Tarea 2

Miguel Angel Asencio Hurtado, Ana María Rodríguez Reyes

12 de mayo de 2016

1. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t^2, \; -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \, cos(n\omega_0 t) + b_n \, sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(n\,t) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 sin(n\,t) dt \end{aligned}$$

Resolviendo para a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{t^3}{3} \bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{3\pi} (\pi^3 - (-\pi)^3) \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

Resolviendo para a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 cos(n\,t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{t^2 sin(n\,t)}{n} + \frac{2t\,cos(n\,t)}{n^2} - \frac{2\,sin(n\,t)}{n^3}\right)\Bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2 sin(n\,\pi)}{n\pi} + \frac{2\pi\,cos(n\,\pi)}{n^2\pi} - \frac{2\,sin(n\,\pi)}{n^3\pi} \\
&\quad - \frac{\pi^2 sin(n(-\pi))}{n\pi} + \frac{2\pi\,cos(n(-\pi))}{n^2\pi} + \frac{2\,sin(n(-\pi))}{n^3\pi} \\
&= 2\pi^2 sinc(n\,\pi) + \frac{4\pi}{n} cosc(n\,\pi) - \frac{4}{n^2} sinc(n\,\pi)
\end{aligned}$$

Resolviendo para b_n:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 sin(n\,t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t^2 cos(n\,t)}{n} - \frac{2t\,sin(n\,t)}{n^2} + \frac{2\,cos(n\,t)}{n^3}\right)\Bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{\pi^2 cos(n\,\pi)}{n\pi} - \frac{2\pi\,sin(n\,\pi)}{n^2\pi} + \frac{2\,cos(n\,\pi)}{n^3\pi} \\
&\quad + \frac{\pi^2 cos(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{2\pi\,sin(n(-\pi))}{n^2\pi} - \frac{2\,cos(n(-\pi))}{n^3\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\,cos(n\,t)) \\
a_n &= \left(2\pi^2 - \frac{4}{n^2}\right) sinc(n\,\pi) + \frac{4\pi}{n} cosc(n\,\pi)
\end{aligned}$$

Esta progresión puede verse en la Figura 1, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(t) \\
A_2 &= \frac{\pi^2}{3} + \cos(2t) \\
A_3 &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{9}\cos(3t) \\
A_4 &= \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4}\cos(4t) \\
A_5 &= \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{25}\cos(5t)
\end{aligned}$$

La serie se puede expresar como:

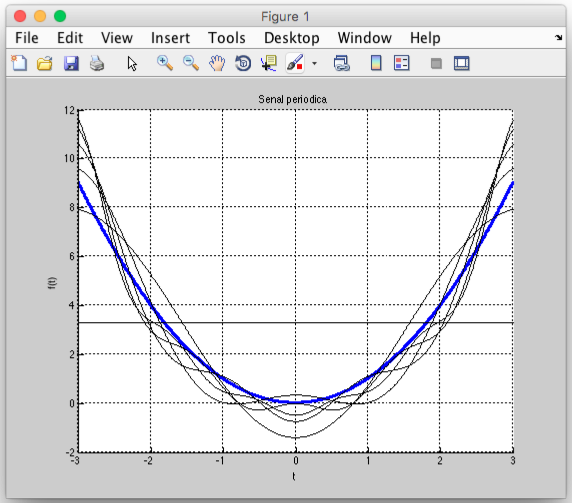

Figura 1: Señal $f(t) = t^2$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(n\,t\right)\right)$$

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por lo que el coeficiente c_n se puede definir de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-jnt}dt$$

Resolviendo para c_n:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-jnt}dt \\ &= \left.\frac{e^{-jnt}(2nt + jn^2t^2 - 2j)}{2\pi n^3}\right|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(\pi^2 n^2 - 2)\sin(\pi n) + \pi n\cos(\pi n)}{\pi n^3} \end{aligned}$$

2. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t\,sin(t),\ -\pi \le t \le \pi$$

R/ Se plantea la serie de Fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cos(n\omega_0 t) + b_n\, sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(t)dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(t)cos(n\,t)dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(t)sin(n\,t)dt \end{aligned}$$

Resolviendo para a_0:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[sin(t) - tcos(t)\Big|_{t=-\pi}^{0} + sin(t) - tcos(t)\Big|_{t=0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}[2\pi] \\ &= 2 \end{aligned}$$

Resolviendo para a_n:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(t)cos(n\,t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\Bigg(\frac{1}{2}\Bigg(- \frac{sin((n-1)t)}{(n-1)^2} + \frac{sin((n+1)t)}{(n+1)^2} + \\ &\quad \frac{tcos((n-1)t)}{n-1} - \frac{tcos((n+1)t)}{n+1})\Bigg)\Bigg)\Bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{4nsin(\pi n) - 2\pi(n^2-1)cos(\pi n))}{\pi(n^2-1)^2} \end{aligned}$$

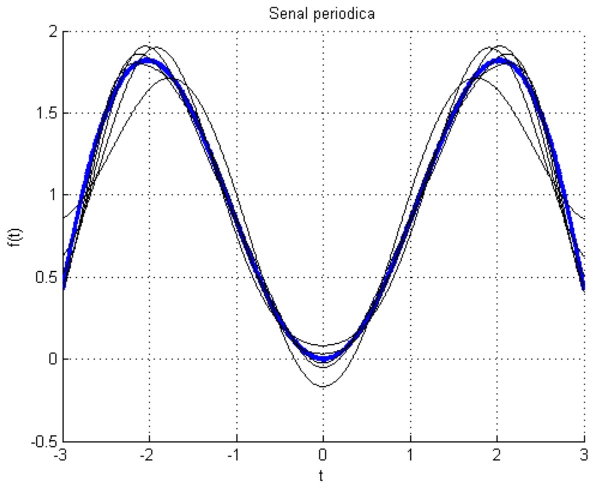

Figura 2: Señal $f(t) = tsin(t)$

Resolviendo para b_n:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(t)sin(n\,t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{(n^2-1)^2}(sin(t)((n^2+1)sin(nt)\right. \\
&\quad -n(n^2-1)xcos(nx)) + \\
&\quad cos(t)((n^2-1)xsin(nx) + \\
&\quad \left.\left. 2ncos(nx)))\right]\right|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
f(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\,cos(n\,t)) \\
a_n &= \frac{4nsin(\pi n) - 2\pi(n^2-1)cos(\pi n)}{\pi(n^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Esta progresión puede verse en la Figura 2, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{-cos(t)}{2} \\
A_2 &= \frac{-2}{3}cos(2t) \\
A_3 &= \frac{1}{4}cos(3t) \\
A_4 &= \frac{-2}{15}cos(4t) \\
A_5 &= \frac{1}{12}cos(5t)
\end{aligned}$$

La serie se puede expresar como:

$$f(t) = 1 - \frac{cos(t)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1}cos(nt)\right)$$

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por lo que el coeficiente c_n se puede definir de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Resolviendo para c_n:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}e^{-jn\omega_0 t}dt \\
& \quad \frac{tcos((n-1)t)}{n-1} - \frac{tcos((n+1)t)}{n+1}\Big)\Big)\Big)\Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{4nsin(\pi n) - 2\pi(n^2-1)cos(\pi n)}{\pi(n^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Cinco armónicos de la serie compleja son:

$$\begin{aligned}
A_{-2} &= \frac{-1}{3}e^{-2jt} \\
A_{-1} &= \frac{-1}{4}e^{-1jt} \\
A_0 &= 1 \\
A_1 &= \frac{-1}{4}e^{1jt} \\
A_2 &= \frac{-1}{3}e^{2jt}
\end{aligned}$$

3. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t, \ -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cos(n\omega_0 t) + b_n\, sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt \\
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt
\end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, cos(n\, t)dt \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, sin(n\, t)dt
\end{aligned}$$

Resolviendo para a_0:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{t^2}{2}\bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}(\pi^2 - (-\pi)^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo para a_n:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\, cos(n\, t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{t\, sin(n\, t)}{n} + \frac{cos(n\, t)}{n^2}\right)\bigg|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\pi\, sin(n\, \pi)}{n\pi} + \frac{cos(n\, \pi)}{n^2\pi} \\
&\quad - \frac{(-\pi)sin(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{cos(n(-\pi))}{n^2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

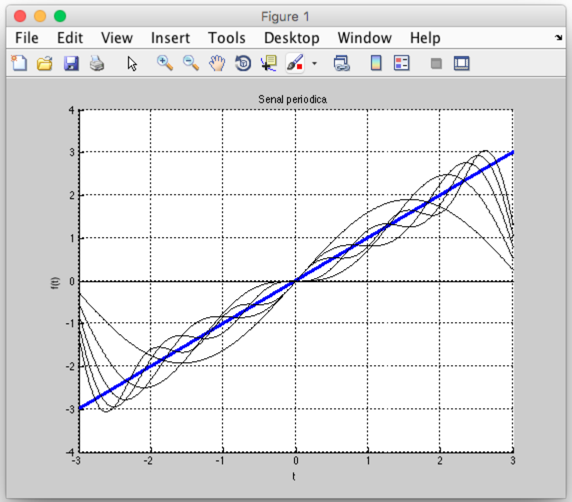

Figura 3: Señal $f(t) = t$

Resolviendo para b_n:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\,sin(n\,t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{t\,cos(n\,t)}{n}+\frac{sin(n\,t)}{n^2}\right)\Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{\pi\,cos(n\,\pi)}{n\pi}+\frac{sin(n\,\pi)}{n^2\pi} \\
&\quad +\frac{(-\pi)cos(n(-\pi))}{n\pi}-\frac{sin(n(-\pi))}{n^2\pi} \\
&= \frac{2}{n}sinc(n\,\pi) - 2\pi\,cosc(n\,\pi)
\end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{n}sinc(n\,\pi) - 2\pi\,cosc(n\,\pi)\right)sin(n\,t)\right)$$

Esta progresión puede verse en la Figura 3, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned}
A_1 &= -2\sin(t) \\
A_2 &= \sin(2t) \\
A_3 &= -\frac{2}{3}\sin(3t) \\
A_4 &= \frac{1}{2}\sin(4t) \\
A_5 &= -\frac{2}{5}\sin(5t)
\end{aligned}$$

La serie se puede expresar como:

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\sin(n\,t)\right)$$

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por lo que el coeficiente c_n se puede definir de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-jnt}dt$$

Resolviendo para c_n:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} te^{-jnt}dt \\ &= \left.\frac{e^{-jnt}(1+jnt)}{2\pi n^2}\right|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{j(\pi n\cos(\pi n) - \sin(\pi n))}{\pi n^2} \end{aligned}$$

4. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leq t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\, cos(n\omega_0 t) + b_n\, sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)cos(n\omega_0 t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(n\omega_0 t)dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)dt+\int_{0}^{\pi}tdt\right]\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)cos(n\,t)dt+\int_{0}^{\pi}tcos(n\,t)dt\right]\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)sin(n\,t)dt+\int_{0}^{\pi}tsin(n\,t)dt\right]
\end{aligned}
$$

Resolviendo para a_0:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)dt+\int_{0}^{\pi}tdt\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^2}{2}+\pi t\Big|_{t=-\pi}^{0}+\frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{\pi}\right]\\
&= \frac{1}{\pi}[\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^2}{2}]\\
&= \pi
\end{aligned}
$$

Resolviendo para a_n:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)cos(n\,t)dt+\int_{0}^{\pi}tcos(n\,t)dt\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{cos(nt)}{n^2}+\frac{tsin(nt)}{n}+\frac{\pi sin(nt)}{n}\right)\Big|_{t=-\pi}^{0}\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{cos(nt)}{n^2}+\frac{tsin(nt)}{n}\right)\Big|_{t=0}^{\pi}\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-cos(\pi n)}{n^2}+\frac{\pi n sin(\pi n)+cos(\pi n)-1}{n^2}\right]\\
&= \frac{sin(\pi n)}{n}
\end{aligned}
$$

Resolviendo para b_n:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi+t)sin(n\,t)dt+\int_{0}^{\pi}tsin(n\,t)dt\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{sin(nt)}{n^2}-\frac{tcos(nt)}{n}-\frac{\pi cos(nt)}{n}\right)\Big|_{t=-\pi}^{0}\right.\\
&\quad\left.\left(\frac{sin(nt)}{n^2}-\frac{tcos(nt)}{n}\right)\Big|_{t=0}^{\pi}\right]\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{sin(\pi n)-\pi n}{n^2}+\frac{sin(\pi n)-\pi n cos(\pi n)}{n^2}\right]\\
&= \frac{2sin(\pi n)-\pi n cos(\pi n)-\pi n}{\pi n^2}
\end{aligned}
$$

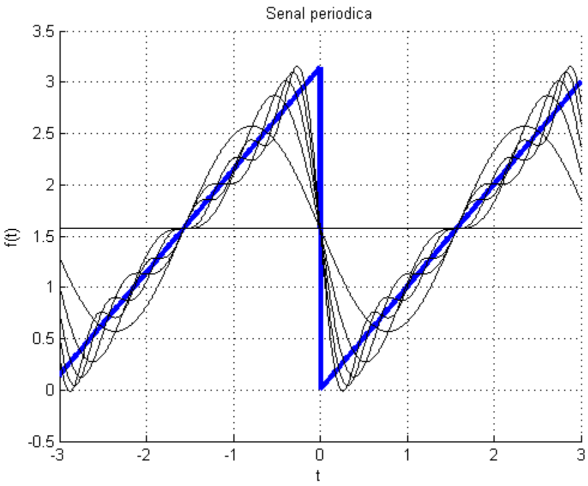

Figura 4: Señal $f(t) = \{\pi + t, t\}$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cos(n\, t) + b_n\, sin(n\, t)) \\ a_n &= \frac{sin(\pi n)}{n} \\ b_n &= \frac{2sin(\pi n) - \pi n cos(\pi n) - \pi n}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Esta progresión puede verse en la Figura 4, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= -sin(2t) \\ A_3 &= 0 \\ A_4 &= \frac{-1}{2} sin(4t) \\ A_5 &= 0 \\ A_6 &= \frac{-1}{3} sin(6t) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los armónicos nulos como los impares($A_1, A_3, ..., A_{2n+1}$) no se tienen en cuenta, la serie se puede representar como:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n}\, sin(2nt) \right)$$

Utilizando la forma compleja de la serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por lo que el coeficiente c_n se puede definir de la siguiente forma:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi + t)e^{-jnt}dt + \int_{0}^{\pi} te^{-jnt}dt\right]$$

Resolviendo para c_n:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(\pi + t)e^{-jnt}dt + \int_{0}^{\pi} te^{-jnt}dt\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\Bigg[\int_{-\pi}^{0}\pi e^{-jnt}dt + \int_{-\pi}^{0} te^{-jnt}dt + \\
&\quad \int_{0}^{\pi} te^{-jnt}dt\Bigg] \\
&= \frac{1}{2\pi}\Bigg[-\frac{j\pi(-1+e^{j\pi n})}{n} + \frac{1+e^{j\pi n}(-1+j\pi n)}{n^2} + \\
&\quad \frac{-1+e^{j\pi n}(1+j\pi n)}{n^2}\Bigg] \\
&= \left[-\frac{j(-1+e^{j\pi n})}{2n} + \frac{e^{j\pi n}(j)}{n}\right]
\end{aligned}$$

Cinco armónicos para la serie compleja son:

$$\begin{aligned}
A_{-2} &= \frac{-je^{-2jt}}{2} \\
A_{-1} &= 0 \\
A_0 &= \frac{pi}{2} \\
A_1 &= 0 \\
A_2 &= \frac{je^{2jt}}{2}
\end{aligned}$$

5. Hallar el periodo
a) $f(t) = sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$
R/ El periodo T de una señal senoidal se puede definir como:

$$f(t) = sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para resolver la igualdad:

$$T = (b-a)$$

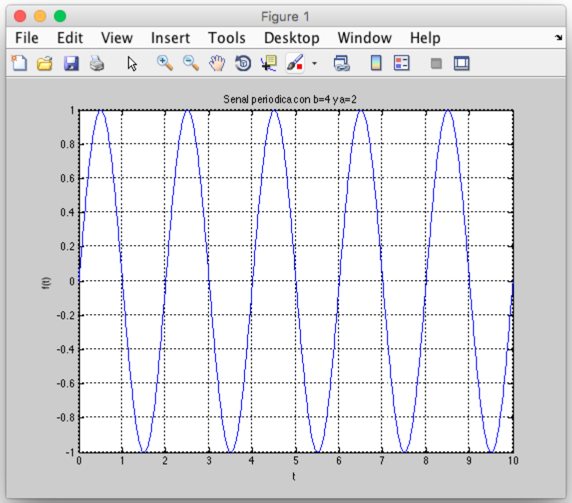

Figura 5: Señal $f(t) = sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$ con $b = 4$ y $a = 2$

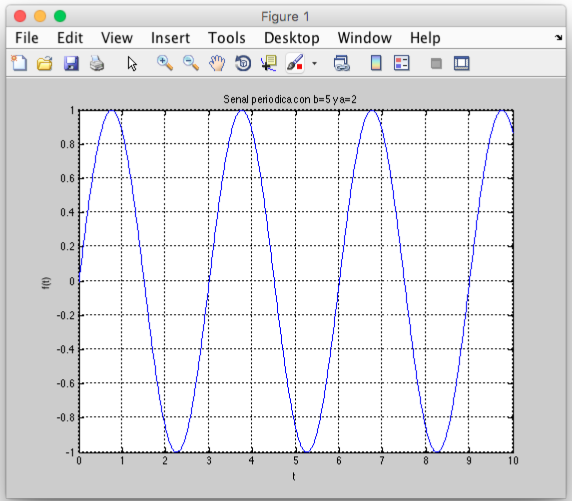

Figura 6: Señal $f(t) = sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$ con $b = 5$ y $a = 2$

Es evidente en las Figuras 5 y 6 que los periodos coinciden con los calculados.

b) $f(t) = sin(t) + \frac{1}{3}sin(3t) + \frac{1}{5}sin(5t)$
R/ El periodo T de una señal senoidal se puede definir como:

$$f(t) = sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para cada senoidal su periodo sería:

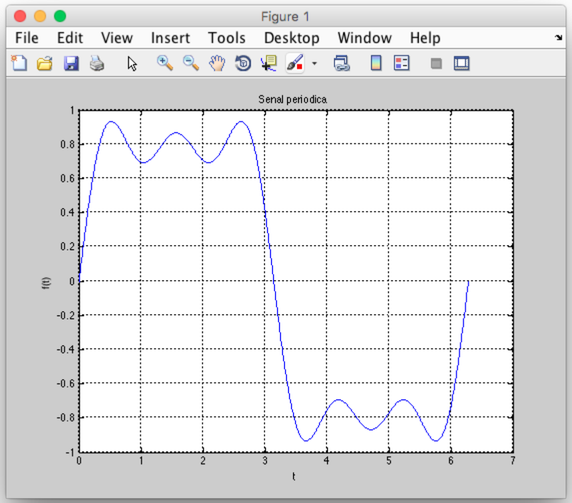

Figura 7: Señal $f(t) = sin(t) + \frac{1}{3}sin(3t) + \frac{1}{5}sin(5t)$

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{3} \\ T_3 &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

Dado el hecho de que la señal es una señal compuesta, será periódica si el cociente entre sus periodos es un número racional:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{T_2} &= 3 \\ \frac{T_1}{T_2} &= 5 \\ \frac{T_2}{T_3} &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Dado el hecho de que se cumple la condición, la señal es periódica y su periodo será el mínimo común múltiplo de estos periodos:

$$\begin{aligned} T &= m.c.m(T_1, T_2, T_3) \\ &= m.c.m(2\pi, 2\pi 3^{-1}, 2\pi 5^{-1}) \\ T &= 2\pi \end{aligned}$$

Es evidente en la Figura 7 que el periodo coincide con el calculado.

c) $f(t) = cos(10t) + cos((10 + \pi)t)$
R/ El periodo T de la función coseno se puede definir como:

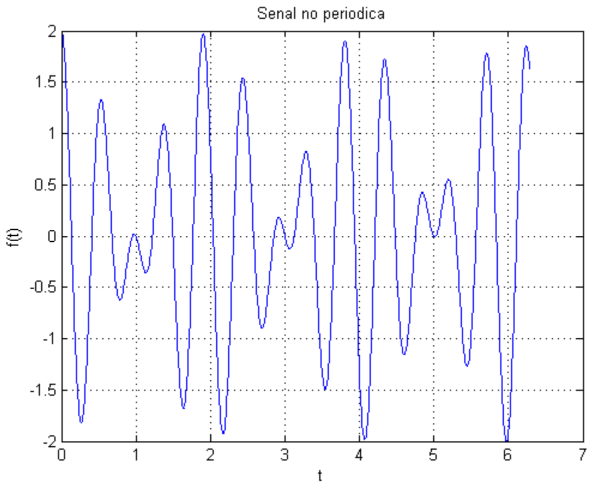

Figura 8: Señal $f(t) = cos(10t) + cos((10 + \pi)t)$

$$f(t) = cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para cada coseno su periodo sería:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\pi}{5} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{10+\pi} \end{aligned}$$

Dado el hecho de que la señal es una señal compuesta, será periódica si el cociente entre sus periodos es un número racional:

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{\pi}{10}$$

Dado el hecho de que no se cumple la condición, la señal no es periódica, como se puede observar en la Figura 8