

## Tarea 2

Miguel Angel Asencio Hurtado, Ana María Rodríguez Reyes

13 de mayo de 2016

### 1. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t^2, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

**R/** Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes  $a_x$  se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(n t) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(n t) dt \end{aligned}$$

Resolviendo para  $a_0$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{3\pi} (\pi^3 - (-\pi)^3) \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

Resolviendo para  $a_n$ :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(n t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{t^2 \sin(n t)}{n} + \frac{2t \cos(n t)}{n^2} - \frac{2 \sin(n t)}{n^3} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2 \sin(n \pi)}{n\pi} + \frac{2\pi \cos(n \pi)}{n^2 \pi} - \frac{2 \sin(n \pi)}{n^3 \pi} \\ &\quad - \frac{\pi^2 \sin(n(-\pi))}{n\pi} + \frac{2\pi \cos(n(-\pi))}{n^2 \pi} + \frac{2 \sin(n(-\pi))}{n^3 \pi} \\ &= 2\pi^2 \operatorname{sinc}(n \pi) + \frac{4\pi}{n} \operatorname{cosec}(n \pi) - \frac{4}{n^2} \operatorname{sinc}(n \pi) \end{aligned}$$

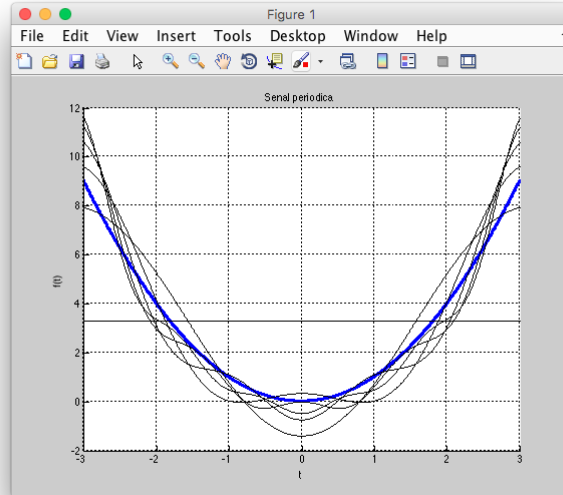


Figura 1: Señal  $f(t) = t^2$

Resolviendo para  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(n t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{t^2 \cos(n t)}{n} - \frac{2t \sin(n t)}{n^2} + \frac{2 \cos(n t)}{n^3} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\
 &= -\frac{\pi^2 \cos(n \pi)}{n \pi} - \frac{2 \pi \sin(n \pi)}{n^2 \pi} + \frac{2 \cos(n \pi)}{n^3 \pi} \\
 &\quad + \frac{\pi^2 \cos(n(-\pi))}{n \pi} - \frac{2 \pi \sin(n(-\pi))}{n^2 \pi} - \frac{2 \cos(n(-\pi))}{n^3 \pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de  $f(t)$  queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n t)) \\
 a_n &= \left( 2\pi^2 - \frac{4}{n^2} \right) \text{sinc}(n \pi) + \frac{4\pi}{n} \text{cosc}(n \pi)
 \end{aligned}$$

Esta progresión puede verse en la Figura 1, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos(t) \\
 A_2 &= \frac{\pi^2}{3} + \cos(2t) \\
 A_3 &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{9} \cos(3t) \\
 A_4 &= \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4} \cos(4t) \\
 A_5 &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{25} \cos(5t)
 \end{aligned}$$

La serie se puede expresar como:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n t) \right)$$

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por lo que el coeficiente  $c_n$  se puede definir de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-jnt} dt$$

Resolviendo para  $c_n$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-jnt} dt \\ &= \frac{e^{-jnt}(2nt + jn^2 t^2 - 2j)}{2\pi n^3} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(\pi^2 n^2 - 2) \sin(\pi n) + \pi n \cos(\pi n)}{\pi n^3} \end{aligned}$$

Reemplazando en la formula:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(\pi^2 n^2 - 2) \sin(\pi n) + \pi n \cos(\pi n)}{\pi n^3} e^{jnt} \end{aligned}$$

## 2. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t \sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

**R/** Se plantea la serie de Fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes  $a_x$  se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) \cos(n t) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) \sin(n t) dt \end{aligned}$$

Resolviendo para  $a_0$ :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \sin(t) - t \cos(t) \right]_{t=-\pi}^0 + \left[ \sin(t) - t \cos(t) \right]_{t=0}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} [2\pi] \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Resolviendo para  $a_n$ :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) \cos(n t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} \left( -\frac{\sin((n-1)t)}{(n-1)^2} + \frac{\sin((n+1)t)}{(n+1)^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{t \cos((n-1)t)}{n-1} - \frac{t \cos((n+1)t)}{n+1} \right) \right) \Bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{4n \sin(\pi n) - 2\pi(n^2 - 1) \cos(\pi n)}{\pi(n^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Resolviendo para  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) \sin(n t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{(n^2 - 1)^2} (\sin(t)((n^2 + 1) \sin(nt) \right. \\
 &\quad \left. - n(n^2 - 1) x \cos(nx)) + \right. \\
 &\quad \left. \cos(t)((n^2 - 1) x \sin(nx) + \right. \\
 &\quad \left. 2n \cos(nx)) \right) \Bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de  $f(t)$  queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n t)) \\
 a_n &= \frac{4n \sin(\pi n) - 2\pi(n^2 - 1) \cos(\pi n)}{\pi(n^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Esta progresión puede verse en la Figura 2, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{-\cos(t)}{2} \\
 A_2 &= \frac{-2}{3} \cos(2t) \\
 A_3 &= \frac{1}{4} \cos(3t) \\
 A_4 &= \frac{-2}{15} \cos(4t) \\
 A_5 &= \frac{1}{12} \cos(5t)
 \end{aligned}$$

La serie se puede expresar como:

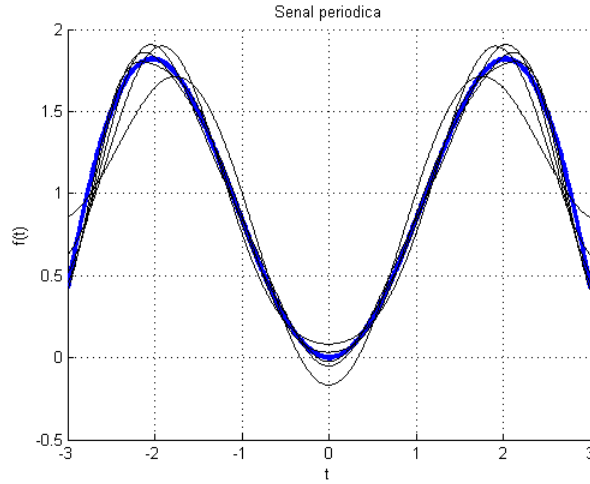


Figura 2: Señal  $f(t) = t \sin(t)$

$$f(t) = 1 - \frac{\cos(t)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos(nt) \right)$$

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por lo que el coeficiente  $c_n$  se puede definir de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Resolviendo para  $c_n$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{t \cos((n-1)t)}{n-1} - \frac{t \cos((n+1)t)}{n+1} \bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{4n \sin(\pi n) - 2\pi(n^2 - 1) \cos(\pi n)}{\pi(n^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

Cinco armónicos de la serie compleja son:

$$\begin{aligned}
A_{-2} &= \frac{-1}{3} e^{-2jt} \\
A_{-1} &= \frac{-1}{4} e^{-1jt} \\
A_0 &= 1 \\
A_1 &= \frac{-1}{4} e^{1jt} \\
A_2 &= \frac{-1}{3} e^{2jt}
\end{aligned}$$

### 3. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

**R/** Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes  $a_x$  se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt
\end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(n t) dt \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(n t) dt
\end{aligned}$$

Resolviendo para  $a_0$ :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{t^2}{2} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - (-\pi)^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo para  $a_n$ :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(n t) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left( \frac{t \sin(n t)}{n} + \frac{\cos(n t)}{n^2} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\pi \sin(n \pi)}{n\pi} + \frac{\cos(n \pi)}{n^2 \pi} \\
&\quad - \frac{(-\pi) \sin(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{\cos(n(-\pi))}{n^2 \pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

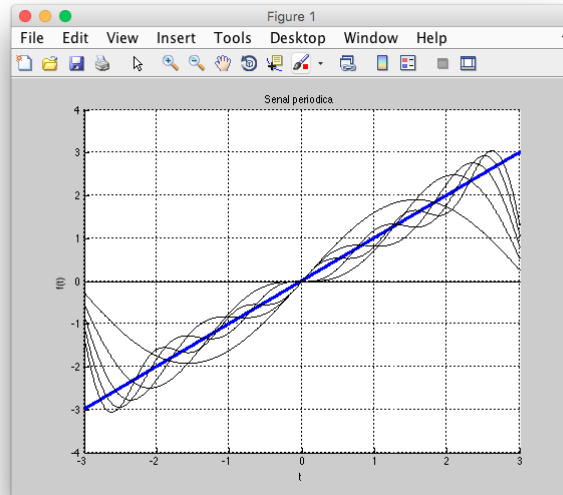


Figura 3: Señal  $f(t) = t$

Resolviendo para  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{t \cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\
 &= -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi} \\
 &\quad + \frac{(-\pi) \cos(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{\sin(n(-\pi))}{n^2\pi} \\
 &= \frac{2}{n} \operatorname{sinc}(n\pi) - 2\pi \operatorname{cosec}(n\pi)
 \end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de  $f(t)$  queda de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{2}{n} \operatorname{sinc}(n\pi) - 2\pi \operatorname{cosec}(n\pi) \right) \sin(nt) \right)$$

Esta progresión puede verse en la Figura 3, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -2 \sin(t) \\
 A_2 &= \sin(2t) \\
 A_3 &= -\frac{2}{3} \sin(3t) \\
 A_4 &= \frac{1}{2} \sin(4t) \\
 A_5 &= -\frac{2}{5} \sin(5t)
 \end{aligned}$$

La serie se puede expresar como:

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \right)$$

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por lo que el coeficiente  $c_n$  se puede definir de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-jnt} dt$$

Resolviendo para  $c_n$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-jnt} dt \\ &= \left. \frac{e^{-jnt}(1+jnt)}{2\pi n^2} \right|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{j(\pi n \cos(\pi n) - \sin(\pi n))}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Reemplazando en la formula:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j(\pi n \cos(\pi n) - \sin(\pi n))}{\pi n^2} e^{jnt} \end{aligned}$$

#### 4. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leq t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

**R/** Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes  $a_x$  se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + t) dt + \int_0^{\pi} t dt \right] \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + t) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \right] \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + t) \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \right] \end{aligned}$$



Resolviendo para  $a_0$ :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + t) dt + \int_0^{\pi} t dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{t^2}{2} + \pi t \Big|_{t=-\pi}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right] \\
 &= \frac{\pi}{\pi}
 \end{aligned}$$

Resolviendo para  $a_n$ :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + t) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{\cos(nt)}{n^2} + \frac{t \sin(nt)}{n} + \frac{\pi \sin(nt)}{n} \right) \Big|_{t=-\pi}^0 \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\cos(nt)}{n^2} + \frac{t \sin(nt)}{n} \right) \Big|_{t=0}^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1 - \cos(\pi n)}{n^2} + \frac{\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1}{n^2} \right] \\
 &= \frac{\sin(\pi n)}{n}
 \end{aligned}$$

Resolviendo para  $b_n$ :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + t) \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cos(nt)}{n} - \frac{\pi \cos(nt)}{n} \right) \Big|_{t=-\pi}^0 \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cos(nt)}{n} \right) \Big|_{t=0}^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(\pi n) - \pi n}{n^2} + \frac{\sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n)}{n^2} \right] \\
 &= \frac{2 \sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n) - \pi n}{\pi n^2}
 \end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de  $f(t)$  queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \\
 a_n &= \frac{\sin(\pi n)}{n} \\
 b_n &= \frac{2 \sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n) - \pi n}{\pi n^2}
 \end{aligned}$$

Esta progresión puede verse en la Figura 4, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 0 \\
 A_2 &= -\sin(2t) \\
 A_3 &= 0 \\
 A_4 &= \frac{-1}{2} \sin(4t) \\
 A_5 &= 0 \\
 A_6 &= \frac{-1}{3} \sin(6t)
 \end{aligned}$$

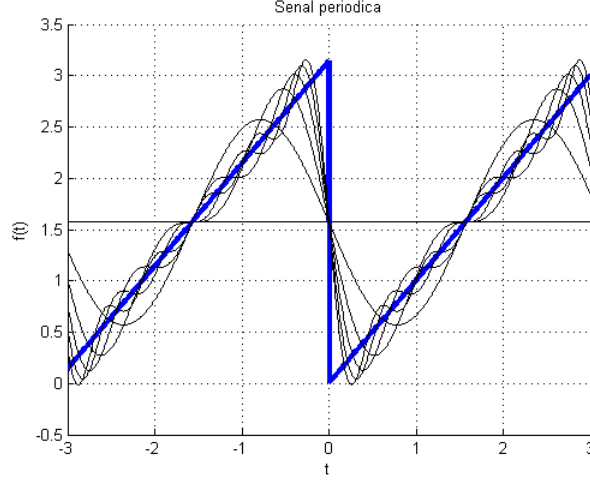


Figura 4: Señal  $f(t) = \{\pi + t, t\}$

Teniendo en cuenta que los armónicos nulos como los impares ( $A_1, A_3, \dots, A_{2n+1}$ ) no se tienen en cuenta, la serie se puede representar como:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-1}{n} \sin(2nt) \right)$$

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por lo que el coeficiente  $c_n$  se puede definir de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + t) e^{-jnt} dt + \int_0^{\pi} t e^{-jnt} dt \right]$$

Resolviendo para  $c_n$ :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (\pi + t) e^{-jnt} dt + \int_0^{\pi} t e^{-jnt} dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \pi e^{-jnt} dt + \int_{-\pi}^0 t e^{-jnt} dt + \int_0^{\pi} t e^{-jnt} dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{j\pi(-1 + e^{j\pi n})}{n} + \frac{1 + e^{j\pi n}(-1 + j\pi n)}{n^2} + \frac{-1 + e^{j\pi n}(1 + j\pi n)}{n^2} \right] \\ &= \left[ -\frac{j(-1 + e^{j\pi n})}{2n} + \frac{e^{j\pi n}(j)}{n} \right] \end{aligned}$$

Cinco armónicos para la serie compleja son:

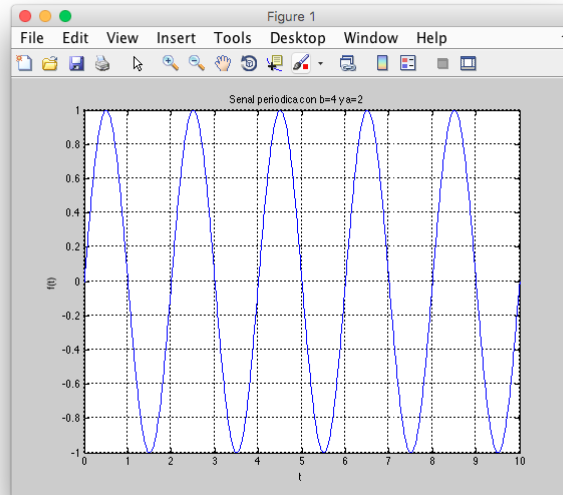


Figura 5: Señal  $f(t) = \sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$  con  $b = 4$  y  $a = 2$

$$\begin{aligned} A_{-2} &= \frac{-je^{-2jt}}{2} \\ A_{-1} &= 0 \\ A_0 &= \frac{pi}{2} \\ A_1 &= 0 \\ A_2 &= \frac{je^{2jt}}{2} \end{aligned}$$

## 5. Hallar el periodo

a)  $f(t) = \sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$

**R/** El periodo  $T$  de una señal senoidal se puede definir como:

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para resolver la igualdad:

$$T = (b - a)$$

Es evidente en las Figuras 5 y 6 que los periodos coinciden con los calculados.

b)  $f(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)$

**R/** El periodo  $T$  de una señal senoidal se puede definir como:

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para cada senoidal su periodo sería:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{3} \\ T_3 &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

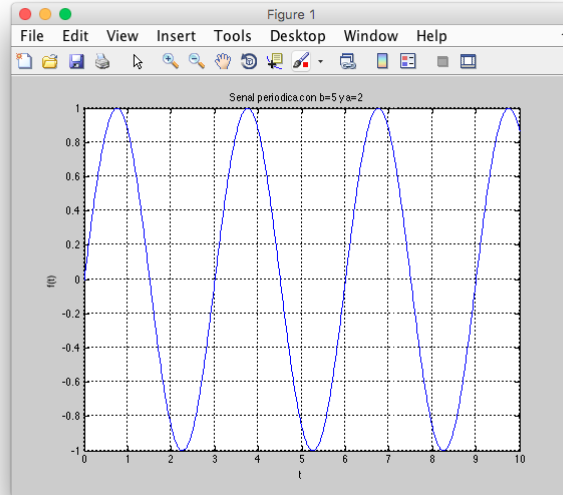


Figura 6: Señal  $f(t) = \sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$  con  $b = 5$  y  $a = 2$

Dado el hecho de que la señal es una señal compuesta, será periódica si el cociente entre sus periodos es un número racional:

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T_2} &= 3 \\ \frac{T_1}{T_2} &= 5 \\ \frac{T_2}{T_3} &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Dado el hecho de que se cumple la condición, la señal es periódica y su periodo será el mínimo común múltiplo de estos periodos:

$$\begin{aligned}T &= m.c.m(T_1, T_2, T_3) \\ &= m.c.m(2\pi, 2\pi 3^{-1}, 2\pi 5^{-1}) \\ T &= 2\pi\end{aligned}$$

Es evidente en la Figura 7 que el periodo coincide con el calculado.

c)  $f(t) = \cos(10t) + \cos((10 + \pi)t)$

**R/** El periodo  $T$  de la función coseno se puede definir como:

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para cada coseno su periodo sería:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{\pi}{5} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{10 + \pi}\end{aligned}$$

Dado el hecho de que la señal es una señal compuesta, será periódica si el cociente entre sus periodos es un número racional:

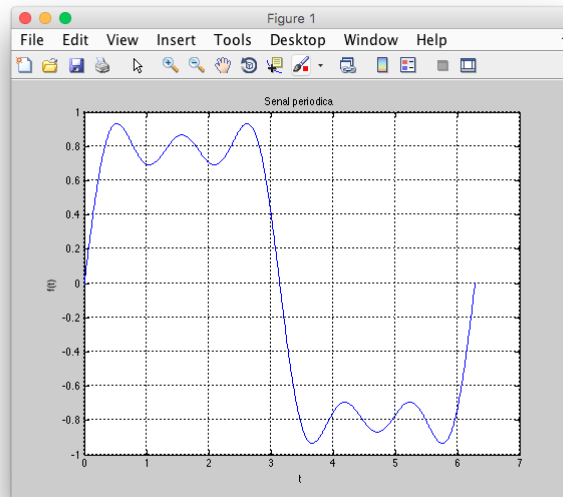


Figura 7: Señal  $f(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)$

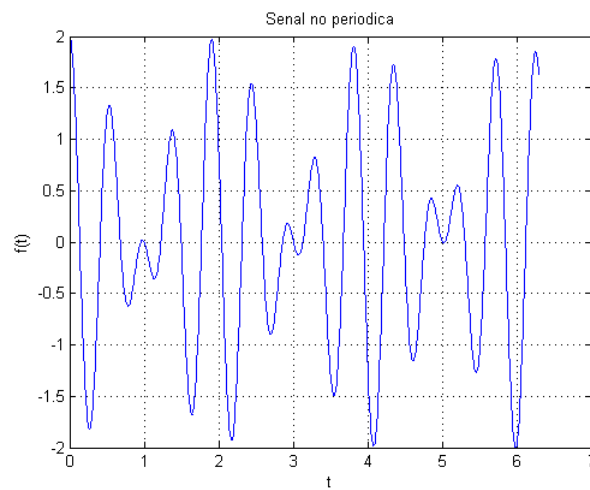


Figura 8: Señal  $f(t) = \cos(10t) + \cos((10 + \pi)t)$

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{\pi}{10}$$

Dado el hecho de que no se cumple la condición, la señal no es periódica, como se puede observar en la Figura 8