



Bit Algo  
START



# Najkrótsze ścieżki



## Zadanie 1: Wyspy (egzamin 2020)

[2pkt.] Zadanie 1.

Szablon rozwiązania: `zad1.py`

Pewna kraina składa się z wysp pomiędzy którymi istnieją połączenia lotnicze, promowe oraz mosty. Pomiedzy dwoma wyspami istnieje co najwyżej jeden rodzaj połączenia. Koszt przelotu z wyspy na wyspę wynosi 8\$, koszt przeprawy promowej wynosi 5\$, za przejście mostem trzeba wnieść opłatę 1\$. Poszukujemy trasy z wyspy A na wyspę B, która na kolejnych wyspach zmienia środek transportu na inny oraz minimalizuje koszt podróży.

Dana jest tablica `G`, określająca koszt połączeń pomiędzy wyspami. Wartość 0 w macierzy oznacza brak bezpośredniego połączenia. Proszę zaimplementować funkcję `islands( G, A, B )` zwracającą minimalny koszt podróży z wyspy A na wyspę B. Jeżeli trasa spełniająca warunki zadania nie istnieje, funkcja powinna zwrócić wartość `None`.

**Przykład** Dla tablicy

```
G1 = [ [0,5,1,8,0,0,0 ],
        [5,0,0,1,0,8,0 ],
        [1,0,0,8,0,0,8 ],
        [8,1,8,0,5,0,1 ],
        [0,0,0,5,0,1,0 ],
        [0,8,0,0,1,0,5 ],
        [0,0,8,1,0,5,0 ] ]
```

funkcja `islands(G1, 5, 2)` powinna zwrócić wartość 13.



## Zadanie 2: jakdojade (kolokwium zaliczeniowe 2020)

[2pkt.] Zadanie 1.

Szablon rozwiązania: `zad1.py`

Dana jest tablica dwuwymiarowa  $G$ , przedstawiająca macierz sąsiedztwa skierowanego grafu ważonego, który odpowiada mapie drogowej (wagi przedstawiają odległości, liczba  $-1$  oznacza brak krawędzi). W niektórych wierzchołkach są stacje paliw, podana jest ich lista  $P$ . Pełnego baku wystarczy na przejechanie odległości  $d$ . Wjeżdżając na stację samochód zawsze jest tankowany do pełna. Proszę zaimplementować funkcję `jak_dojade(G, P, d, a, b)`, która szuka najkrótszej możliwej trasy od wierzchołka  $a$  do wierzchołka  $b$ , jeśli taka istnieje, i zwraca listę kolejnych odwiedzanych na trasie wierzchołków (zakładamy, że w  $a$  też jest stacja paliw; samochód może przejechać najwyżej odległość  $d$  bez tankowania).

Zaproponowana funkcja powinna być możliwie jak najszybsza. Uzasadnij jej poprawność i oszacuj złożoność obliczeniową.

**Przykład** Dla tablic

```
G = [[-1, 6, -1, 5, 2],  
      [-1, -1, 1, 2, -1],  
      [-1, -1, -1, -1, -1],  
      [-1, -1, 4, -1, -1],  
      [-1, -1, 8, -1, -1]]  
P = [0, 1, 3]
```

funkcja `jak_dojade(G, P, 5, 0, 2)` powinna zwrócić `[0, 3, 2]`. Dla tych samych tablic funkcja `jak_dojade(G, P, 6, 0, 2)` powinna zwrócić `[0, 1, 2]`, natomiast `jak_dojade(G, P, 3, 0, 2)` powinna zwrócić `None`.



## Zadanie 3

Zaimplementuj algorytm Floyda-Warshalla tak, aby pozostawiał informację pozwalającą na rekonstrukcję najkrótszej ścieżki między dwoma dowolnymi parami wierzchołków w czasie zależnym od długości tej ścieżki.



## Zadanie 4: Problem wymiany walut

Na tablicach w kantorze wisi lista trójek (waluta1, waluta2, kurs). Każda z takich trójek oznacza, że kantor kupi  $n$  waluty2 za  $\text{kurs} * n$  waluty1.

- 1) Znajdź najkorzystniejszą sekwencję wymiany waluty A na walutę B
- 2) Czy istnieje taka sekwencja wymiany walut, która zaczyna się i kończy w tej samej walucie i kończymy z większą ilością pieniędzy niż zaczynaliśmy?



## Zadanie 5: Krawędź zmniejszająca dystans

Dany jest graf ważony z dodatnimi wagami  $G$ . Dana jest też lista  $E'$  krawędzi, które nie należą do grafu, ale są krawędziami między wierzchołkami z  $G$ . Dane są również dwa wierzchołki  $s$  i  $t$ . Podaj algorytm, który stwierdzi, którą jedną krawędź z  $E'$  należy wszczepić do  $G$ , aby jak najbardziej zmniejszyć dystans między  $s$  i  $t$ . Jeżeli żadna krawędź nie poprawi dystansu między  $s$  i  $t$ , to algorytm powinien to stwierdzić.



## Zadanie 6: Najkrótszy cykl

Dany jest graf ważony z dodatnimi wagami. Należy podać algorytm, który zwróci długość najkrótszego cyklu w grafie. Należy podać rozwiązania dla grafów rzadkich i gęstych. Algorytm powinien stwierdzić, jeśli graf nie ma cyklu.





## Zadanie 7: Uogólnienie problemu najkrótszych ścieżek

Oprócz długości krawędzi, graf ma przypisane koszty wierzchołków. Zdefiniujmy koszt ścieżki jako sumę kosztów jej krawędzi oraz sumę kosztów wierzchołków (wraz z końcami).

Jak znaleźć najtańsze ścieżki między wierzchołkiem startowym a wszystkimi pozostałymi?

Podaj rozwiązanie zarówno dla grafu skierowanego, jak i nieskierowanego.



## Zadanie 8: Dziwne opłaty

Komunikacja miejska w Pewnym Mieście jest dość dziwnie zorganizowana.

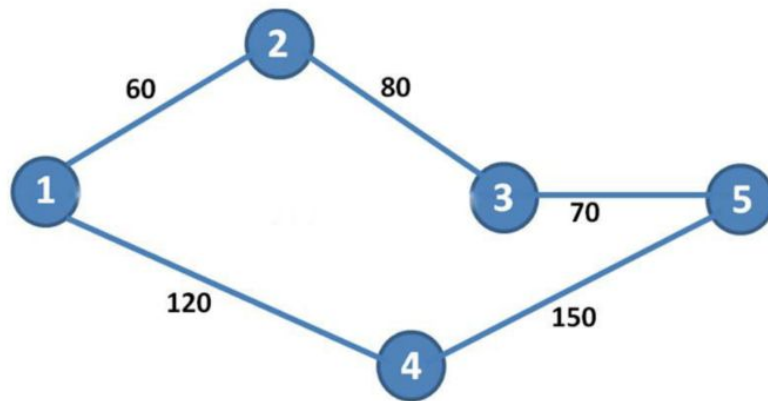
Za przejechanie każdego odcinka między dwiema stacjami obowiązuje osobna opłata. Od tej kwoty jest jednak odejmowany całkowity koszt poniesiony od początku podróży (jeśli jest ujemny, po prostu nic się nie płaci).

Np. na trasie 1-2-3-5 opłaty wyniosą kolejno:  $60+20+0$ , a na trasie 1-4-5 będzie to  $120+30$

Mając dane:

- graf połączeń w dowolnej reprezentacji (nieskierowany, ważony)
- numery stacji początkowej i docelowej

Oblicz minimalny koszt przejechania tej trasy.





Bit Algo  
START