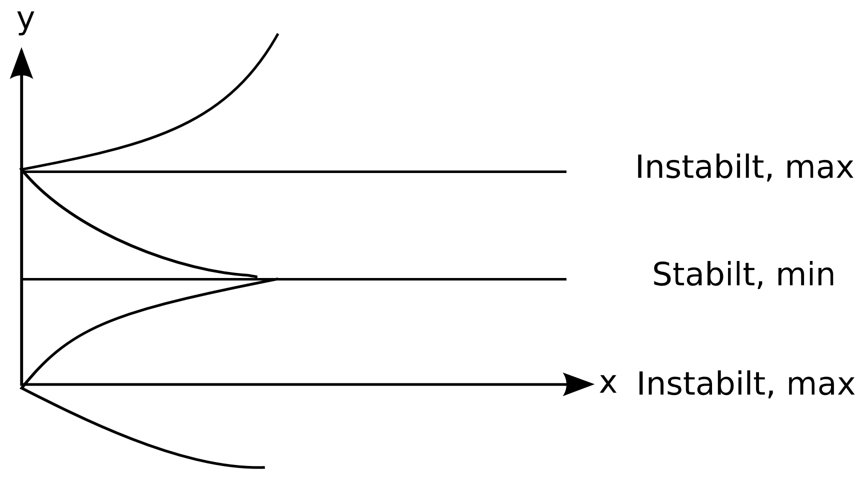
Kritiska punkter till $y' = f(y)$ är punkter C där $f(C) = 0$.

$y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$

Om C är en kritisk punkt så är $y(x) = C$ en konstant lösning.

		0		2		4	
y	−	0	+	+	+	+	+
2 – y	+	+	+	0	−	−	−
5 – y	+	+	+	+	+	0	−
resultat	−	0	+	0	−	0	+

Ger:



De startvärden som uppfyller

$$\left|\lim_{x\to\infty} y(x)\right| < \infty$$

ges av *0 ≤ y ≤ 4*.

Exempel:

Antalet kaniner P(t) beskrivs med BVP:

$$P_t' = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5000$$

a) Vad är $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

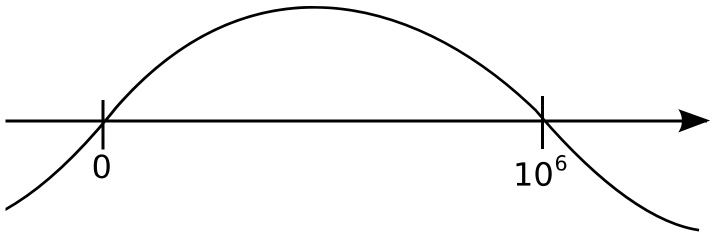
b) Ange t så att $P(t) = \frac{1}{2}\lim_{T\to\infty} P(T)$.

a) Lösning:

Kritiska punkter?

$P_t' = 0$ ges av:

$P(10^{-1} - 10^{-7}P) = 0$
$10^{-1} - 10^{-7}P = 0$
$10^{-1} = 10^{-7}P$
$P = 10^{6}$

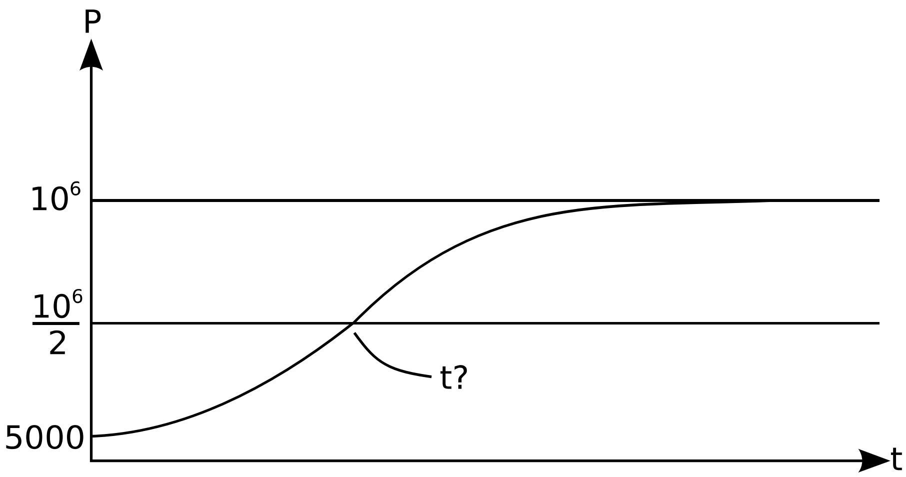


$y = 10^{-7}P(10^6 - P)$

Tolkning:

0 kaniner stannar på 0.
3 kaniner ger 10^6
$0 < y < 10^6$
Över 106 minskar
Om startmängden är 5000 så är svart på a) 10^6.

b)



$$P'_t = 10^{-7} \cdot P \cdot (10^6 - P)$$

Separabel!

$$\frac{P'_t}{P(10^6 - P)} = 10^{-7}$$

$$P'_t\left(\frac{A}{P} + \frac{B}{10^6 - P}\right) = 10^{-7} \iff \begin{cases} A = 10^{-6} \\ B = 10^{-6} \end{cases} \iff P'_t\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{10^6 - P}\right) = 10^{-1}$$

Integrera!

$\ln|P| = \ln|10^6 - P| = 10^{-1}t + C$

$$\frac{P}{10^6-P}=e^{10^{-1}t+C}$$

$$\frac{5000}{10^6-5000}=e^{0+C}=e^C\triangleq D$$

$$\frac{P}{10^6-P}=\frac{5000}{10^6-5000}e^{10^{-1}t}$$

$P = 5\cdot 10^5$ ger:

$$\frac{10^5\cdot 5}{10^6-10^5\cdot 5}=\frac{5000}{10^6-5000}e^{10^{-1}t}$$

$$1=\frac{5000}{10^6-5000}e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{10^6-5000}{5000}=e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{10^6}{5000}-1=e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{1000}{5}-1=200-1=199 = e^{10^{-1}t}=\left(e^t\right)^{\left(10^{-1}\right)}$$

$$199^{10}=e^t$$

$$\ln 199^{10}=t$$

$$t=10\ln 199$$

2010–(09)sep–01: dag 4, 4

[z.c.2.2.24.]

$$\frac{dy}{dx}, \ \ y(2)=2$$

$$f(x;\ y)=\frac{y^2-1}{x^2-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x^2-1}$$

x får inte vara ±1.

r kan skapas.

[z.c.3.1.4.]

Antalet bakterier, vid tiden *t*, = *N(t)*.

$$\frac{dN}{dt}=kN(t), \ \ k>0$$

$N(t) \neq 0$

$$\frac{1}{N(t)}\cdot\frac{dN}{dt}=k$$

Integrera med avseende på *t*.

$\ln |N(t)| = kt + \ln |C|$

$|N(t)| = e^{kt} \cdot C$
$N(t) = \pm Ce^{kt} = Ce^{kt}$

$N(3) = 400 \quad \Leftrightarrow \quad Ce^{3k} = 400$
$N(10) = 2000 \quad \Leftrightarrow \quad Ce^{10k} = 2000$

$$\frac{2000}{400}=5=\frac{Ce^{10k}}{Ce^{3k}}=e^{7k}$$

$$k = \frac{1}{7} \ln 5$$

$$400 = Ce^{\frac{1}{7}\ln 5}$$

$$C = 400\,e^{-\frac{1}{7}\ln 5} = 400 \cdot 5^{-\frac{3}{7}}$$

$$N(t) = 400 \cdot 5^{-\frac{3}{7}} \cdot e^{t\frac{1}{7}\ln 5} = 400 \cdot 5^{\frac{t-3}{7}}$$

$$N(0) = 400 \cdot 5^{-\frac{3}{7}} \approx 201$$

[z.c.3.1.21.]

4 ℓ/min   200 ℓ
1 g/ℓ   30 g   4 ℓ/min
———→   ---------------   ———→
               En tank

Salt i tanken: A(t)

$$\frac{dA}{dt} = 1 \cdot 4 - 4 \cdot \frac{A(t)}{200}$$

$$\frac{dA}{dt} + \frac{1}{50} A(t) = 4$$

$A_h = Ce^{-t/50}$
$A_p = 200$

$A(t) = Ce^{-t/50} + 200$

$A(0) = 30$
$30 = C + 200$
$C = –120$

$A(t) = 200 – 170e^{-t/50}$

För stora t: $A(5) \approx 200$

Rimligt!

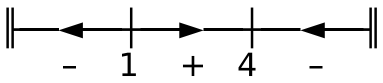
[z.c.3.2.5.]

$$\frac{dP}{dt} = P(a - bP) - h, \quad P(0) = P_0$$

Sätt a = 5, b = 1, h = 4.

$$\frac{dP}{dt} = P(5-P) - 4 = 5P - P^2 - 4 = (P-1)(4-P)$$

Stationära lösningar: P = 1 och P = 4



Lösningar för 1 ≠ P ≠ 4.

Separabel

$$\frac{1}{(P-1)(4-P)} \cdot \frac{dP}{dt} = 1$$

Med handpåläggning

$$\left(\frac{1/3}{P-1} + \frac{1/3}{4-P}\right)\frac{dP}{dt} = 1$$

ln |P – 1| – ln |4 – P| = 3t + ln |C|

$$\ln\left|\frac{P-1}{4-P}\right| = 3t + \ln|C|$$

$$\left|\frac{P-1}{4-P}\right| = |C|e^{3t}$$

$$\frac{P-1}{4-P} = Ce^{3t}$$

Bestäm C

$$P(0) = P_0 \Rightarrow C = \frac{P_0 - 1}{4 - P_0}$$

$P - 1 = 4 \cdot Ce^{3t} - Pe^{3t}$

$$P(t) = \frac{1 + 4 \cdot Ce^{3t}}{1 + Ce^{3t}}$$

Populationen borta ($P = 0$)

$$\frac{0-1}{4-0} = Ce^{3t_0}$$

$$e^{3t_0} = -\frac{1}{4C}$$

$$t_0 = \frac{1}{3} \ln \frac{-1}{4C} = \frac{1}{3} \ln \frac{4 - P_0}{4(1 - P_0)}$$

2010−(09)sep−03: dag 5, 5

Linjär av första ordningen:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \quad (*)$$

Lös först den homogena differentialekvationen.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}+P(x)=0$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx+P(x)dx=0\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx+\int P(x)dx=\int 0\,dx$$

$$\int \frac{y'}{y}dx+\int P(x)dx=C_0$$

$$\ln|y|+C_1+\int P(x)dx=C_0$$

$$\ln|y|+\int P(x)dx=C$$

$$\ln|y|+\int P(x)dx=\ln|C|$$

$$|y|+e^{\int P(x)dx}=|C|$$

$$y=\pm Ce^{-\int P(x)dx}$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

— eller —

$$\ln|y|-\ln|C|=-\int P(x)dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int P(x)dx$$

$$\left|\frac{y}{C}\right|=\frac{y}{\pm C}=\frac{y}{C}=e^{-\int P(x)dx}$$

$$y=Ce^{-\int P(x)dx}$$

Variation av parametrar:

$y_1(x) \triangleq e^{-\int P(x)dx}$, $u(x)y_1(x) \triangleq y$

Insättning i (*) ger:

$$\frac{du}{dx}y_1+u\frac{dy_1}{dx}+Puy_1=f$$

$$\frac{du}{dx}y_1+0_{(\dagger)}=f$$

(†):

$$u\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy}{dx},\ \ Puy_1=Py$$

$$\frac{dy}{dx}+Py=0$$ (Den homogena differentialekvationen)

$$\frac{du}{dx}=\frac{f}{y_1}$$ (y_1 är exponentiell, alltså $\neq 0$)

$$u=C=\int \frac{f}{y_1}dx+D$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx+D\right)$$

Allmänna lösningen:

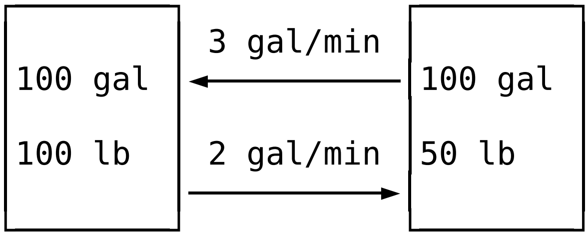
$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx+D\right)$$

$$y=De^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$y = \underset{\displaystyle y_h}{\uparrow} + \underset{\displaystyle y_p}{\uparrow}$$

1. Homogen lösning: y_1
2. Ansats: $y = u(x)y_1$
3. Insättning och hyfsning.

[z.c.3.3.7.]



$$\frac{dx_1}{dt} = 3\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_2(t)}{100-t}\,\text{lb/gal} - 2\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_1(t)}{100+t}\,\text{lb/gal}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 2\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_1(t)}{100-t}\,\text{lb/gal} - 3\,\text{gal/min} \cdot \frac{x_2(t)}{100+t}\,\text{lb/gal}$$

$x_1(0) = 100, \qquad x_2(0) = 50$

$$\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = \frac{d}{dt}0 = 0$$

$x_1 + x_2 = \text{konstant} = x_1(0) + x_2(0) = 100 + 50 = 150$

Systemet är slutet.

Eliminera x_1: $\qquad x_1 = 150 - x_2$

$$\frac{dx_2}{dt} = -3\frac{x_2(t)}{100-t} + 2\frac{150 - x_2(t)}{100+t}$$

$$\frac{dx_2}{dt} + \left(\frac{3}{100-t} + \frac{2}{100+t}\right)x_2(t) = \frac{300}{100+t}$$

Resten av lösningen finns på Internet.

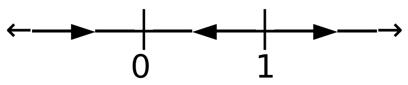
1. Klassificera med avseende på stabilitet/instabilitet dem stationära lösningarna till den automona differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = y(y-1)$.

Bestäm dem startvärden y_0 för vilka $\lim_{x \to \infty} y(x)$ är ändliga.

$$\frac{dy}{dx} = y(y-1)$$

Stationära lösningarna:

$$y(y-1)=0 \iff \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$



Stabilt vid 0, instabilt vid 1.

2. En tank innehåller 300 liter vatten i vilket 1800 gram salt har lösts. En annan saltlösning med koncentrationen 5 gram per liter pumpas in med hastigheten 2 liter per minut. Den välblandade lösningen pumpas ut med hastigheten 3 liter per minut. Ställ upp en differentialekvation som beskriver detta förlopp. Bestäm saltmängden som funktion av tiden.

$$\frac{dA(t)}{dt} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot \frac{A(t)}{300 - t(3-2)}$$

$$\frac{dA(t)}{dt} + \frac{3}{300 - t(3-2)} A(t) = 10$$

$$e^{\int \frac{3}{300-t} dt} = e^{-3 \ln(300-t)} = (300-t)^{-3} = \text{“Integrerande faktor”}$$

$$(300-t)^{-3} \frac{dA(t)}{dt} + 3(300-t)^{-4} A(t) = 10(300-t)^{-3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)(300-t)^{-3}\right) = 10(300-t)^{-3}$$

Med integration fås:

$$A(t)(300-t)^{-3} = 5(300-t)^{-2} + C$$

t = 0:

$$1800 \cdot 300^{-3} = 5 \cdot 300^{-2} + C$$

$$A(t)=5(300-t)+\frac{(300-t)^3}{300^2}$$

$\because$

$$1800\cdot 300^{-3}=5\cdot 300^{-2}+C$$

$$C=1800\cdot 300^{-3}-5\cdot 300^{-2}=6\cdot 300^{-2}-5\cdot 300^{-2}=$$

$$=\frac{6-5}{300^2}=\frac{1}{300^2}$$

3. Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = y(y - 1)$.
Dock behöver ej konstantlösningarna anges. Bestäm därefter den lösningen som uppfyller villkoret:

a) $y(0) = 2$
b) $y(0) = \frac{1}{2}$

Ange lösningens existensintervall och vad som händer då x växer.

[z.c.3.3.7.]

Bestäm den allmänna lösningen till

$y' + 3x^2y = x^2 \qquad (y = y(x))$

Lösning (linjär):

Multiplicera med integrerande faktorn.

$$e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx}e^{x^3} + 3x^2e^{x^3}y = x^2e^{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{x^3}\right) = x^2e^{x^3}$$

$$ye^{x^3} = \int x^2e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$$

$$y = \frac{1}{3} + \underbrace{Ce^{-x^3}}_{\text{transient term, } \to 0}$$

[uppgift 13 på modullappen]

En kaka tas ut ur ugnen.

105°C efter 10 minuter
65°C efter 30 minuter

Vid vilken tidpunkt är temperaturen 30°C?

Avsvalningshastigheten är propotionell mot temperaturens differential $T - T_0$, då T är kakan temperatur och $T_0 = 25°C$ är rumstemperaturen.

Lösning:

Låt $T(t)$ vara kakans temperatur vid tiden t.

T uppfyller relationen

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_0), \quad T_0 = 25$$

Vi löser ekvationen! (linjär)

$$\frac{dT}{dt} - kT = -kT_0$$

Multiplicera med den integrerande faktorn $e^{\int -k\,dt} = e^{-kt}$.

$$\frac{dT}{dt} \cdot e^{-kt} - ke^{-kt}T = -kT_0 e^{-kt} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(Te^{-kt}\right) = -kT_0 e^{-kt}$$

Integrera!

$$Te^{-kt} = \int \left(tkT_0 e^{-kt}\right) dt = T_0 e^{-kt} + C \Rightarrow T = T_0 + Ce^{kt}$$

$t \to \infty \Rightarrow T \to 0$
$\therefore k < 0$

Givet att:

$105 = T(10) = T_0 + Ce^{10k}$
$65 = T(30) = T_0 + Ce^{30k}$

$(T_0 = 25)$

$Ce^{10k} = 105 - 25 = 80$
$Ce^{30k} = 65 - 25 = 40$

$$\frac{Ce^{30k}}{Ce^{10k}}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}=e^{20k} \qquad \left(k=\frac{-\ln 2}{20}\right)$$

$$80=Ce^{10k}=C\sqrt{e^{30k}}=C\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$C=80\sqrt{2}$$

Alltså:

$$T(t)=25+80\sqrt{2}\,e^{\frac{-\ln 2}{20}t}$$

Vi får:

$$35=25+\sqrt{2}\,80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$10=\sqrt{2}\,80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}$$

$$1=8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}$$

$$2^{\frac{t}{20}-\frac{1}{2}}=8$$

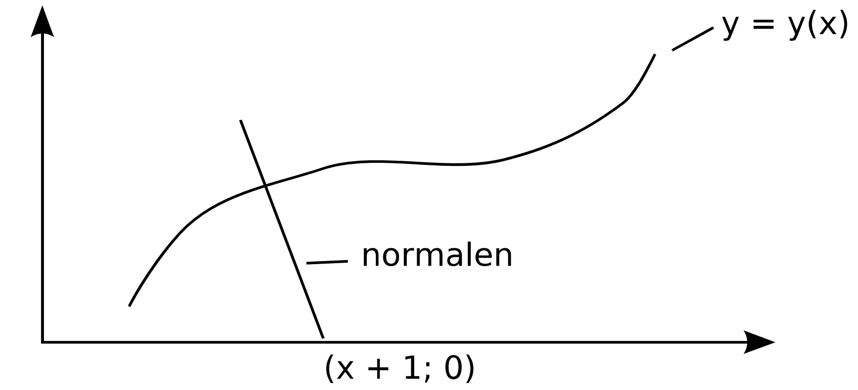
$$\frac{t}{20}-\frac{1}{2}=\mathrm{lb}\,8=3$$ (lb är samma sak som $\log_2$)

$$t-10=60$$

$$t=70$$

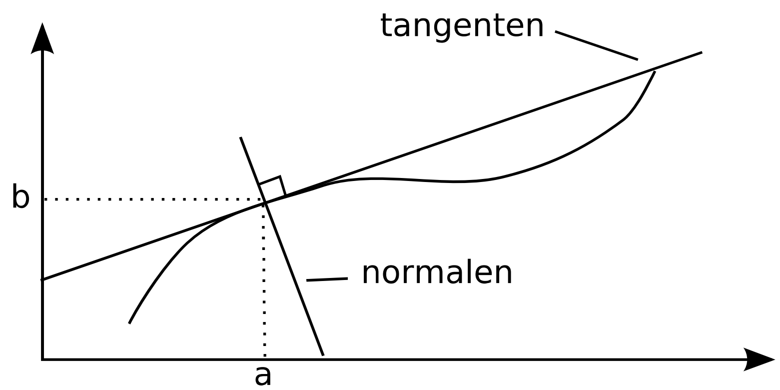
[uppgift 15 på modullappen]

Vilka kurvor $y = y(x)$ i planet har egenskapen att normalet till en godtycklig punkt $(x; y)$ på kurvan skär x-axeln i punkten $(x + 1; 0)$?



Lösning:

Hitta först en ekvation för normalen till kurvan $y = f(x)$ i punkten $(a; b)$.



Lutningen på tangenten multiplicerat med lutningen på normalen = –1.
Normalen har lutningen $-1/f'(a)$, så en ekvation för normalen är:

$$0=-\frac{1}{f'(x)}+y$$

det vill säga

$$y'=\frac{1}{y}$$

Separabel!

Vi löser ekvationen:

$$y' = \frac{1}{y} \quad \text{som vi skriver} \quad y\,dy = dx$$

Integrera!

$$\frac{y^2}{2} = x + C$$

$$y = \pm\sqrt{2x + 2C}$$

X > –C

Varje val av C ger en sådan kurva.

[uppgift 5 på modullappen]

Bestäm lösningen till

$$xy' + y + xy^2 = 0, \qquad y(1) = 1$$

Bestäm existensintervallet.

Lösning:

Vi skriver lösningen på formen:

$$y' + \frac{1}{y}y + y^2 = 0$$

Bernoullsk!:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^{\alpha}$$

Dividera med y^2

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = -1 \quad (*)$$

$$u \triangleq \frac{1}{y} = y^{1-2}$$

Då $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{y} y'$

(*) blir

$$-\frac{du}{dx} + \frac{1}{x} \cdot u = -1$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} \cdot u = 1 \qquad \text{Linjärt!}$$

Multiplicera med den integrerande faktorn

$$e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln|x|} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{du}{dx} - \frac{1}{x^2} \cdot u = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x} u\right) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} u = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln x + C \Leftrightarrow u = x(\ln x + C)$$

Gå tillbaka till y.

$$y = \frac{1}{u} = \frac{1}{x(\ln x + C)}$$

Begynnelsevillkor ger

$$1 = y(1) = \frac{1}{C} \Leftrightarrow C = 1$$

Alltså

$$y = \frac{1}{x(\ln x + 1)}$$

Lösningen existerar för x sådant att
$x > 0$ och $x (\ln x + 1) > 0$.

Vi måste ha $\ln x + 1 > 0$, det vill säga
$\ln x > -1$
$x > e^{-1}$

Alltså:

Existensintervallet är $]e^{-1}; \infty[$.

Endast en del i intervallet ska vara med.

2010−(09)sep−06: dag 6, 6

Bestäm allmänna lösningen till differentialekvationen y' = y(y – 1).
Dick begöver ej konstantlösningarna anges. Bestäm därefter den lösning som uppfyller villkoret

$$\begin{cases} y(0)=2 & \text{(a)} \\ y(0)=\tfrac{1}{2} & \text{(b)} \end{cases}$$

Ange lösningens existensintervall och vad som änder då x växer.

$$\frac{1}{y(y-1)}y'=1$$

$$\left(-\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}\right)y'=1$$

$-\ln|y| + \ln|y - 1| = x + \ln|C|$

$$\frac{y-1}{y}=Ce^x$$

$$1-\frac{1}{y}=Ce^x$$

$$y=\frac{1}{1-Ce^x}$$

(a):

y(0) = 2

C = ½, (antaget att x = 0)

$$y=\frac{2}{2-e^x}$$

$x \in]-\infty; \ln 2]$

(b):

y(0) = ½

C = –1, (antaget att x = 0)

$$y=\frac{1}{1+e^x}$$

$x \in \mathbb{R}$

Sammanfattning: dag 1-6, 1-6

Första ordningens ODE:

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y)$$

- Separabla: $\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$
- Linjära: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$

Separabla

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y)$$

1. h(y) = 0 : y = konstant
2. h(y) ≠ 0 : $\frac{1}{h(y)}\cdot\frac{dy}{dx}=g(x)$

Integrera med avseende på x.

Linjära

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$$

Multiplicera med $e^{\int P(x)dx}$

$$e^{\int P(x)dx}\cdot\frac{dy}{dx}+e^{\int P(x)dx}\cdot P(x)y=e^{\int P(x)dx}\cdot f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int P(x)dx}y\right)=e^{\int P(x)dx}\cdot f(x)$$

Integrera med avseende på x.

Substitutioner:

Homogena:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sätt z = y/x. y = xz, y' = xz' + z

xz' + z = f(z)

xz' = f(z) – z

Separabel!

Bernoullska:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y=f(x)y^{\alpha},\ \ 1\neq\alpha\neq 2,\alpha\in\mathbb{R}$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=f(x)$$

Sätt $z=y^{1-\alpha}, z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{z'}{1-\alpha}+P(x)z=f(x)$$

Linjärt!

Begynnelsevärdesproblem (BVP)

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y),\ \ y(x_0)=y_0$$

Exemple på derivatagraf:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Rita up koordinatsystem och rita in lutning för (x; y) punkter då

- y = 0, x' = ±∞
- x = 0, y' = 0
- y = –x, y' = 1
- y = x, y' = –1

Man ser att cirklar bildas.
Stämmer det?

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\int \left(2y\frac{dy}{dx} + 2x\right)dx = \int dx$$

$$\int 2y\frac{dy}{dx}dx + \int 2x\ dx = \int dx$$

$$\int 2y\ dy + \int 2x\ dx = \int dx$$

$$y^2 + x^2 = C$$

Ja, det stämmer!

$$y^2 + x^2 = r^2$$

Exempel på stabilitet

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$$

Kritiska punkter: $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y = y(y-3) = 0$

Kritiska punkter: y = 0 och y = 3

Fasporträtt (faslinje)

$$\longrightarrow\!\!\!\!\!\!-\!\!\!\!\!\!\underset{0}{|}\!\!\!\!\!\!\longleftarrow\!\!\!\!\!\!\underset{3}{|}\!\!\!\!\!\!\longrightarrow$$

+   –   +   :derivata

y = 0 är asymptotiskt stabil.
y = 3 är instabil.