Sammanfattning av modul 5

En graf

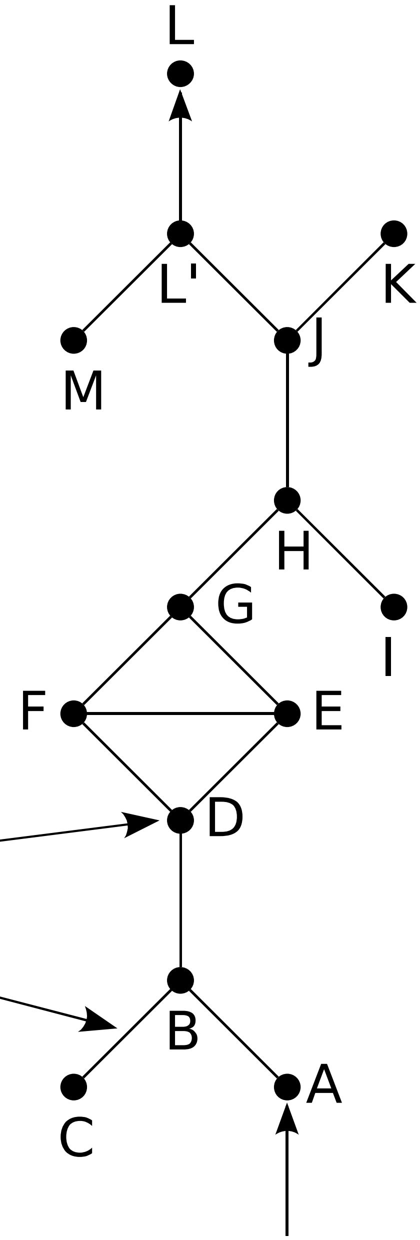
“Teoretisk”, abstrakt

$G = (V, E)$

V — En ändlig mängd, hörn (noder, vertex)
(en. node, vertex (pluralis: vertices)).

E — En mängd av 2-delmängder till V, kanter
(en. edge), (par av olika hörn).

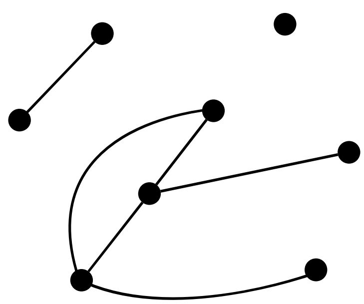
De hörnen är då grannar.



hörn, $V \in D$

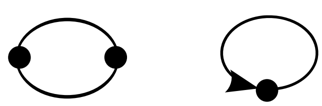
kant, $E \ni CB$

“Praktiskt”

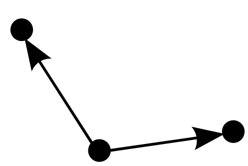


Enkla, oriktade grafer

Inga:



Inte:



Varianter av grafer:

- Oändlig mängder (hörn)
- Riktade kanter
- Viktade kanter
- Öglor
- Multipla kanter

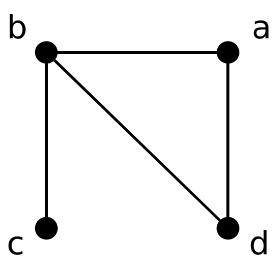
Standardnamn för vissa grafer:

K_n, fullständiga grafen med n hörn, $n \geq 1$
Alla möjliga kanter finns.

C_n, cykliska grafen med n hörn, $n \geq 3$

$K_{m,n}$, fullständiga bipartita grafen, $m, n \geq 1$
$G = (A \sqcup B \, , E = \{ab : a \in A, b \in B\})$

Grannlista för en graf:



a	b	c	d
b	a	b	a
d	c		b
	d		

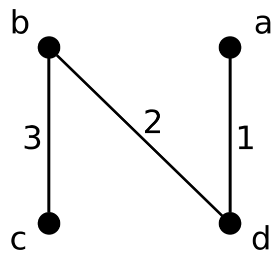
Grannmatris för samma graf:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

För enkel oriktad:
Symmetrisk 0/1-matris,
0:or på diagonalen.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{om } \{ij\} \in E \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Incidentmatris:



$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

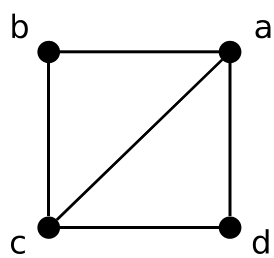
Isomorfi mellan grafer (“strukturlikhet”)

$G_1 = (V_1, E_1)$ är isomorfisk med
$G_2 = (V_2, E_2)$ betyder att det finns en bijektion $\phi : V_1 \to V_2$ så att

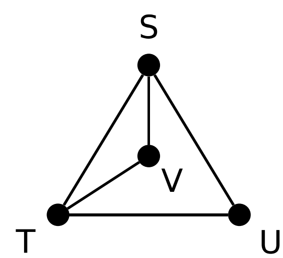
$$\{x, y\} \in E_1 \iff \{\phi(x), \phi(y)\} \in E_2$$

Exempel:

G_1:



och G_2:



är isomorfa med isomorfi $\phi = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ S & V & T & U \end{pmatrix}$.

Valensen (graden) för ett hörn $v \in V$:

$\delta(v)$ = antalet kanter där v ingår, (öglor räknas dubbelt).

En graf är n-reguljär om alla hörn har valens n.

K_n är $(n-1)$-reguljär
C_n är 2-reguljär

Sats:

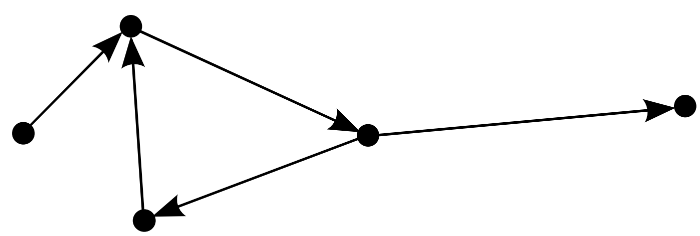
$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

Följdsats:

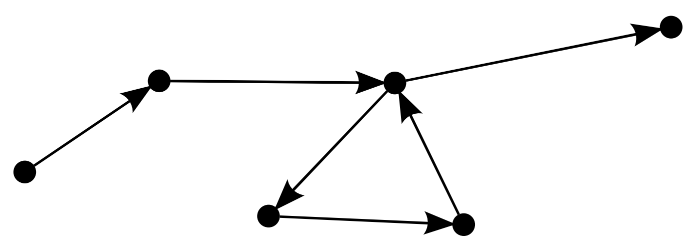
Antalet udda hörn (det vill säga hörn med udda valens) är jämnt.

Namn för olika kantföljder i en graf:

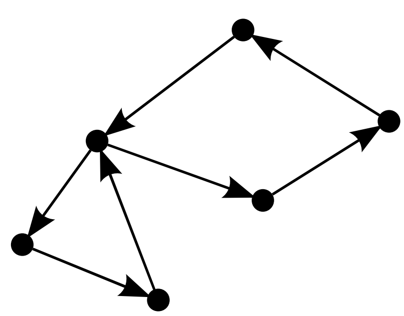
Vandring (en. walk) Från hörn till grannhörn. $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, $v_i \in V$.



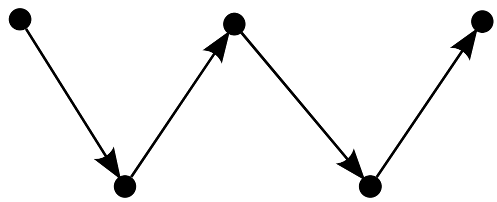
Väg (en. trail) Vandring utan upprepade kanter.



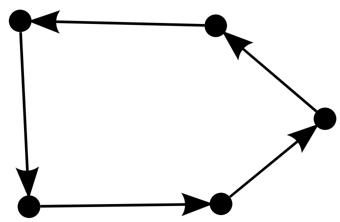
Krets (en. circuit) Sluten väg, $v_1 = v_k$



Stig (en. path) Väg utan upprepade hörn

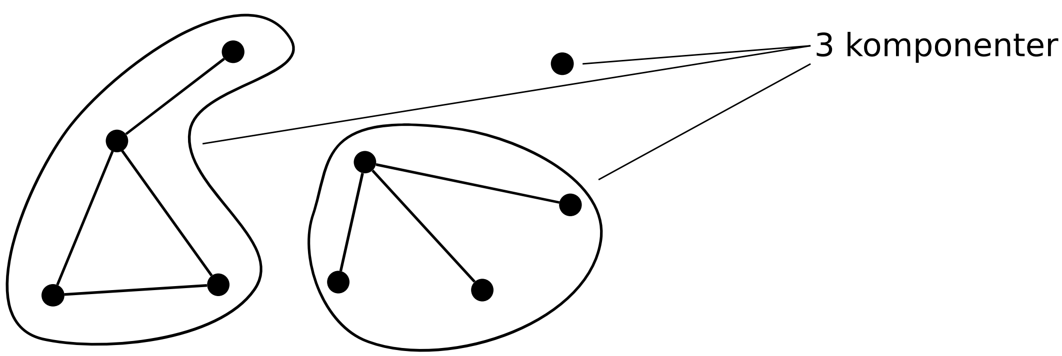


Cykel (en. cycle) Sluten stig



En graf är sammanhängande omm varje par hörn kan
förbindas med en vandring, väg eller stig.

Relationen mellan hörn och att kunna förbindas är en ekvivalensrelation.
Ekvivalens klasser: grafens komponenter



En Eulerväg är en väg som passerar varje kant exakt en gång.

Sats: (Euler) En graf, G, har en Eulerväg omm G är sammanhängande och har högst 2 udda hörn.

G har en Eulerkrets om dessutom alla hörn är jämna.

Man kan sätta ihop en Eulerväg/-krets med flera Eulerkretsar.

En Hamiltonstig/-cykel passerar varje hörn i grafen precis en gång.

Varje komponent i en skog kallas träd:

Ett träd är sammanhängande och icke-cykliskt.

Träd brukar betecknas $T = (V, E)$

För en viktad sammanhängande graf (kant e har vikten $\omega(e)$) kan man finna ett minimalt spännande träd, ett spännande träd med minimal viktsumma, med Kruskals algoritm.

Kruskals algoritm:

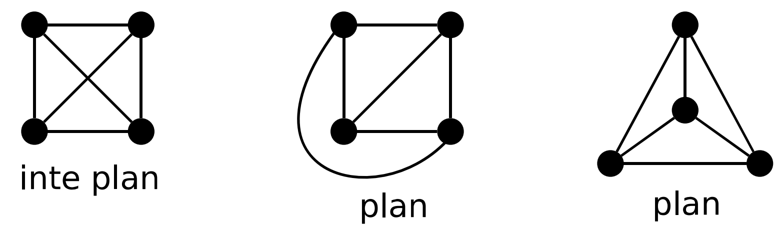
Lägg i vaje steg till den lättaste kanten som inte ger någon cykel med de redan valda.

Planära grafer

Om en graf är ritad i ett plan *eller på en sfär* utan att några kanter korsar,
så kallas grafen plan

En planär graf är en graf som är isomorf med någon plan graf.

Exempel på isomorfa planära grafer (K_4):



Sats:

För en plan graf med v hörn, e kanter, r ytor och c komponenter gäller:

$$v - e + r - c = 1$$ (mnemonik: verk!, naturligtvis med !)

Om grafen är sammanhängande (c = 1):

Eulers polyederformel:

$$v - e + r = 2$$

Satsen ger nödvändiga villkor för planaritet:

Om G, sammanhängande, är enkel (inga ölgor eller multipla kanter),
så begränsas varje uta av minst tre kanter (om $e \geq 2$!).

Så: $$2e = \sum_{\text{områden}} \underbrace{(\text{antalet kanter kring området})}_{\geq 3} \geq 3r$$

Så: $$e \geq \frac{3}{2}r \qquad r \leq \frac{2}{3}e \qquad \Rightarrow \qquad e = v - e + r \leq v - \frac{1}{3}e$$

$$\boxed{3v \geq e + 6}$$

Kuratowskis sats:

Varje icke-planär graf “innehåller” K_5 eller $K_{3,3}$, och vice verse.

det finns en delgraf som är isomorf
med en “subdivision” av K_5 eller $K_{3,3}$.

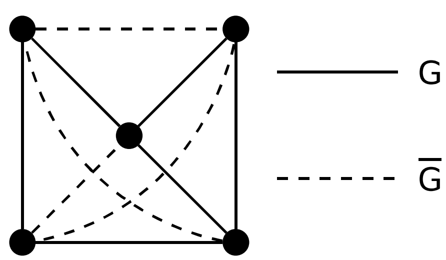
Den graf med extra hörn på kanter.

Wagners sats:

Detsamma med “innehåller” betyder att den har K_5 eller $K_{3,3}$ som minor.
Det vill säga någon kantkontraktion av grafen har K_5 eller $K_{3,3}$ som delgraf.

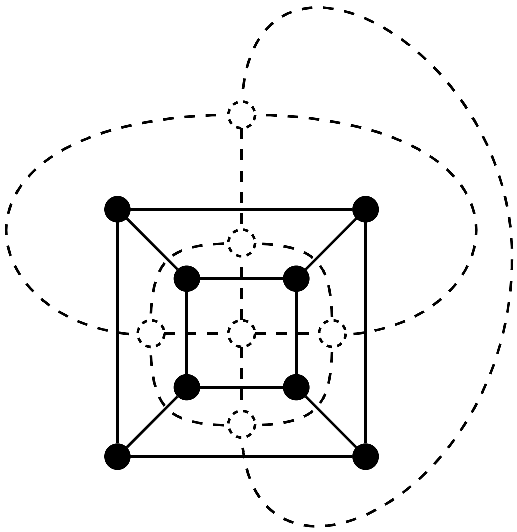
Till grafen $G = (V, E)$ bildas dess komplementgraf
$\overline{G} = (V, E')$ så att $E \cap E' = \varnothing$, $K_n \cong (V, E \cup E')$, $(|V| = n)$,

det vill säga; det går kanter i $\overline{G}$ mellan hörn x och y
omm det inte går en kant mellan dem i G.



Om ett hörn har valens δ i G, har det valens $(n - 1) - \delta$ i $\overline{G}$.

Den duala grafen $G^{\perp}$ till en plan graf G beskriver grannrelationen för ytorna i G.



Hörnen i $G^{\perp}$ svarar mot ytorna i G, en kant i $G^{\perp}$ mot varje kant mellan ytorna.

Den duala grafen kan ha öglor, multipla kanter.

Heldraget:	G	hexaeder
Halvdraget:	$G^{\perp}$	oktaeder

$(G^{\perp})^{\perp} \cong G$

Det kromatiska talet, $\chi(G)$ för G:

Minsta antalet färger som räcker för en hörnfärgning av G.

Exempel:

$\chi(G) \leq |V|$

$\chi(G) = |V| \Leftrightarrow G = K_n$, något n.

$\chi(G) = 2 \Leftrightarrow$ Bipartit, $|E| \geq 1$

$\chi(G) = 1 \Leftrightarrow |E| = 0, |V| \geq 1$

$\chi(G) = 0 \Leftrightarrow |V| = 0$

I allmänhet svårt att bestämma $\chi(G)$.

En girig algoritm (ger ofta ganska bra värden):

1) Ordna V: $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $\quad n = |V|$

2) Välj i tur och ordning $c(v_1) = 1$, $c(v_2)$, $c(v_3)$, … minsta tillåtna värde (med hänsyn till redan färgade grannar).

Alla planära grafer kan hörnfärgas med 4 färger:

6-färgssatsen
5-färgssatsen
4-färgssatsen

Kromatiska polynomet för en graf $G = (V, E)$:

$P_G(\lambda)$ — antalet sätt att hörnfärga grafen G med λ färger.

Rekursion för att finna $P_G(\lambda)$:

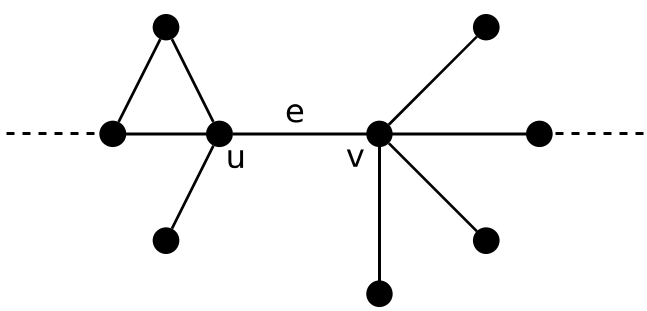
Låt $e \in E$ i $G = (V, E)$

Låt $G - e$: G med e borttagen
G/e: G med e kontraherad

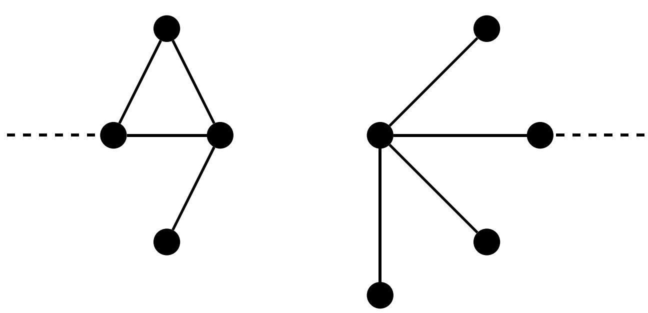
Då $P_{G-e}(\lambda) = P_G(\lambda) + P_{G/e}(\lambda)$ (additionsprincipen)

$P_{(V,\emptyset)}(\lambda) = \lambda^{|V|}$

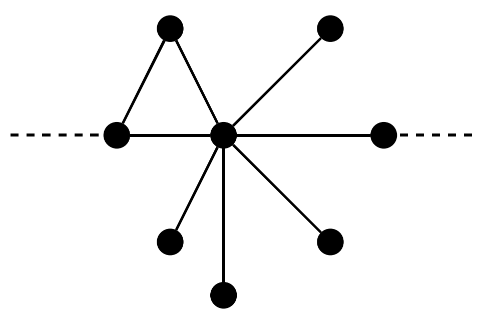
G:



G − e:



G/e:



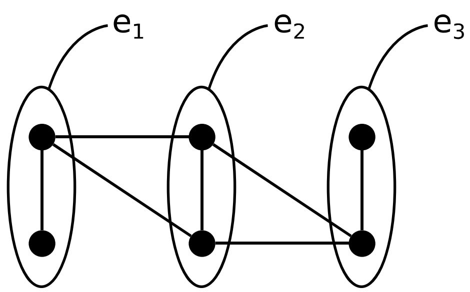
Med induktion (över antalet kanter) kan man visa:

$P_G(\lambda)$ är ett polynom i λ.

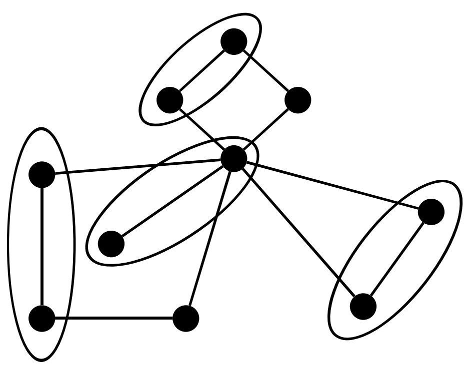
höstagradstermen: $\lambda^{|V|}$
nästagradstermen: $-|E|\lambda^{|V|-1}$
koefficienterna är heltal, alternerande ≥ 0, ≤ 0.

Matchning i grafen $G = (V, E)$

en delmängd M till E ($M \subseteq E$) med parvis disjunkta kanter ($\delta(v) \leq 1$).



Fullständig matchning, alla hörn ingår i en kant $M = \{e_1, e_2, e_3\}$.



Maximal matchning
$|M|$ maximal

Vi talar här om matchning i bipartita grafer, $G = (X \sqcup Y, E)$.

För dem kallar vi en matchning fullständig om $|M| = |X| \leq |Y|$.

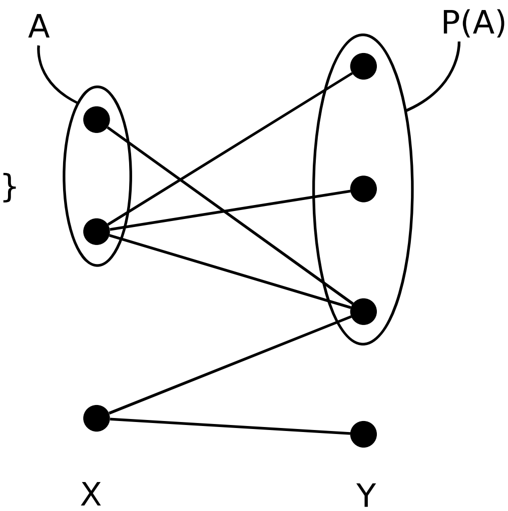
Halls sats: (giftermålssatsen)

En bipartit graf $G = (X \sqcup Y, E)$ har en fullständig matchning omm

$$|P(A)| \geq |A| \text{ för alla } A \subseteq X$$

där

$$P(A) = \{y \in Y \mid \{x, y\} \in E, \text{ något } x \in X\}$$



Sats:

En maximal matchning M av en bipartit graf har storlek $|M| = |X| - \delta(G)$

$$\delta(G) = \max_{A \subseteq X} \{|A| - |P(A)|\} \geq 0, \quad \text{G:s defekt (G:s underskott)}$$

Sats:

En matchning M i en bipartit graf G är maximal omm det inte finns en utökande alternerande stig för M i G. (Ger en algoritm för att finna maximal matchning.)

Övningsuppgift:

Om transversaler (så Halls sats formulerades först) (boken DMF sida 244) att finna "distinkta representanter" med $m_i \in M_i$ och $m_i \neq m_j$ om $i \neq j$. Finns de?

Halls sats säger att det går omm

$$\left|\bigcup_{i \in A} M_i\right| \geq |A| \quad \text{för alla } A \subseteq I, \ I \text{ ändlig.}$$

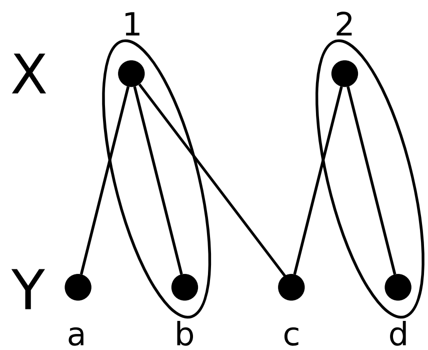
Ty:

Vi söker en fullständig matchning i en bipartit graf med

$$X = I,\ Y = \bigcup_{i \in I} M_i \quad \text{och}$$

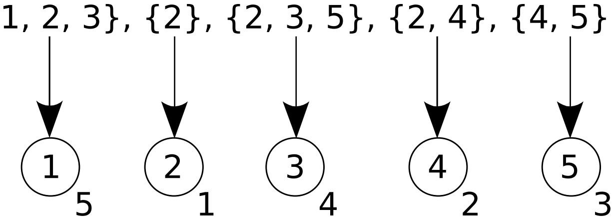
kanter mellan $i \in I$ och alla element i M_i,

$$M_1 = \{a, b, c\}, \quad M_2 = \{c, d\}.$$



Vi söker en transversal till mängderna

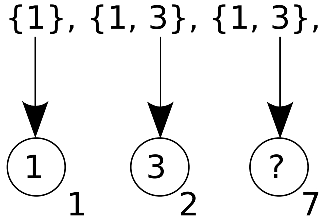
$\{1, 2, 3\}, \{2\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}$



Varför finns ingen transversal till

$\overset{M_1}{\{1\}}, \overset{M_2}{\{1, 3\}}, \overset{M_3}{\{1, 3\}}, \{2, 3, 4, 5\}$

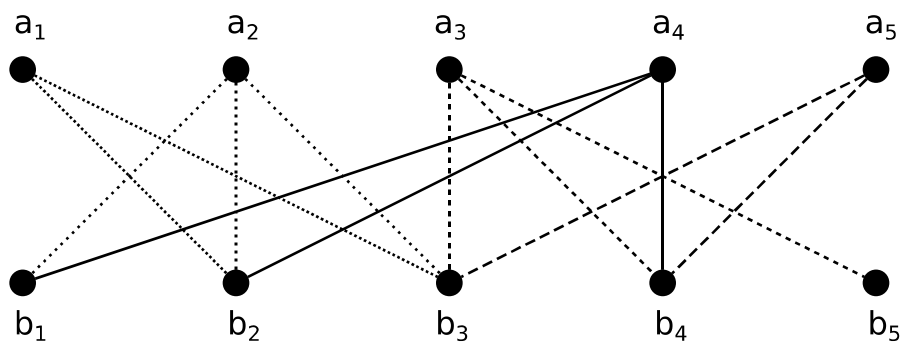
alt 1:



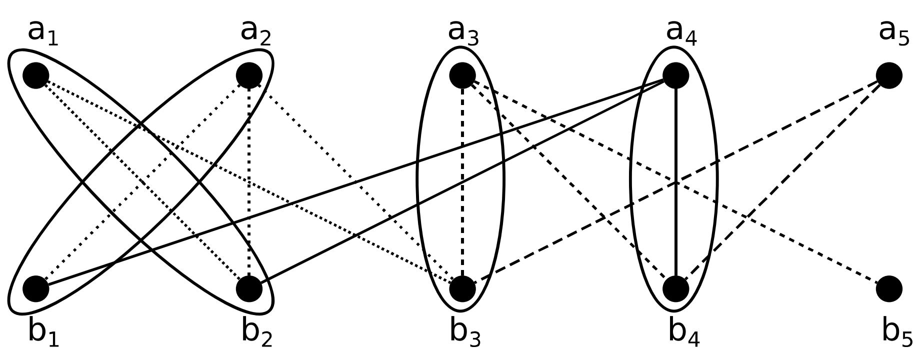
alt 2: Halls sats mängderna 1, 2, 3 har bara två element tillsammans, det vill säga färre element tillsammas än antalet mängder: ingen transversal.

Övningsuppgift:

Vi söker en fullständig matchningen till grafen

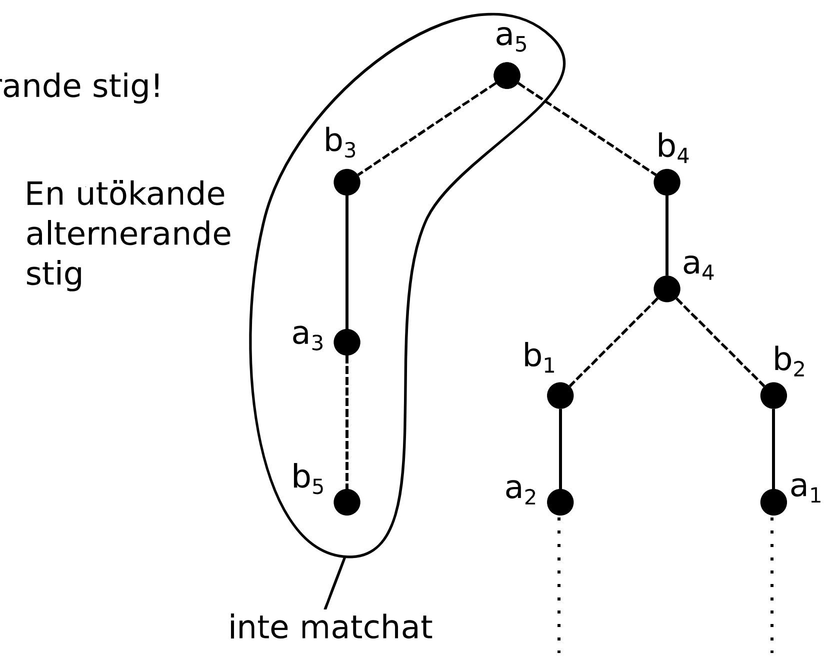


Efter 4 steg fås den ritade matchningen (nedan).
(Första lediga partiella matchningen tages, för varje a.)

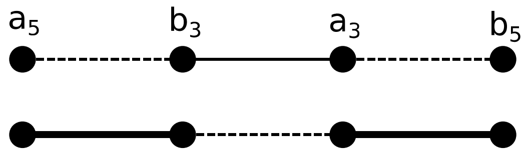


Hur skall a_5 matchas?

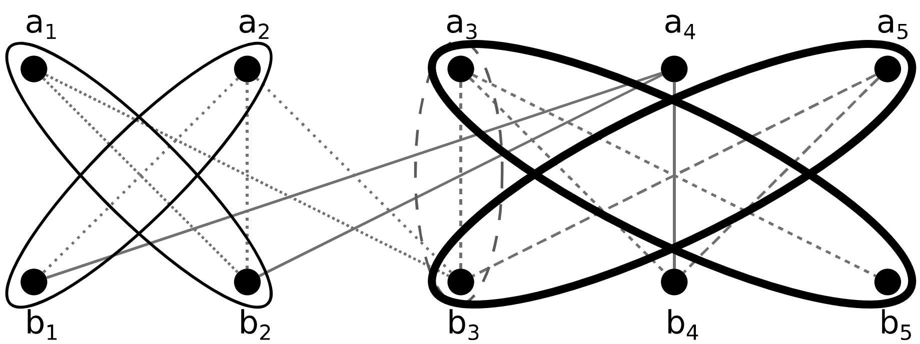
Sök en utökande alternerande stig!



Byt i den alternerande stigen.



Ger:



Övningsuppgift:

10 skrivande, 10 uppgifter.

Varje skrivande klarade minst 4 uppgifter.
Varje uppgift klarades av minst 5 skrivande.

A en mängd skrivande, $A \neq \emptyset$, $|P(A)| \geq 4$ (alla klarade minst 4)

Mängden uppgifter som någon i klarade.

$|A| > 4$ ger $|P(A)| = 10$

Varje uppgift klarades av ingen i A.
Så $|P(A)| \geq |A|$ för alla A — Halls sats…