$$\vec{X}' = \mathbf{A}(t)\vec{X} + \vec{F}(t)$$

Låt elementen i matrisen $\mathbf{A}(t)$ och vektorn $\vec{F}(t)$
vara kontinuerliga på ett gemensamt intervall, I.
Då har följande begynnelsevärdesproblem en entydig lösning:

$$\vec{X}(t_0) = \vec{X_0}, \quad t_0 \in I$$

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} \qquad [H]$$

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ är lösningar till [H].

Påstående:

$\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2}$ är lösningen till [H].

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ måste vara linjärt oberoende.

$$c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} = \vec{0}$$

Linjärt oberoende då $c_1 = c_2 = 0$.

$$(\vec{X_1} \;\; \vec{X_2}) \neq \vec{0}$$

Allmän lösning: $\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2}$

$$\vec{X} = (\vec{X_1} \;\; \vec{X_2})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi\vec{C}$$

Φ kallas “fundamentalmatris”.

$y' = ay$
$y = Ce^{ax}$

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} = \lambda\vec{K}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} - \lambda\vec{K} = \vec{0}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} - \lambda\mathbf{I}\vec{K} = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

Omforming av höger ordningens ODE

$y'' + y = 0$ $\qquad$ $y = e^{ix}$

Karaktärisktisk ekvation:

$r^2 + r^0 = 0$ $\qquad$ $y = \cos x + i \sin x$

$r = \pm i$ $\qquad$ $y_1 = \Re\, y = \cos x$

$y_2 = \Im\, y = \sin x$

$y = A \cos t + B \sin t$

Sätt $x = y'$

$$\begin{cases} x' = y'' = -y & \because\ y'' + y = 0 \\ y' = x \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\vec{X}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{X}}$$

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

$\lambda = \pm i$

$\lambda = i$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{K}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\vec{K}=\vec{0} \qquad \vec{K_1}=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=e^{it}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=(\cos t+i\sin t)\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+i\cos t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\sin t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}=\Re\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_2}=\Im\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

$$c_1\vec{X_1}+c_2\vec{X_2}=c_1\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

1:a komponenten: $c_1(-\sin t) + c_2\cos t = y$

2:a komponenten: $c_1\cos t + c_2\sin t = x$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer
För få oberoende egenvektorer
Komplex egenvärden

Skilda reella egenvärden

$$\vec{X} = c_1 \vec{K_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{K_2} e^{\lambda_2 t}$$

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer

$$\vec{X} = c_1 \vec{K_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{K_2} e^{\lambda_1 t}$$

Ej tillräckligt många
Multipelt egenvärde med en egenvektor
λ_1 egenvärde med multiplicitet 2 (duplex; två likadana egenvärden).

En lösningen $\vec{X_1} = \vec{K} e^{\lambda_1 t}$

Ansätt: Andra lösningen $\vec{X_2} = (t\vec{L} + \vec{P}) e^{\lambda_1 t}$

Exempel: y'' – 2y' + y = 0

Karaktärisktisk ekvation: $r^2 - 2r + 1 = 0$
$(r - 1)^2 = 0$
$r_{1,2} = 0$

$y = Ae^x + Bxe^x = (A + Bx)e^x$

$$(t\vec{L} + \vec{P}) e^{\lambda_1 t} + \vec{L} e^{\lambda_1 t} = \mathbf{A} \vec{L} t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{A} \vec{P} e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{L} = (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{L} t + (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{P}$$

t^1: $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{L} = \vec{0}$

t^0: $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{P} = \vec{L}$

$\vec{L}$ är en egenvektorer

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{P} = 0 \iff (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^2 \vec{P} = 0$$