2011-(04)apr-27: dag 24

KS 4 måndag V32, V34

Övning idag

1) Låt A: “Det är måndag”, B: “Det snöar”

Är några av följande logiskt ekvivalenta?

α. “Att minst en av ¬A och B gäller medgör att det inte är så att A om B.”
Det vill säga:

$$(\neg A \vee B) \to \neg(B \to A)$$

β. “Det är inte så att båda A och A omm ¬B.”
Det vill säga:

$$\neg(A \wedge (A \leftrightarrow \neg B))$$

γ. “Det är inte så att A omm B”
Det vill säga.

$$\neg(A \leftrightarrow B)$$

För att undersöka logisk ekvivalens ställer vi upp sanningsvärdestabell.

A	B	¬A ∨ B → ¬(B → A)					¬(A ∧ (A ↔ ¬B))				¬(A ↔ B)	
1	1	0	1	$\boxed{0}$	0	1	$\boxed{1}$	0	0	0	$\boxed{0}$	1
1	0	0	0	$\boxed{1}$	0	1	$\boxed{0}$	1	1	1	$\boxed{1}$	0
0	1	1	1	$\boxed{1}$	1	0	$\boxed{1}$	0	1	0	$\boxed{1}$	0
0	0	1	1	$\boxed{0}$	0	1	$\boxed{1}$	0	0	1	$\boxed{0}$	1
		①	②	③	②	①	④	③	②	①	②	①

Så $\underbrace{(\neg A \vee B) \to \neg(B \to A) \quad \equiv \quad \neg(A \wedge (A \leftrightarrow \neg B))}_{\text{Logiskt ekvivalenta, ty samma på alla rader}} \quad \not\equiv \quad \neg(A \leftrightarrow B)$

Har andra sanningsvärden på minst en rad.

Alltså: $\alpha \equiv \gamma$,
$\beta \not\equiv \alpha, \gamma$

Med boolesk algebra

(Minns att $a \to b = \bar{a} + b$

$$a \leftrightarrow b = (a \to b)(b \to a) = (\bar{a} + b)(\bar{b} + a) =$$

$$= \bar{a}\,\bar{b} + \underbrace{\bar{a}a}_{0} + \underbrace{b\bar{b}}_{0} + ba = ab + \bar{a}\,\bar{b})$$

$$\alpha = (\bar{a} + b) \to \overline{b \to a} = \overline{\bar{a} + b} + \overline{\bar{b} + a} = \bar{\bar{a}}\cdot\bar{b} + \bar{\bar{b}}\cdot\bar{a} = a\cdot\bar{b} + b\cdot\bar{a} = a\cdot\bar{b} + \bar{a}\cdot b$$

$$\beta = \overline{a(a \leftrightarrow b)} = \overline{a(a\bar{b} + \bar{a}\bar{\bar{b}})} = \overline{a(a\bar{b} + \bar{a}b)} = \bar{a} + \overline{a\bar{b} + \bar{a}b} = \bar{a} + \overline{a\bar{b}} \cdot \overline{\bar{a}b} =$$

$$= \bar{a} + (\bar{a} + \bar{\bar{b}})(\bar{\bar{a}} + \bar{b}) = \bar{a} + (\bar{a} + b)(a + \bar{b}) = \bar{a} + \bar{a}a + \bar{a}\bar{b} + ba + b\bar{b} =$$

$$= \bar{a} + \mathbf{0} + \bar{a}\bar{b} + ba + \mathbf{0} = \underbrace{\bar{a} + \bar{a}\bar{b}}_{\bar{a}} + ab = \bar{a} + ab = (\bar{a} + a)(\bar{a} + b) =$$

$$= \bar{a} + b = a \to b$$

$$\gamma = \overline{a \leftrightarrow b} = \overline{ab + \bar{a}\bar{b}} = \overline{ab} \cdot \overline{\bar{a}\bar{b}} = (\bar{a} + \bar{b})(a + b) = \bar{a}b + a\bar{b} = a\bar{b} + \bar{a}b$$

2) Visa med övriga boolesk algebralagar att
$p + pq = p$ och $p(p + q) = p$.

$p + pq = p\mathbf{1} + pq = p(\mathbf{1} \cdot q) = p\mathbf{1} = p$ (1)

$p(p + q) = (p + \mathbf{0})(p + q) = p + \mathbf{0}q = p + \mathbf{0} = p$ ∎

Alternativt:

$$p(p + q) = pp + pq = p + pq = \{(1)\} = p$$

4) Ge en minimal disjunktiv form för

a) $f(x, z) = xz + x\bar{z} + \bar{x}z$

Karnaughdiagram:

x \ z	0	1	
0	1	0	$\bar{x}$
1	1	1	x
	$\bar{z}$	z	

Så: $\boxed{\bar{z}} + x$

Alltså: $f(x, z) = x + \bar{z}$

b) $f(x, y, w) = \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}\bar{w} + \bar{y}w =$

$$= \left\{ \begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{w} \\ & & 0 & 1 \\ \hline & 0\,0 & . & . \\ xy & 0\,1 & 1 & 1 \\ & 1\,1 & . & . \\ & 1\,0 & . & . \end{array} \quad + \quad \begin{array}{cc} 1 & . \\ . & . \\ . & . \\ . & . \end{array} \quad + \quad \begin{array}{cc} . & 1 \\ . & . \\ . & . \\ . & 1 \end{array} \quad = \right.$$

$$= \left. \begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{w} \\ & & 0 & 1 \\ \hline & 0\,0 & 1 & 1 \\ xy & 0\,1 & 1 & 1 \\ & 1\,1 & 0 & 0 \\ & 1\,0 & 0 & 1 \end{array} \right\} = \boxed{\bar{x}} + \boxed{\bar{y}w}$$

Nu föreläsning

Fortsättning om grafer

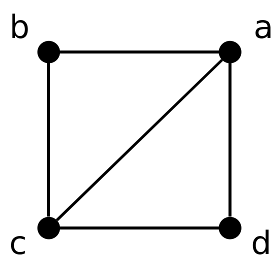
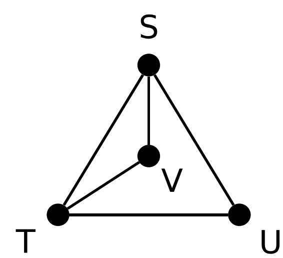
$G = (V, E)$ — E — Mängden av kanter (2-delmängder av V)
V — Mängden av hörn

Isomorgi mellan grafer ("struckturlikhet")

$G_1 = (V_1, E_1)$ är isomorgisk med
$G_2 = (V_2, E_2)$ betyder att det finns en bijektion $\phi : V_1 \to V_2$ så att

$$\{x, y\} \in E_1 \iff \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$$

Exempel:

G_1:  och G_2: 

är isomorfa med isomorfi $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ U & T & V & S \end{pmatrix}$.

Valensen (graden) för ett hörn $v \in V$:

$\delta(v)$ = antalet kanter fär v ingår, (öglor räknas dubbelt).

I exemplet:

$\delta(a) = 2 = \delta(U)$, $\delta(b) = 3$

En graf är n-reguljär om alla hörn har valens n.

Exempel: K_n är $(n-1)$-reguljär
C_n är 2-reguljär

Sats:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

Ty: Till varje hörn, v, “hör” $\frac{1}{2}\delta(v)$ kanter så $|E| = \sum_{v \in V} \frac{1}{2}\delta(v)$.

Följdsats:

Antalet udda hörn (det vill säga hörn med udda velens) är jämnt.

Exempel:

En 3-reguljär graf har ett jämnt antal hörn, |V| jämnt och |E| delbart med 3.

$$\left(\sum_{v \in V} \underbrace{\delta(v)}_{3} = 3|V| = 2|E| \right)$$

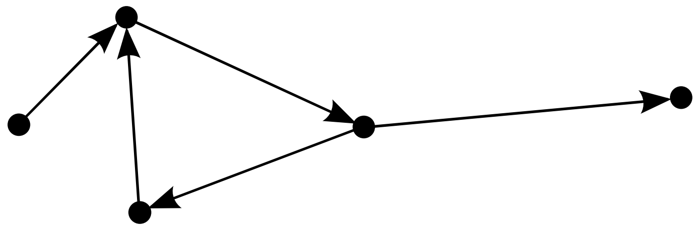
Exempel:

G är 5-reguljär och har 8 hörn, hur många kanter?

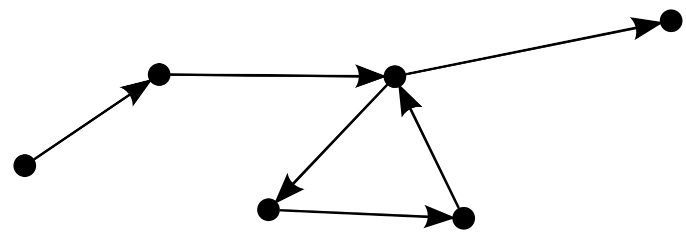
$$\sum_{v \in V} \underbrace{\delta(v)}_{5} = 5\underbrace{|V|}_{8} = 2|E| \quad \text{så} \quad |E| = 20$$

Namn för olika kantföljder i en graf:

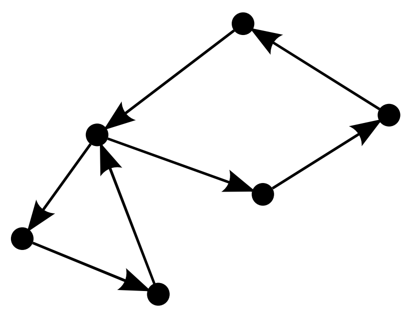
Vandring (en. walk) Från görn till grannhörn. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, $v_i \in V$.



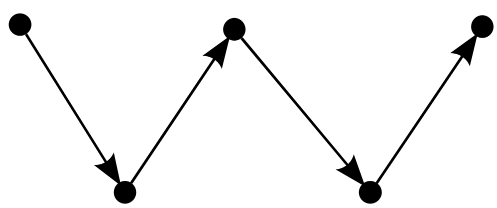
Väg (en. trail) Vandring utan upprepade kanter.



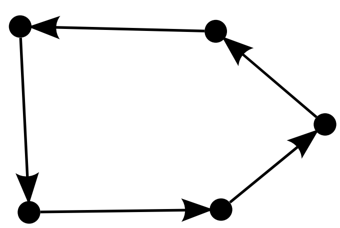
Krets (en. circuit) Sluten väg, $v_1 = v_k$



Stig (en. path) Väg utan upprepade hörn



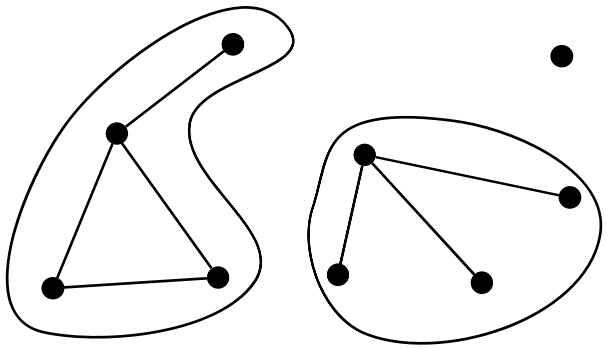
Cykel (en. cycle) Slutan stig



En graf är sammanhängande omm varje par hörn kan förbindas med en vandring, väg eller stig.

Relationen mellan hörn och att kunna förbindas är en ekvivalensrelation.
Ekvivalens klasser: grafens komponenter

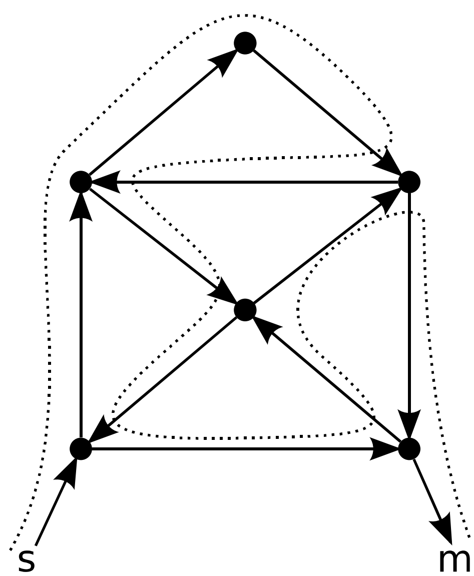
Exempel:



3 komponenter

En Eulerväg är en väg som passerar varje kant exakt en gång.

Exempel:



Har en Eulerväg men ingen Eulerkrets.

Sats: (Euler) En graf, G, har en Eulerväg omm G är sammanhängande och har högst 2 udda hörn.

G har en Eulerkres om dessutom alla hörn är jämna.

Varför:

Starta i ett udda hörn (om något finns) och vandra längs några kanter så länge det går. Stopp i ett udda hörn (eller där vi startade).