Linjär:

$$xy' - 2y = x^3, \quad x > 0$$

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \quad (*)$$

$$P(x) = -\frac{2}{x}$$

$$\int P(x)\,dx = \int -\frac{2}{x}\,dx$$

$$\int P(x)\,dx = -2\ln x$$

$$e^{\int P(x)\,dx} = e^{-2\ln x} = \frac{1}{x^2} \quad (\dagger)$$

Multiplicera (*) med (†).

$$\frac{1}{x^2}y' - \frac{2}{x^3}y = 1 \quad (\ddagger)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = 1 \quad (\ddagger)$$

Kontrollera både (‡).

Integrera med avseende på *x*.

$$\frac{y}{x^2} = x + C$$

$$y = \underset{\substack{\uparrow \\ y_p}}{x^3} + \underset{\substack{\uparrow \\ y_h}}{Cx^2}$$

Substitutioner:

Homogena:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Sätt z = y/x. y = xz, y' = xz' + z

xz' + z = f(z)

xz' = f(z) – z

Separabel!

Bernoullska:

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y=f(x)y^{\alpha},\ \ 1\neq\alpha\neq 2,\alpha\in\mathbb{R}$$

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-\alpha}=f(x)$$

Sätt $z=y^{1-\alpha}, z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$

$$\frac{z'}{1-\alpha}+P(x)z=f(x)$$

Linjärt!

Begynnelsevärdesproblem (BVP)

$$\frac{dy}{dx}=f(x;y),\ \ y(x_0)=y_0$$

Exempel:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Rita up koordinatsystem och rita in lutning för (x; y) punkter då

- y = 0, x' = ±∞
- x = 0, y' = 0
- y = –x, y' = 1
- y = x, y = –1

Man ser att cirklar bildas.
Stämmer det?

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

Läraren är synsk!

$$\int \left(2y\frac{dy}{dx} + 2x\right) dx = \int dx$$

$$\int 2y\frac{dy}{dx} dx + \int 2x\, dx = \int dx$$

$$\int 2y\, dy + \int 2x\, dx = \int dx$$

$$y^2 + x^2 = C$$

Ja, det stämmer!

$$y^2 + x^2 = r^2$$

[z.c.2.1.17.]

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$$

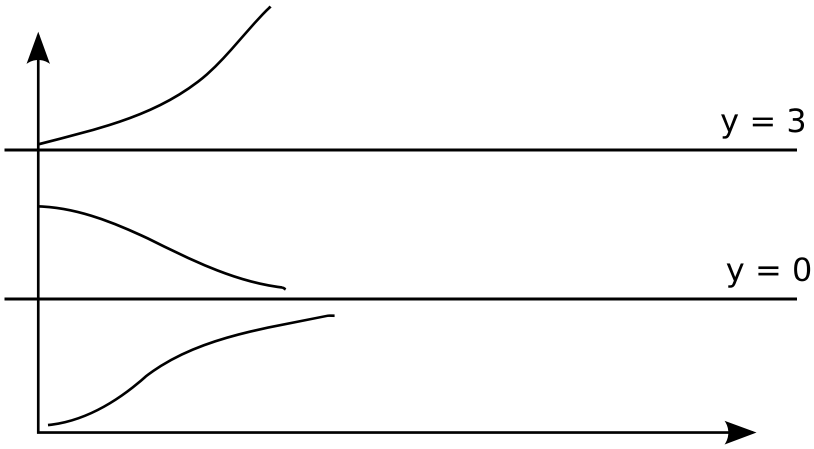
Kritiska punkter: $\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y = y(y-3) = 0$

Kritiska punkter: y = 0 & y = 3

Fasporträtt (faslinje)

——→——|——←——|——→——
0 3
\+ – + :derivata

y = 0 är asymptotiskt stabil.
y = 3 är instabil.



Bernoullsk, separabel & autonom.

[z.c.2.5.6.]

$$(y^2+xy)dx+x^2dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}=0$$

Homogent högerled & bernoullsk!

Sätt z = y/x, y = xz, y´ = xz´ + z.

xz´ + z + z² + z = 0
xz´ = z(z + 2)

Separabel!

a)

z = 0, z = –2, y = 0, y = –2x

b)

0 ≠ z ≠ 2:

$$\frac{z'}{z(z+2)}=-\frac{1}{x}$$

Handpåläggning eller annan metod ger:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2}\right)z'=-\frac{1}{x}$$

∫ … dx ger:

ln |z| - ln |z + 2| = –2 ln |x| + ln |C|

$$\ln\left|\frac{z}{z+2}\right|=\ln\left|\frac{C}{x^2}\right|$$

$$\frac{z}{z+2}=\pm\frac{C}{x^2}=\frac{C}{x^2}$$

$$C=\frac{x^2\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+2}=\frac{xy}{\frac{y}{x}+2}=\frac{x^2y}{y+2x}$$

$x^2y = C(y + 2x)$

y = 0 finns med

y = -2x finns också med

[z.c.2.2.24.]

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{x^2-1}, \quad y(2)=2$$

Separabel!

Ansätt y = x:

V.L. = 1

H.L. = $\frac{x^2-1}{x^2-1}$ = 1

y(2) = 2

OK!

Enda lösningen.