2010–(09)sep–06: dag 1, 6

Modul 2:

> Högre ordningens ODE.
> System av linjära ODE.
> Autonoma system. Stabilitet.

Differentialekvationer av högre ordning:

$$\mathcal{L}(D)y = \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = g(x)$$

$$\mathcal{L}(D)(c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)) = c_1 \mathcal{L}(D) y_1(x) + c_2 \mathcal{L}(D) y_2(x)$$

Reduktion av ordning:

$\mathcal{L}(D)y = 0$

y_1 är en kände icke-trivial lösning.

$y(x) = u(x)y_1(x)$.

$\mathcal{L}(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende.

Lösningar till den homogena ekvationen:

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$(u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2)(x) \triangleq y(x)$

En partikulärlösning sökes.

Välj: $y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$

Då erhålles: $y_1' \cdot u_1' + y_2' \cdot u_2' = f$

Matrisform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Entydlig lösning:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Cramers regel:

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}} \qquad u_2'=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}}$$

Ange en fundamentalmängd av lösningar till differentialekvationen

$$x(y'' - 2y' + y) = 0, \qquad x > 0$$

samt en partikulärlösning till differentialekvationen

$$x(y'' - 2y' + y) = e^x, \qquad x > 0$$

$y'' - 2y' + y = 0, \qquad y_1 \triangleq e^x$

$y = e^x z(x)$

$e^x \cdot x((z'' + 2z' + z) - 2(z' + z) + z) = e^x$

$z'' = 1 / x \qquad (*)$

$z' = \ln x + C$

$y' = e^x z' + e^x z$

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + D$

$z = x \ln x - x + Cx + D$

$y = e^x z = e^x(x \ln x - x + Cx + D)$

$y = Cxe^x + De^x + e^x(x \ln x - x)$

$y_p = e^x(x \ln x - x)$

$(xe^x;\ \ e^x)$

(*) $\because$

$e^x x z'' = e^x$

$xz'' = 1$

$z'' = 1 / x$

$x(y'' - 2y' + y) = e^x, \qquad x > 0$

$y_h \triangleq u(x)xe^x + v(x)e^x \qquad\qquad u_1 = u \qquad u_2 = v$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} xe^x & e^x \\ xe^x+e^x & e^x \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{x} \end{pmatrix}$$

$|\mathbf{A}| = -e^{2x}$

$$u'(x)=\frac{1}{-e^{2x}}\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x \end{vmatrix}=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=\frac{1}{-e^{2x}}\begin{vmatrix} xe^x & 0 \\ xe^x+e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix}=-1$$

$u(x) = \ln |x| = \{x > 0\} = \ln x$
$v(x) = -x$

$y_p = xe^x(\ln x - 1)$

System av linjära första ordningens ODE.

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

Exempel:

$y' = ay$
$y = Ce^{ax}$

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

2010−(09)sep−08: dag 2, 7

Reduktion av ordning:

$L(D)y = 0$
y_1 är en känd icke-trivial lösning.

$y(x) \triangleq u(x)y_1(x)$
$L(D)y = g(x)$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$

Låt y_1 och y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen

$$y = C_1y_1 + C_2y_2$$

En partikulärlösning sökes.
Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$
Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f$

System av linjära första ordningens ODE:

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K}e^{\lambda t}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

Två lösningar till $\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$:

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$

Då är även $\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2}$ lösningar.

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ är linjärt oberoende.

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}\vec{X_1} & \vec{X_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Phi}\vec{C}$$

$\boldsymbol{\Phi}$ är en fundamentalmatris.

Variation av parametrar:

$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$, $\vec{X}=\boldsymbol{\Phi}(t)\vec{C}$ $\quad\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$ är homogen

$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}+\vec{F}$ $\quad$ inhomogen

$$\vec{X_p}=\boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}'(t)\vec{U}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}'(t)=\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}(t)+\vec{F}(t)$$

$$\underbrace{\left(\boldsymbol{\Phi}'(t)-\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}(t)\right)}_{\mathbf{0}}\vec{U}(t)+\boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}'(t)=\vec{F}(t)$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)\vec{U}'(t)=\vec{F}(t)$$

$\vec{U}'(t)=\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)$ $\quad\because$ det $\boldsymbol{\Phi}\neq 0$

Plana autonoma system och stabilitet:

$$\vec{x}'=\vec{g}(\vec{x})$$

Plant autonomt system:

$\dfrac{dx}{dt}=P(x;y)$ $\quad\dfrac{dy}{dt}=Q(x;y)$

$\vec{x_1}$ är en kritisk punkt till $\vec{x}'=\vec{g}(\vec{x})$

Taylorutveckling!

$$\vec{x_1}=\vec{g}(\vec{x})=\vec{g}(\vec{x_1})+\vec{g}(\vec{x_1})(\vec{x}-\vec{x_1})+\vec{R_1}$$

$$\vec{x}'\approx\vec{g}(\vec{x_1})(\vec{x}-\vec{x_1})$$

$\because$

$\vec{x_1}$ är en kritisk punkt, $\vec{g}(\vec{x_1})=\vec{0}$

4 kap.:

Begynnelsevärdesproblem
Randvärdesproblem
Linjärt oberoende
Wronskian/Wronskideterminanten
Fundamentallösningar
Homogena lösningar
Allmäna lösningar

Begynnelsevärdesproblem:

$$L(D)y = a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

Låt $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ & $g(x)$ vara kontinuerliga på ett intervall, I, och låt $a_2(x) \neq 0\ \forall x \in I$.
För varje godtycklig punkt $x = x_0 \in I$ existerar en entydlig lösning $y(x)$ på intervallet I.

Randvärdesproblem:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, kan vara derivator av *y*, och inte bara *y*.

[z.c.4.1.13.]

$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

Lösningar till $y'' - 2y' + 2y = 0$

$y' = c_1 e^x(\cos x - \sin x) + c_2 e^x(\sin x + \cos x)$

a)

Villkor: $\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ 0 = y'(\pi) = -e^{\pi}(c_1 + c_2) \end{cases}$

$y = e^x(\cos x - \sin x)$

b)

Villkor: $\begin{cases} 1 = y(0) = c_1 \\ -1 = y'(\pi) = -e^{\pi} c_1 \end{cases}$

Saknar lösning

$\because$

$c_1 \neq -e^{\pi} c_1$

$\because$

$e^{\pi} \neq 1$

Villkor: $\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 \\ 0 = y'(\pi) = -e^{\pi} c_1 \end{cases}$

$y = c_2 \cdot e^x \cdot \sin x$

Linjärt oberoende:

$\{f_1(x); f_2(x)\}$ är linjärt beroende på ett intervall, I, om det existerar konstanter, c_1 och c_2, alla ej lika med noll, så att $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$, $\forall\ x \in I$.

Om $\{f_1(x); f_2(x)\}$ ej är linjärt beroende på intervallet I så är $\{f_1(x); f_2(x)\}$ linjärt oberoende.

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$

Derivera med avseende på *x*!

$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Linjärt oberoende: $c_1 = c_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Entydlig lösning.

Wronskian (eller wronskideterminant):

Låt funktionerna $f_1(x)$ & $f_2(x)$ vara deriverbara.

Wronskideterminanten är $W(f_1; f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$

För flera variabler:

$$W\left(\coprod_{i=0}^{n} f_i\right) = \left| \coprod_{i=0}^{n} \downarrow \coprod_{j=0}^{n} \rightarrow f_j^{(i)} \right|$$

Låt y_1 & y_2 vara lösningar till, den snart definierade, [IH] på ett intervall, I.
Då är $\{y_1; y_2\}$ linjärt oberoende på I
$\therefore$
$W(y_1; y_2) \neq 0, \forall x \in I$

Variation av parametrar:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ [IH]

Låt y_1 & y_2 vara linjärt oberoende lösningar till den homogena ekvationen

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y(x) \triangleq (u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2)(x)$

Insättning i [IH] ger:

Här skulle färger vara bra, men för svart-vit utskrift-vänlighet, så makerar jag saker med [ ] med index.

$$Q([y_1u_1]_0 + [y_2u_2]_1) + P([y_1'u_1]_0 + y_1u_1' + [y_2'u_2]_1 + y_2u_2') +$$
$$+ [y_1''u_1]_0 + y_1'u_1' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ [y_2''u_2]_1 + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' = f$$

$$[u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1)]_0 + [u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2)]_1 +$$
$$+ [y_1'u_1' + y_2'u_2']_2 + [y_2'u_2' + y_2u_2'' + y_1'u_1' + y_1u_1'']_3 +$$
$$+ P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

$$[y_1'u_1' + y_2'u_2']_2 + [\frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2')]_3 + P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

En partikulärlösning sökes.

Välj: $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$

Då erhålles: $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f$

Färg variant:

Insättning i [IH] ger:

$$Q(y_1u_1 + y_2u_2) + P(y_1'u_1 + y_1u_1' + y_2'u_2 + y_2u_2') +$$
$$+ y_1''u_1 + y_1'u_1' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ y_2''u_2 + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' = f$$

$$u_1(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + u_2(y_2'' + Py_2' + Qy_2) +$$
$$+ y_1'u_1' + y_2'u_2' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' +$$
$$+ P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

$$y_1'u_1' + y_2'u_2' + \frac{d}{dx}(y_1u_1' + y_2u_2') + P(y_1u_1' + y_2u_2') = f$$

2010–(09)sep–09: dag 3, 8

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n}$$

$g(x) \neq 0$ — inhomogen
$g(x) = 0$ — homogen

[z.c.4.1.7.]

$x(t)\ c_1 \cos \omega t = c_2 \sin \omega t$

är den allmäna lösningen till

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

Visa att den lösningen som uppfyller

$$x(0) = x_0 \quad (1) \quad \text{samt} \quad x'(0) = x_1 \quad (2)$$

är

$$x(t) = x_0 \cos\ \omega t + \frac{x_1}{\omega} \sin \omega t$$

$x(t)$ uppfyller (1):

$$x_0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Leftrightarrow x_0 = c_1$$

$x(t)$ uppfyller (2):

$$x'(t) = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t$$

$x'(0) = x_1$:

$$x_1 = -c_1\omega \sin 0 + c_2\omega \cos 0 = c_2\omega$$

Funktionerna $\coprod_{i=0}^{n} f_i$ är linjärt beroende om det finns konstanter, $\coprod_{i=0}^{n} C_i$,

så att $\sum_{i=0}^{n} C_i f_i = 0$

[z.c.4.1.17.]

$f_1(x) = 5, \quad f_2(x) = \cos^2 x, \quad f_3(x) = \sin^2 x$

Linjärt beroende?

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 = f_2 + f_3$

$c_2 = c_3$

$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$
$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_2 f_3 = 0$
$c_1 f_1 + c_2 (f_2 + f_3) = 0$
$c_1 \cdot 5 + c_2 \cdot 1 = 0$

$c_2 = -5c_1$

$c_1 \cdot 5 - 5c_1 \cdot 1 = 0$

$5(c_1 - c_1) = 0$
$0 = 0$

Linjärt beroende!

[z.c.4.1.40.]

Är $f_1(x) = e^{x+2}$ och $f_2(x) = e^{x-3}$ linjärt beroende?

$f_1(x) = e^{x+2} = e^2 e^x = k_1 e^x$
$f_2(x) = e^{x-3} = e^{-3} e^x = k_2 e^x$

Ja, båda är på formen ke^x.

[z.c.4.1.23.]

Visa att funktionerna e^{-3x} & e^{4x} utgör en fundamentalmängd till ekvationen

$$y'' - y' - 12y = 0$$

1) Antalet funktioner är lika många som ekvations ordningsnummer:

“ordning” = 2 ≍ 2 = “funktioner”

2) Funktionerna är lösningar till ekvationen. (Kolla själv!)

3) $W(e^{-3x}; e^{4x}) \neq 0$:

$$W(f_1;f_2)=\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$$

$$W(e^{-3x};e^{4x})=\begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{4x} \\ -3e^{-3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix}=(4+3)e^{(4-3)x}=7e^{x}\neq 0$$

[z.c.4.2.9.]

Lös $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$, om $y_1 = x^4$ är en lösning!

Substitution: $y \triangleq y_1 \cdot u$

$y' = (y_1u)' = y_1'u + y_1u'$

$y'' = (y_1'u + y_1u')' = (y_1'u)' + (y_1u')' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u''$

$$\begin{aligned}
0 &= x^2y'' - 7xy' + 16y = \\
&= x^2y_1''u + 2x^2y_1'u' + x^2y_1u'' - 7xy_1'u - 7xy_1u' + 16y_1u = \\
&= u\cdot([x^2y_1'' - 7xy_1' + 16y_1]_0) + u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1 = \\
&= \{[\ldots]_0 = 0\} = u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= u'\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) + u''x^2y_1 && = \{v \triangleq u' \mid v' = u''\} = \\
&= v'x^2y_1 + v\cdot(2x^2y_1' - 7xy_1) && = \{y_1 = x^4 \mid y_1' = 4x^3\} = \\
&= v'x^6 + v\cdot(8x^5 - 7x^5) = \\
&= v'x^6 + vx^5
\end{aligned}$$

$0 = v'x + v$
$0 = (vx)'$
$C = vx$
$v = C/x$

$v = u' = C/x$

$$\frac{du}{dx}=\frac{C}{x} \Leftrightarrow du=\frac{C}{x}dx \Leftrightarrow \int du=\int \frac{C}{x}dx \Leftrightarrow u=C\ln|x|+D$$

$y = y_1u = x^4(C \ln |x| + D)$

$y = Cx^4 \ln |x| + Dx^4$ Allmän lösning

Metod 2:

$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ (*) Homogen

Om y_1 löser (*) så kan en anna lösning skrivas som

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1(x))^2}dx$$

Prova metoden på [z.c.4.2.9.]!

[z.c.4.6.1.]

$y'' + y = \sec x$

1) $y'' + y = 0$

Hjälpekvation: $m^2 + 1 = 0$ Kolla 4.3 kap.
$m_{1,2} = \pm i$

$$y_h=e^{\Re m}\left(c_1\cos(|\Im m|\cdot x)+c_2\sin(|\Im m|\cdot x)\right)=$$

$$=e^0\left(c_1\cos(1\cdot x)+c_2\sin(1\cdot x)\right)=$$

$$=e^0(c_1\cos x+c_2\sin x)=(c_1\underbrace{\cos x}_{y_1}+c_2\underbrace{\sin x}_{y_2})$$

$y_p = (y_1\cdot u_1 + y_2\cdot u_2)(x)$

2) $u_1(x)$, $u_2(x)$?

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=W(y_1;y_2)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}=-\tan x$$

$$W_2=\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix}=1$$

$$u_1'=-\tan x=-\frac{\sin x}{\cos x}$$

$u_2'=1$

$u_2=x$

$$u_1=\int -\frac{\sin x}{\cos x}dx=\begin{Bmatrix} v=\cos x \\ dv=-\sin x\ dx \end{Bmatrix}=\int \frac{dv}{v}=\ln|v|=\ln|\cos x|$$

$y_p = y_1u_1 + y_2u_2 = \cos x \cdot \ln|\cos x| + x\sin x$

$y = y_h + y_p = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x\sin x$

2010−(09)sep−10: dag 4, 9

$\vec{X}' = \mathbf{A}(t)\vec{X} + \vec{F}(t)$

Låt elementen i matrisen $\mathbf{A}(t)$ och vektorn $\vec{F}(t)$
vara kontinuerliga på ett gemensamt intervall, I.
Då har följande begynnelsevärdesproblem en entydlig lösning:

$$\vec{X}(t_0) = \vec{X_0}, \quad t_0 \in I$$

$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$ [H]

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ är lösningar till [H].

Påstående:

$$\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} \quad \text{är lösningen till [H].}$$

$\vec{X_1}$ och $\vec{X_2}$ måste vara linjärt oberoende.

$c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} = \vec{0}$

Linjärt oberoende då $c_1 = c_2 = 0$.

$(\vec{X_1} \;\; \vec{X_2}) \neq \vec{0}$

Allmän lösning: $\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2}$

$\vec{X} = (\vec{X_1} \;\; \vec{X_2})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \Phi\vec{C}$

Φ kallas “fundamentalmatris”.

$y' = ay$
$y = Ce^{ax}$

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t} = \vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{A}\vec{K} e^{\lambda t}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} = \lambda\vec{K}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} - \lambda\vec{K} = \vec{0}$$

$$\mathbf{A}\vec{K} - \lambda\mathbf{I}\vec{K} = \vec{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\vec{K} = \vec{0}$$

Omforming av höger ordningens ODE

$y'' + y = 0$ $\qquad$ $y = e^{ix}$

Karaktärisktisk ekvation:

$r^2 + r^0 = 0$ $\qquad$ $y = \cos x + i \sin x$

$r = \pm i$ $\qquad$ $y_1 = \Re\, y = \cos x$

$y_2 = \Im\, y = \sin x$

$y = A \cos t + B \sin t$

Sätt $x = y'$

$$\begin{cases} x' = y'' = -y & \because\ y'' + y = 0 \\ y' = x \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{\vec{X}'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\vec{X}}$$

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$$

$\lambda = \pm i$

$\lambda = i$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{K}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\vec{K}=\vec{0} \qquad \vec{K_1}=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=e^{it}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}=(\cos t+i\sin t)\left(\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

$$\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}+i\cos t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\sin t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_1}=\Re\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin t\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_2}=\Im\vec{X}=\cos t\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \sin t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

$$c_1\vec{X_1}+c_2\vec{X_2}=c_1\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$$

1:a komponenten: c_1 (- sin t) + c_2 cos t = y

2:a komponenten: c_1 cos t + c_2 sin t = x

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer
För få oberoende egenvektorer
Komplex egenvärden

Skilda reella egenvärden

$$\vec{X}=c_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{K_2}e^{\lambda_2 t}$$

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer

$$\vec{X}=c_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+c_2\vec{K_2}e^{\lambda_1 t}$$

Ej tillräckligt många
Multipelt egenvärde med en egenvektor
λ_1 egenvärde med multiplicitet 2 (duplex; två likadana egenvärden).

En lösningen $\vec{X_1}=\vec{K}e^{\lambda_1 t}$

Ansätt: Andra lösningen $\vec{X_2}=(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}$

Exempel: y'' – 2y' + y = 0

Karaktärisktisk ekvation: $r^2 - 2r + 1 = 0$
$(r - 1)^2 = 0$
$r_{1,2} = 0$

$y = Ae^x + Bxe^x = (A + Bx)e^x$

$$(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}+\vec{L}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{A}\vec{L}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{A}\vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{L}=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}t+(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}$$

t^1: $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}=\vec{0}$

t^0: $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=\vec{L}$

$\vec{L}$ är en egenvektorer

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=0 \Leftrightarrow (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^2\vec{P}=0$$

2010–(09)sep–13: dag 5, 10

Homogena linjära system
Med konstanta koefficienter

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}e^{\lambda t}=\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

$$\vec{K}\lambda e^{\lambda t}=\mathbf{A}\vec{K}e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{K}=\vec{0}$$

Skilda reella egenvärden

Upprepade reella egenvärden
- Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer
- För få linjärt oberoende egenvektorer

Komplex egenvärden

[z.c.8.2.2.]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+2y\\[4pt]\dfrac{dy}{dt}=x+3y\end{cases}\qquad\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}2-\lambda&2\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-2=\lambda^2-5\lambda+4$$

$(\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 4$

Bestäm en egenvektor till varje egenvärde.

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\lambda_1=1 \qquad \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \qquad \vec{v_1}=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=4 \qquad \begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\vec{v_2}=\vec{0} \qquad \vec{v_2}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=C_1\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}e^{t}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{4t}$$

[z.c.8.2.19.]

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=9x-3y\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$3\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt} \quad \text{men även} \quad \begin{vmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$\because \ \lambda_{1,2}=0$$

Bestäm en egenvektor till varje egenvärde.

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 9 & -3\end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

Ansätt andra lösningen $\vec{X_2}=(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}$

$$(t\vec{L}+\vec{P})e^{\lambda_1 t}+\vec{L}e^{\lambda_1 t}=\mathbf{A}\vec{L}te^{\lambda_1 t}+\mathbf{A}\vec{P}e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{L}=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}t+(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}$$

t^1: $\qquad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{L}=\vec{0}$

t^0: $\qquad (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{P}=\vec{L}$

$\vec{L}$ är en egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

[z.c.8.2.36.]

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 6y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(6-\lambda) + 10 = (\lambda-5)^2 + 9$$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 3i$

$$\begin{pmatrix} 4-5-3i & 5 \\ -2 & 6-5-3i \end{pmatrix} \vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1-3i & 5 \\ -2 & 1-3i \end{pmatrix} \vec{v_1} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1-3i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Z} = e^{(5+3i)t} \begin{pmatrix} 1-3i \\ 2 \end{pmatrix} = e^{5t}(\cos 3t + i \sin 3t) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} \vec{X_1} = \Re \vec{Z} = e^{5t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 3t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 3t \right) = e^{5t} \begin{pmatrix} \cos 3t + 3 \sin 3t \\ 2 \cos 3t \end{pmatrix} \\ \vec{X_2} = \Im \vec{Z} = e^{5t} \left(\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 3t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 3t \right) = e^{5t} \begin{pmatrix} \sin 3t - 3 \cos 3t \\ 2 \sin 3t \end{pmatrix} \\ \vec{X} = C_1 \vec{X_1} + C_2 \vec{X_2} \end{cases}$$

[z.c.8.3.13.]

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t$$

Bestäm en fundamentalmatris **Φ**(t) !

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X}$$

$$0=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2+1$$

$\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

Bestäm en komplex egenvektor!

Insättning i $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\vec{v}=\vec{0}$ ger:

$$\begin{pmatrix}1-(1+i) & -1\\ 1 & 1-(1+i)\end{pmatrix}\vec{v_1}=\begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix}\vec{v_1}=\vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

$$\vec{Z}=e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}=e^t\underbrace{(\cos t+i\sin t)}_{\text{cis } t=e^t}\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{cases}\vec{X_1}=\Re\vec{Z}=e^t\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\sin t\right)=e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\\ \vec{X_2}=\Im\vec{Z}=e^t\left(\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}\cos t+\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\sin t\right)=e^t\begin{pmatrix}\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix}\end{cases}$$

Fundamentalmatrisen: $\mathbf{\Phi}(t)=e^t\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}$

$$\vec{X_p}\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}=\mathbf{\Phi}(t)\int\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

$$\mathbf{\Phi}^{-1}(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{U}=\int e^{-t}\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}e^t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}dt=\int\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_p}=e^t\begin{pmatrix}\sin t & -\cos t\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ t\end{pmatrix}=e^t\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\mathbf{\Phi}(t)\vec{C}+\mathbf{\Phi}(t)\vec{U}=e^t\begin{pmatrix}\sin t & \cos t\\ -\cos t & \sin t\end{pmatrix}\vec{C}+e^t\begin{pmatrix}t\cos t\\ t\sin t\end{pmatrix}$$

2010–(09)sep–14: dag 6, 11

Veriferia att $\vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}e^{-\frac{3t}{2}}$

är en lösning till $\vec{x}'=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}\vec{x}$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_2}{4}-x_1\\x_1-x_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}\underbrace{\left(-\frac{3}{2}\right)}_{\lambda}e^{-\frac{3t}{2}}\stackrel{?}{=}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{v}}e^{-\frac{3t}{2}}$$

Egentligen behöver vi verifiera att $\lambda\vec{v}=\mathbf{A}\vec{v}$, det vill säga att $\vec{v}$ är en egenvektor för **A** med egenvärdet λ.

$$\mathbf{A}\vec{v}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{2}{4}\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{2}\\-1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-3\end{pmatrix}=-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\lambda\vec{v}$$

Stämmer!

Bestem den allmänna lösnngen till

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7x+2y\\11x-2y\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}7 & 2\\11 & -2\end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Sök egenvärden till **A**

$$0=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix}7-\lambda & 2\\11 & -2-\lambda\end{vmatrix}=(7-\lambda)(-2-\lambda)-22=$$

$$=\lambda^2-5\lambda-36=(\lambda+4)(\lambda-9)$$

$\lambda_1 = 9$ söker $\vec{v}_1$ så att

$$(\mathbf{A} - 9\mathbf{I})\vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -11 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -4$

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 11 & 2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 = t\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$$

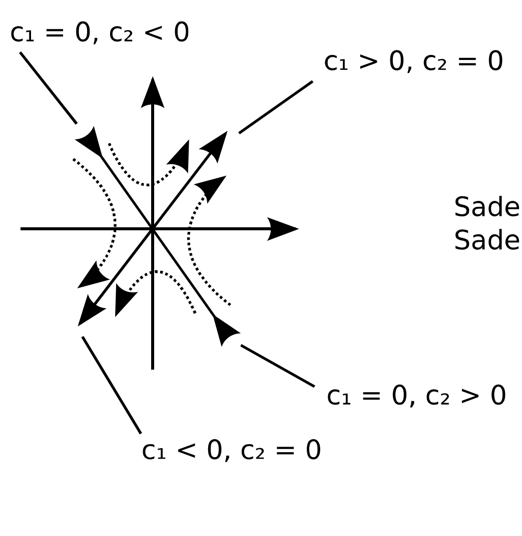
Vi har två linjärt oberoende lösningar:

$$\vec{X}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} \quad \text{och} \quad \vec{X}_2 = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} e^{-4t}$$

$$\vec{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{9t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} e^{-4t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ange hastighetsvektorn i punkten (2; 11)!

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} x' = 7x + 2y = 14 + 22 = 36 \\ y' = 11x - 2y = 22 - 22 = 0 \end{pmatrix}$$



Sadelpunkt
Sadelbeteende

Bestäm lösningen till BVP

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 5 & 4\end{pmatrix}\vec{X} \quad , \quad \vec{X}(0)=\begin{pmatrix}-2\\ 8\end{pmatrix}$$

$$0=\begin{vmatrix}6-\lambda & -1\\ 5 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(4-\lambda)+5=\lambda^2-10\lambda+29$$

$\lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$

$$\begin{pmatrix}6-5-2i & -1\\ 5 & 4-5-2i\end{pmatrix}\vec{v}=\begin{pmatrix}1-2i & -1\\ 5 & -1-2i\end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0}$$

Rad 1 och rad 2 är alltid linjärt beroende.

$$(1-2i)\vec{v}_1-\vec{v}_2=\vec{0}$$

$$\vec{v}=t\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}e^{(5+2i)t}=\begin{pmatrix}1\\ 1-2i\end{pmatrix}e^{5t}\text{ cis }2t=e^{5t}\begin{pmatrix}\text{cis }2t\\ (1-2i)\text{ cis }2t\end{pmatrix}=$$

$$=e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t+i\sin 2t\\ \cos 2t+2\sin 2t-2i\cos 2t+i\sin 2t\end{pmatrix}=$$

$$=\underbrace{e^{5t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+2\sin 2t\end{pmatrix}}_{\vec{x}_1}+\underbrace{ie^{5t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\ -2\cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}}_{\vec{x}_2}$$

$\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \qquad \vec{v}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\vec{v}=\vec{0} \qquad \vec{v}=t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_h}=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^0+c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^t$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}$$

Formeln (se sida 330 eller Beta)

$$\overrightarrow{X_p}=\boldsymbol{\Phi}(t)\int \boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

$\vec{F}(t)$ är den inhomogena delen.

Söker $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\frac{\operatorname{adj}\boldsymbol{\Phi}(t)}{\det\boldsymbol{\Phi}(t)}=\begin{pmatrix} 2e^t & -3e^t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-e^t}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \dfrac{1}{e^t} & -\dfrac{1}{e^t} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{X_p}=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ \dfrac{1}{e^t} & -\dfrac{1}{e^t} \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{F}}dt=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -8-3 \\ \dfrac{4+1}{e^t} \end{pmatrix}dt=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\int \begin{pmatrix} -11 \\ 5e^{-t} \end{pmatrix}dt=\begin{pmatrix} 1 & 3e^t \\ 1 & 2e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -11t \\ -5e^{-t} \end{pmatrix}+C=\{*\}=\begin{pmatrix} -11t-15 \\ -11t-10 \end{pmatrix}$$

{*} Som vanligt sätter vi C till 0 eftersom vi bara vill ha en lösning i partikulärlösning.

2010–(09)sep–15: dag 7, 12

Plana autonoma system och stabilitet.

[10.1.] Autonoma system

Kritiska punkter.
Periodiska lösningar.

[10.2.] Stabilitet hos linjära system

[10.3.] Linjärisering och lokala stabiliteter

Plant autonomt system

$$\frac{dx}{dt}=P(x;y)$$

$$\frac{dy}{dt}=Q(x;y)$$

Vektorfält:

$$\vec{v}(x;y)=\begin{pmatrix}P(x;y) & Q(x;y)\end{pmatrix}$$

Lösningstyper:

Statinära punkter
Båge
Periodisk lösning

Stabilitetsundersökning av linjära system

$$\vec{X}'=\mathbf{A}\vec{X}$$

Egenvärden till matrisen:

Reella	Komplexa
• Enkla	
• Multipla	

Stationära punkter: $\vec{X}'=\vec{0}=\mathbf{A}\vec{X}$

det $\mathbf{A} \neq 0$ $\because$ Entydlig lösning

(0 0) är den enda stationära punkten.

λ reella och enkla ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Instabil nod
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Stabil nod

λ reella och multipla ($\lambda_1 = \lambda_2$)

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instabil degenererad nod
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil degenererad nod

λ komplex ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)

$$\vec{Z} = e^{(\alpha + i\beta)t}\vec{K_1} = e^{\alpha t}\text{ cis }\beta t \cdot \vec{K_1}$$

$\vec{X_1} = \Re \vec{Z}$ ($\Re$ skrivs ofta Re)

$\vec{X_2} = \Im \vec{Z}$ ($\Im$ skrivs ofta Im)

$\alpha > 0$	Instabil spiral
$\alpha = 0$	Centrum, stabil (ellipsformad)
$\alpha < 0$	Stabil spiral

Stabilitetskriterium för linjära system

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} \quad , \quad \vec{X}(0) = \vec{X_0} \neq \vec{0} \quad , \quad \det \mathbf{A} \neq 0$$

1. $\lim_{t \to \infty} \vec{X}(t) = \vec{0} \Leftrightarrow \Re \lambda < 0$
2. $\vec{X}(t)$ är periodisk $\Leftrightarrow \Re \lambda = 0$
3. I övriga fall finns det minst ett $\vec{X_0}$ för vilket $\vec{X}(t)$ blir obegränsat då *t* växer.

Skilda reella egenvärden

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{K_2}e^{\lambda_2 t}$$

$\lambda_2 < \lambda_1$

$$\vec{X}(t)=e^{\lambda_1 t}\left(C_1\vec{K_1}+C_2\vec{K_2}e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty}\vec{X}(t)=\lim_{t\to\infty}e^{\lambda_1 t}C_1\vec{K_1}$$

Upprepade reella egenvärden
Tillräckligt många linjärt oberoende egenvektorer.

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\vec{K_2}e^{\lambda_1 t}=\left(C_1\vec{K_1}+C_2\vec{K_2}\right)e^{\lambda_1 t}$$

$$\vec{X}(t)=C_1\vec{K_1}e^{\lambda_1 t}+C_2\left(\vec{K_1}t+\vec{P}\right)e^{\lambda_1 t}=t\,e^{\lambda_1 t}\left(C_2\vec{K_1}+\frac{C_1}{t}\vec{K_1}+\frac{C_2}{t}\vec{P}\right)$$

[z.c.10.1.16.]

$$\begin{cases}x'=-x(4-y^2)\\ y'=4y(1-x^2)\end{cases}$$

Bestäm de kritiska (stationära) punkterna.
I de stationära punkterna är tangentvektorn (x'; y') = (0; 0)

$$\begin{cases}-x(4-y^2)=0 & (1)\\ 4y(1-x^2)=0 & (2)\end{cases}$$

$$(1):\quad \begin{cases}\text{a)}\;\; x=0 \quad \text{insatt i (2):}\;\; y=0 \qquad (0;0)\\ \text{b)}\;\; 4-y^2=0 \;\Leftrightarrow\; y=\pm 2 \quad \text{insatt i (2):}\\ \qquad \pm 8(1-x^2)=0 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 1\end{cases}$$

De stationära lösningarna är (0; 0) och ($\pm_1$ 1; $\pm_2$ 2)

[z.c.10.2.11.]

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(5-\lambda)(4+\lambda)+6 = -25+\lambda^2+6 = -19+\lambda^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{19}$$

Skilda tecken hos egenvärderna.
(0; 0) är en sadelpunkt.

[z.c.10.2.11.]

Bestäm μ så att vi får en stabil spiral.

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \vec{X}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & \mu-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\mu + 1$$

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2-4}}{2}$$

(0; 0) är en stabil sprital då:

$$\begin{cases} \mu^2 - 4 < 0 & \text{(spiral)} \\ \mu < 0 & \text{(stabil)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu^2 < 4 \;\Leftrightarrow\; -2 < \mu < 2 \\ \mu < 0 \end{cases}$$

–2 < μ < 0

2010–(09)sep–17: dag 8, 13

Anteckningar från denna dag saknas...

2010−(09)sep−20: dag 9, 14

Stabilitetsundersökning av icke-linjära system

$$\dot{\vec{X}}=\vec{f}(\vec{X})$$

Läraren skrev med punkt ovanför, vilket innebär att det är första derivatan, två punkter är andra derivatan, och så vidare. Punkt används oftast i mekaniken för vid derivata med avseende på tiden.

Stationär lösning:

$$\dot{\vec{X}}=\vec{0}=\vec{f}(\vec{X})$$

$$\vec{X}=\vec{X_0}$$

Taylorutveckling kring den kritiska punkten

$$\dot{\vec{X}}=\vec{f}(\vec{X})=\vec{f}(\vec{X_0})+\vec{f}(\vec{X_0})(\vec{X}-\vec{X_0})+\vec{R_2}$$

Linjärisert system

$$\dot{\vec{X}}=\vec{f}(\vec{X_0})(\vec{X}-\vec{X_0})$$

$$\vec{f}(\vec{X})=\begin{pmatrix}P(x;y)\\Q(x;y)\end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'(\vec{X})=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}=\text{“Jacobimatris”}$$

[z.c.10.3.14.]

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y^2\\-y+xy\end{pmatrix} \qquad \mathbf{g}(\vec{X})$$

$$\begin{cases}2x-y^2=0\\-y+xy=-y(1-x)=0\end{cases}$$

a) $y = 0 \Rightarrow x = 0$, $(x; y) = (0; 0)$

b) $x = 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$, $(x; y) = (1; \pm\sqrt{2})$

$$\mathbf{g}'(\vec{X}) = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ y & -1+x \end{pmatrix} = \text{“Funktionalmatris”}$$

$$\mathbf{g}'(0;0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (↗-diagonalen kallas “bidialgonalen”)

↘-diagonalen kallas “huvuddiagonalen”. **g'**(0; 0) är en (huvud)diagonalmatris.

(0; 0) är en sadelpunkt, ty signum(λ_1) = –signum(λ_2) ≠ 0.
Därmed är diagonalen även instabil.

$$\mathbf{g}'(1;\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\lambda+4 = \lambda^2-2\lambda+4$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-4} = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$\Re\,\lambda > 0$ ∴ Instabil spiral i (1; $\sqrt{2}$)

Alternativ framställning:

(0; 0)

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^2 \\ xy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

(1; $\sqrt{2}$)

Sätt: $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-\sqrt{2} \end{cases} \left|\begin{array}{l} u' = x' \\ v' = y' \end{array}\right.$

$$\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-\sqrt{2} \end{cases} \left|\begin{array}{l} u' = x' \\ v' = y' \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(u+1)-(v+\sqrt{2})^2 \\ -(v+\sqrt{2})+(u+1)(v+\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u-v^2-2v\sqrt{2} \\ uv+u\sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

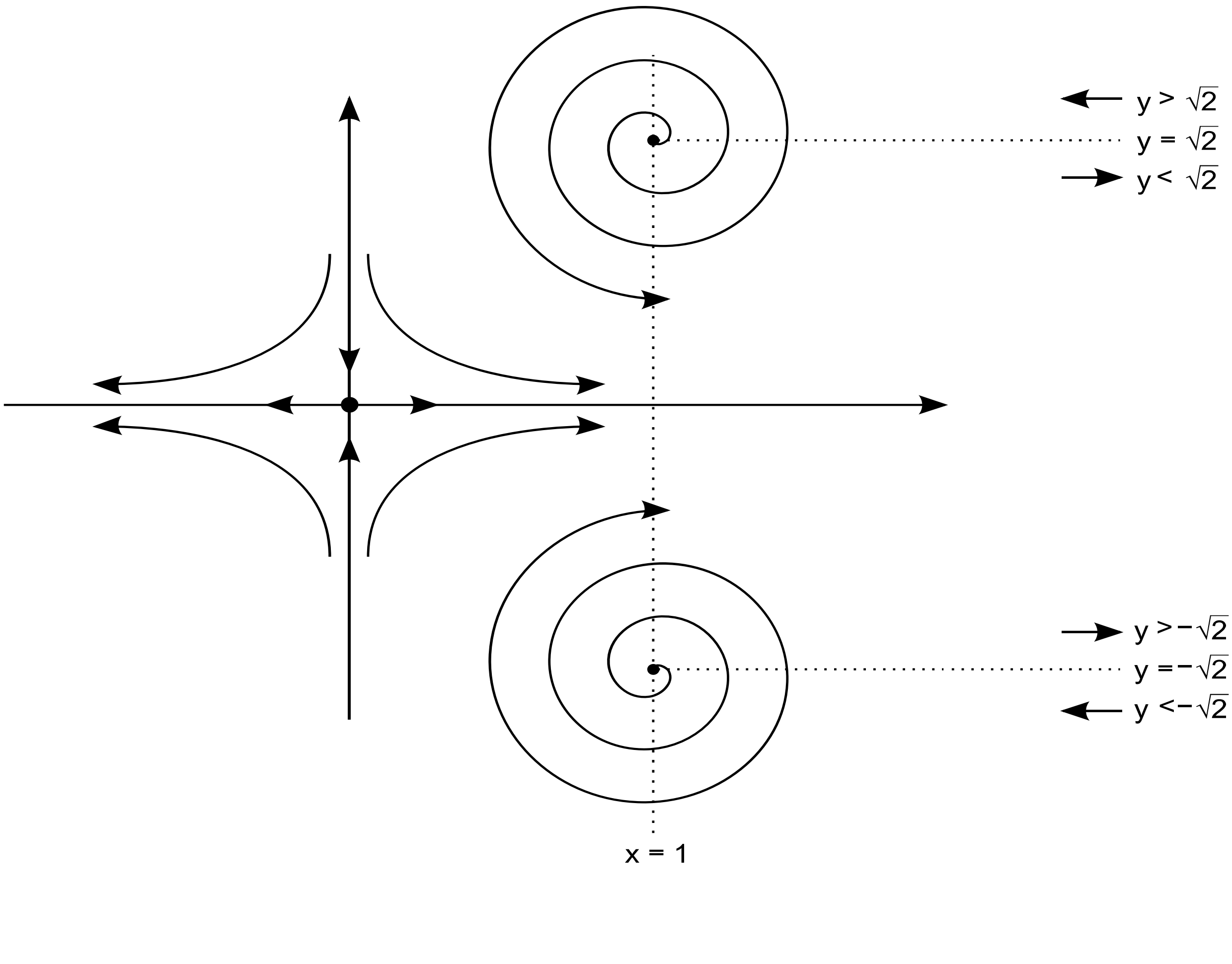
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v^2 \\ uv \end{pmatrix}$$

$$\vec{0} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \vec{v}$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = -1, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fasporträtt:

$$\vec{X}'(x \triangleq 1) = \begin{pmatrix} 2 - y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Sammanfattning: dag 1-9, 6-14

System av linjära första ordningens ODE

$$\vec{X}' = \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F}$$

Bestäm egenvärderna λ:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

λ reella och enkla ($\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Instabil nod
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Sadelpunkt, instabil
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Stabil nod

λ reella och multipla ($\lambda_1 = \lambda_2$):

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Instabil degenererad nod
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil degenererad nod

λ komplex ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$):

$$\vec{Z} = e^{(\alpha + i\beta)t}\vec{K_1} = e^{\alpha t} \text{ cis } \beta t \cdot \vec{K_1}$$

$\vec{X_1} = \Re\vec{Z}$ ($\Re$ skrivs ofta Re)

$\vec{X_2} = \Im\vec{Z}$ ($\Im$ skrivs ofta Im)

$\alpha > 0$	Instabil spiral
$\alpha = 0$	Centrum, stabil (ellipsformad)
$\alpha < 0$	Stabil spiral

Vid λ reella och enkla:

$\vec{X_h} = \sum_{n=1}^{N} C_n \vec{X_n}$ där $\vec{X_n} = \vec{v_n} e^{\lambda_n t}$ där $\vec{v_n}$ är egenvektorn för λ_n som beräknas genom: $(\mathbf{A} - \lambda_n \mathbf{I})\vec{v_n} = \vec{0}$

Vid λ reella och multipla:

$$\vec{X_h} = C_1 \underbrace{\vec{v_1} e^{\lambda_1 t}}_{\vec{X_1}} + C_2 \underbrace{\left(t\vec{v_1} + \vec{v_2}\right) e^{\lambda_1 t}}_{\vec{X_2}}$$

Där $\vec{v}_1$ beräknas genom $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{v}_1=\vec{0}$

och $\vec{v}_2$ beräknas genom $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{v}_2=\vec{v}_1$

Vid λ komplexa:

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

$\vec{X}_h=C_1\Re\vec{Z}+C_2\Im\vec{Z}$ där $\vec{Z}=e^{(\alpha+i\beta)t}\vec{v}_1=e^{\alpha t}\operatorname{cis}\beta t\cdot\vec{v}_1$

där $\vec{v}_1$ beräknas genom $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\vec{v}_1=\vec{0}$

$$\begin{pmatrix} a+ib & c \\ p & q \end{pmatrix}\vec{v}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix} -a+ib \\ \xi \end{pmatrix}_{\xi=\frac{a^2+b^2}{c}}$$

(p; q) är linjärt beroende (a + ib; c)

Inhomogena delen:

$$\vec{X}_p=\mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\vec{F}(t)\,dt$$

Om $\vec{F}$ saknas $(\vec{F}=\vec{0})$ är $\vec{X}_p=\vec{0}$

$$\mathbf{\Phi}(t)=\text{“Fundamentalmatris”}=\begin{pmatrix} \vec{X}_1 & \cdots & \vec{X}_N \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}=\vec{X}_h+\vec{X}_p$$

$$\vec{X}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P(x;y) \\ Q(x;y) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}'=\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}}_{\text{“Funktionalmatris”}}\vec{X}$$

Högre ordningens ODE

Wronskian (eller wronskideterminant):

För flera variabler:

$$W\left(\coprod_{i=0}^{n} y_i\right)=\left|\coprod_{i=0}^{n}{}^{\downarrow}\ \coprod_{j=0}^{n}{}^{\rightarrow}\ y_j^{(i)}\right|$$

Om alla $y_i(x)$ är linjärt oberoende lösningar till en inhomogen ekvation på ett intervall, I, så är $W(y) \neq 0, \forall\, x \in I$.

$$W_n=\begin{vmatrix} y_0 & \cdots & y_{n-1} & 0 & y_{n-1} & \cdots & y_N \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ y_0^{(N-1)} & \cdots & y_{n-1}^{(N-1)} & 0 & y_{n-1}^{(N-1)} & \cdots & y_N^{(N-1)} \\ y_0^{(N)} & \cdots & y_{n-1}^{(N)} & f(x) & y_{n-1}^{(N)} & \cdots & y_N^{(N)} \end{vmatrix}$$

Där $f(x)$ är den inhomogena delen.

$y = y_h + y_p$

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$

$y_p = y_1 u_1(x) + y_2 u_2(x)$

$$u_n=\int \frac{W_n}{W}$$

Vid en känd icke-trivial lösning kan $y(x)$ substitueras med $u(x)y_1(x)$, vilket är den allmäna homogena lösningen.

En fundamentalmängd är en mängd av alla lösningar som är linjärt oberoende av varandra och består av en term.