[z.c.1.1.21.]

Verifiera att:

$$P(t)=\frac{Ce^t}{1+Ce^t}$$

är en lösning till

$$P'(t)=P(1-P)$$

$$\frac{P'}{P(1-P)}=\Leftrightarrow\left\{\frac{A}{P}+\frac{B}{1-P}:\begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}\right\}\Leftrightarrow P'\left(\frac{1}{P}+\frac{1}{1-P}\right)=1$$

Integrera!

$\ln|P| - \ln|1 - P| = t + C$

$$\ln\left|\frac{P}{1-P}\right|=t+C$$

$$\frac{P}{1-P}=\{P>0\}=e^{t+C}\Rightarrow P=e^{t+C}-Pe^{t+C}$$

$P + Pe^{t+C} = e^{t+C}$

$P(1 + e^{t+C}) = e^{t+C}$

$$P=\frac{e^{t+C}}{1+e^{t+C}}=\{\text{nytt } C\}=\frac{Ce^t}{1+Ce^t}$$

$y' = y^2 + 4$

Konstanta lösningar?

Nej, ty derivatan är aldrig 0.

Lokal extrempunkter?

Nej, ty derivatan är aldrig 0.

Sant/Falskt?

BVP:

$3y^{2/3}, \ y(0)=0$

Har begynnelsevärdeproblemet en entydlig lösning?

$y(x) = 0$ ger $y'(x) = 3 \cdot 0 = 0$

$\therefore$ En lösning

Sats:

$y'_x = f(x; y), \qquad (x; y) \in \mathbb{R}^2$

$y(x_0) = y_0$

om $f(x; y)$ och f'_y är kontinuerliga så har BVP:et ovan en entydlig lösning
för $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$

$f(x; y)$ är oven $3y^{2/3}$, vilket är kontinuerligt.
$f'_y = 2y^{-1/3}$, vilket är icke-kontinuerligt.
Satsen kan inte användas.

Antag: $y \neq 0$

$\therefore \quad y' = 3y^{2/3}$

Separabel!

$$\frac{y'}{y^{2/3}} = 3 \Leftrightarrow y' \cdot y^{-2/3} = 3$$

Integrera!

$$3y^{1/3} = 3x + C$$

$$y^{1/3}=\frac{3x+C}{3}$$

$$y^{1/3}=x+C$$

$$y=(x+C)^3$$

$y(0) = 0$ ger:

$$0=(0+C)^3=C^3=C \quad \Leftrightarrow \quad C=0$$

$y = x^3$

En andra lösning, alltså falskt.

Entydlig lösning
$\because$

$$y'_x=f(x;y) \quad \text{där} \quad f'_y \quad \text{är kontinuerlig.}$$

Exempel:

Klassificera med avseende på stabilitet dem kritiska punkterna till

$$y' = y(2 - y)(4 - y)$$

Bestäm dem värden där

$$\left|\lim_{x\to\infty} y(x)\right|<\infty$$

Lösning:

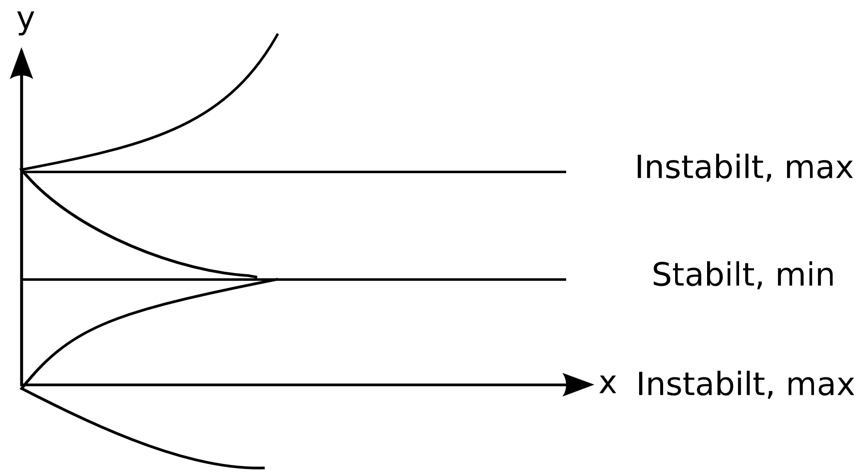
Kritiska punkter till $y' = f(y)$ är punkter C där $f(C) = 0$.

$y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 4$

Om C är en kritisk punkt så är $y(x) = C$ en konstant lösning.

		0		2		4	
y	−	0	+	+	+	+	+
2 – y	+	+	+	0	−	−	−
5 – y	+	+	+	+	+	0	−
resultat	−	0	+	0	−	0	+

Ger:



De startvärden som uppfyller

$$\left|\lim_{x\to\infty} y(x)\right| < \infty$$

ges av *0 ≤ y ≤ 4*.

Exempel:

Antalet kaniner P(t) beskrivs med BVP:

$$P_t' = P(10^{-1} - 10^{-7}P), \quad P(0) = 5000$$

a) Vad är $\lim_{t\to\infty} P(t)$?

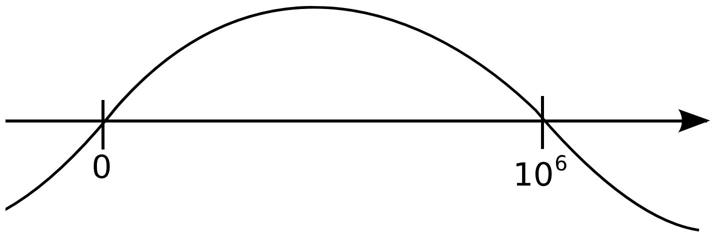
b) Ange t så att $P(t) = \frac{1}{2} \lim_{T\to\infty} P(T)$.

a) Lösning:

Kritiska punkter?

$P_t' = 0$ ges av:

$P(10^{-1} - 10^{-7}P) = 0$
$10^{-1} - 10^{-7}P = 0$
$10^{-1} = 10^{-7}P$
$P = 10^{6}$

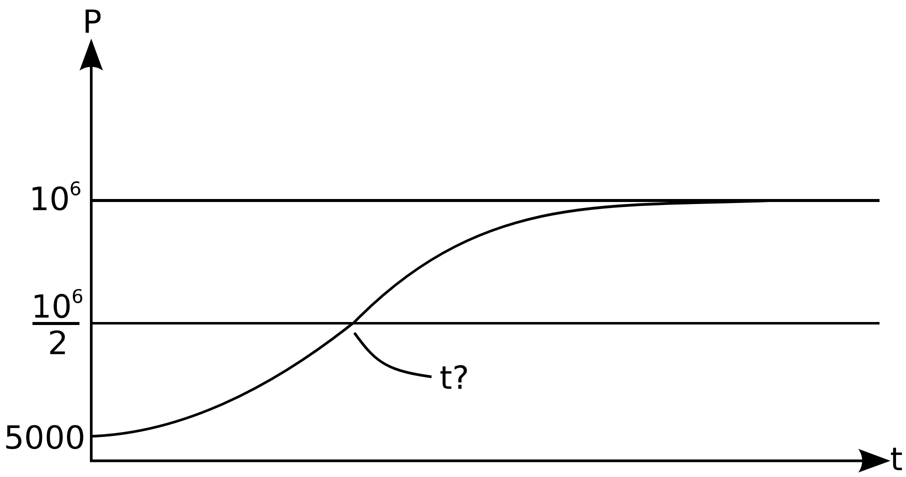


$y = 10^{-7}P(10^6 - P)$

Tolkning:

0 kaniner stannar på 0.
3 kaniner ger 10^6
$0 < y < 10^6$
Över 106 minskar
Om startmängden är 5000 så är svart på a) 10^6.

b)



$$P'_t = 10^{-7} \cdot P \cdot (10^6 - P)$$

Separabel!

$$\frac{P'_t}{P(10^6 - P)} = 10^{-7}$$

$$P'_t\left(\frac{A}{P} + \frac{B}{10^6 - P}\right) = 10^{-7} \iff \begin{cases} A = 10^{-6} \\ B = 10^{-6} \end{cases} \iff P'_t\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{10^6 - P}\right) = 10^{-1}$$

Integrera!

ln |P| = ln |10^6 – P| = 10^{-1}t + C

$$\frac{P}{10^6-P}=e^{10^{-1}t+C}$$

$$\frac{5000}{10^6-5000}=e^{0+C}=e^C\triangleq D$$

$$\frac{P}{10^6-P}=\frac{5000}{10^6-5000}e^{10^{-1}t}$$

P = $5\cdot10^5$ ger:

$$\frac{10^5\cdot5}{10^6-10^5\cdot5}=\frac{5000}{10^6-5000}e^{10^{-1}t}$$

$$1=\frac{5000}{10^6-5000}e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{10^6-5000}{5000}=e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{10^6}{5000}-1=e^{10^{-1}t}$$

$$\frac{1000}{5}-1=200-1=199\ =\ e^{10^{-1}t}=\left(e^t\right)^{(10^{-1})}$$

$$199^{10}=e^t$$

$$\ln\ 199^{10}=t$$

$$t=10\ \ln\ 199$$