

Primer trabajo teoría de la información y la comunicación

Miguel Angel Asencio Hurtado, Ana María Rodríguez Reyes

Resumen—Se plantean diferentes problemas y sus respectivas soluciones en los temas de tratamiento de señales, aliasing, transformada de Fourier y señales de audio

Palabras clave—audio, Fourier, MATLAB, frecuencia, señales, aliasing

I. OBJETIVOS

- Entender el funcionamiento de MATLAB, como grabar sonido, reproducir sonido y generar interfaces gráficas
- Ver ejemplos de como se genera el Aliasing
- Probar diferentes métodos de interpolación
- Poder escuchar los colores (sinusoides con las mismas frecuencias)

II. MARCO TEÓRICO

II-A. Señal periodica

1) *Definición:* Una función es periódica si verifica la condición $f(x + T) = f(x)$; el número T se llama período de la función. Generalmente, se llama período al menor número real positivo T que satisface la condición. Las funciones trigonométricas son ejemplos sencillos de una función periódica, que en combinaciones adecuadas se emplean en el análisis armónico [1].

2) *Frecuencia:* Frecuencia es una magnitud que mide el número de repeticiones por unidad de tiempo de cualquier fenómeno o suceso periódico. Para calcular la frecuencia de un suceso, se contabilizan un número de ocurrencias de este teniendo en cuenta un intervalo temporal, luego estas repeticiones se dividen por el tiempo transcurrido. Según el Sistema Internacional (SI), la frecuencia se mide en hercios (Hz), en honor a Heinrich Rudolf Hertz. Un hercio es la frecuencia de un suceso o fenómeno repetido una vez por segundo.

Un método alternativo para calcular la frecuencia es medir el tiempo entre dos repeticiones (período) y luego calcular la frecuencia (f) recíproca de esta manera:

$$f = \frac{1}{T}$$

donde T es el periodo de la señal [2].

3) *Periodo:* Es el mínimo lapso que separa dos instantes en los que el sistema se encuentra exactamente en el mismo estado: mismas posiciones, mismas velocidades, mismas amplitudes. Así, el periodo de oscilación de una onda es el tiempo empleado por la misma en completar una longitud de onda. En términos breves es el tiempo que dura un ciclo de la onda en

volver a comenzar. Por ejemplo, en una onda, el periodo es el tiempo transcurrido entre dos crestas o valles sucesivos [2]:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

II-B. Convertidor análogo digital

Un conversor o convertidor de señal analógica a digital (Conversor Analógico Digital, CAD; Analog-to-Digital Converter, ADC) es un dispositivo electrónico capaz de convertir una señal analógica, ya sea de tensión o corriente, en una señal digital mediante un cuantificador y codificándose en muchos casos en un código binario en particular. Donde un código es la representación unívoca de los elementos, en este caso, cada valor numérico binario hace corresponder a un solo valor de tensión o corriente.

La digitalización o conversión A/D, básicamente, consiste en realizar de forma periódica medidas de la amplitud (tensión) de una señal; por ejemplo, la que proviene de un micrófono [3].

II-C. Interpolación

En el subcampo matemático del análisis numérico, se denomina interpolación a la obtención de nuevos puntos partiendo del conocimiento de un conjunto discreto de puntos o la aproximación de una función de calculo costoso por una más sencilla [4].

1) *Lineal:* La idea básica es conectar los 2 puntos dados en x_i , es decir (x_0, y_0) y (x_1, y_1) . La función interpolante es una línea recta entre los dos puntos. Para cualquier punto entre los dos valores de x_0 y x_1 se debe seguir la ecuación de la línea

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

que se puede derivar geométricamente.

En lo anterior, el único valor desconocido es y , que representa el valor desconocido para x , despejando queda:

$$y = y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

, donde se asume que $x_0 < x < x_1$.

Si se tienen más de dos puntos para la interpolación, es decir $N > 2$, con puntos x_0, x_1, \dots, x_N , simplemente se concatena la interpolación lineal entre pares de puntos continuos [9].

2) *Polinomios de Lagrange*: La interpolación polinomial de Lagrange es el polinomio $P(x)$ de grado $\leq (n-1)$ que pasa por los n puntos $(x_1, y_1 = f(x_1)), (x_2, y_2 = f(x_2)), \dots, (x_n, y_n = f(x_n))$ y es dado por:

$$P(x) = \sum_{j=1}^n P_j(x)$$

donde

$$P_j(x) = y_j \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

La formula fue primero publicada por Waring(1779), redescubierta por Euler en 1783 y publicada por Lagrange en 1795 [10].

II-D. Aliasing

Es el efecto que causa que señales continuas distintas se tornen indistinguibles cuando se muestrean digitalmente. Cuando esto sucede, la señal original no puede ser reconstruida de forma unívoca a partir de la señal digital. Una imagen limitada en banda y muestreada por debajo de su frecuencia de Nyquist en las direcciones “x” e “y”, resulta en una superposición de las replicas periódicas del espectro $G(f_x, f_y)$. Este fenómeno de superposición periódica sucesiva es lo que se conoce como aliasing o Efecto Nyquist.

El aliasing es un motivo de preocupación mayor en lo que concierne a la conversión analógica-digital de señales de audio y vídeo: el muestreo incorrecto de señales analógicas puede provocar que señales de alta frecuencia presenten dicho aliasing con respecto a señales de baja frecuencia. El aliasing es también una preocupación en el área de la computación gráfica e infografía, donde puede dar origen a patrones de moiré (en las imágenes con muchos detalles finos) y también a bordes dentados [2].

II-E. Teorema del muestreo

El teorema de muestreo de Nyquist-Shannon, también conocido como teorema de muestreo de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon, teorema de Nyquist o teorema del muestreo, es un teorema fundamental de la teoría de la información, de especial interés en las telecomunicaciones. Este teorema fue formulado en forma de conjetura por primera vez por Harry Nyquist en 1928 (Certain topics in telegraph transmission theory), y fue demostrado formalmente por Claude E. Shannon en 1949 (Communication in the presence of noise).

El teorema demuestra que la reconstrucción exacta de una señal periódica continua en banda base a partir de sus muestras, es matemáticamente posible si la señal está limitada en banda y la tasa de muestreo es superior al doble de su ancho de banda.

Dicho de otro modo, la información completa de la señal analógica original que cumple el criterio anterior está descrita por la serie total de muestras que resultaron del proceso de muestreo. No hay nada, por tanto, de la evolución de la señal

entre muestras que no esté perfectamente definido por la serie total de muestras.

Si la frecuencia más alta contenida en una señal analógica $x_a(t)$, es $F_{max} = B$, y la señal se muestrea a una tasa $F_s > 2F_{max} \equiv 2B$, entonces $x_a(t)$, se puede recuperar totalmente a partir de sus muestras mediante la siguiente función de interpolación:

$$g(t) = \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt}$$

Así, $x_a(t)$, se puede expresar como:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) g\left(t - \frac{n}{F_s}\right)$$

donde $x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) = x_a(nT) \equiv x(n)$ son las muestras de $x_a(t)$ [5].

II-F. Serie de Fourier

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). El nombre se debe al matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, que desarrolló la teoría cuando estudiaba la ecuación del calor. Fue el primero que estudió tales series sistemáticamente, y publicó sus resultados iniciales en 1807 y 1811. Esta área de investigación se llama algunas veces análisis armónico.

Las series de Fourier tienen la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

Donde a_n , y b_n , se denominan coeficientes de Fourier de la serie de Fourier de la función $f(x)$ [6].

II-G. Transformada de Fourier

La transformada de Fourier, denominada así por Joseph Fourier, es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformaciones de cualquiera de los dominios al otro. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce.

La transformada de Fourier es una aplicación que hace corresponder a una función f de valores complejos y definida en la recta, con otra función g definida de la manera siguiente:

$$g(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

En la práctica las variables x y ξ suelen estar asociadas a dimensiones como el tiempo y frecuencia [6].

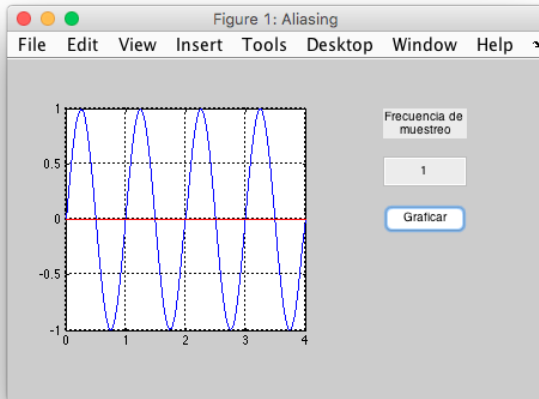


Figura 1. Frecuencia de muestreo de 1

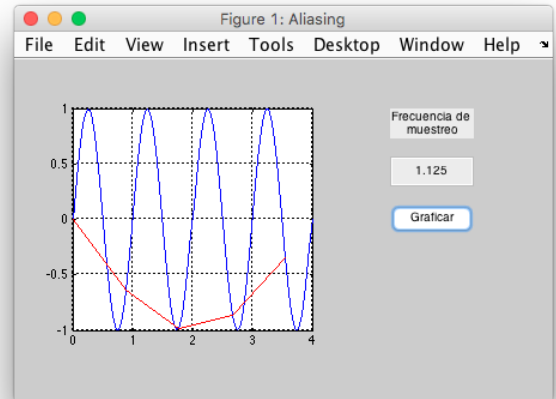


Figura 3. Frecuencia de muestreo de 1.125

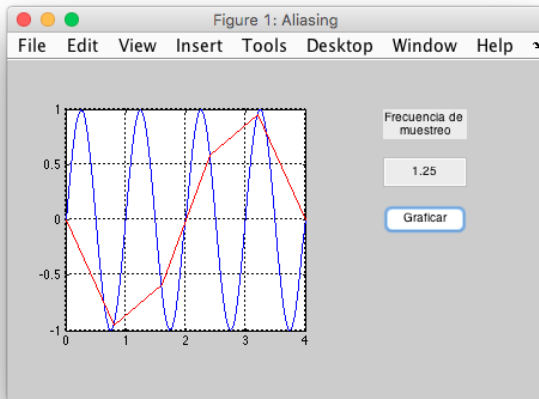


Figura 2. Frecuencia de muestreo de 1.25

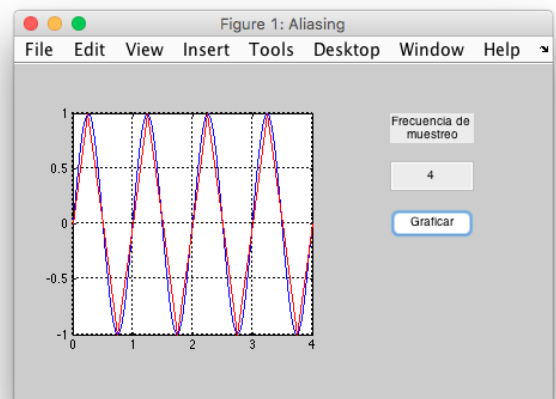


Figura 4. Frecuencia de muestreo de 4

III. DESARROLLO

III-A. Aliasing

Se desea ver el fenómeno de aliasing entre dos señales, de manera que en una señal de frecuencia de $1Hz$ con un muestreo de frecuencia menor a $2f$, genere una señal de frecuencia $\frac{1}{4}Hz$.

Para lograr esto se realizan varios experimentos, midiendo con frecuencia de 1 (Figura 1), 1.25 (Figura 3), 1.125 (Figura 2), 4 (Figura 4) y 8 (Figura 5).

III-B. Voz

En esta sección se realizan diferentes experimentos sobre la voz para poder observar aspectos como: su representación en frecuencia y en tiempo. La interfaz gráfica desarrollada para este fin se puede observar en la figura 6.

1) *Grabar voz*: Para grabar la voz se utiliza `recordingblock` a la cual se le asigna un `audiorecorder` como se muestra en el Código 1, en el cual se pueden establecer los parámetros de grabación como: frecuencia, canal (mono o estéreo) y bits. La grabación se realiza por 5 segundos.

Listing 1. Grabar voz

```
recObj = audiorecorder;
recordingblock(recObj, 5);
```

2) *Reproducir voz*: Para reproducir la voz grabada, primero se debe obtener una la información del audio con la función `getaudiodata()`, y luego esta se pasa como argumento a `sound()` que es la encargada de reproducir los sonidos junto con la frecuencia a la que se quiere reproducir el audio, en este caso este valor se define en la interfaz gráfica.

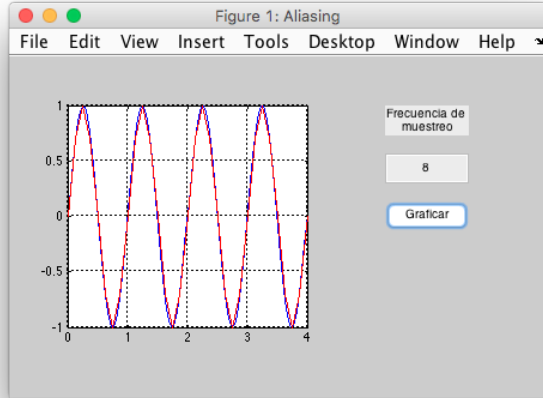


Figura 5. Frecuencia de muestreo de 8

Listing 2. Reproducir sonido

```
y = getaudiodata(recObj);
sound(y, Fs);
```

3) *Reproducción inversa de la voz:* Teniendo la grabación de la voz, se desea reproducir la misma de manera inversa, para este caso se utiliza la función `flipud()`, que se encarga de invertir el arreglo numérico que representa la voz.

4) *Representación en tiempo y en frecuencia:* Buscando tener una representación en frecuencia de la voz grabada, se debe aplicar primero la transformada de Fourier a la misma lo que se puede hacer en Matlab con la función `fft` como se ve el Código 3, con ella obtenemos los componentes de frecuencia y a partir de se obtiene la gráfica. Esto se realiza para la grabación de voz normal y la invertida.

Listing 3. Representación en frecuencia

```
y3 = fft(y);
L = 5000;
P2 = abs(y3/L);
P1 = P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1) = 2*P1(2:end-1);
d_fs = Fs*(0:(L/2))/L;
plot(d_fs, P1)
```

III-C. Escuchar colores

Se desea ser capaz de escuchar los colores. Para esto se construye una senoide con una frecuencia igual a la del color que se desea escuchar. Los colores con su respectiva frecuencia se pueden ver en el Cuadro I [7].

Dado que el espectro audible del humano se encuentra entre 20Hz y 20kHz [8], las frecuencias exceden la capacidad auditiva, por lo que a manera académica se toman en vez de THz como Hz y de esta manera ya se encuentran el rango audible.

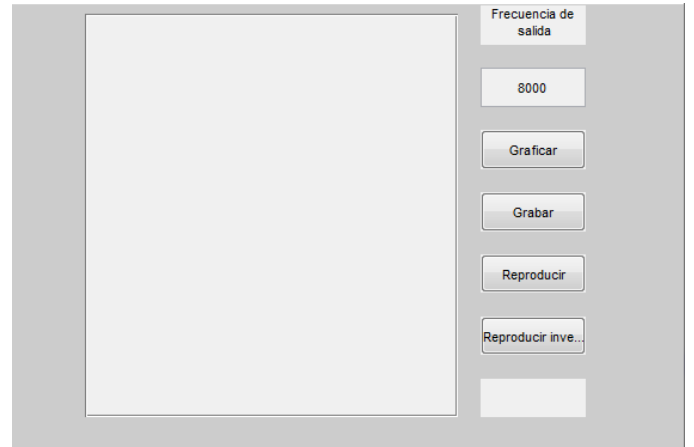


Figura 6. Interfaz gráfica para experimentos de voz

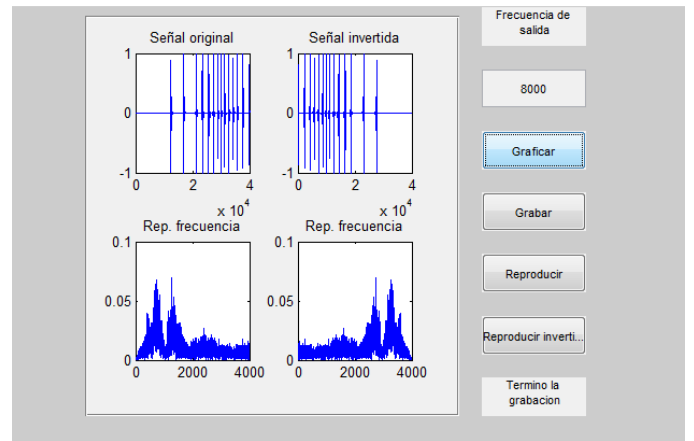


Figura 7. Interfaz gráfica para experimentos de voz

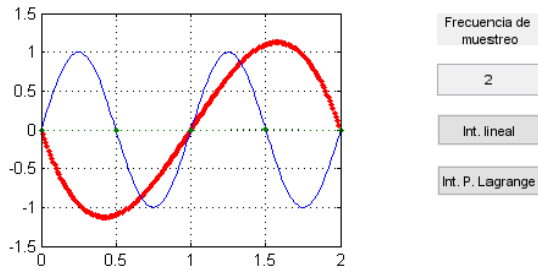
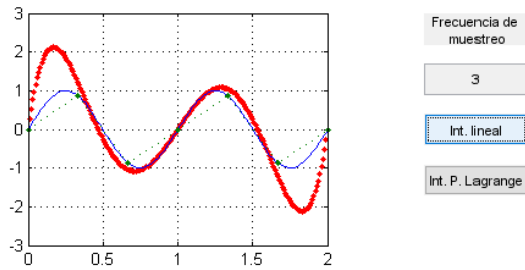
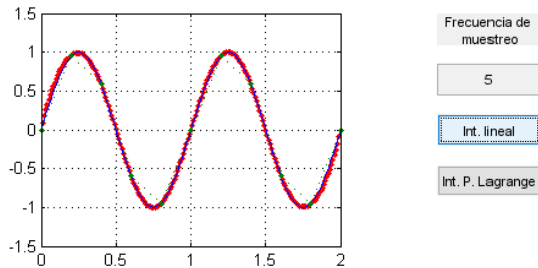
Cuadro I. RANGO DE FRECUENCIA DE LOS COLORES

Color	Frecuencia (THz)
Red	430 - 480
Orange	480 - 510
Yellow	510 - 540
Green	540 - 580
Cyan	580 - 610
Blue	610 - 670
Violet	670 - 750

III-D. Interpolación

El objetivo de esta sección es observar la diferencia que existe entre dos métodos de interpolación: lineal y polinomial por polinomios de Lagrange. Para esto trabajamos sobre una señal sinusoidal y por medio de la interfaz gráfica podemos definir la frecuencia de muestreo de los puntos que vamos a interpolar.

En la gráfica 8 podemos observar la interpolación realizada de manera lineal (línea punteada) y polinomial (línea de puntos) tomando una frecuencia de muestreo de 2 veces la frecuencia original

Figura 8. Interpolación: Frecuencia de muestreo de $2f$ Figura 9. Interpolación: Frecuencia de muestreo de $3f$ Figura 10. Interpolación: Frecuencia de muestreo de $5f$

De igual manera en las gráficas 9 y 10, podemos apreciar como se van acercando las interpolaciones a la señal original, a medida que aumentamos la frecuencia de muestreo.

IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

IV-A. Aliasing

Como se esperaba se ve que en las frecuencias mayores a la frecuencia de Nyquist (Figuras 4 y 5) la señal se asemeja a la señal original, mientras que para las frecuencias menores (Figuras 1, 2 y 3) la señal resultante difiere de la señal original, presentándose el fenómeno de aliasing.

También es visible que para el caso de la señal con frecuencia de muestreo de 1.25 (Figura 2), la frecuencia resultante para la señal generada es de 0.25Hz, situación que se repite con la señal con frecuencia de muestreo de 1.125 (Figura 3), la cual tiene una frecuencia resultante de 0.125Hz.

IV-B. Voz

Al aumentar la frecuencia de muestreo en la grabación de voz se puede escuchar la grabación más grave y lenta, mientras que al disminuirla se escucha la grabación más aguda y rápida. Este efecto también se presenta al cambiar la frecuencia de muestreo en la reproducción, pero se presenta de manera contraria, ya que al aumentar la frecuencia se escucha la grabación más aguda y al disminuirla se escucha más grave.

Se realizó el experimento de grabar un palíndromo y observar su representación en tiempo y frecuencia, y se pudo observar que la representación en frecuencia es la misma para la señal original y la señal invertida.

IV-C. Escuchar colores

Las frecuencias de los colores, como se encuentran fuera del rango audible, al generar una señal senoidal con esta frecuencia es imposible poder escucharla, pero al realizar el cambio unidades de THz a Hz, se pueden ya escuchar las diferentes tonalidades de colores.

IV-D. Interpolación

Cuando se aumenta la frecuencia de muestreo es decir cuando se poseen mas puntos para realizar la interpolación, esta se aproxima más a la señal original pero como podemos observar en la figura 8, la interpolación polinomial da una aproximación mas exacta que la lineal, dependiendo del grado del polinomio de Lagrange mejor es la aproximación de la misma, como se puede ver en la figura 10 donde se utiliza un polinomio de grado mayor, el error de la interpolación con respecto a la señal original es cercano a cero.

V. CONCLUSIONES

- Toda señal tiene un contenido frecuencial que puede ser observado por medio de la transformada de Fourier.
- Los dispositivos de computo, al ser elementos discretos, obligan a usar el teorema del muestreo, ya que al no usarse, puede presentarse el aliasing y con esto no solo hay perdida de información si no que pueden haber datos erróneos.
- Al cambiar la frecuencia de muestreo en grabación de voz se genera un fenómeno de aliasing, sonando más grave o más aguda.
- Aunque los colores también son señales, el contenido de frecuencia de estas señales se encuentran fuera de la capacidad auditiva del ser humano.
- Se debe utilizar un grado apropiado para realizar interpolación polinomial o una cantidad suficiente de datos para poder realizar una interpolación lineal que sea fiel a la señal original.

REFERENCIAS

- [1] Encyclopedia of math: periodic function, <https://goo.gl/416jzE>
- [2] Serway, Raymond A.; Jewett, John W. (2004). Physics for Scientists and Engineers (6ª edición). Brooks/Cole.
- [3] Walden, R. H. (1999). Analog-to-digital converter survey and analysis. IEEE Journal on Selected Areas in Communications
- [4] R.E. Crochiere and L.R. Rabiner. (1983). Multirate Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- [5] H. Nyquist, Certain topics in telegraph transmission theory, Trans. AIEE, volumen 47, páginas 617-644, abril de 1928.
- [6] M. R. Spiegel, J. Liu, L. Abellanas (2003): Fórmulas y tablas de matemática aplicada. Segunda edición. Serie Schaum. Mc Graw-Hill.
- [7] Craig F. Bohren (2006). Fundamentals of Atmospheric Radiation: An Introduction with 400 Problems. Wiley-VCH. ISBN 3-527-40503-8.
- [8] Rosen, Stuart (2011). Signals and Systems for Speech and Hearing (2nd ed.). BRILL. p. 163. For auditory signals and human listeners, the accepted range is 20Hz to 20kHz, the limits of human hearing
- [9] Capítulo 4. Interpolación, <http://wwwprof.uniandes.edu.co/~gprieto/classes/compufis/interpolacion.pdf>
- [10] Lagrange Interpolating Polynomial, <http://mathworld.wolfram.com/LagrangeInterpolatingPolynomial.html>