

Primer trabajo teoría de la información y la comunicación

Miguel Angel Asencio Hurtado, Ana María Rodríguez Reyes

27 de marzo de 2016

1. Desarrollar en series de Fourier

Resolviendo para a_0 :

$$f(t) = t^2, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(n t) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(n t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{3\pi} (\pi^3 - (-\pi)^3) \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

Resolviendo para a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(n t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{t^2 \sin(n t)}{n} + \frac{2t \cos(n t)}{n^2} - \frac{2 \sin(n t)}{n^3} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2 \sin(n \pi)}{n \pi} + \frac{2\pi \cos(n \pi)}{n^2 \pi} - \frac{2 \sin(n \pi)}{n^3 \pi} \\ &\quad - \frac{\pi^2 \sin(n(-\pi))}{n \pi} + \frac{2\pi \cos(n(-\pi))}{n^2 \pi} + \frac{2 \sin(n(-\pi))}{n^3 \pi} \\ &= 2\pi^2 \operatorname{sinc}(n \pi) + \frac{4\pi}{n} \cos(n \pi) - \frac{4}{n^2} \operatorname{sinc}(n \pi) \end{aligned}$$

Resolviendo para b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(n t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{t^2 \cos(n t)}{n} - \frac{2t \sin(n t)}{n^2} + \frac{2 \cos(n t)}{n^3} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{\pi^2 \cos(n \pi)}{n \pi} - \frac{2\pi \sin(n \pi)}{n^2 \pi} + \frac{2 \cos(n \pi)}{n^3 \pi} \\ &\quad + \frac{\pi^2 \cos(n(-\pi))}{n \pi} - \frac{2\pi \sin(n(-\pi))}{n^2 \pi} - \frac{2 \cos(n(-\pi))}{n^3 \pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt))$$

$$a_n = \left(2\pi^2 - \frac{4}{n^2}\right) \operatorname{sinc}(n\pi) + \frac{4\pi}{n} \operatorname{cosec}(n\pi)$$

2. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t \sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

3. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$$

Resolviendo para a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{t^2}{2} \Big|_{t=-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - (-\pi)^2)$$

$$= 0$$

Resolviendo para a_n :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(nt) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{t \sin(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi \sin(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi} - \frac{(-\pi) \sin(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{\cos(n(-\pi))}{n^2\pi}$$

$$= 0$$

Resolviendo para b_n :

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{t \cos(nt)}{n} + \frac{\sin(nt)}{n^2} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi \cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi} + \frac{(-\pi) \cos(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{\sin(n(-\pi))}{n^2\pi}$$

$$= \frac{2}{n} \operatorname{sinc}(n\pi) - 2\pi \operatorname{cosec}(n\pi)$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{n} \operatorname{sinc}(n\pi) - 2\pi \operatorname{cosec}(n\pi) \right) \sin(nt) \right)$$

4. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leq t \leq 0 \\ t, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

5. Hallar el periodo

a) $f(t) = \sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$

R/ El periodo T de una señal senoidal se puede definir como:

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para resolver la igualdad:

$$T = (b - a)$$

b) $f(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)$

R/ El periodo T de una señal senoidal se puede definir como:

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para cada senoidal su periodo sería:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{3} \\ T_3 &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

Dado el hecho de que la señal es una señal compuesta, será periódica si el cociente entre sus periodos es un número racional:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= 3 \\ \frac{T_1}{T_3} &= 5 \\ \frac{T_2}{T_3} &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Dado el hecho de que se cumple la condición, la señal es periódica y su periodo será en mínimo común múltiplo de estos periodos:

$$\begin{aligned} T &= m.c.m(T_1, T_2, T_3) \\ &= m.c.m(2\pi, 2\pi 3^{-1}, 2\pi 5^{-1}) \\ &= 2\pi 3^{-1} 5^{-1} \\ T &= \frac{2\pi}{15} \end{aligned}$$

c) $f(t) = \cos(10t) + \cos((10 + \pi)t)$