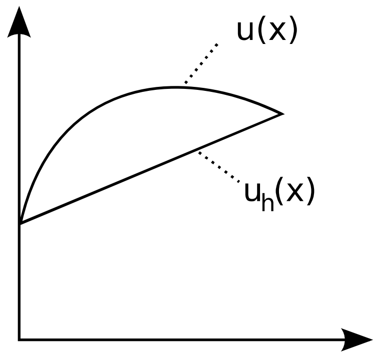
Styckvis linjär interpolation



$$|u(x)-u_h(x)| \leq C \cdot C_0 \cdot h^2,$$

$$C = \max_{x \in [0;h]} |u''(x)|, \quad C_0 = \frac{1}{8}$$

(För första steget,
vid nästa steg
måste gränserna för
x ändras)

Felkontroll:

Garantera att $|u(x)-u_h(x)| < TOL =$ “tolerans”

N stycken intervall

För varje intervall

max felbidrag: $\dfrac{TOL}{N}$

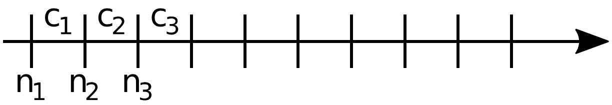
Detta är uppfyllt om $C \cdot C_0 \cdot h^2 < \dfrac{TOL}{N}$ för varje intervall.

1) Lägg till flera intervall (och noder) — h-adaptivitet

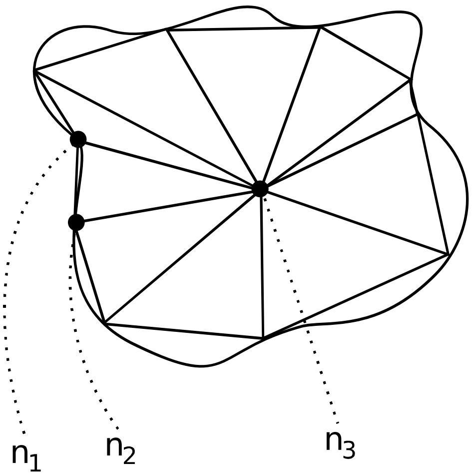
2) Öka approximationsordning — p-adaptivitet

3) Flytta noder — r-adaptivitet

Mesh



ID: $n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_2 & n_3 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$



ID: $n = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$

$$\int_\Omega t(x)\,dx \approx \sum_{C \in \tau} \sum_{n \in C} \frac{1}{3} f(x_n)|C|$$, där $|C|$ är arean av cellen.

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(t) \\ u(0) = u^0 \end{cases} \qquad t \in]0; \tau]$$

Euler framåt $u((n+1)k) = u(nk) + f(nk) \cdot k$

Felet $\leq \frac{LT}{2} k$

Ordinär differentialekvation

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = f(u(t)) \\ u(0) = u^0 \end{cases}$$

Framåt Euler

$$u((n+1)k) = u(nk) + f(u(nk))\cdot k$$

(explicit Euler)

Bakåt Euler

$$u((n+1)k) = u(nk) + f(u[(n+1)k])\cdot k$$

(implicit Euler)

Trapetsregeln:

$$u((n+1)k)=u(nk)+\frac{k}{2}\left(f(u[nk])+f(u[(n+1)k])\right)$$

Exempel

$$\begin{cases}\dot{u}(t)=u(t)\\ u(0)=1\end{cases},\quad t\in[0;2],\ u(t)=e^t$$

ODE

$$u(t)=\overrightarrow{(u_1(t);\,u_2(t))}$$

$$\begin{cases}\dot{u}(t)=f(u(t))\\ u(0)=u^0\end{cases}$$

$$\dot{u}_1(t)=f_1(u(t))$$

$$\dot{u}_2(t)=f_2(u(t))$$

$$u_1(t)=u_1^0$$

$$u_2(t)=u_2^0$$

Exempel:

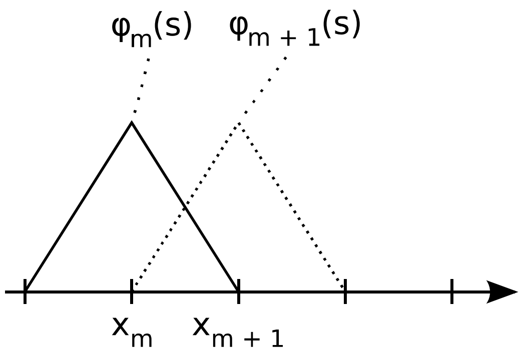
Volterra-Lotka (“predetor-prey system”)

$$\dot{u}_1(t)=u_1(t)\left(\alpha-\beta u_2(t)\right)$$

$$\dot{u}_2(t)=u_2(t)\left(\gamma-\delta u_1(t)\right)$$

$$u_n(x)=\sum_{i=1}^{N} u_i\,\varphi_i(x)$$

$$\varphi_i(x_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0\end{cases}$$



Exempel: Kemisk reaktion:

ämnen A, B, C, D
(konc.)

1. A + B → 2B

2. B + C → 2C

3. C → D

Differentialekvationsbidrag:

1. $\dot{A}(t)=-k_1 A(t)B(t)$

$\dot{B}(t)=k_1 A(t)B(t)$

2. $\dot{B}(t) = -k_2 B(t) C(t)$

$\dot{C}(t) = k_2 B(t) C(t)$

3. $\dot{C}(t) = -k_3 C(t)$

$\dot{D}(t) = k_3 C(t)$

Sätt $u(t) = \begin{bmatrix} A(t) \\ B(t) \\ C(t) \\ D(t) \end{bmatrix}$

$$\dot{u}_1(t) = -k_1 u_1(t) u_2(t)$$

$$\dot{u}_2(t) = k_1 u_1(t) u_2(t) - k_2 u_2(t) u_3(t)$$

$$\dot{u}_3(t) = k_2 u_2(t) u_3(t) - k_3 u_3(t)$$

$$\dot{u}_4(t) = k_3 u_3(t)$$

Exempel: Mass-fjäder system

M=1

x(t) — position
v(t) — hastighet

(1) $\dot{x}(t) = \dot{v}(t)$

(2) $\dot{v}(t) = F(t) = -x$

Tidsderivata av (1):

$$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) \underset{(2)}{=} -x$$