2010–(09)sep–20: dag 1, 14

Modul 3

Laplacetransformer (andra än CL)
Fouriertransformer (CL)

PDE och randvärdesproblem i rektangulära koordinater

Ortogonala funktioner och fourierserier

Partiella differentialekvationer och randvärdesproblem

12.1. Separabla PDE
12.2. Klassiska ekvationer och randvärdesproblem
12.3. Värmesledningsekvationer
12.4. Vågekvationer
12.5. Laplace ekvation

Variableseparation

$$u'_x = u + u'_y$$

Ansats: u(x; y) = X(x)Y(y)

X'(x)Y(y) = X(x)Y(y) + X(x)Y'(y)

Dividera med X(x)Y(y).

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1) Y(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda - 1)y} \end{cases}$$

$u_\lambda(x; y) = (AB)_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} = c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$

$$u(x; y) = \sum_{\forall \lambda} c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$$

Villkor:

$u(x; 0) = 5e^{-3x} - 4e^{x}$

$$u(x; 0) = 5e^{-3x} - 4e^{x} = \sum_{\forall \lambda} c_\lambda e^{\lambda x}$$

Identifiering ger:

$$\begin{cases} \lambda = -3; \quad c_{-3} = 5 \\ \lambda = 1; \quad c_1 = -4 \\ \text{Övriga} \ \ c_\lambda = 0 \end{cases}$$

$u(x; 0) = 5e^{-3x} - 4e^{x}$

Variableseparation

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ Vågekvationen.

Ansats: $u(x; t) = X(x)T(t)$

$a^2X''(x)T(t) = X(x)T''(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}$$

Ett system av okopplade ODE erhålls.

$X''(x) = \lambda X(x) = 0$
$T''(t) - \lambda a^2 T(t) = 0$

Linjära med konstant kefficienter

Tre olika fall: $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$

Motsvarande för "T-ekvationen" ges:

$T(t) = C_1 e^{a\mu t} + D_1 e^{-a\mu t}$

$\lambda = 0$:

$X''(x) = 0$

$X(x) = A_2 x + B_2$

$T(t) = C_2 t + D_2$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

$T(t) = C_3 \cos a\mu x + D_3 \sin a\mu x$

2010–(09)sep–22: dag 2, 15

Anteckningar från denna dag saknas...

2010–(09)sep–23: dag 3, 16

[Moduluppgift 2]

Bestäm dem kritiska punkterna till

$$\begin{cases} x' = x - y = P(x;y) \\ y' = 1 - x^2 = Q(x;y) \end{cases}$$

Avgör stabilitet och typ hos dessa.

1. Kritisk punkt: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1,\ x = -1$

a) $x = 1$
$y = x = 1$

(1; 1) är en kritisk punkt.

b) $x = -1$
$y = x = -1$

(–1; –1) är en kritisk punkt.

2a) Linjärisera i punkten (1; 1)

$$\mathbf{A_1} = \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}\right]_{(1;1)} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}\right]_{(1;1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A_1} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$

sadelpunkt (signum λ_1 = –signum $\lambda_2 \neq 0$)

2b) punkt (–1; –1)

$$\mathbf{A_2} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2x & 0 \end{pmatrix}\right]_{(-1;-1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A_2} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{7}$$

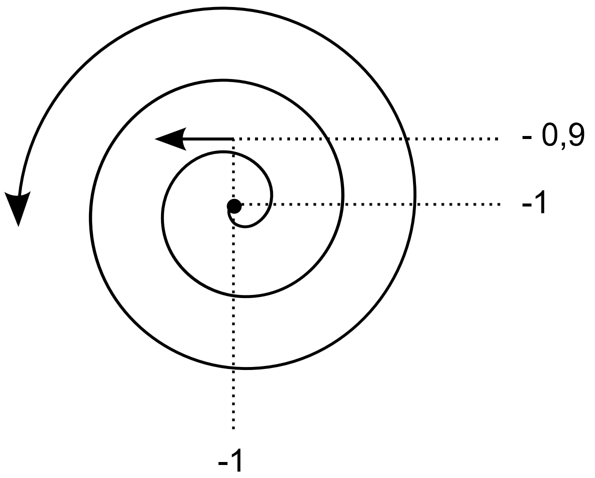
Instabil ∵ $\Re\lambda > 0$
Spiral ∵ $\Im\lambda \neq 0$

Åt vilket håll roterar spiralen?

Tag, till exempel, (–1; –0,9)

Riktningsvektorn i (–1; –0,9) är

$$\left[\begin{pmatrix} x-y \\ 1-x^2 \end{pmatrix}\right]_{(-1;\,-0,9)} = \begin{pmatrix} -1+0,9 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



[Moduluppgift 3]

Visa att {sin nx | n = $\mathbb{Z}_+$} utgör en mängd av ortogonala funktioner på intervallet [0; π].

Lösning:

Vi måste visa att $(\sin nx;\sin mx) = \int_0^\pi \sin nx \cdot \sin mx \, dx = 0$ för alla m ≠ n.

Kom ihåg: cos (α ± β) = cos α · cos β ∓ sin α · sin β
sin α · sin β = ½(cos (α – β) – cos (α + β))

$$\int_0^\pi \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m} - \frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_0^\pi = \frac{\sin((n-m)\pi)}{2(n-m)} - \frac{\sin((n+m)\pi)}{2(n+m)}$$

Skriv funktionen $\sin^3 x$ på intervallet $[0; \pi]$ som linjärkomination av ovan.

Se Beta sida 128:

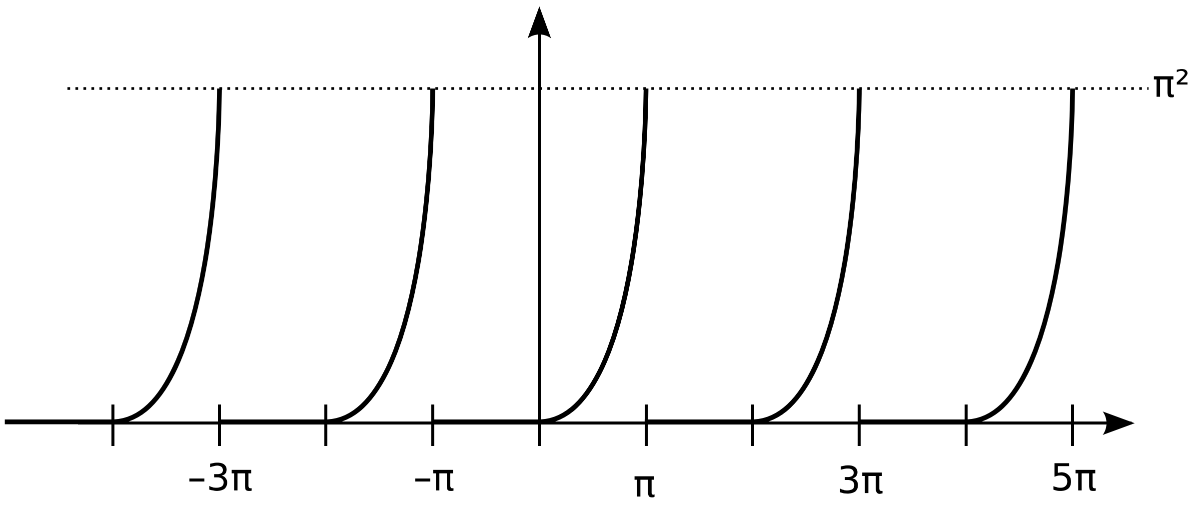
$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$$

Vi vet att funktionerna kan uttryckas som linjärkombination av linjärt oberoende vektorer bara på ett enda sätt.

Beräkna Fourierserien av

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftarrow \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & \Leftarrow \quad 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Periodisk utvidning:



$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$f \simeq \mathcal{F}(f)$ Om f är helt kontinuerlig så är $f = \mathcal{F}(f)$, annars så är $f \sim \mathcal{F}(f)$.

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{x^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} \, dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l|r} \text{Partial integration} & \\ u_1 = x^2 & v_1' = \cos nx \\ u_2 = x & v_2' = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin nx + \frac{2}{n^2} \left(x \cos x - \frac{1}{n} \sin nx \right) \right]_0^{\pi} = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{n^2} \cdot \pi \underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n} = \frac{2}{n^2} (-1)^n
\end{aligned}$$

Observera att det är blir skillad i a_n om $n = 0$, så för a_n så måste $n \neq 0$.

b_n — se facit

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \frac{2}{n^2} \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

$f(x) = \mathcal{F}(f)(x)$ för alla x där f är kontinuerlig.

I punkterna $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

Exempel: $\mathcal{F}(f)(x) = \dfrac{\pi^2 + 0}{2} = \dfrac{\pi^2}{2}$

Visa att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (En av Ramanujans formler)

$$\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2}{n^2} \cdot (-1)^n = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

3) Antag att $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i
a) Fourierserie
b) sinus-serie
c) cosinus-serie

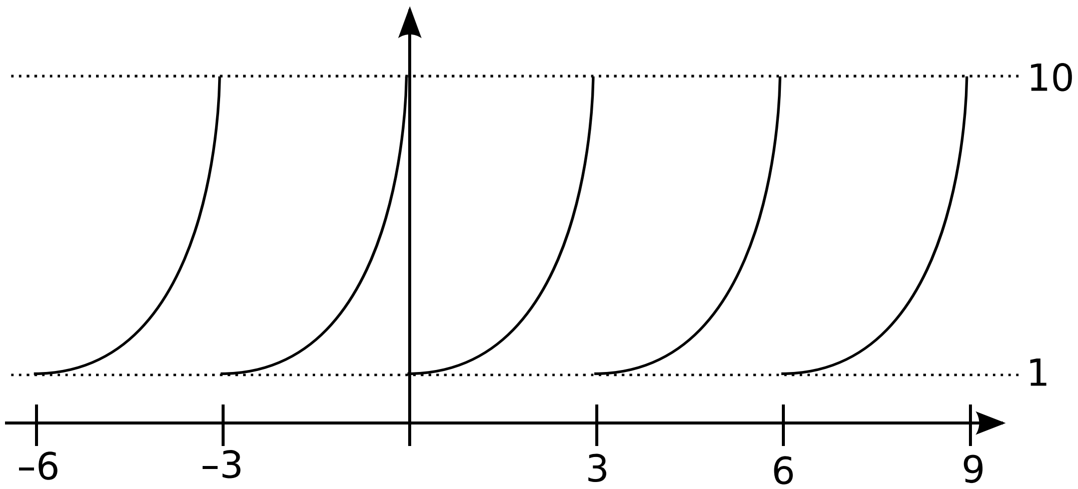
Ange det värde mot vilket respektive serie konvergerar för $x = 0$.

a) $\mathcal{F}$ konvergerar 5,5 se bild på nästa sida

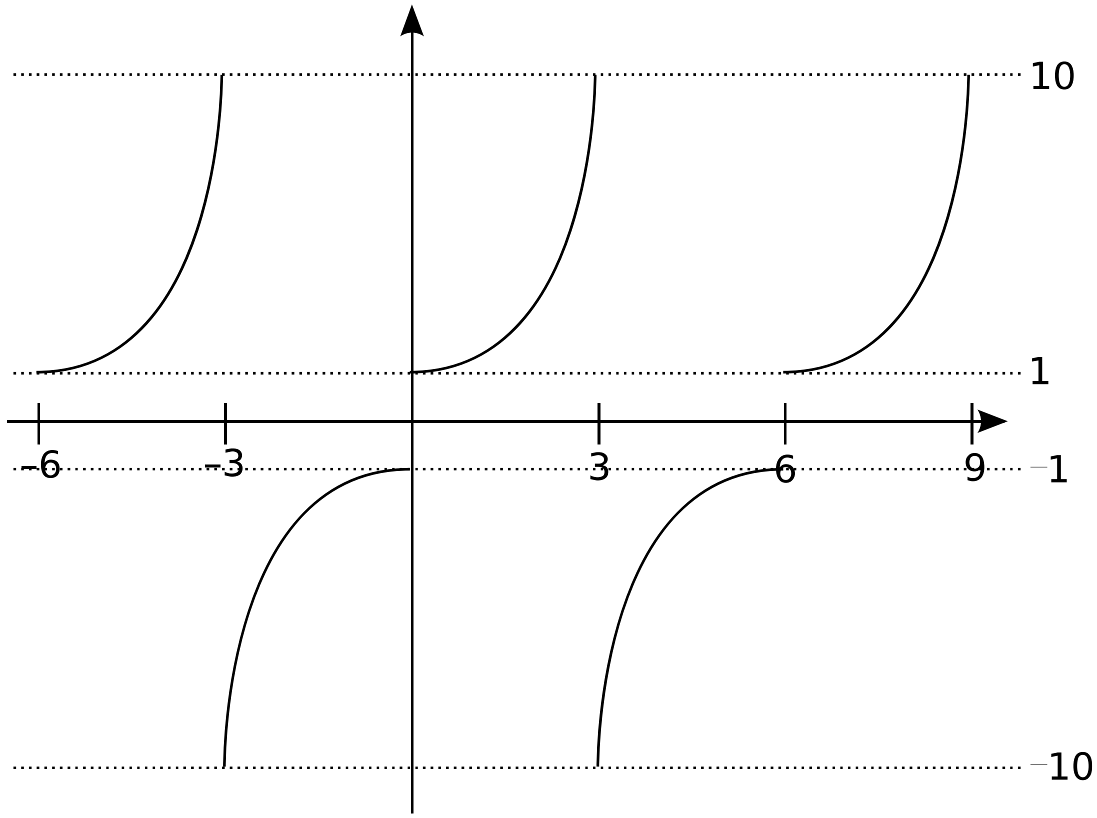
b) $\mathcal{F}_s$ konvergerar 0 se bild på nästa sida udda f

c) $\mathcal{F}_c$ konvergerar 1 se bild om två sidor jämna f

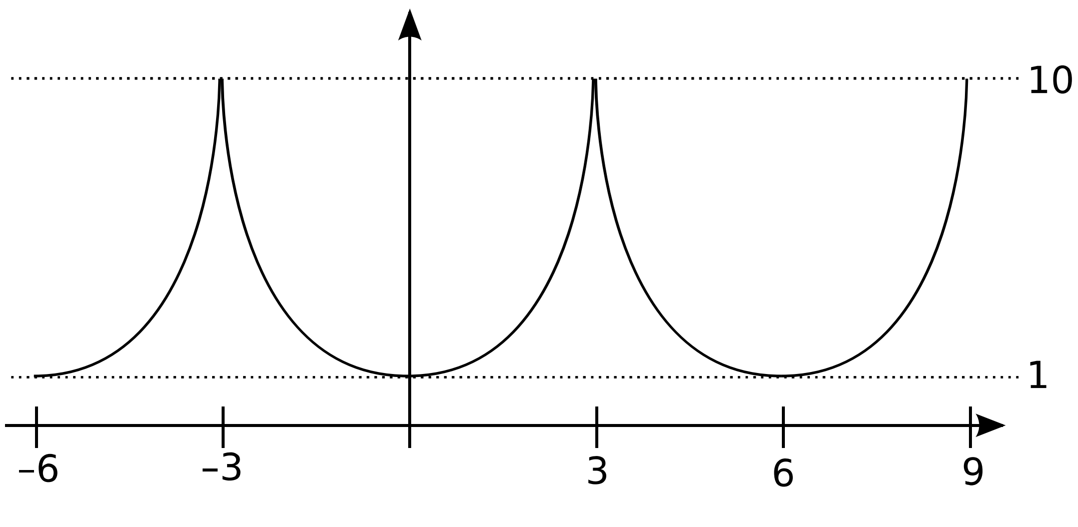
a)



b)



c)



2010–(09)sep–24: dag 4, 17

Funktionsmängden

$$\{1\} \cup \left(\coprod_{i=1}^{n} \cos \frac{i\pi x}{p}\right) \cup \left(\coprod_{i=1}^{n} \sin \frac{i\pi x}{p}\right)$$

är ortogonal på intervallet [–p; p] med den inre produkten

$$(f_1; f_2) = \int_{-p}^{p} f_1(x) \cdot f_2(x) dx$$

Fourierserien till en funktion ƒ definierad på intervallet]–p; p[ges av:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx \qquad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} \, dx$$

$$n \neq 0 \qquad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx$$

Fourierserien för en jämn funktion på intervallet]–p; p[:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x) \, dx \qquad a_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} \, dx$$

Fourierserien för en udda funktion på intervallet]–p; p[:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sin \frac{n\pi x}{p}\right) \qquad b_n = \frac{2}{p} \int_{0}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} \, dx$$

Konvergensvillkor:

Låt ƒ och ƒ' vara styckvis kontinuerliga på intervallet]–p; p[.

Då konvergerar ƒ:s Fourierserie mot $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$.

[z.c.11.2.7.]

ƒ(x) = x + π, –π < x < π

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)dx=\frac{1}{\pi}(0+\pi 2\pi)=2\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\cos nx\ dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[(x+\pi)\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{\frac{\sin nx}{n}}_{\text{udda}}dx=0,\qquad (n\neq 0)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+\pi)\sin nx\ dx=\frac{1}{\pi}\left(\left[(x+\pi)\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}(2\pi)\frac{-\cos nx}{n}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{2\pi}{\pi n}\cos nx+0=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f\sim\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

[z.c.12.4.1.]

$$u(x\,;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{an\pi t}{L}+b_n\sin\frac{an\pi t}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Det återstår nu att bestämma konstanterna a_n och b_n.

Begynnelsevillkoret ger oss:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x;\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{L}\left(b_n\cos\frac{an\pi t}{L}-a_n\sin\frac{an\pi t}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Fourierserien för en udda funktion på intervallet]–p; p[:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{p},\qquad b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$u(x\,;0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\underbrace{\frac{1}{4}x(L-x)}_{\text{Givet}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x;\,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{L}b_n\sin\frac{n\pi x}{L}=\{\text{Givet}\}=0\quad,\quad b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L\frac{1}{4}x(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx=\{\text{slut}\ldots\}$$

[z.c.12.3.3.]

Värmeledesekvation.

Find the temperature $u(x; t)$ in a rod of length L if the initial temperature is $f(x)$ throughout and if the ends $x = 0$ and $x = L$ are insulated.

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \qquad 0 < x < L, \quad t > 0$$

Randvillkor: $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}u(0;t)=0 \\ \frac{\partial}{\partial x}u(L;t)=0 \end{cases} , \quad t > 0$

Begynnelsevillkor: $u(x; 0) = f(x)$, $\quad 0 < x < L$

Separera variablerna: $u(x; t) = X(x)T(t)$

$kX''(x)T(t) = X(x)T'(t)$

Dividera med $kX(x)T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T'(t)}{kT(t)}=\text{“konstant”}=\lambda$$

$$\begin{cases} X''(x)-\lambda X(x)=0 \\ T'(t)-\lambda kT(t)=0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$

Lösningarna ges av

$X(x) = A_1e^{\mu x} + B_1e^{-\mu x}$

$\lambda = 0$:

$X''(x) = 0$

$X(x) = A_2x + B_2$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Substitutionen ger att randvilloren kan skrivas

$$0=\frac{\partial}{\partial x}u(0;t)=X'(0)T(t)$$

$$0=\frac{\partial}{\partial x}u(L;t)=X'(L)T(t)$$

Dessa samband skall stämma för alla t.

Detta innebär att: $0 = X'(0)$, $0 = X'(L)$.

$\lambda > 0$:

$X'(x) = \mu \cdot (A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$

$$\begin{cases} 0=X'(0)=\mu\cdot(A_1-B_1) \\ 0=X'(L)=\mu\cdot(A_1 e^{L\mu}-B_1 e^{-L\mu}) \end{cases}$$

$A_1 = B_1 = 0$

Endast den triviala lösningarna $\mu = 0$

$\lambda = 0$:

$X'(x) = A_2$

$$\begin{cases} 0=X'(0)=\mu\cdot(B_3) \\ 0=X'(L)=\mu\cdot(-A_3 \sin \mu L + B_3 \cos \mu L) \end{cases}$$

$X(x) = B_2$

$T(t) = C_2$

λ < 0:

$X'(x) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu x - B_3 \cos \mu x)$

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu \cdot (B_3) \\ 0 = X'(L) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu L + B_3 \cos \mu L) \end{cases}$$

$B_3 = 0$

$A_3 \sin \mu L = 0$

Icke-triviala lösningar erhålles då $\mu L = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$$X(x) = A_3 \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$T(t) = C_3 e^{\overbrace{-\left(\frac{n\pi x}{L}\right)^2}^{\lambda=-\mu^2} kt}$$

$$u(x;t) = B_2 C_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_3 C_3)_n \cos \frac{n\pi x}{L}\ e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}\ e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}$$

Begynnelsevillkoret ger:

$$f(x) = u(x;0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

2010–(09)sep–27: dag 5, 18

Fourierserien till en funktion, ƒ, definierad på intervallet]–p; p[ges av

$$f(x)\sim\mathcal{F}(f)(x)=\underbrace{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p}\right.}_{\mathcal{F}_c}+\underbrace{\left.b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\right)}_{\mathcal{F}_s}$$

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\,dx \qquad a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx$$

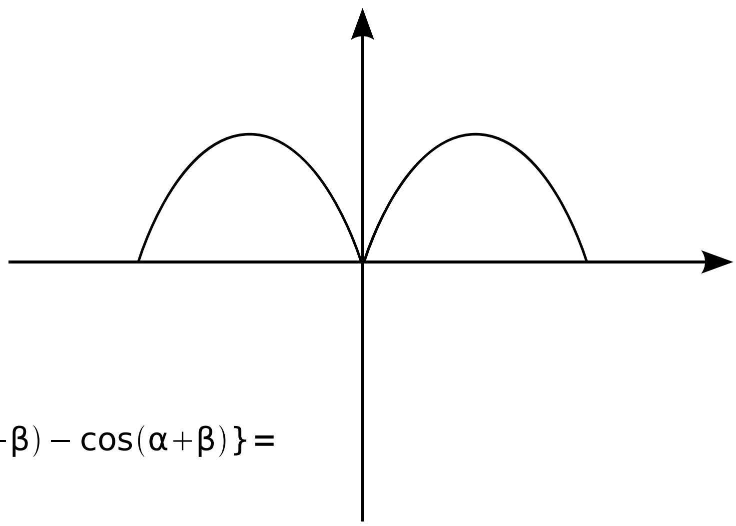
Omm intervallet är helt slutet och kontinuerligt ersätts ~ med =, generellt sätt skrivs förhållandet ≃.

[z.c.11.3.28.]

ƒ(x) = sin x, 0 < x < π

a) Jämn utvidning:

Fourierserien är på formen $\mathcal{F}_c$



$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=$$

$$=\{2\sin\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(nx+x)-\sin(nx-x)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nx+x)}{n+1}+\frac{\cos(nx-x)}{n-1}\right]_0^{\pi}= \qquad n\neq 1$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(\overbrace{n\pi+\pi}^{\varphi})}{n-1}-\frac{1-\cos(\overbrace{n\pi-\pi}^{\theta})}{n-1}\right)=\{\varphi-\theta=2\pi\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}-\frac{1-(-1)^{n+1}}{n-1}\right)=$$

$$=\frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=-2\frac{1+(-1)^{n}}{\pi(n^{2}-1)}$$

n = 1:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\ \cos x\ dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\ dx=\frac{1}{\pi}\cdot 0=0$$

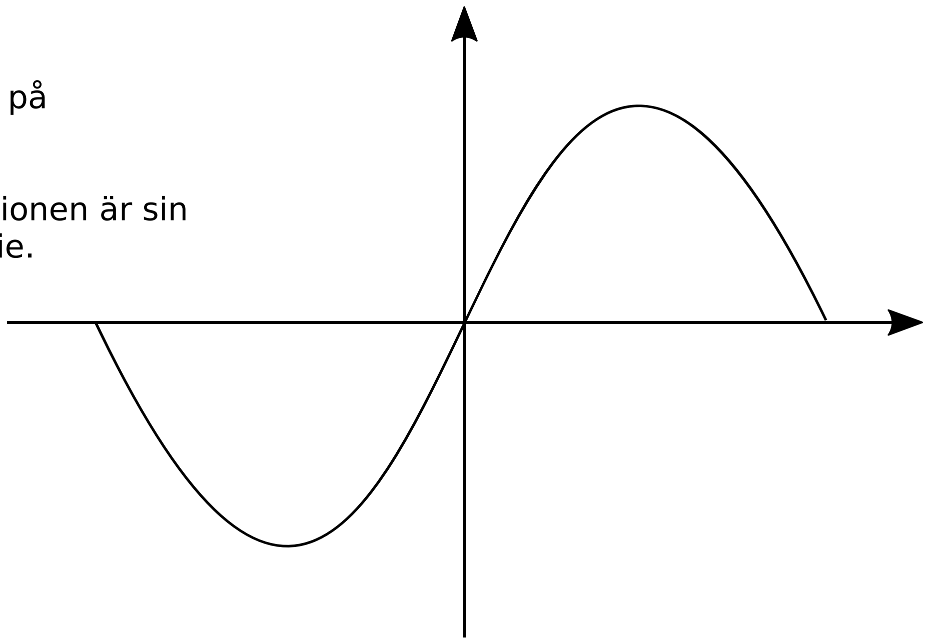
$$a_0=-2\frac{1+(-1)^{0}}{\pi(0^{2}-1)}=-2\frac{1+1}{\pi(0-1)}=2\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

$$f\sim\frac{2}{\pi}+0+\sum_{n=2}^{\infty}2\frac{1+(-1)^{n}}{\pi(n^{2}-1)}\cos nx=\frac{2}{\pi}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(4n^{2}-1)}\cos 2mx$$

b) Udda utvidning:

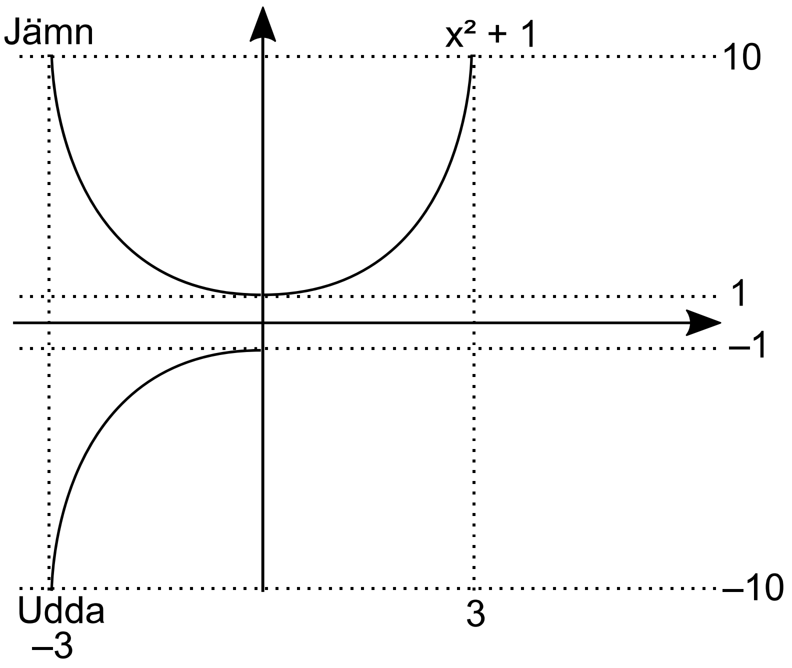
Fourierserien är på formen $\mathcal{F}_s$

Den givna funktionen är sin egen Fourierserie.



[Exempel 2]

Antag att funktionen $f(x) = x^2 + 1$, $0 < x < 3$ är utvecklad i en cosinusserie ($\mathcal{F}_c$) och i en sinusserie ($\mathcal{F}_s$). Bestäm värdet som respektive serie konvergerar mot för $x = 0$.



Konvergensvillkor:

Låt f och f' vara stycklis kontinuerliga på intervallet $]-p; p[$.
Då konvergerar f:s Fourierserie mot

$$\frac{f(x^+)-f(x^-)}{2} \quad .$$

$\mathcal{F}_c(f)$ konvergerar mot 1.
$\mathcal{F}_s(f)$ konvergerar mot 0.

[z.x.12.5.12.]

Laplace' /la'plas/ ekvation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad 0 < x < \pi$$

$$\text{Randvillkor:} \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0;\, y)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi;\, y)=0 \\ u(x;\, 0)=f(x) \\ u(x;\, y) \text{ begränsad då } y \to \infty \end{cases}$$

Separera variablerna: $u(x; u) = X(x)Y(y)$.

$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$

Lösningarna ges av $X(x) = A_1 e^{\mu x} + B_1 e^{-\mu x}$

$\lambda = 0$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

$X(x) = A_2 x + B_2$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$

$X(x) = A_3 \cos \mu x + B_3 \sin \mu x$

Substitutionen ger att randvillkoren kan skrivas:

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0; y) = X'(0)Y(y) \\ 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi; y) = X'(\pi)Y(y) \end{cases}$$

Dessa samband skall gälla för alla y.
Detta innebär att $0 = X'(0)$ och $0 = X'(\pi)$.

$\lambda > 0$:

$X'(x) = \mu \cdot (A_1 e^{\mu x} - B_1 e^{-\mu x})$

$0 = X'(0) = \mu \cdot (A_1 - B_1)$

$0 = X'(\pi) = \mu \cdot (A_1 e^{\mu\pi} - B_1 e^{-\mu\pi})$

$A_1 = B_1 = 0$

Endast den triviala lösningen: $u = 0$

$\lambda = 0$:

$X'(x) = A_2$

$0 = X'(0) = A_2$

$0 = X'(\pi) = A_2$

$X(x) = A_2$

$Y(y) = C_2 y + D_2$

$u(x; y)$ begränsad då $y \to \infty \Rightarrow C_2 = 0$

$\lambda < 0$:

$X'(x) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu x + B_3 \cos \mu x)$

$$\begin{cases} 0 = X'(0) = \mu \cdot (B_3) \\ 0 = X'(\pi) = \mu \cdot (-A_3 \sin \mu\pi + B_3 \cos \mu\pi) \end{cases}$$

$B_3 = 0$

$A_3 \sin \mu\pi = 0$

Icke-triviala lösningar erhålles då $\mu \in \mathbb{Z}$.

$X(x) = A_3 \cos n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

$Y(y) = C_3 e^{ny} + D_3 e^{-ny}$

$u(x; y)$ är begränsad då $y \to \infty \therefore C_3 = 0,\ Y(y) = D_3 e^{-ny}$

$$u(x; y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\ e^{-ny}$$

$$f(x) = u(x; 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

2010–(09)sep–29: dag 6, 19

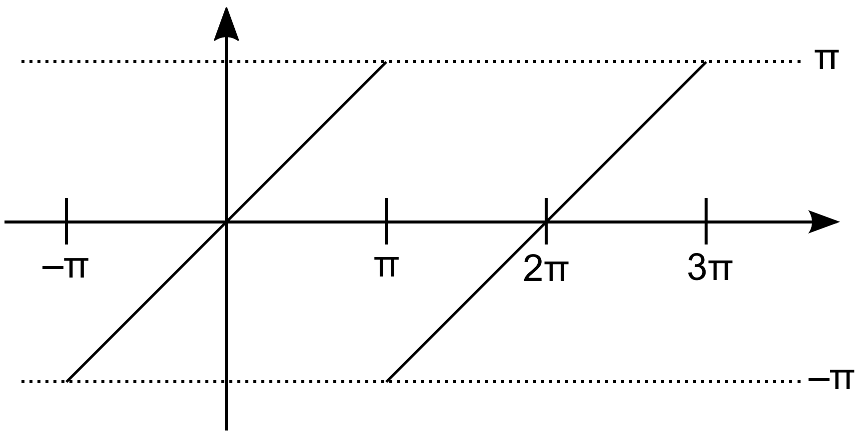
[Moduluppgift 7]

Bestäm den allmäna lösningen till

$$y'' + 5y = f(x), \quad \text{där } f(x) = x$$

för $-\pi \le x < \pi$

$f(x)$ och 2π-periodisk



$y = y_h + y_p$

1) Lös den homogena ekvationen

$$y_h = A\cos\sqrt{5}x + B\sin\sqrt{5}x \qquad (*)$$

A och B är konstanter.

(*) ∵ Karaktäristisk ekvation:

$$r^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{-5} = \pm i\sqrt{5}$$

2) f är udda

Utveckla f i $\mathcal{F}_s$ (sinusserie)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \sin nx \, dx = \left\{ \begin{array}{c|c} f = x & f' = 1 \\ g' = \sin nx & g = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right\} =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} fg'\,dx=\frac{2}{\pi}\left(\left[\,fg\,\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'g\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\cos n\pi+\frac{1}{n^2}\underbrace{\sin n\pi}_{0}=-\frac{2}{n}\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}=$$

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

Antag att y_p är udda.
Då utvecklas y_p i $\mathcal{F}_s$:

$$y_p(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin nx$$

Inte alltid sant!

Vi ska bestämma B_n.

Sätt in ansatsen för y_p i ekvationen.

$$y_p'=\sum_{n=1}^{\infty} nB_n\cos nx \qquad y_p''=-\sum_{n=1}^{\infty} n^2B_n\sin nx$$

$$\left\{\begin{array}{l|l}\overbrace{-\sum_{n-1}^{\infty} n^2B_n\sin nx+5\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx}^{\alpha}= & \\ =\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx}_{\beta} & \alpha-\beta=0\end{array}\right\}$$

Identifiera koefficienter för sin nx

$$B_n(-n^2+5)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

$$B_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n(5-n^2)}$$

$$y_p=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\underbrace{(5-n^2)}_{\neq 0}}(-1)^{n+1}\sin nx$$

{sin nx | n ∈ $\mathbb{Z}_+$} är ett ortogonalt system

∴ alla sin nx där n ∈ $\mathbb{Z}$ (egentligen n ∈ $\mathbb{R}$) är linjärt oberoende.

[Moduluppgift 13]

Bestäm lösningen till den partiella differential ekvationen (PDE):

$$u_x^{'}=u_y^{'}+u$$

som uppfyller u(x; 0) = $3e^{-5x} + 2e^{-3x}$.

Det är svårt att hitta alla lösningar till en PDE, därför söker vi bara en lösning.

Lösning: Söker u(x; y) = X(x)Y(y).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)Y(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=X(x)Y'(y)$$

Sätt in u i ekvationen

$$\underbrace{X'Y=XY'+XY}_{\text{ekvationen}}=X\cdot(Y'+Y)$$

$$\left(\frac{X'}{X}\right)(x)=\left(\frac{Y'}{Y}+1\right)(y)$$ (Jo, läraren skrev med den nomenklaturen.)

VL beror inte på y,
HL beror inte på x.

Då måste HL och VL vara en konstant, λ.

Ekvationen är ekvivalent med en serie av system för olika λ.

$$\begin{cases} X_\lambda = C_{1,\lambda} e^{\lambda x} \\ Y_\lambda' = Y_\lambda \cdot (\lambda - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_\lambda = C_{1,\lambda} e^{\lambda x} \\ Y_\lambda = C_{2,\lambda} e^{(\lambda - 1)y} \end{cases}$$

$u_\lambda(x; y) = X_\lambda(x) + Y_\lambda(y) = (C_{1,\lambda} C_{2,\lambda})\, e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} = C_\lambda\, e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$

Dessutom om u_1 och u_2 är lösningar till urekvationen $\left(u_x' = u_y' + u\right)$ så är

$c_1 u_1 + c_2 u_2$

en lösning till urekvationen.

(Verifiera!)

Lös BVP:en $u(x; 0) = 3e^{-5x} + 2e^{-3x}$

Vi vet att urekvationen har lösningar

$u(x; y) = D_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} + D_\mu e^{\mu x + (\mu - 1)y}$

Välj D_λ, D_μ, λ och μ så att u(x; y) är som ovan ($3e^{-5x} + 2e^{-3x}$).

Väljer $D_\lambda = 3$, $D_\mu = 2$, $\lambda = -5$, $\mu = -3$.

[Moduluppgift 8]

Den vertikala förflyttningen u(x; t) för en oändligt lång sträng beskrivs av:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

(vågekvationen)

a) Transformera ekvationen med hjälp av substitutionen

$z = x + at$
$v = x - at$

Vi tänker att $u(x; t) = \tilde{u}(z(x; t); v(x; t))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}}_{a}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}}_{-a} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}a-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)=$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} =$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\underbrace{\partial v\partial z}_{\partial z\partial v}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\right)}_{\text{på analogt sätt}}$$

Ekvationen $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (*) skrivs om.

b) Lös ekvationen $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\partial z} = 0$

$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)=0$ $\qquad$ $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}$ beror inte på v.

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}=P(z)$ P är någon funktion.

$$\tilde{u}(z;\ v)=\underbrace{\int P(z)dz}_{\triangleq F(z)}+G(v)$$

Vi fick att lösningarna till (*) är:

$$\tilde{u}(z;v)=F(z)+G(v)$$

där F och G är godtyckliga funktioner.

2010−(09)sep−30: dag 7, 20

[z.c.12.3.3.]

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad , \qquad 0 < x < L, \quad t > 0.$$

Randvillkor: $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}(0;t)=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L;t)=0\end{cases}$ $\qquad t > 0$

Begynnelsevillkor: $u(x; 0) = f(x)$, $\quad 0 < x < L$

$$a_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

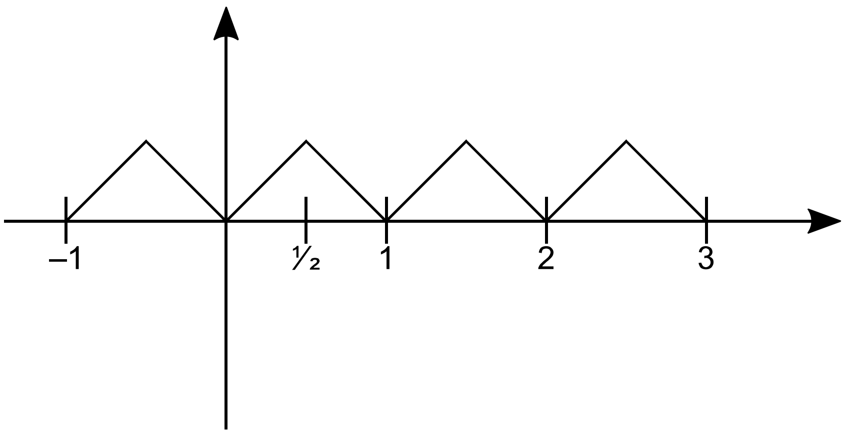
$$u(x;t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}\, e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}$$

[z.c.11.3.42.]

$$m\ddot{x}+kx=f(t)=\begin{cases} t & 0<t<\frac{1}{2} \\ 1-1 & \frac{1}{2}\le t<1\end{cases}$$

$f(t + 1) = f(t)$

$$m=\frac{1}{4}, \quad k=12, \quad \ddot{x}+48x=4f(t)$$



Jämn

Fourierutveckla 4ƒ.

$$4f(x) \sim \mathfrak{F}(4f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{1/2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi t$$

$$a_n = \frac{2}{1/2} \int_0^{1/2} 4t \cos \frac{n\pi t}{1/2} dt = 8 \int_0^{1/2} 2t \cos 2n\pi t \; dt = \{\text{Partiell integration}\} =$$

$$= 8\left(\left[t \frac{\sin 2n\pi t}{n\pi} \right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} 1 \cdot \frac{\sin 2n\pi t}{n\pi} dt \right) =$$

$$= 8\left[\frac{\cos(2n\pi t)}{2(n\pi)^2} \right]_0^{1/2} = 4\frac{\cos(n\pi) - 1}{(n\pi)^2}$$

$$a_0 = \frac{2}{1/2} \int_0^{1/2} 4t \; dt = 8\left[t^2\right]_0^{1/2} = 2$$

$$4f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2} \cos 2n\pi t$$

Vi ansätter $\qquad a_n = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2n\pi t$

$$\ddot{x}_p = \sum_{n=1}^{\infty} -4n^2\pi^2 A_n \cos 2n\pi t$$

Insättning i den givna ekvationen ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} -4n^2\pi^2 A_n \cos 2n\pi t + 48\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2n\pi t\right) =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4\,\frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} \cos 2n\pi t$$

$$48\,\frac{A_0}{2} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-4n^2\pi^2 A_n + 48\,A_n - 4\,\frac{\cos n\pi}{t}\right)\cos 2n\pi t = 0$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{2}{48}, \quad A_n = \frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2(12 - n^2\pi^2)}$$

I ett tabellverk står det att

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2} \quad \text{är lka med} \quad \frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2) \quad \text{då } 0 < x < 1.$$

Beräkna s(-8/3).

Fourierserie för en jämn funtkion ƒ.

ƒ är periodisk med perioden 2, Det vill säga ƒ(x + 2) = ƒ(x).

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12}(3x^2 - 6x + 2) \quad \text{då } 0 < x < 1.$$

$$f\left(-\frac{8}{3}\right) = f\left(-2 - \frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \{\text{Jämn}\} = f\left(\frac{2}{3}\right)$$

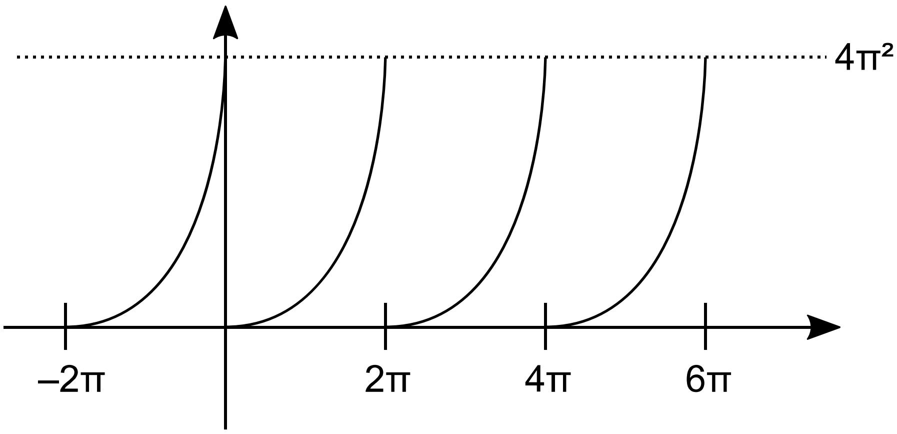
$$s\left(-\frac{8}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi^2}{12}\left(3\left(\frac{2}{3}\right)^2 6\left(\frac{2}{3}\right)+2\right)$$

$$s\left(-\frac{8}{3}\right)=\frac{\pi^2}{36}(4-12+6)=-\frac{\pi^2}{18}$$

$f(x) = x^2, \quad 0 < x < \pi$

$f(x + 2\pi) = f(x)$



Varken jämn eller udda.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \; dx=\{\text{Dubbel partiell integration}\}=\frac{4}{n^2}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \, dx=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \; dx=-\frac{4}{n}$$

$$f\sim\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4}{n}\sin nx\right)$$

Vi söker $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

X = 0:

$$\frac{0+4\pi^2}{3} = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

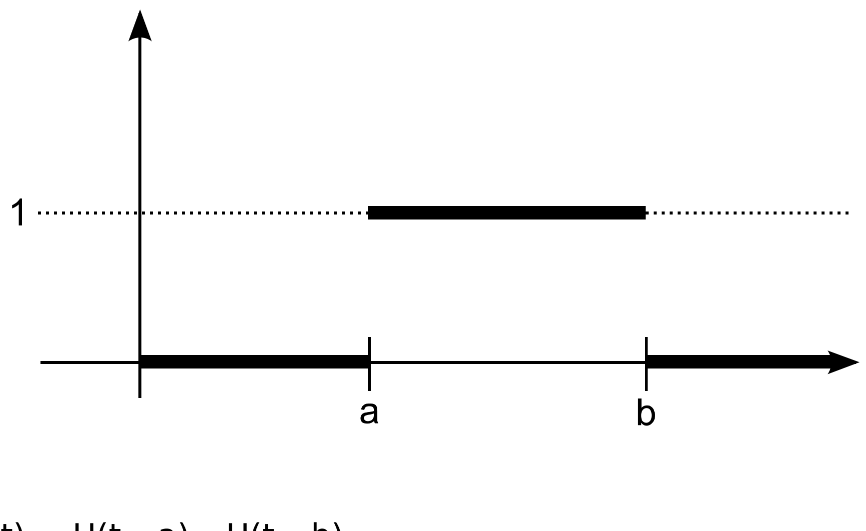
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

x = π:

$$\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{3} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Heavisides funktion (U):



f(t) = U(t – a) – U(t – b)

$$U(t-a) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

2010–(10)okt–01: dag 8, 21

[Moduluppgift 10]

Lös $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i området.

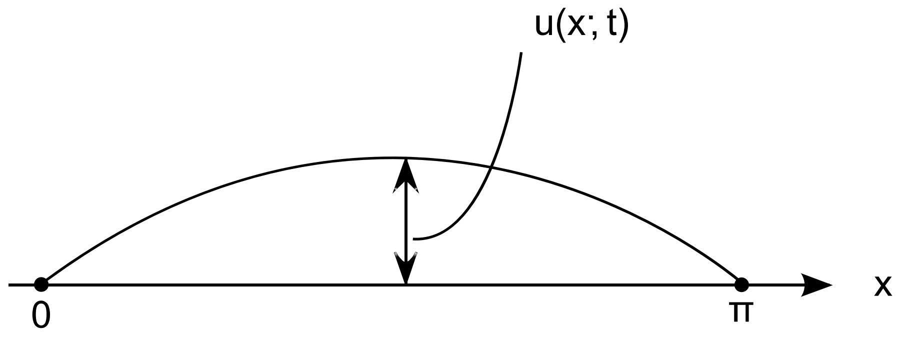
$0 < x < \pi, \quad t > 0$

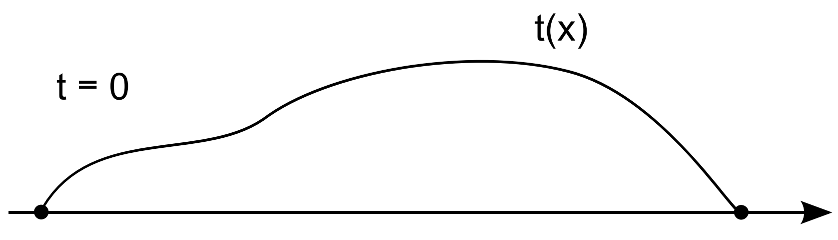
(vågekvationen)

Med randvillkor $u(0; t) = u(\pi; t) = 0$

och begynnelsevillkor $u(x; 0) = \sin^2 x + 4 \sin 4x = f(x)$

$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$





Använd separation av variabler.

Söker $u(x; t) = X(x)T(t)$

Sätter in i ekvationen:

$$X(x) \cdot T''(t) = 4X(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

VL beror ej av x.
HL beror ej av t.

Det innebär att HL = VL = “konstant” = λ.

$T''(t) - 4T(t)\lambda = 0$
$X''(x) - X(x)\lambda = 0$

Löser $X'' - \lambda X = 0$

Formen av lösningen beror på λ.

För att villkoret $u(0; t) = u(\pi; t) = 0$ ska vara uppfyllt måste $X(0)T(t) = 0$ för alla t samt att $X(\pi)T(t) = 0$ för alla t.

$X(0) = X(\pi) = 0$

Vi får randvärdesproblem:

$X'' - \lambda X = 0 \quad X(0) = X(\pi) = 0$

Karakteristisk ekvation:

$r^2 - \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm\sqrt{\lambda}$

Fall 1: $\lambda > 0$:

$$X_1(x) = A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$X(0) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 + B_1 = 0$
$X(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; A_1 = B_1 = 0$

$A_1 = B_1 = 0$

Fall 2: $\lambda = 0$:

Ger oss ekvationen $X'' = 0$

$X_2 = A_2 x + B_2$

Villkor:
$X(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 \cdot A_2 + B_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; B_2 = 0$
$X(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; \pi \cdot A_2 + 0 = 0 \;\Leftrightarrow\; A_2 = 0$

$A_2 = B_2 = 0$

Fall 3: $\lambda < 0$:

$r = \pm i\sqrt{-\lambda}$

$$X_3(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\,x)¿$$

$$X(x) = \underbrace{X_1}_{0} + \underbrace{X_2}_{0} + X_3 = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\,x)$$

Randvillkor: $0 = X(0) = C_1$ Det vill säga:

$$X(x) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\,x)$$

$$X(\pi) = C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0$$

$$C_2 \neq 0 \quad \sin(\sqrt{-\lambda}\,\pi) = 0 \quad \sqrt{-\lambda}\,\pi = n \cdot \pi,\ n \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{-\lambda} = n \qquad -\lambda = \pm n^2 \qquad \lambda = \pm n^2$$

Vi får icke-triviala lösningar

$$X(x) = C \sin nx$$

Vi löser T.

$T'' - 4\lambda T = 0$

$r^2 - 4\lambda = 0$

$$r = \pm\sqrt{4\lambda} = \pm\sqrt{-4n^2} = \pm i2n \sim i2n \qquad \because\ z \sim \bar{z}$$

$\lambda > 0$:

$$T(x) = D_1 \cos 2nt + D_2 \sin 2nt$$

Således för varje heltal, n, är

$u(x, t) = X(x) \cdot Y(y) = C_2 \sin nx \cdot (D_1 \cos 2nt + D_2 \sin 2nt)$

Om u_1, u_2, u_3, …, u_k är lösningar till ekvationen och uppfyller villkoren samt är linjärt oberoende så är $u(x; t) = u_1(x; t), u_2(x; t), u_3(x; t), \dots, u_k(x; t)$ också en lösning.

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot (A_n \cos 2nt + B_n \sin 2nt)$$

$$(A_n = C_{2;n} \cdot D_{1;n},\ \ B_n = C_{2;n} \cdot D_{2;n})$$

Låt oss välja A_n och B_n så att, de snart definierade, (†) och (‡) uppfylls.

$$u(x;0)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = (†) = \sin 2x + 4 \sin 4x$$

$A_2 = 1$, $A_4 = 4$, resten $A_n = 0$

För att bestämma B_n, använd:

(‡)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty} \left(-2nA_n \sin nt + 2nB_n \cos 2nt\right) \sin nx$$

$$0=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx$$

Alla $B_n = 0$.

Vi har alltså

$$u(x;t)=\cos 4t \cdot \sin 2x + 5 \cos 8t \cdot \sin 4x$$

Ungefär samma problem som ovan.

$$(‡): \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=g(x)$$

$$g(x)=\begin{cases} 5, & \frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4} \\ 0, & \text{för övriga x} \end{cases}$$

Man för på samma sätt som ovan.

Bestämmer A_n på samma sätt.

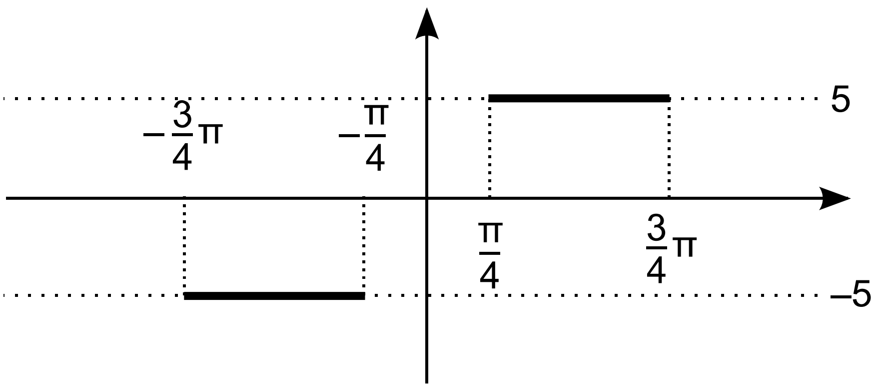
För att bestämma B_n:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx = g(x)$$

Utveckla g(x) i sinusserie.

För detta behöver vi att g(x) är udda.

Låt oss ändra g(x) utanför [0; π] och definiera den som udda och periodisk.



g(x) kan utvecklas som $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\pi}\left(\cos\frac{3\pi n}{4} - \cos\frac{\pi n}{4}\right)$.

(‡) ger:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nB_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\pi}\left(\cos\frac{3\pi n}{4} - \cos\frac{\pi n}{4}\right) \sin nx$$

Hitta B_n genom att identifiera koefficienterna.

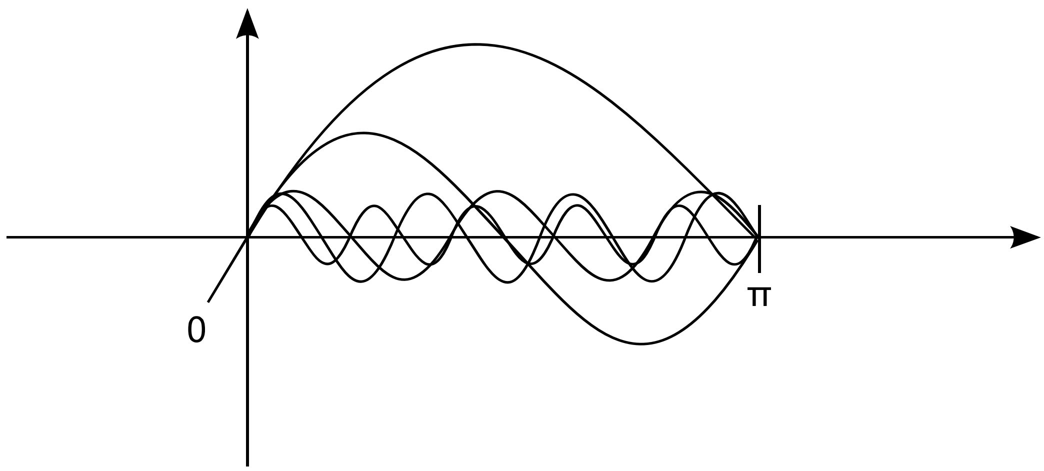
2010–(10)okt–04: dag 9, 22

Fouriertransformer

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \qquad t > 0, \ \ 0 < x < \pi$$

$$u(x;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)}_{A(t)=\text{“frekvensinnehåll”}}\underbrace{\sin nx}_{\text{“frekvens”}}$$

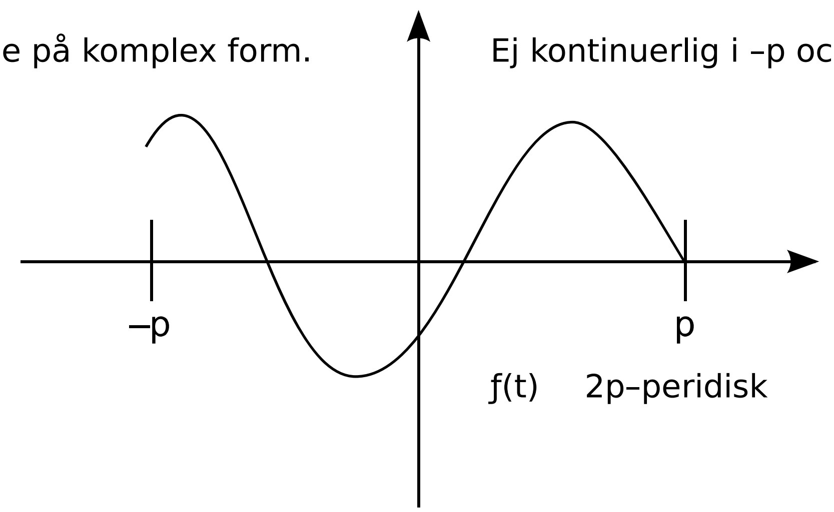
Exempel:



Randvillkor: $\begin{cases} u(0;t)=0 \\ u(\pi;t)=0 \end{cases}$

Fourierserie på komplex form.

Ej kontinuerlig i –p och p.



ƒ(t) 2p–peridisk

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{p}t}, \quad \text{där} \quad c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t)\cdot e^{-in\frac{\pi}{p}t}\,dt$$

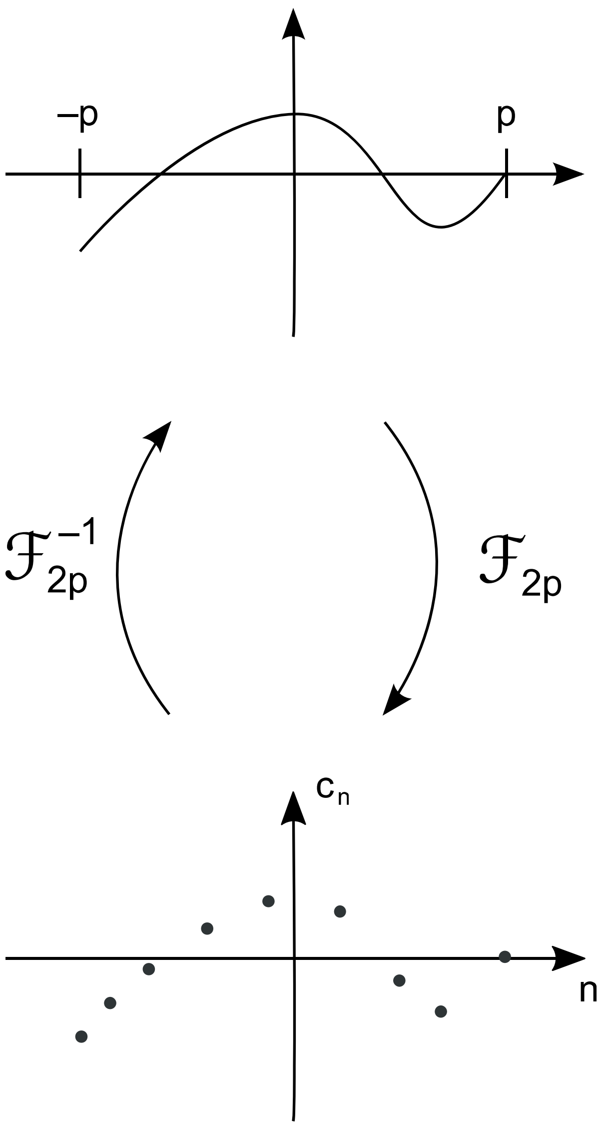
Eulers formel:

$$\cos\,\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\,\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$$

Se sida 7 i kompendiet.

f, 2p-periodisk



Frekvensinnehåll motsvarande frekvens $\frac{n\pi}{p}$

Vad händer om $p \to \infty$?

Man kan resonera med Riemann-summor:

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \qquad (\dagger)$$

där

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt \qquad (\ddagger),$$

$\omega \in \mathbb{R}, \qquad |e^{i\omega t}| = 1$

Definition:

Om $f(t)$ är absolut integrabel, det vill säga om

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty \quad ,$$

så existerar Fouriertransformen av $f(t)$.

$\because$

$$\underbrace{\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|}_{<\infty} \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot \underbrace{|e^{-i\omega t}|}_{1}\,dt$$

Definition:

Fourierintegralen till $f(t)$, vars Fouriertransform är $\hat{f}(\omega)$, är

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

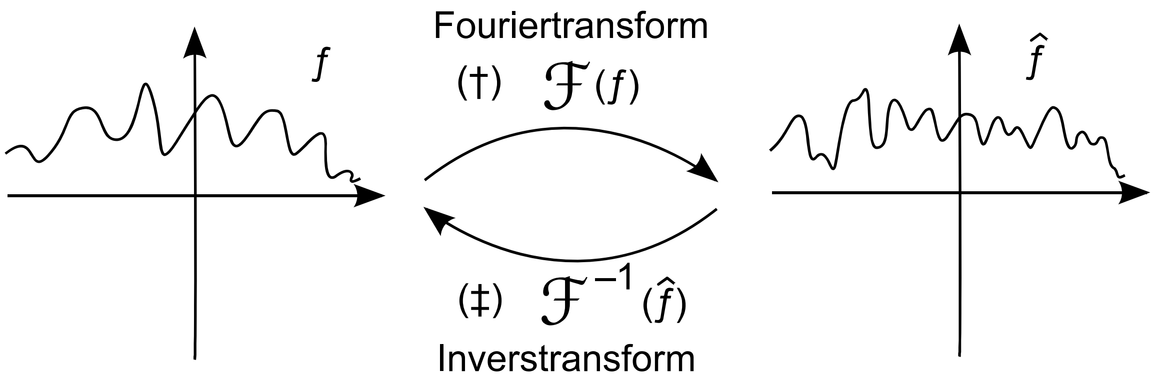
Sats:

Om f är absolut integrabel på intervallet $]-\infty; \infty[$ och f och f' är styckvis kontinuerliga på varje ändligt intervall så gäller att

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{f(t^+) - f(t^-)}{2}$. Om dessutom f är kontinuerlig för

alla $t \in \mathbb{R}$ så är $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$.

Operationerna $\mathcal{F}(f)$ och $\mathcal{F}^{-1}(f)$:



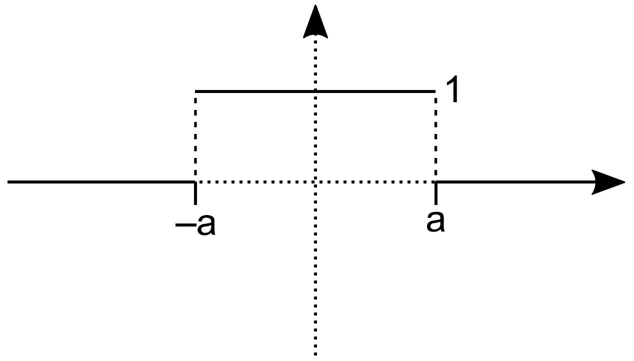
$\left|\hat{f}(\omega)\right|$="frekvenspektrum"

$\hat{f}(\omega)$="amplitud"

Exempel

Beräkna Fouriertransformen till

$$f(t)=\begin{cases} 1, & |t|<a \\ 0, & |t|\geq a \end{cases} \qquad \text{(Ej oändligt integrabel)}$$



$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-a}^{a} e^{-i\omega t}\,dt=\left[-\frac{e^{-i\omega t}}{\omega i}\right]_{t=-a}^{a}=-\frac{e^{-i\omega a}-e^{i\omega a}}{\omega i}=\frac{2\sin\omega a}{\omega}\quad,\quad \omega\neq 0$$

$$\hat{f}(0)=\int_{-a}^{a} dt=[t]_{-a}^{a}=2a$$

Är $\hat{f}(\omega)$ kontinuerlig?

$$\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\frac{2\sin\omega a}{\omega}=\lim_{\omega\to 0}\frac{2a\sin\omega a}{\omega a}=\lim_{\omega\to 0}2a\operatorname{sinc}\omega a=2a$$

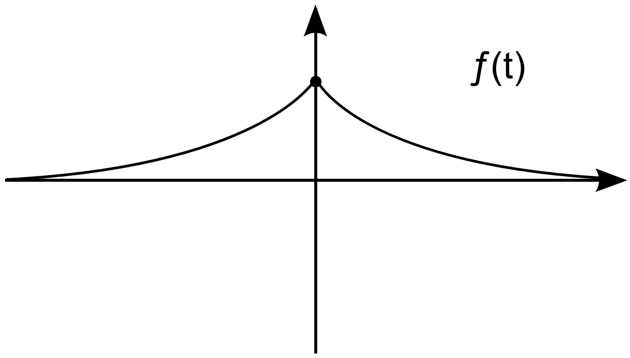
Ja! $\lim_{\omega\to 0}\hat{f}(\omega)=\hat{f}(0)$

Vi kan skriva f som Fourierintegral:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\omega a}{\omega}e^{i\omega t}\,dt \quad \text{då } t\neq\pm a$$

Exempel

Beräkna Fouriertransformen till $f(t) = e^{-a|t|}$



$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a|t|}e^{-i\omega t}\,dt=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-i\omega t}\,dt+\int_{-\infty}^{0}e^{at}e^{-i\omega t}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-t(a+i\omega)}\,dt+\int_{-\infty}^{0}e^{t(a+i\omega)}\,dt=\left[\frac{-e^{-t(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right]_{t=0}^{\infty}+\left[\frac{-e^{t(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right]_{t=-\infty}^{0}=$$

$$=\lim_{h\to\infty}\left(\frac{e^{h(a+i\omega)}}{a+i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}-\frac{e^{h(a+i\omega)}}{a+i\omega}\right)=\frac{a-i\omega+a+i\omega}{a^2+\omega^2}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

2010–(10)okt–06: dag 10, 23

Angående uppgift 3 i inlämningen imorgon; se sida 605 (14 kap.) i Zill-Cullen.

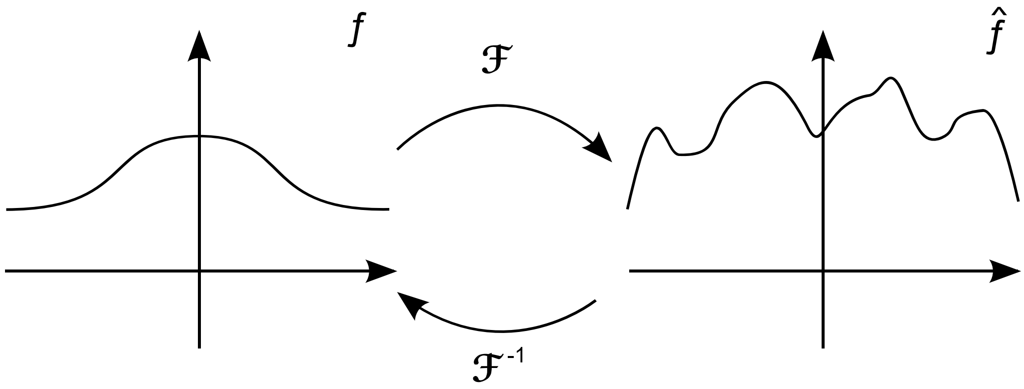
Förra gången:

$f(t)$ är absolut integrerbar

$$\hat{f}=\mathcal{F}(f(t))(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt$$

Om f och f' är styckvis kontinuerliga i varje ändligt intervall så gäller:

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f(t)\sim\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega$$



Vi beräknade $\mathcal{F}\Big(\underbrace{e^{-a|t|}}_{a>0}\Big)=\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

Egenskaper hos Fouriertransformer (FT):

FT är linjär.

Om f och g är absolut kontinuerliga så är

$$\mathcal{F}\big(af(T)+bg(t)\big)(\omega)=a\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\omega)+b\mathcal{F}\big(g(t)\big)(\omega)$$

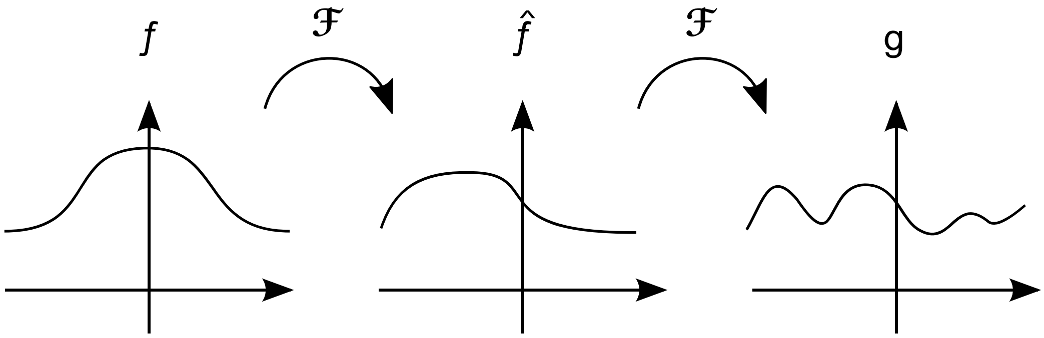
Vilket följer från integralens injäritet.

Exempel: $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{2}e^{-|t|}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{1^2+\omega^2}=\dfrac{1}{1+\omega^2}$

Dualitet.   Motsvarande exemplet.

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)(\omega)\overset{?}{=}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^2}e^{i\omega t}\,dt$$

Saknar elementär primitiv funktion.



f och g är relaterade.

$$g(t)=\mathcal{F}\left(\hat{f}(\omega)\right)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{it\omega}\,d\omega=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{-i(-t)\omega}\,d\omega\right)=2\pi\, f(-t)$$

$$\therefore\ \mathcal{F}\left(\hat{f}(\omega)\right)(t)=2\pi\, f(-t)$$

där $\hat{f}=\mathcal{F}(f)$

I vårt exempel:

Vi vet att $\dfrac{1}{1+\omega^2}=\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{2}e^{-|t|}\right)$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)=\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)\right)=2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-|t|}=\pi e^{-|t|}$$

Dualitet: $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(t) = 2\pi f(-1)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega=?$$

$$\pi e^{-|t|}\underbrace{\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\right)}_{\mathcal{F}\left(\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|t|}\right)\right)}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{1+\omega^2}\,d\omega$$

Tag t = 0

$$\pi=\pi e^0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^0}{1+\omega^2}\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega$$

Derivering och transformering:

$\mathcal{F}(f'(t))(\omega)=i\omega\hat{f}(\omega)$ där $\hat{f}$ är FT av f.

På samma sätt:

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}(t)\right)(\omega)=(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$$

[4.14]

Finn en partikulärlösning till

$y'' - y = e^{-|t|}$

Lösning: Fouriertransformera bägge leden:

$\mathcal{F}(y'' - y) = \mathcal{F}(e^{-|t|})$

$\mathcal{F}(y'') = (i\omega)^2\cdot\mathcal{F}(y)$

$Y(\omega) \triangleq \mathcal{F}(y)(\omega)$

$$\underbrace{(i\omega)^2}_{-\omega^2}\cdot Y(\omega)-Y(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$-Y(\omega)(\omega^2+1)=\frac{2}{1+\omega^2}$$

$$Y(\omega)=-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}$$

$$y(t)=\mathcal{F}^{-1}\Big(\underbrace{Y(\omega)}_{-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}}\Big)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(1+\omega^2)^2}e^{i\omega t}dt$$ (Svår integral!)

Man kan visa att $\mathcal{F}\left(|t|e^{-|t|}\right)(\omega)=\dfrac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}$

(Se Beta)

Vi vet att $\mathcal{F}\left(e^{-|t|}\right)(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$

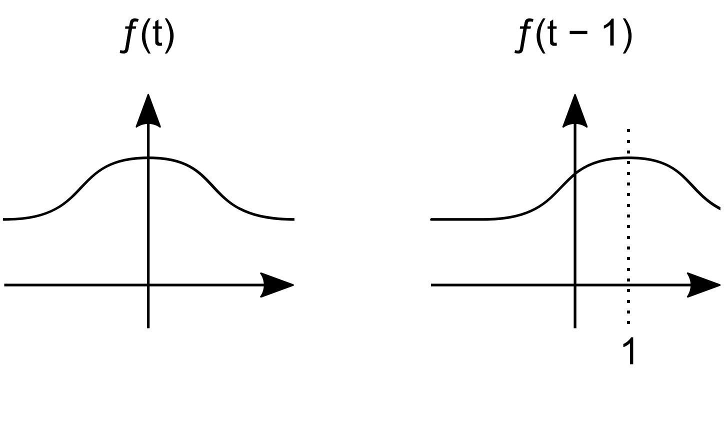
$$\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}+\frac{2}{1+\omega^2}=\frac{2(1-\omega^2)+2(1+\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}=\frac{4}{(1+\omega^2)^2}=-2\left(-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{2}{(1+\omega^2)^2}\right)=\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}+\frac{2}{1+\omega^2}\right)\right)=-\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}\right)+\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[|t|e^{-|t|}+e^{-|t|}\right]=-\frac{1}{2}(|t|+1)e^{-|t|}$$

Exempel:

Om ƒ(t) har TF, $\hat{f}(\omega)$, vad är då FT för ƒ(t – 1)?



$$\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)(\omega)=\left\{s\stackrel{\Delta}{=}t-1\,\middle|\,t=s+1\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{i\omega(s+1)}\,ds=e^{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)e^{i\omega s}\,ds=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)(\omega)=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

Frekvensspektra för ƒ(t) och ƒ(t – 1) är samma.

$\left|\hat{f}(\omega)\right|$ = “frekvensspektrum”

$$\left|\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)\right|=\left|e^{i\omega}\hat{f}(\omega)\right|=\underbrace{\left|e^{i\omega}\right|}_{1}\cdot\left|\hat{f}(\omega)\right|=\left|\hat{f}(\omega)\right|$$

$\left|\mathcal{F}\left(f(t-1)\right)\right|$ är frekvensspektrumet för ƒ(t – 1).

2010–(10)okt–07: dag 11, 24

Lös värmeledningsekvationen:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty<x<\infty$$

$$u(x\,;\,0)=f(x)=\begin{cases} u_0 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

(Beskriver temperaturen i en oändlig tråd.)

Låt:

$$\hat{u}(\alpha;\,t)=\mathcal{F}\big(u(x\,;\,t)\big)(\alpha;\,t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x;\,t)e^{i\alpha x}\,dx$$

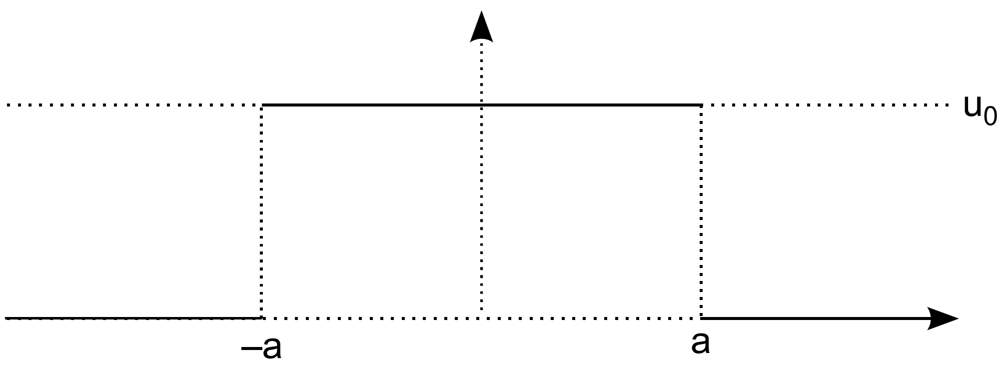
(Med avseende på x, t är fixerad)

(För varje fixerat t söks FT av u(x; t))

Transformera begynnelsevillkor:

Vi har u(x; 0) = ƒ(x).

$$\mathcal{F}\big(u(x;\,0)\big)=U(\alpha;\,0)=\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx=\int_{-1}^{1} u_0\cdot e^{i\alpha x}\,dx=$$



$$=u_0\left[\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\right]_{x=-1}^{1}=u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right)=2u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i\alpha}\right)=2u_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Transformera DE:

$$k\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}\right)=k(i\alpha)^2\cdot\mathcal{F}(u(x;t))=k(-\alpha^2)U(\alpha;t)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x;t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\cdot e^{ixt}\,dx\overset{(*)}{=}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{ixt}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}U(\alpha;t)$$

Förklarning av (*):

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t;s)\right)_{t=t_0}ds=\int\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}\,ds=$$

$$=\{\textstyle\int \text{ är absolut konvergent}\}=\lim_{\Delta t\to 0}\int\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}\,ds=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int u(t_0;s)\,ds-\int u(t_0+\Delta t;s)\,ds}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\int(u(t;s))_{t=t_0}ds$$

Ekvationen tar formen

$$-k\alpha^2U(\alpha;t)=\frac{\partial}{\partial t}U(\alpha;t)$$

För varje fixerat α är ekvationen

$$U_t^{\prime}=-k\alpha^2U$$

Separabel!

$$U(\alpha;t)=Ce^{-k\alpha^2 t}$$

Begynnelsevillkor (BV) ger:

$$2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\overset{BV}{=}U(\alpha;0)=Ce^{-k\alpha^2\cdot 0}=C$$

$$C=2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Alltså:

$$U(\alpha;t) = \frac{2u_0 \sin\alpha}{\alpha} e^{-kx^2 t}$$

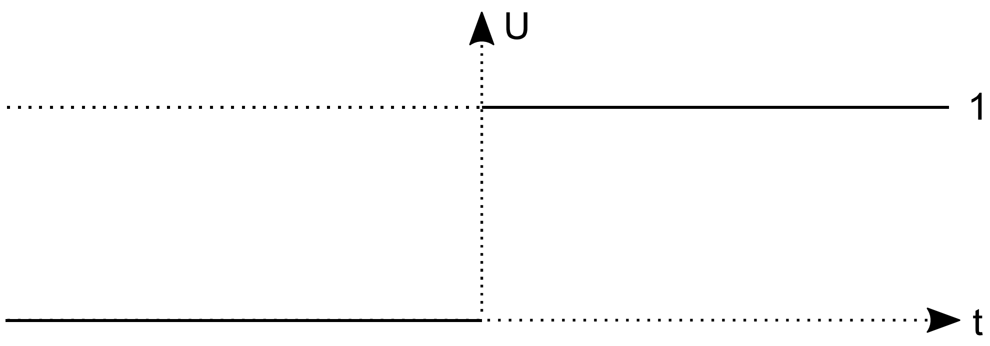
Tillbaka-transformation:

$$u(x;t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2u_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} e^{-k\alpha^2 t} e^{-i\alpha x}\, d\alpha = \{\text{Se boken sida 506}\} =$$

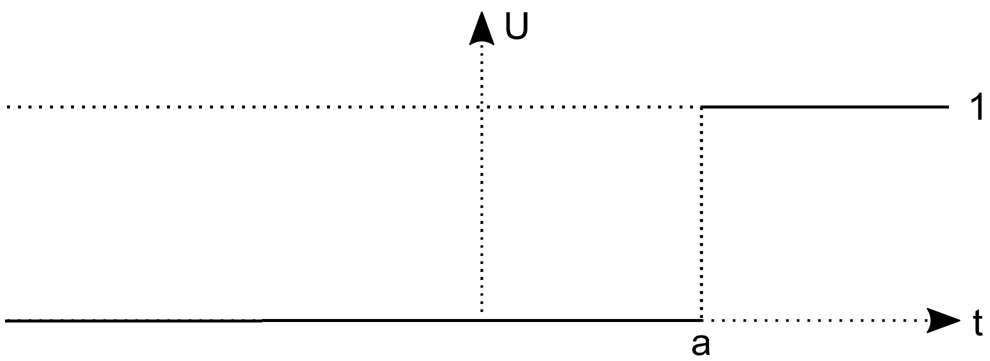
$$\frac{u_0}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\alpha}\cdot e^{-k\alpha^2 t}\, d\alpha$$

Heaviside funktionen:

$$U(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$$

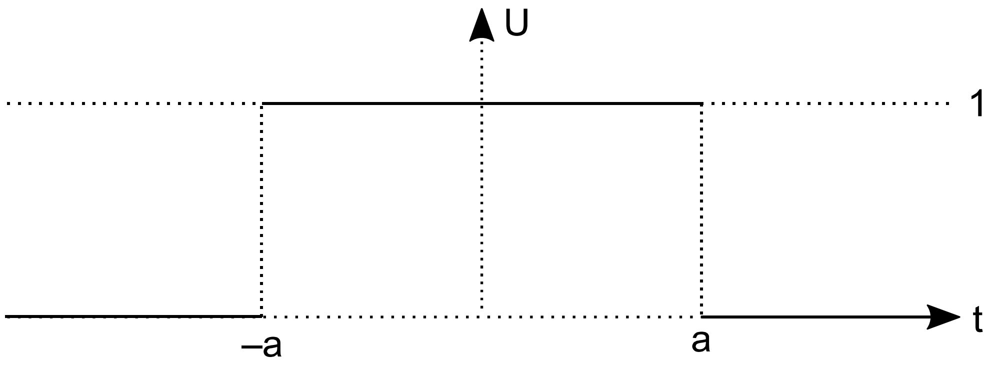


U(t – a), a > 0



Exempel:

$U(t + a) - U(t - a)$



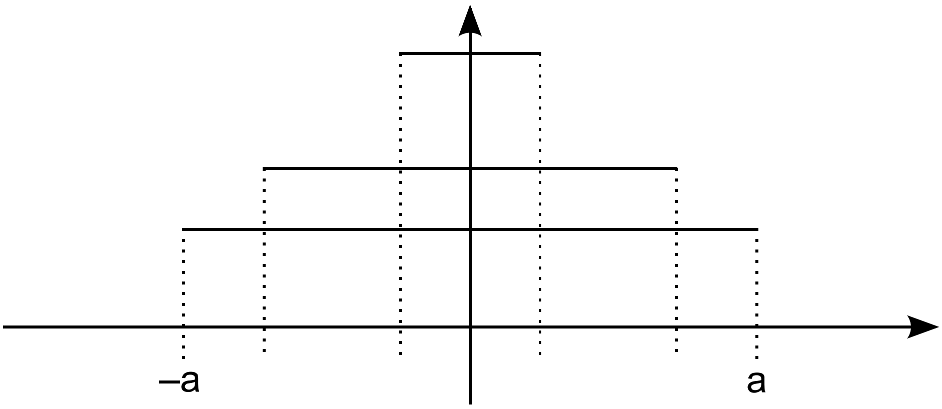
Exempel: $|t|$ med Heavisides funktion:

$$
\begin{aligned}
|t| &= (2\,U(t) - 1)t &&= \\
&= 2t\,U(t) - t &&= \\
&= (U(t) - U(-t))t &&= \\
&= t\,U(t) - t\,U(-t) &&= \\
&= \mathbf{t\,U(t) + (-t)\,U(-t)}
\end{aligned}
$$

Dirac pulser:

Betrakta gränsvärdet

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{2a}\left(U(t+a) - U(t-a)\right) \coloneqq \delta(t)$$



I vanlig mening konvergerar det inte.

Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}\big(U(t+a)-U(t-a)\big)\,dt=1 \quad \text{för alla a.}$$

För en glatt funktion f:

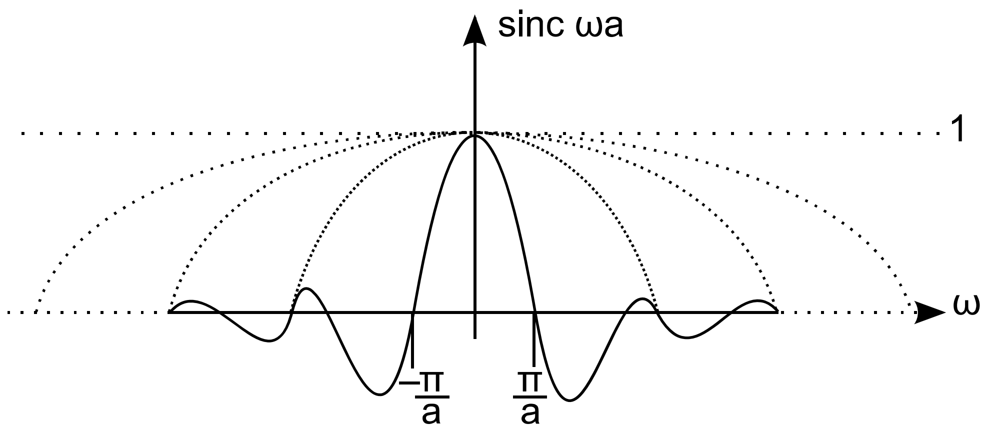
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{1}{2a}\big(U(t+a)-U(t-a)\big)\,dt \underset{a\to0^+}{\simeq} f(0)\cdot\frac{1}{2a}\cdot 2a=f(0)$$

Definiera δ(t) som en sådan funtion att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt=f(0)$$

För varje oändligt deriverbar $f(t)$.

Vi såg att $\mathcal{F}\left(\frac{1}{2a}\big(U(t+a)-U(t-a)\big)\right)=\frac{2\sin\omega a}{2\,a\omega}=\underbrace{\frac{\sin\omega a}{\omega a}}_{\text{sinc }\omega a}$



Breddar ut sig med a.

sinc ωa ≃ 1, a → ∞   (sinc används inte av läraren)

Faktiskt:

$$\mathcal{F}\big(\delta(t)\big)(\omega)=1$$

$$\because \qquad \mathcal{F}\big(\delta(t)\big)(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{i\omega t}\,dt=e^{i\omega\cdot 0}=e^{0}=1$$

2010−(10)okt−13: dag 12, 25

Då en produkt tas ut ur ugnen har den temperaturen 700°C. Den svalar; avsvalkningstakten är proportionell med skillnaden i temperaturen mellan produkten och omgivningen.

Vilken av följande modeller är rimlig?

1)

$$\frac{dT}{dt}=-\left(\frac{T-40}{3}\right)$$

2)

$$\frac{dT}{dt}=\frac{T-30}{3}$$

1:an, ty temperaturen ska avta vilket kräver negativ derivata.

Bestäm lösningen till

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{T}{3}+\frac{40}{3}$$

Vi söker en allmän lösning till motsvarande homogent system.

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{T}{3}$$

$$dT=-\frac{T}{3}dt$$

$$\frac{dT}{T}=-\frac{1}{3}dt$$

$$\int\frac{dT}{T}=\int-\frac{1}{3}dt$$

$$\int\frac{dT}{T}=-\frac{1}{3}\int dt$$

$$\ln|T|=-\frac{1}{3}t+C$$

$$|T|=e^{-\frac{1}{3}t+C}=e^{-\frac{1}{3}t}e^{C}=Ce^{-\frac{1}{3}t}$$

$$T=Ce^{-\frac{1}{3}t}$$

En partikulärlösning till det ursprungliga systemet. Man kan gissa: $T(t) = 40$ är en lösning. ($(40 – 40) / 3 = 0 = D_t(40)$)

Den allmänna lösningen är alltså $T(t)=Ce^{-\frac{t}{3}}+40$.

Låt $y = x^a$, $a \in \mathbb{R}$ vara en lösning till differentialekvationen

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$$

Bestäm två linjärt oberoende lösningar.

Insätt $y = x^a$ i ekvationen.

$$x^2\underbrace{a(a-1)x^{a-2}}_{y''}+4x\underbrace{ax^{a-1}}_{y'}+2\underbrace{x^a}_{y}=0$$

$$a(a-1)x^a+4ax^a+2x^a=0$$

$$x^a\big(a(a-1)+4a+2\big)=0$$

$$a(a-1)+4a+2=0$$

$$a^2-a+4a+2=0$$

$$a^2+3a+2=0$$

$$a_1=-1 \quad , \quad a_2=-2$$

Vi fick att $y_1 = x^{-1}$ och $y_2 = x^{-2}$ är lösningar.

De är linjärt oberoende. (Eftersom $x^{-1} \neq kx^{-2}$, för en konstant, k.)

Den allmänna lösningen till ekvationen är

$$y = Cx^{-1} + Dx^{-2}$$

Låt $y_p = x^3$ vara en partikulärlösning till

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = f(x)$$

Bestäm $f(x)$.

Lösning: insätt $y_p = x^3$ i ekvationen:

$$x^2 \underbrace{6x}_{y_p''} + 4x \cdot \underbrace{3x^2}_{y_p'} + 2\underbrace{x^3}_{y_p} = f(x)$$

$$6x^3 + 12x^3 + 2x^3 = f(x)$$

$$(6+12+2)x^3 = f(x)$$

$$f(x) = 20x^3$$

[4.2.19.]

Bestäm den allmänna lösningen till

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$$

givet att $y_1 = x^4$ är en lösning.

Lösning: Vi söker den andra linjärt oberoende lösningen på formen $y_2 = u(x) \cdot y_1(x)$.

Insätter y_2 i ekvationen:

$$y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$y_2'' = u''y_1 + \underbrace{u'y_1' + u'y_1'}_{2u'y_1'} + uy_1''$$

$$x^2\left(u''y_1 + 2u'y_1' + \underline{uy_1''}\right) + 7x\left(u'y_1 + \underline{uy_1'}\right) + \underline{16uy_1} = 0$$

$$VL = u\underbrace{\left(\underline{x^2y_1'' - 7x_1' + 16y_1}\right)}_{=0,\ \text{ty } y_1 \text{ är en lösning}} + x^2u''y_1u + 2x^2u'y_1' - 7xu'y_1 = \{y_1 = x^4\} =$$

$$=u''x^6+u'x^5=x^5(\underbrace{u''x+u'}_{\text{för alla x}})=0$$

$$\Updownarrow$$

$$u''x+u'=0$$

Beteckna $z(x) \triangleq u'(x)$.

För z har vi ekvationen

$$z'x + z = 0$$

$$\frac{dz}{dx}x=-z$$

$$x\,dz=-z\,dx$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dz}{z}=\int-\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|=-\ln|x|+C$$

$$\ln|z|=-\ln|x|+\ln C$$

$$\ln|z|=\ln\frac{C}{|x|}$$

$$|z|=\frac{C}{|x|}=\frac{C}{x}$$

$$z=\frac{C}{x}$$

$$u'=\frac{C}{x}$$

$$u=\int\frac{C}{x}\,dx$$

$$u=C\ln|x|+D$$

Vi fick en lösning:

$$y_2 = u y_1 = (C \ln|x| + D)\, x^4$$

med godtyckliga konstanter, C och D.

Tag $C = 1$, $D = 0$.

$y_2 = x^4 \ln|x|$

är linjärt oberoende av $y_1 = x^4$.

Den allmänna lösningen till ekvationen ovan är $y = Ax^4 + Bx^4 \ln|x|$

Låt **A** vara en reel matris.

Betrakta systemet av differential ekvationer: $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$

En lösning till detta system ges av

$\vec{Z} = \vec{X}_1 + i\vec{X}_2$ där $\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ är reela och vektorvärda funktioner.

Visa att även $\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ är lösningar.

Insätt $\vec{Z}$ i systemet:

$$\left(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2\right)' = \mathbf{A}\left(\vec{X}_1 + i\vec{X}_2\right)$$

$$\vec{X}_1' + i\vec{X}_2' = \mathbf{A}\vec{X}_1 + i\mathbf{A}\vec{X}_2$$

$$\underbrace{\left(\vec{X}_1' - \mathbf{A}\vec{X}_1\right)}_{P_1} + i\underbrace{\left(\vec{X}_2' - \mathbf{A}\vec{X}_2\right)}_{P_2} = 0$$

Både P_1 och P_2 ska vara noll.

Både $\vec{X}_1$ och $\vec{X}_2$ är lösningar till systemet.

Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}\vec{X}$$

Vi söker egenvärden till $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 5 & -3\end{pmatrix}$

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -4\\ 5 & -3-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(-3-\lambda)+20=$$

$$=\lambda^2+2\lambda+17=(\lambda+1)^2+16=0$$

$$(\lambda+1)^2=-16$$

$$(\lambda+1)=\pm 4i$$

$$\lambda=-1\pm 4i$$

Vi söker egenvektorn $\vec{v}$ motsvarande $\lambda = -1 \pm 4i$.

$$\mathbf{A}\vec{v}=\lambda\vec{v} \iff 0=\mathbf{A}\vec{v}-\lambda\vec{v}=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\begin{pmatrix}1-\lambda & -4\\ 5 & -3-\lambda\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}2-4i & -4\\ 5 & -2-4i\end{pmatrix}\vec{v}$$

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\ 1-2i\end{pmatrix}$$

En komplex lösning är

$$\vec{Z}=e^{(-1+4i)t}\begin{pmatrix}2\\ 1-2i\end{pmatrix}=e^{-t}\operatorname{cis}(4t)\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1-2i\end{pmatrix}=$$

= Bla, bla, bla, se äldre anteckningar!

2010–(10)okt–14: dag 13, 26

Differential ekvation

$xy'-y=x^2$, $x>0$ (1) har en lösning som också uppfyller ekvationen

$x^3y'-x^2y=y^2,$ $x>0$ (2) bestäm denna lösning.

Löser ekvationen (1). Den är linjär av första ordningen.

Löses med hjälp av integrerande faktor.

Skriv ekvationen på normal form.

$$y'-\frac{1}{x}y=x$$

Multiplicera ekvationen med den integrerande faktorn $e^{\int -\frac{1}{x}\,dx}=e^{\ln\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x}y'-\frac{1}{x^2}y=1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}y\right)=1$$

$$\frac{y}{x}=x+C$$

$$y=x^2+Cx$$

Löser ekvation (2).

Omforma (2) till $x^3y^{-2}y' - x^2y^{-2}y = 1$

$x^3y^{-2}y' - x^2y^{-1} = 1$

$u \triangleq y^{-1}$

$u' = -y^{-2}y'$

$-x^3u' - x^2u = 1$

$$u' + \frac{1}{x}u = -\frac{1}{x^3}$$

$$\text{“Integrerande faktor”} = e^{\int \frac{1}{x}} = x$$

$$u'x + u = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(x \cdot u) = -x^{-2}$$

$$xu = x^{-1} + B$$

$$u = x^{-2} + \frac{B}{x} = \frac{1+Bx}{x^2}$$

$$y^{-1} = \frac{1+Bx}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2}{1+Bx}$$

Vi vill att för några C och B att

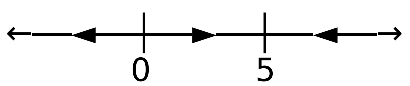
$$x^2 + Cx = \frac{x^2}{1+Bx}$$

Tag C = B = 0

Den sökta lösningen är $y = x^2$

Bestäm stationära lösningen och deras stabilitet till $\frac{dx}{dt} = x(5-x)$.

Stationär vid x = 0 och x = 5.



Instabil vid 0 och stabil vid 5.

Klassifiera kritiska punkter hos $x'(t) = x(5 - x)$, $y'(t) = y(x - 1)$.

Vi söker kritiska punkter.

$x(5 - x) = 0$ ekvationen (1) get $x = 0$ och $x = 5$.
$y(x - 1) = 0$

För $x = 0$:

Ekvationen (2) ger $y(0; -1) = -y = 0$ Kritisk punkt: $(0; 0)$

För $x = 5$:

Ekvationen (2) ger $4y = 0 \Rightarrow y = 0$ Kritisk punkt: $(5; 0)$

Vi linjäriserar system i närheten av de kritiska punkterna.

Förklarning:

$$\frac{dx}{dt} = P(x; y)$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x; y)$$

$(x_1; y_1)$ är en kritisk punkt.

$P(x_1; y_1) = 0 = Q(x_1; y_1)$

$$\frac{dy}{dt} = P(x; y) = \{(x; y) \simeq (x_1; y_1)\} =$$

$$= \underbrace{P(x_1; y_1)}_{=0} + \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(x_1; y_1)} \cdot \underbrace{(x - x_1)}_{h} + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_1; y_1)} \cdot \underbrace{(y - y_1)}_{k} + \text{H.O.T.}$$

$$\frac{dy}{dt} = h\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{(x_1; y_1)} + k\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{(x_1; y_1)} + \text{H.O.T.}$$ (H.O.T. är en restterm)

För $(x; y) \approx (x_1; y_1)$

$$\frac{dx}{dt} \approx \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]_{(x_1; y_1)} & \left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]_{(x_1; y_1)} \\ \left[\frac{\partial Q}{\partial x}\right]_{(x_1; y_1)} & \left[\frac{\partial Q}{\partial y}\right]_{(x_1; y_1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$x' = 5x - x^2$

$y' = xy - y$

$$\mathbf{A}(x;\, y) = \begin{pmatrix} 5-2x & 0 \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}(0;\, 0) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Egenvärden: 5 och –1

Sadelpunkt!

$$\mathbf{A}(5;\, 0) = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Egenvärden: –5 och 4

Sadelpunkt!

Sammanfattning: dag 1-13, 14-26

Fourierserieutveckling av styckvis kontinuerliga funktionene f definierad i intervallet $]-p;\, p[$.

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx \qquad b_n = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p} dx$$

Det brukar vara bra att räkna ut a_0 separat:

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x)\, dx$$

Om a_n eller b_n inte blir definierad för ett visst n måste man sätta in det n:et och räkna ut värdet separat. Till exempel:

$$a_2 = \frac{2}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{2\pi x}{p} dx$$

Om $f(x)$ är en jämn funktion gäller:

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}_c(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{p}$$

Om $f(x)$ är en udda funktion gäller:

$$f(x) \sim \mathcal{F}(f)(x) = \mathcal{F}_s(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{p}$$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

kan användas för att räkna ut värdet där $f(x)$ inte är kontinuerlig.

$$\alpha\frac{\partial^a u}{\partial x^a}=\frac{\partial^b u}{\partial y^b}$$

$u(x; y) = X(x)Y(y)$

$\alpha X^{(a)}(x)Y(y) = X(x)Y^{(b)}(y)$

Dividera med $\alpha X(x)Y(y)$

$$\frac{X^{(a)}(x)}{X(x)}=\frac{Y^{(b)}(y)}{\alpha Y(y)}=\text{“konstant”}=\lambda$$

ty X är oberoende av y,
och Y är oberoende av x.

$$\begin{cases} X^{(a)}(x)-\lambda X(x)=0 \\ Y^{(b)}(y)-\lambda\alpha Y(y)=0 \end{cases}$$

$\lambda > 0$, $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X_1^{(a)}(x) - \mu^2 X_1(x) = 0$

$\lambda = 0$:

$X_2^{(a)}(x) = 0$

$\lambda < 0$, $\lambda = -\mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$:

$X_3^{(a)}(x) + \mu^2 X_3(x) = 0$

$X= X_1 + X_2 + X_3$

Utför motsvarande för Y.

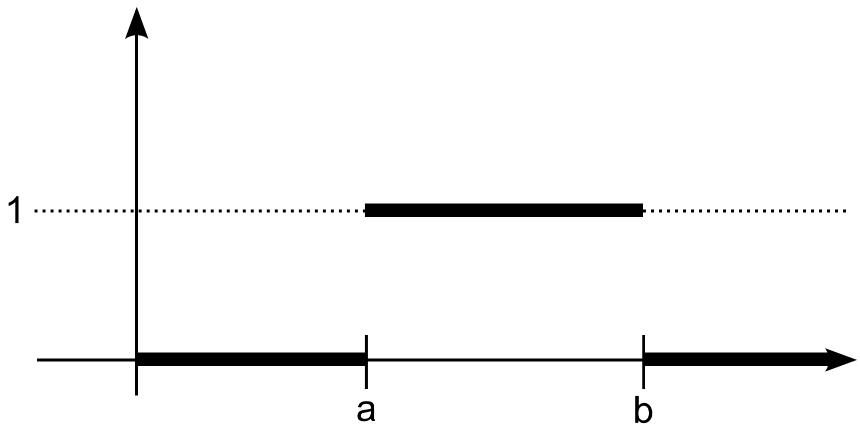
$u(x; y) = X(x)Y(y)$

Om ett godtyckligt (eventuellt med restriktion) tal, n, uppkommer i u(x; y) gäller dock:

$u_n(x; y) = X(x; n)Y(y; n)$

$$u(x;y)=\sum_{\forall n} u_n(x;y)$$

Heavisides funktion (U):



$f(t) = U(t - a) - U(t - b)$

$$U(t-a)=\begin{cases}1 & t>a\\ 0 & t<a\end{cases}$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad , \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0$$

Transformera ekvationen med hjälp av substitutionen

$z = x + at$
$v = x - at$

Vi tänker att $u(x; t) = \tilde{u}(z(x; t); v(x; t))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x}}_{1}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}}_{1} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}}_{a}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}}_{-a} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}a-\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{u}}{\partial v}\right)=$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z\,\partial v}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\,\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\cdot\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{1} =$$

$$= \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\underbrace{\partial v\,\partial z}_{\partial z \partial v}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\underbrace{\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\,\partial z} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v^2}\right)}_{\text{på analogt sätt}}$$

Ekvationen $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (*) skrivs om.

Lös ekvationen $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial v\,\partial z} = 0$

$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}\right)=0$ $\qquad$ $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}$ beror inte på v.

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z}=P(z)$ P är någon funktion.

$$\tilde{u}(z;v)=\underbrace{\int P(z)\,dz}_{\triangleq F(z)}+G(v)$$

Vi fick att lösningarna till (*) är:

$$\tilde{u}(z;v)=F(z)+G(v)$$

där F och G är godtyckliga funktioner.

$$u_x' = u + u_y'$$

Ansats: $u(x; y) = X(x)Y(y)$

$X'(x)Y(y) = X(x)Y(y) + X(x)Y'(y)$

Dividera med $X(x)Y(y)$.

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = 1 + \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \text{“konstant”} = \lambda$$

$$\begin{cases} X'(x) - \lambda X(x) = 0 \\ Y'(y) - (\lambda - 1) Y(y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{(\lambda - 1) y} \end{cases}$$

$u_\lambda(x; y) = (AB)_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y} = c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1)y}$

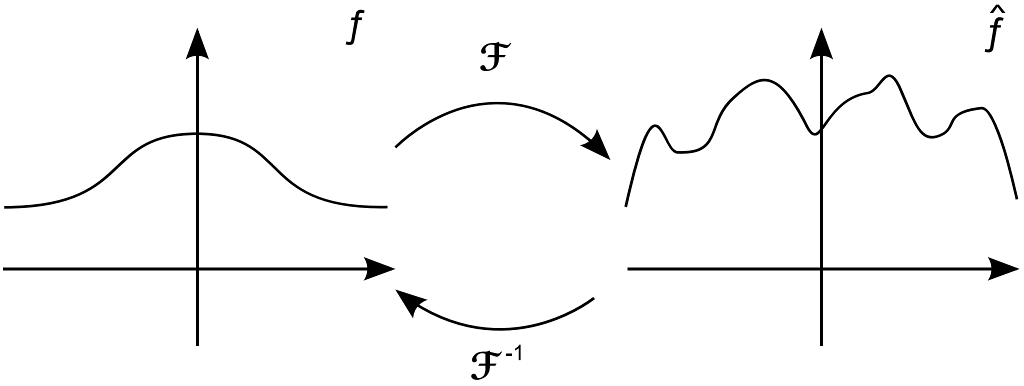
$$u(x; y) = \sum_{\forall \lambda} c_\lambda e^{\lambda x + (\lambda - 1) y}$$

Om $f(t)$ är absolut integrerbar:

$$\hat{f} = \mathfrak{F}(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt$$

Om f och f' är styckvis kontinuerliga i varje ändligt intervall så gäller:

$$\mathfrak{F}^{-1}(\hat{f}) = f(t) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t}\, d\omega$$

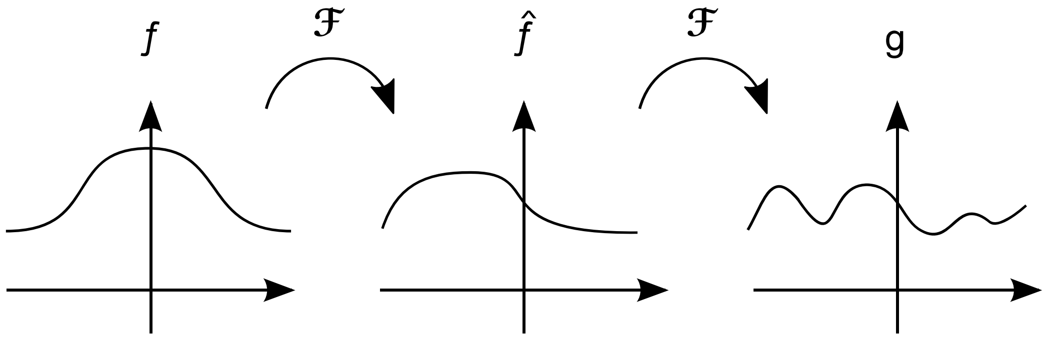


FT (Fouriertransformer) är linjära:

Om f och g är absolut kontinuerliga så är

$$\mathcal{F}\left(af(T)+bg(t)\right)(\omega)=a\mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega)+b\mathcal{F}\left(g(t)\right)(\omega)$$

Dualitet:



$$\mathcal{F}\left(\hat{f}(\omega)\right)(t)=2\pi\ f(-t)$$

Derivering och transformering:

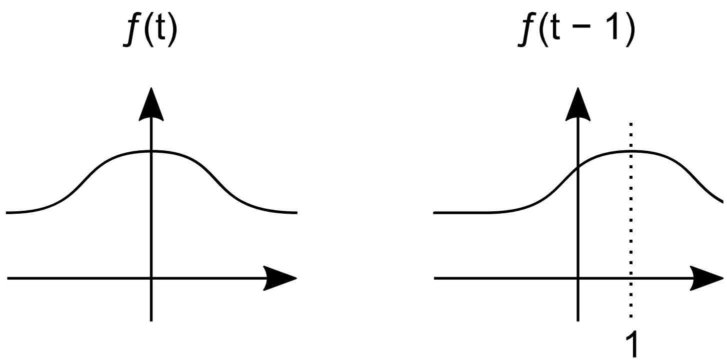
$\mathcal{F}\left(f'(t)\right)(\omega)=i\omega\hat{f}(\omega)$ där $\hat{f}$ är FT av f.

På samma sätt:

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}(t)\right)(\omega)=(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$$

Frekvensspektrum för stegade funktioner:

Om ƒ(t) har TF, $\hat{f}(\omega)$, vad är då FT för ƒ(t – 1)?



$$\mathcal{F}(f(t-1))(\omega)=\left\{s\stackrel{\Delta}{=}t-1\middle|t=s+1\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{i\omega(s+1)}\,ds=e^{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,e^{i\omega s}\,ds=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

$$\mathcal{F}(f(t-1))(\omega)=e^{i\omega}\hat{f}(\omega)$$

Frekvensspektra för ƒ(t) och ƒ(t – 1) är samma.

$\left|\hat{f}(\omega)\right|$ = "frekvensspektrum"

$$\left|\mathcal{F}(f(t-1))\right|=\left|e^{i\omega}\hat{f}(\omega)\right|=\underbrace{\left|e^{i\omega}\right|}_{1}\cdot\left|\hat{f}(\omega)\right|=\left|\hat{f}(\omega)\right|$$

$\left|\mathcal{F}(f(t-1))\right|$ är frekvensspektrumet för ƒ(t – 1).

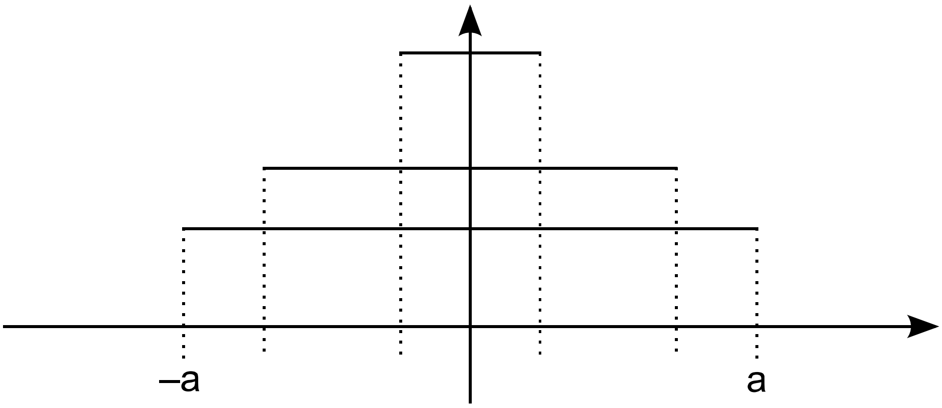
|t| med Heavisides funktion:

|t| = (2 U(t) – 1)t =
= 2t U(t) – t =
= (U(t) – U(-t))t =
= t U(t) – t U(-t) =
= **t U(t) + (–t) U(-t)**

Dirac pulser:

Betrakta gränsvärdet

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{1}{2a}\left(U(t+a) - U(t-a)\right) \coloneqq \delta(t)$$



I vanlig mening konvergerar det inte.

Men

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a}\left(U(t+a) - U(t-a)\right) dt = 1 \quad \text{för alla a.}$$

För en glatt funktion ƒ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{2a}\left(U(t+a) - U(t-a)\right) dt \underset{a \to 0^+}{\simeq} f(0) \cdot \frac{1}{2a} \cdot 2a = f(0)$$

Definiera δ(t) som en sådan funtion att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t)\, dt = f(0)$$

Partiell differentialekvation med hjälp av Fouriertransformer (2010-(10)okt-07):

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}, \quad -\infty<x<\infty$$

$$u(x;0)=f(x)=\begin{cases} u_0 & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}$$

(Beskriver temperaturen i en oändlig tråd.)

Låt:

$$\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}\big(u(x;t)\big)(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x;t)e^{i\alpha x}\,dx$$

(Med avseende på x, t är fixerad)

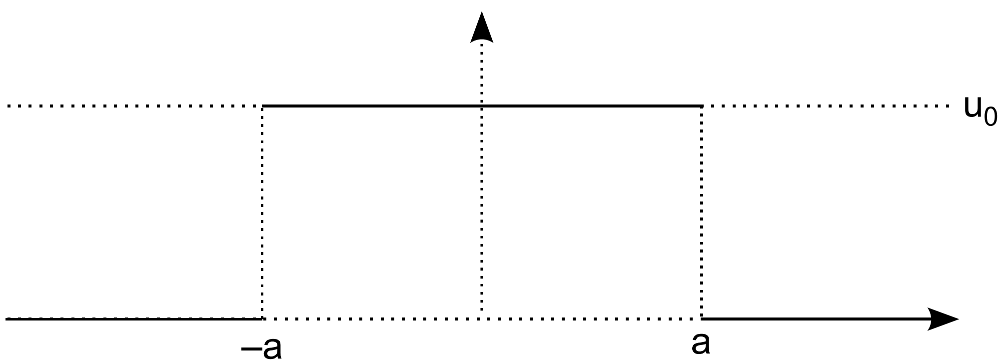
(För varje fixerat t söks FT av u(x; t))

Transformera begynnelsevillkor:

Vi har $u(x;0) = f(x)$.

$$\mathcal{F}\big(u(x;0)\big)(\alpha;0)=\hat{u}(\alpha;0)=\mathcal{F}\big(f(x)\big)(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}\,dx=\int_{-1}^{1} u_0\cdot e^{i\alpha x}\,dx=$$

$$=u_0\left[\frac{e^{i\alpha x}}{i\alpha}\right]_{x=-1}^{1}=u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\right)=2u_0\left(\frac{e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}}{2i\alpha}\right)=2u_0\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



Transformera DE:

$$k\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u(x;t)}{\partial x^2}\right)=k(i\alpha)^2\cdot\mathcal{F}(u(x;t))=k(-\alpha^2)\hat{u}(\alpha;t)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x;t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x;t)}{\partial t}\cdot e^{ixt}\,dx\overset{(*)}{=}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{ixt}\,dx=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha;t)$$

Förklarning av (*):

$$\int\left(\frac{\partial}{\partial t}u(t;s)\right)_{t=t_0}ds=\int\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}\,ds=$$

$$=\{\textstyle\int \text{ är absolut konvergent}\}=\lim_{\Delta t\to 0}\int\frac{u(t_0;s)-u(t_0+\Delta t;s)}{\Delta t}\,ds=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int u(t_0;s)\,ds-\int u(t_0+\Delta t;s)\,ds}{\Delta t}=\frac{\partial}{\partial t}\int(u(t;s))_{t=t_0}ds$$

Ekvationen tar formen

$$-k\alpha^2\hat{u}(\alpha;t)=\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\alpha;t)$$

För varje fixerat α är ekvationen

$$\hat{u}'_t=-k\alpha^2\hat{u}$$

Separabel!

$$\hat{u}(\alpha;t)=Ce^{-k\alpha^2 t}$$

Begynnelsevillkor (BV) ger:

$$2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}\overset{BV}{=}\hat{u}(\alpha;0)=Ce^{-k\alpha^2\cdot 0}=C$$

$$C=2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Alltså:

$$\hat{u}(\alpha;t)=\frac{2u_0\sin\alpha}{\alpha}e^{-kx^2t}$$

Tillbaka-transformation:

$$u(x;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2u_0\frac{\sin\alpha}{\alpha}e^{-k\alpha^2t}e^{-i\alpha x}\,d\alpha=\{\text{Se boken sida 506}\}=$$

$$\frac{u_0}{\pi}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\alpha}\cdot e^{-k\alpha^2t}\,d\alpha$$

Olika böcker transformerar olika:

Vissa använder $\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}(u(x;t))(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{i\alpha x}\,dx$ och andra använder

$$\hat{u}(\alpha;t)=\mathcal{F}(u(x;t))(\alpha;t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x;t)e^{-i\alpha x}\,dx\quad.$$

Om man använder – vid fouriertransformationen ska man vid fourierintegralen och fourierinversetransformationen använda +.

Använder + vid fouriertransformationen ska man vid fourierintegralen och fourierinversetransformationen använda –.

Sammanfattning av kompendiet

Fourierserieutveckling:

ƒ(t) är definierad och styckvis kontinuerlig i intervallet]d; d+T[.

$$f(t) \sim \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(n) \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b(n) \cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right)$$

$$a(0) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) dt$$

$$a(n) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

$$b(n) = \frac{2}{T} \int_{d}^{d+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) dt$$

ƒ sägs har den fundamentala perioden T om det finns ett minsta tal, T, så att ƒ(t + T) = ƒ(t) för alla reella t.

ƒ:s grundfrekvens $\Phi = 1/T$. Grundfrekvensen talar om hur många perioder (grundsvängningar) som förlöper per tidsenhet.

Grundvinkelfrekvensen $\Omega = 2\pi\Phi = 2\pi/T$.

Koefficienterna a(n) och b(n) talar om hur mycket vi har av vinkelfrekvensen $\omega_n = n\Omega$.

$$f(t) \sim \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a(n) \cdot \cos \Omega t + b(n) \cdot \sin \Omega t \right)$$

a och b kallas Fourierkoefficienter.

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

Detta kan används för att skriva om

$$a(n)\cdot\cos\Omega t + b(n)\cdot\sin\Omega t$$

till

$$a(n)\left(\frac{e^{in\Omega t} + e^{-in\Omega t}}{2}\right) + b(n)\left(\frac{e^{in\Omega t} - e^{-in\Omega t}}{2i}\right) =$$

$$= \left(\frac{a(n) - ib(n)}{2}\right)e^{in\Omega t} + \left(\frac{a(n) + ib(n)}{2}\right)e^{-in\Omega t}$$

Sätt:

$$c(\pm n) = \frac{a(n) \mp ib(n)}{2} \quad , n \in \mathbb{Z}_+$$

$$c(0) = \frac{a(0)}{2}$$

Du kan vi skriva om

$$f(t) \sim \frac{a(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{a(n) - ib(n)}{2}\right)e^{in\Omega t} + \left(\frac{a(n) + ib(n)}{2}\right)e^{-in\Omega t}\right)$$

till

$$f(t) \sim c(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c(n)e^{in\Omega t} + c(-n)e^{-in\Omega t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\Omega t}$$

Notera att

$$c(n) = \frac{a(n) - ib(n)}{2} = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_d^{d+T}\left(\cos n\Omega t - i\sin n\Omega t\right)f(t)dt = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-in\Omega t}dt \quad ,$$

$$c(-n) = \frac{a(n) + ib(n)}{2} = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_d^{d+T}\left(\cos(n\Omega t) + i\sin(n\Omega t)\right)f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{in\Omega t}dt = \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-i(-n)\Omega t}dt$$

samt att

$$c(0)=\frac{a(0)}{2}=\frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)dt=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{i0\Omega t}$$

Detta innebär att

$$c(m)=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-im\Omega t}dt \quad \text{för alla heltal m.}$$

Alltså:

$$f(t)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{in\Omega t} \quad \text{där} \quad c(n)=\frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-in\Omega t}dt$$

eller

$$f(t)\sim\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(c(n)e^{in\Omega t}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-in\Omega t}dt\right)$$

Vi kan beteckna den T-periodiska tillförordningen (=funktionen) $\mathcal{F}_T$, som ger

$$\mathcal{F}_T\{f(t)\}=c(n)$$

Vi kan även beteckna inversen:

$$\mathcal{F}_T^{-1}\{c(n)\}=f(t)$$

Korrespondansen kan skrivas:

$$f(t) \underset{\mathcal{F}_T^{-1}}{\overset{\mathcal{F}_T}{\rightleftarrows}} c(n)$$

Endast periodiska funktioner kan skrivs som Fourierserier, om man vill skriva om en operiodisk funktion på intervallet]–∞; ∞[måste man inställét använda en Fourierintegral:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \quad \text{(Fourierintegral av f)}$$

där

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt \quad \text{(Fouriertransform av f)}$$

Mnemonik:
En *integral* är en summa av en *serie* med infinitesimala steg.

Frekvensspektrat $A(\omega)=|\hat{f}(\omega)|$.

En signal (funktion) som bara har frekvenser inom ett begränsat intervall sägs vara bandbegränsad.

$A(\omega)=|\hat{f}(\omega)|$ är ett mått på "hur mycket" av av frekvensen ω som förekommer i signalen f(t).

F(ω) kan betäkna $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$, på samma sätt kan G(ω) betäkna $\mathcal{F}(g(t))(\omega)$, och så vidare.

Daulitet, linjäritet samt derivering och transformering (inte kopplat till varandra) tas upp; detta är sammafattat i modulsammafattningen.

Även inverstransformen, $\mathcal{F}^{-1}$, är linjär.

Skalnings egenskap hos FT:

Om ƒ(t) har har FT:en $\hat{f}(\omega)$ och a ≠ 0 är en reell konstant sådan att $\mathcal{F}$(ƒ(at)) existerar så är:

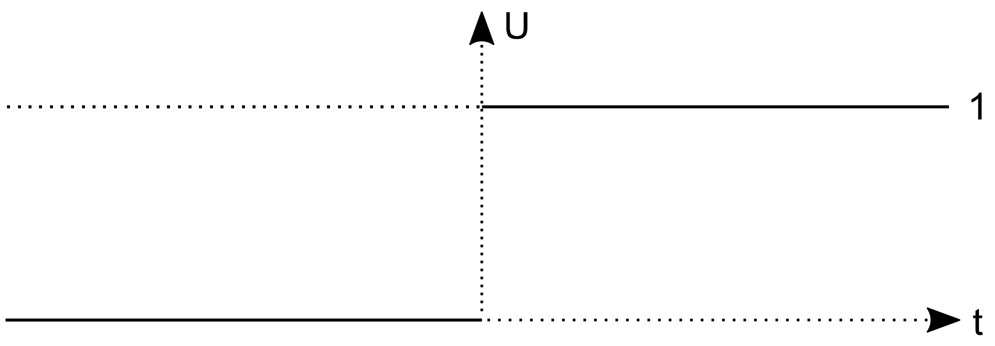
$$\mathcal{F}(f(at))(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

signum ±α = sign ±α = **sgn** ±α = ±1,   α > 0
signum 0 = 0,   Bör dock oftast i matematisken hanteras som odefinerat!!

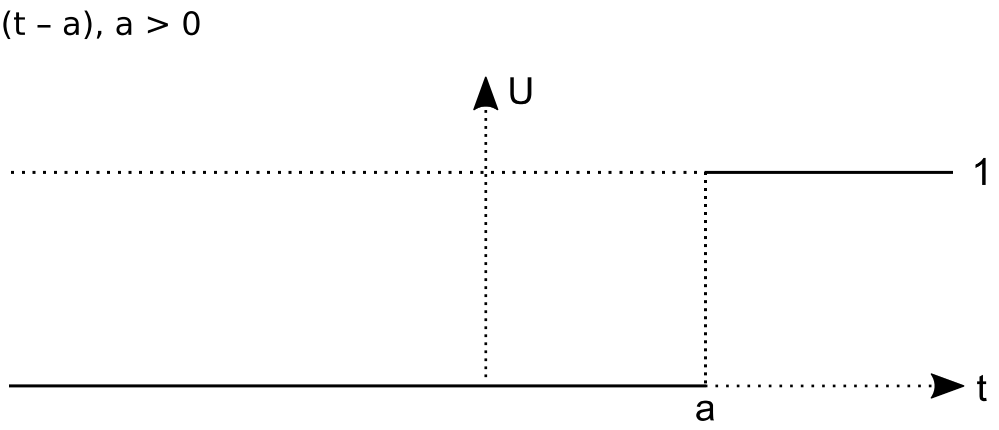
Heavisidefunktionen:

Egen kallad “Unit step function”.

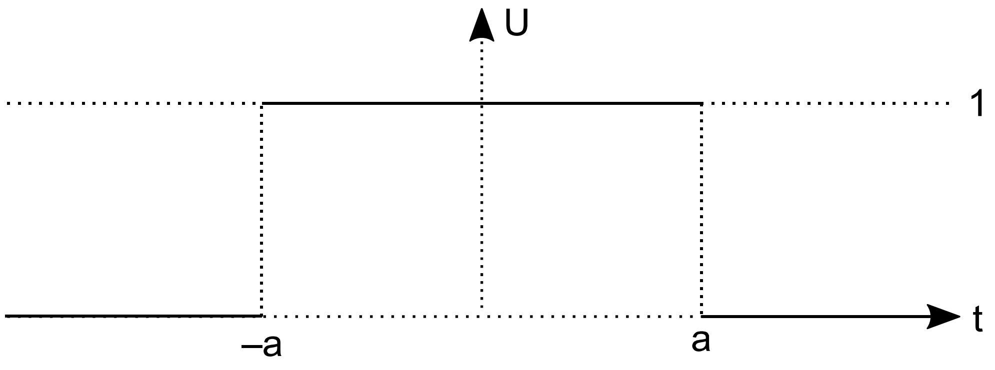
$$U(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t\geq 0 \end{cases}$$



U(t – a), a > 0



$U(t + a) - U(t - a)$



$|t| = t\, U(t) + (-t)\, U(-t)$

Använda beteckningar:

$U(t)$
$H(t)$
$\Theta(t)$
men framför allt
$\mathcal{U}(t)$, vilket jag inte använder på grund av tekniska svårigheter.

Dirac-pulser finns sammanfattat i modulsammafattningen.