Primer trabajo teoría de la información y la comunicación

Miguel Angel Asencio Hurtado, Ana María Rodríguez Reyes

31 de marzo de 2016

1. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t^2,\ -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cos(n\omega_0 t) + b_n\, sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(n\,t)dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 sin(n\,t)dt \end{aligned}$$

Resolviendo para a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{t^3}{3}\Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{3\pi}(\pi^3 - (-\pi)^3) \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 \end{aligned}$$

Resolviendo para a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(n\,t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{t^2 sin(n\,t)}{n} + \frac{2t\,cos(n\,t)}{n^2} - \frac{2\,sin(n\,t)}{n^3}\right)\Bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2 sin(n\,\pi)}{n\pi} + \frac{2\pi\,cos(n\,\pi)}{n^2\pi} - \frac{2\,sin(n\,\pi)}{n^3\pi} \\ &\quad -\frac{\pi^2 sin(n(-\pi))}{n\pi} + \frac{2\pi\,cos(n(-\pi))}{n^2\pi} + \frac{2\,sin(n(-\pi))}{n^3\pi} \\ &= 2\pi^2 sinc(n\,\pi) + \frac{4\pi}{n}cosc(n\,\pi) - \frac{4}{n^2}sinc(n\,\pi) \end{aligned}$$

Resolviendo para b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 sin(n\,t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t^2 cos(n\,t)}{n} - \frac{2t\,sin(n\,t)}{n^2} + \frac{2\,cos(n\,t)}{n^3}\right)\Bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{\pi^2 cos(n\,\pi)}{n\pi} - \frac{2\pi\,sin(n\,\pi)}{n^2\pi} + \frac{2\,cos(n\,\pi)}{n^3\pi} \\ &\quad +\frac{\pi^2 cos(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{2\pi\,sin(n(-\pi))}{n^2\pi} - \frac{2\,cos(n(-\pi))}{n^3\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

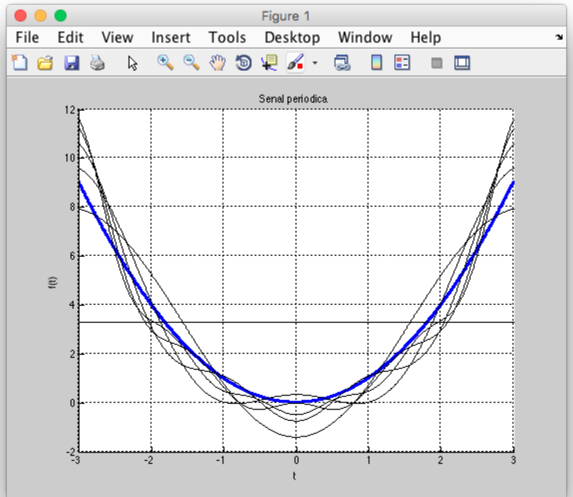

Figura 1: Señal $f(t) = t^2$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \, cos(n\,t)) \\
a_n &= \left(2\pi^2 - \frac{4}{n^2}\right) sinc(n\,\pi) + \frac{4\pi}{n} cosc(n\,\pi)
\end{aligned}
$$

Esta progresión puede verse en la Figura 1, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

2. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t\,sin(t), \; -\pi \leq t \leq \pi$$

3. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t, \; -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \, cos(n\omega_0 t) + b_n \, sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt
\end{aligned}
$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, cos(n\,t)dt \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, sin(n\,t)dt
\end{aligned}
$$

Resolviendo para a_0:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{t^2}{2} \bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - (-\pi)^2) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Resolviendo para a_n:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, cos(n\,t)dt \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{t\,sin(n\,t)}{n} + \frac{cos(n\,t)}{n^2} \right) \bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\pi\,sin(n\,\pi)}{n\pi} + \frac{cos(n\,\pi)}{n^2\pi} \\
& \quad - \frac{(-\pi)sin(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{cos(n(-\pi))}{n^2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

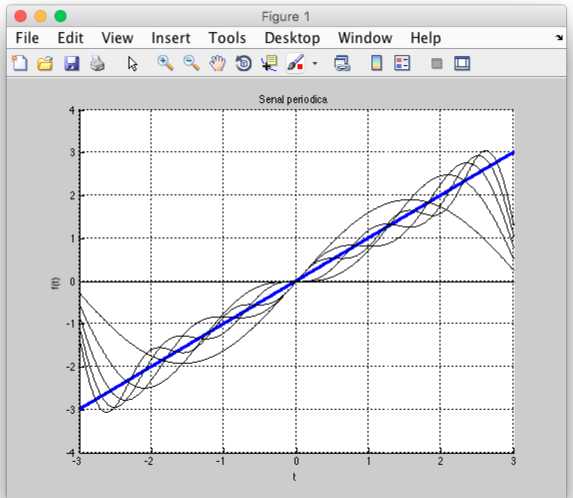

Figura 2: Señal $f(t) = t$

Resolviendo para b_n:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, sin(n\,t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t\, cos(n\,t)}{n} + \frac{sin(n\,t)}{n^2}\right)\Bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{\pi\, cos(n\,\pi)}{n\pi} + \frac{sin(n\,\pi)}{n^2\pi} \\
&\quad + \frac{(-\pi)cos(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{sin(n(-\pi))}{n^2\pi} \\
&= \frac{2}{n}sinc(n\,\pi) - 2\pi\, cosc(n\,\pi)
\end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{n}sinc(n\,\pi) - 2\pi\, cosc(n\,\pi)\right) sin(n\,t)\right)$$

Esta progresión puede verse en la Figura 2, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

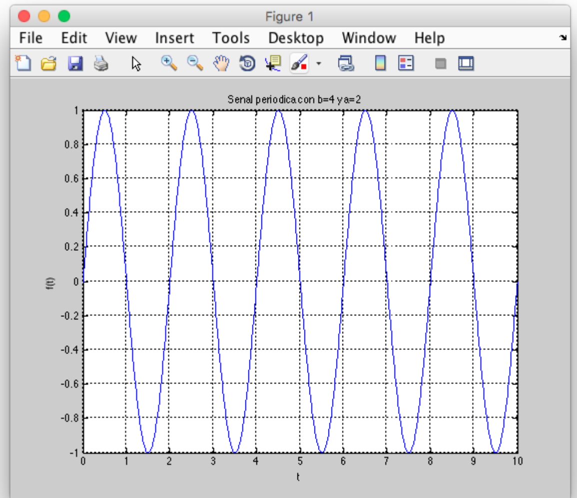

Figura 3: Señal $f(t) = sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$ con $b = 4$ y $a = 2$

4. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leq t \leq 0 \\ t, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

5. Hallar el periodo

a) $f(t) = sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$

R/ El periodo T de una señal senoidal se puede definir como:

$$f(t) = sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para resolver la igualdad:

$$T = (b - a)$$

Es evidente en las Figuras 3 y 4 que los periodos coinciden con los calculados.

b) $f(t) = sin(t) + \frac{1}{3}sin(3t) + \frac{1}{5}sin(5t)$

R/ El periodo T de una señal senoidal se puede definir como:

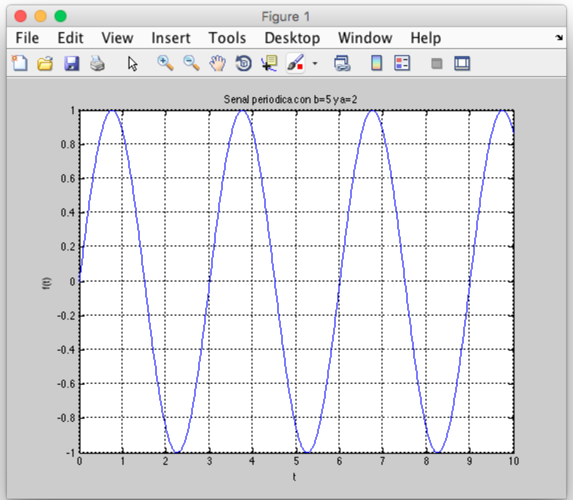

Figura 4: Señal $f(t) = sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$ con $b = 5$ y $a = 2$

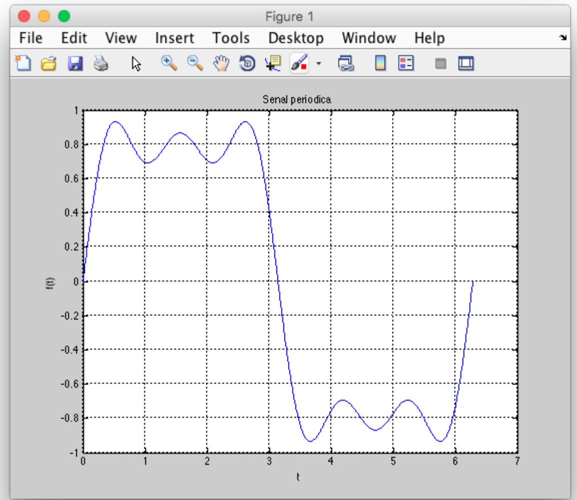

Figura 5: Señal $f(t) = sin(t) + \frac{1}{3}sin(3t) + \frac{1}{5}sin(5t)$

$$f(t) = sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para cada senoidal su periodo sería:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{3} \\ T_3 &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

Dado el hecho de que la señal es una señal compuesta, será periodica si el cociente entre sus periodos es un número racional:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= 3 \\ \frac{T_1}{T_2} &= 5 \\ \frac{T_2}{T_3} &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Dado el hecho de que se cumple la condición, la señal es periódica y su periodo será en mínimo común múltiplo de estos periodos:

$$\begin{aligned} T &= m.c.m(T_1, T_2, T_3) \\ &= m.c.m(2\pi, 2\pi 3^{-1}, 2\pi 5^{-1}) \\ T &= 2\pi \end{aligned}$$

Es evidente en la Figura 5 que el periodo coincide con el calculado.

c) $f(t) = cos(10t) + cos((10 + \pi)t)$