

Tarea 2

Miguel Angel Asencio Hurtado, Ana María Rodríguez Reyes

4 de abril de 2016

1. Desarrollar en series de Fourier

Resolviendo para a_0 :

$$f(t) = t^2, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(n t) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(n t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{t^3}{3} \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{3\pi} (\pi^3 - (-\pi)^3) \\ &= \frac{2}{3} \pi^2 \end{aligned}$$

Resolviendo para a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(n t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{t^2 \sin(n t)}{n} + \frac{2t \cos(n t)}{n^2} - \frac{2 \sin(n t)}{n^3} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2 \sin(n \pi)}{n\pi} + \frac{2\pi \cos(n \pi)}{n^2 \pi} - \frac{2 \sin(n \pi)}{n^3 \pi} \\ &\quad - \frac{\pi^2 \sin(n(-\pi))}{n\pi} + \frac{2\pi \cos(n(-\pi))}{n^2 \pi} + \frac{2 \sin(n(-\pi))}{n^3 \pi} \\ &= 2\pi^2 \operatorname{sinc}(n \pi) + \frac{4\pi}{n} \cos(n \pi) - \frac{4}{n^2} \operatorname{sinc}(n \pi) \end{aligned}$$

Resolviendo para b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(n t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{t^2 \cos(n t)}{n} - \frac{2t \sin(n t)}{n^2} + \frac{2 \cos(n t)}{n^3} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{\pi^2 \cos(n \pi)}{n\pi} - \frac{2\pi \sin(n \pi)}{n^2 \pi} + \frac{2 \cos(n \pi)}{n^3 \pi} \\ &\quad + \frac{\pi^2 \cos(n(-\pi))}{n\pi} - \frac{2\pi \sin(n(-\pi))}{n^2 \pi} - \frac{2 \cos(n(-\pi))}{n^3 \pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

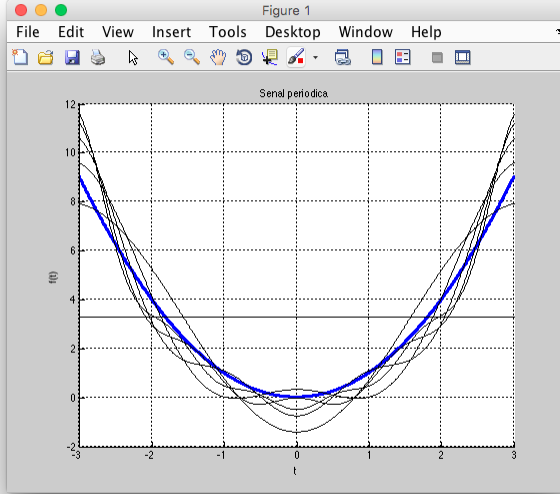


Figura 1: Señal $f(t) = t^2$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt))$$

$$a_n = \left(2\pi^2 - \frac{4}{n^2}\right) \text{sinc}(n\pi) + \frac{4\pi}{n} \text{cosec}(n\pi)$$

Esta progresión puede verse en la Figura 1, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$A_1 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos(t)$$

$$A_2 = \frac{\pi^2}{3} + \cos(2t)$$

$$A_3 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{9} \cos(3t)$$

$$A_4 = \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{4} \cos(4t)$$

$$A_5 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{25} \cos(5t)$$

La serie se puede expresar como:

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt) \right)$$

2. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t \sin(t), \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de Fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) \sin(nt) dt$$

Resolviendo para a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\sin(t) - t \cos(t) \right]_{t=-\pi}^0 + \left[\sin(t) - t \cos(t) \right]_{t=0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} [2\pi]$$

$$= 2$$

Resolviendo para a_n :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) \cos(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{\sin((n-1)t)}{(n-1)^2} + \frac{\sin((n+1)t)}{(n+1)^2} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{t \cos((n-1)t)}{n-1} - \frac{t \cos((n+1)t)}{n+1} \right) \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{4n \sin(\pi n) - 2\pi(n^2 - 1) \cos(\pi n)}{\pi(n^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Resolviendo para b_n :

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(t) \sin(nt) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{(n^2 - 1)^2} (\sin(t)((n^2 + 1)\sin(nt) \right. \\
 &\quad \left. - n(n^2 - 1)x \cos(nx)) + \right. \\
 &\quad \left. \cos(t)((n^2 - 1)x \sin(nx) + \right. \\
 &\quad \left. 2n \cos(nx)) \right] \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt)) \\
 a_n &= \frac{4n \sin(\pi n) - 2\pi(n^2 - 1) \cos(\pi n)}{\pi(n^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Esta progresión puede verse en la Figura 2, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

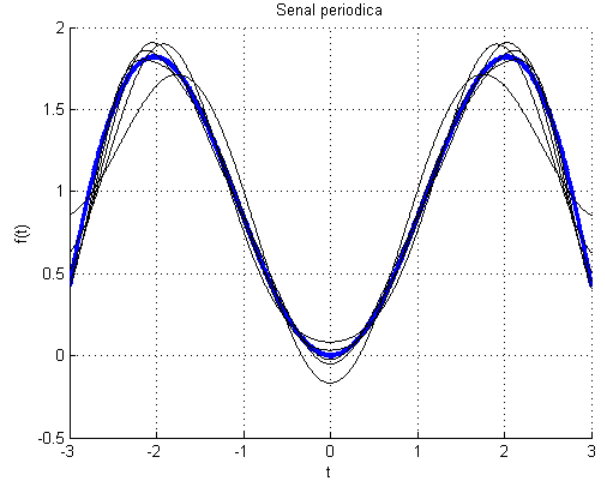


Figura 2: Señal $f(t) = t \sin(t)$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{-\cos(t)}{2} \\
 A_2 &= \frac{-2}{3} \cos(2t) \\
 A_3 &= \frac{1}{4} \cos(3t) \\
 A_4 &= \frac{-2}{15} \cos(4t) \\
 A_5 &= \frac{1}{12} \cos(5t)
 \end{aligned}$$

La serie se puede expresar como:

$$f(t) = 1 - \frac{\cos(t)}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos(nt) \right)$$

3. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(n t) dt \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(n t) dt \end{aligned}$$

Resolviendo para a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} \right]_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} (\pi^2 - (-\pi)^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo para a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cos(n t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{t \sin(n t)}{n} + \frac{\cos(n t)}{n^2} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\pi \sin(n \pi)}{n \pi} + \frac{\cos(n \pi)}{n^2 \pi} \\ &\quad - \frac{(-\pi) \sin(n(-\pi))}{n \pi} - \frac{\cos(n(-\pi))}{n^2 \pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

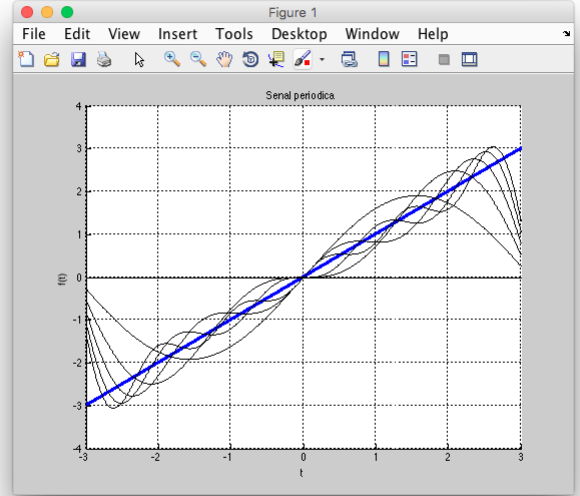


Figura 3: Señal $f(t) = t$

Resolviendo para b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(n t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{t \cos(n t)}{n} + \frac{\sin(n t)}{n^2} \right) \Big|_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= -\frac{\pi \cos(n \pi)}{n \pi} + \frac{\sin(n \pi)}{n^2 \pi} \\ &\quad + \frac{(-\pi) \cos(n(-\pi))}{n \pi} - \frac{\sin(n(-\pi))}{n^2 \pi} \\ &= \frac{2}{n} \sin(n \pi) - 2\pi \cos(n \pi) \end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{n} \sin(n \pi) - 2\pi \cos(n \pi) \right) \sin(n t) \right)$$

Esta progresión puede verse en la Figura 3, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned}
A_1 &= -2 \sin(t) \\
A_2 &= \sin(2t) \\
A_3 &= -\frac{2}{3} \sin(3t) \\
A_4 &= \frac{1}{2} \sin(4t) \\
A_5 &= -\frac{2}{5} \sin(5t)
\end{aligned}$$

La serie se puede expresar como:

$$f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \sin(nt) \right)$$

4. Desarrollar en series de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leq t \leq 0 \\ t, & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

R/ Se plantea la serie de fourier de la siguiente manera:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

Por lo que los coeficientes a_x se pueden definir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt
\end{aligned}$$

Reemplazando por las variables del enunciado se llega a:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + t) dt + \int_0^{\pi} t dt \right] \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + t) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \right] \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + t) \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \right]
\end{aligned}$$

Resolviendo para a_0 :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + t) dt + \int_0^{\pi} t dt \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{t^2}{2} + \pi t \right]_{t=-\pi}^0 + \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} \right] \\
&= \frac{\pi^2}{\pi}
\end{aligned}$$

Resolviendo para a_n :

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + t) \cos(nt) dt + \int_0^{\pi} t \cos(nt) dt \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\cos(nt)}{n^2} + \frac{t \sin(nt)}{n} + \frac{\pi \sin(nt)}{n} \right) \Big|_{t=-\pi}^0 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\cos(nt)}{n^2} + \frac{t \sin(nt)}{n} \right) \Big|_{t=0}^{\pi} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - \cos(\pi n)}{n^2} + \frac{\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1}{n^2} \right] \\
&= \frac{\sin(\pi n)}{n}
\end{aligned}$$

Resolviendo para b_n :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (\pi + t) \sin(nt) dt + \int_0^{\pi} t \sin(nt) dt \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cos(nt)}{n} - \frac{\pi \cos(nt)}{n} \right) \Big|_{t=-\pi}^0 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\sin(nt)}{n^2} - \frac{t \cos(nt)}{n} \right) \Big|_{t=0}^{\pi} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\pi n) - \pi n}{n^2} + \frac{\sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n)}{n^2} \right] \\
&= \frac{2 \sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n) - \pi n}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

De manera que la serie de Fourier de $f(t)$ queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \\
a_n &= \frac{\sin(\pi n)}{n} \\
b_n &= \frac{2 \sin(\pi n) - \pi n \cos(\pi n) - \pi n}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

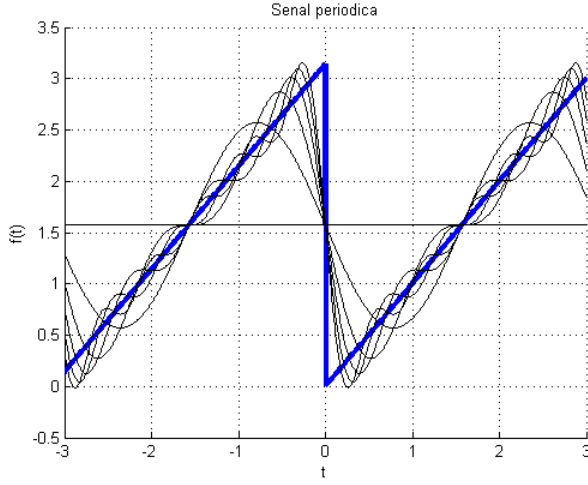


Figura 4: Señal $f(t) = \{\pi + t, t\}$

Esta progresión puede verse en la Figura 4, en donde a medida que se agrega un término esta sumatoria se aproxima a la señal original (mostrada en azul).

Los primeros cinco armónicos de esta serie son:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= -\sin(2t) \\ A_3 &= 0 \\ A_4 &= \frac{-1}{2}\sin(4t) \\ A_5 &= 0 \\ A_6 &= \frac{-1}{3}\sin(6t) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los armónicos nulos como los impares ($A_1, A_3, \dots, A_{2n+1}$) no se tienen en cuenta, la serie se puede representar como:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n} \sin(2nt) \right)$$

5. Hallar el periodo

a) $f(t) = \sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$

R/ El periodo T de una señal senoidal se puede definir como:

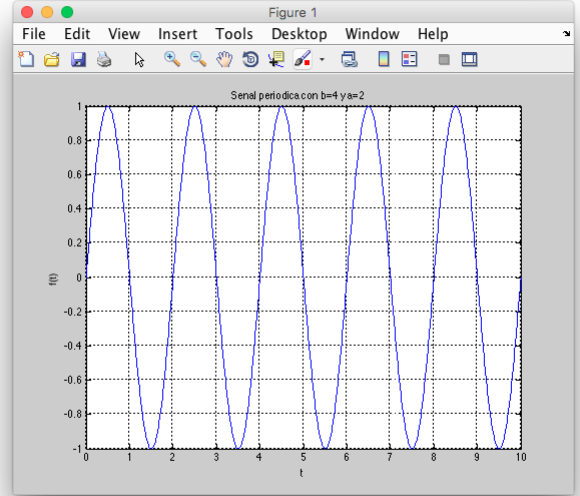


Figura 5: Señal $f(t) = \sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$ con $b = 4$ y $a = 2$

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para resolver la igualdad:

$$T = (b - a)$$

Es evidente en las Figuras 5 y 6 que los periodos coinciden con los calculados.

b) $f(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)$

R/ El periodo T de una señal senoidal se puede definir como:

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para cada senoidal su periodo sería:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi \\ T_2 &= \frac{2\pi}{3} \\ T_3 &= \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

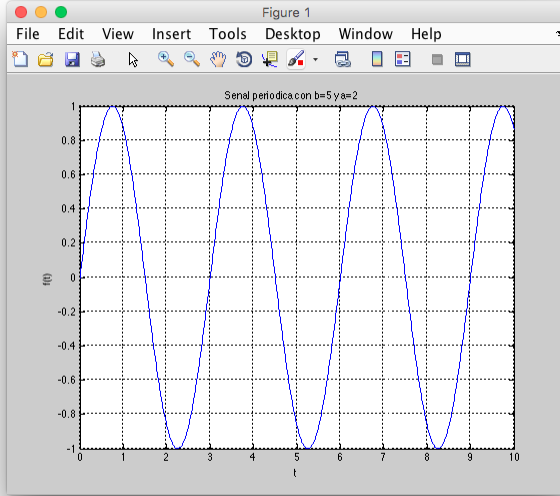


Figura 6: Señal $f(t) = \sin(\frac{2\pi}{b-a}t)$ con $b = 5$ y $a = 2$

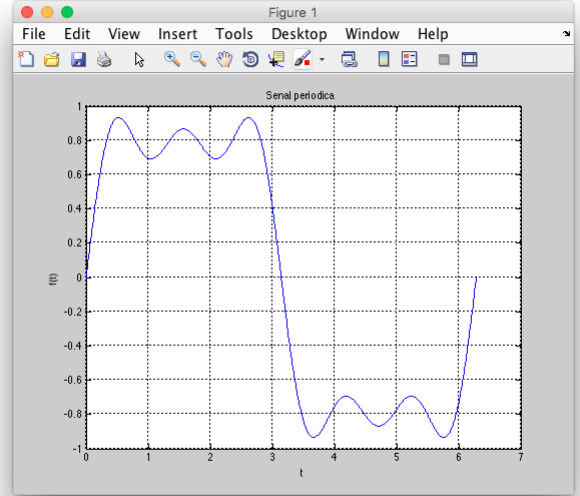


Figura 7: Señal $f(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t)$

Dado el hecho de que la señal es una señal compuesta, será periódica si el cociente entre sus periodos es un número racional:

$$\begin{aligned}\frac{T_1}{T_2} &= 3 \\ \frac{T_1}{T_2} &= 5 \\ \frac{T_2}{T_3} &= \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Dado el hecho de que se cumple la condición, la señal es periódica y su periodo será el mínimo común múltiplo de estos periodos:

$$\begin{aligned}T &= m.c.m(T_1, T_2, T_3) \\ &= m.c.m(2\pi, 2\pi 3^{-1}, 2\pi 5^{-1}) \\ T &= 2\pi\end{aligned}$$

Es evidente en la Figura 7 que el periodo coincide con el calculado.

c) $f(t) = \cos(10t) + \cos((10 + \pi)t)$

R/ El periodo T de la función coseno se puede definir como:

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Por lo que para cada coseno su periodo sería:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{\pi}{5} \\ T_2 &= \frac{2\pi}{10 + \pi}\end{aligned}$$

Dado el hecho de que la señal es una señal compuesta, será periódica si el cociente entre sus periodos es un número racional:

$$\frac{T_1}{T_2} = 1 + \frac{\pi}{10}$$

Dado el hecho de que no se cumple la condición, la señal no es periódica, como se puede observar en la Figura 8

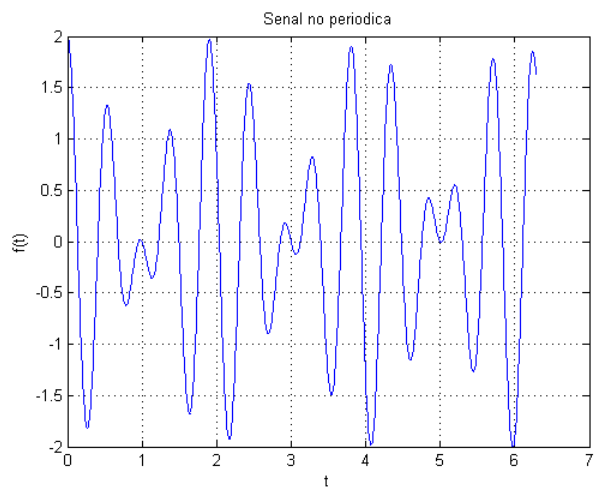


Figura 8: Señal $f(t) = \cos(10t) + \cos((10 + \pi)t)$