# קובץ הוכחות שצריך לדעת בע"פ- אינפי 1- 2017

$maayan.chetrit@mail.huji.ac.il$

## שדה סדור שלם:

1. עקרון הסדר הטוב
2. למת החתכים
3. ארכימדיות
4. צפיפות הרציונלים
5. $supA \cdot supB = \sup(A \cdot B)$
6. לכל מספר ממשי חיובי קיים שורש חיובי
7. אי שיוויון הממומצעים

## סדרות:

8. יחידות הגבול
9. חסומה כפול אפסה היא אפסה
10. סנדוויץ'
11. אריתמטיקה של גבולות
12. סדרה מונוטונית עולה וחסומה מתכנסת
13. משפט צ'זארו
14. הלמה של קנטור
15. הוכחת הגבול e
16. אריתמטיקה של גבולות במובן הרחב
17. משפט הפרוסה
18. משפט הירושה
19. סדרה מתכנסת אם"ם בכל סביבה יש אינסוף מאיברי הסדרה:
20. $a_n$ לא חסומה מלעיל ⇔ ∞ הוא גבול חלקי של $a_n$
21. לכל סדרה ממשית יש תת סדרה מונוטונית +(BW)
22. בולצאנו ויירשטראס
23. לכל סדרה יש תת סדרה המתכנסת במובן הרחב
24. תנאי קושי להתכנסות

## פונקציות:

25. יחידות הגבול
26. תנאי היינה שקול להתכנסות
27. גבולות חד צדדים
28. סנדוויץ לפונקציות
29. הגדרות של נקודות אי רציפות
30. לפונקציה מונוטונית קיימת רק נקודות אי רציפות מסוג ראשון
31. הרכבה של פונקציות רציפות
32. משפט ערך הביניים
33. משפט ויירשטראס הראשון

## אי שיוויון המשולש:

**יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור, אזי לכל $x,y \in \mathbb{F}$ מתקיים:**

**1.**$|x+y| \le |x|+|y|$

**2.** $|x-y| \ge ||x|-|y||$

**הוכחה:**

1. לפי הגרת הערך המחלט, מתקיים:

$$-|x| \le x \le |x|$$
$$-|y| \le y \le |y|$$
$$\downarrow$$
$$-|x|-|y| \le x+y \le |x|+|y|$$
$$-(|x|+|y|) \le x+y \le +(|x|+|y|)$$

ולכן מהגדרת הערך המוחלט מתקיים ש $|x+y| \le |x|+|y|$

## עקרון הסדר הטוב:

**לכל S תת קבוצה של הטבעיים שהיא לא ריקה $\emptyset \ne S \subset \mathbb{N}$ יש איבר מינימלי . כלומר קיים $s \in S$ כך שלכל $t \in S$ מתקיים $s \le t$**

**הוכחה:**

תהי $A \subset \mathbb{N}$ נניח בשלילה של- A אין מינימום .

נגדיר את B : $B=\{n \in \mathbb{N} | \forall a \in A \,, a>n\}$ (נשים לב כי כל האיברים בקבוצה B קטנים מהאברים בקבוצה A ולכן אין לקבוצות B,A איברים משותפים)

נראה כי $B=\mathbb{N}$ על ידי כך שנראה ש B קבוצה אינדוקטיבית **.**

ראשית נוכיח כי $1 \notin A$ .

אילו 1 היה שייך ל A . הוא היה המינימום של A . (A קבוצה המוכלת בטבעיים- ולכן $n \ge 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$

הנחנו כי ל A אין מינימום ולכן 1 לא שייך ל A ולכן $a>1$ $\forall a \in A$ כלומר $1 \in B$)

נוכיח צעד האינדוקציה:

נראה שאם $b \in B \Rightarrow b+1 \in B$

לפי הגדרת הקבוצה b לכל $a \in A$ מתקיים , $a>b$ ולכן <= $a \ge b+1$ (תכונה של מספרים טבעיים – לא קיים איבר טבעי בין n ל n+1)

אילו היה מתקיים כי $b+1 \in A$ היה נובע כי b+1 הוא האיבר המינימלי של A

(הסבר: $b+1\in A$ , $a\geq b+1$)

ולכן בהכרח $b+1\notin A$ .

ולכן קיבלנו $b+1\in B \quad \Longrightarrow \quad a>b+1 \quad \Longrightarrow \quad (a\geq b+1 \quad \wedge \quad a\neq b+1) \quad \forall a\in A$

הראנו ש B קבוצה אינדוקטיבית ולכן $B\subset\mathbb{N} \quad \wedge \quad \mathbb{N}\subset B$ <= $B=\mathbb{N}$

(הסבר : הראנו כי A מוכלת בטבעיים , אבל הוכחנו כי אין בה אף איבר טבעי, כלומר, $A=\emptyset$ ולכן אין לה מינימום )

## למת החתכים:

**יהיו $L,U\in\mathbb{R}$ כך ש $L\neq\emptyset\neq U$ ונניח ש $L\leq U$ אז מתקיים :**

1. **L חסומה מלעיל ו U חסומה למרע**
2. $sup(L)\leq inf(U)$
3. **התנאים הבאים שקולים:**
   a. $supL=infU$
   b. $\forall\varepsilon>0 \quad \exists l\in L\,,u\in U \quad u-l<\varepsilon$
   c. קיים $c\in\mathbb{R}$ <u>יחיד</u> כך ש: $\forall l\in L,u\in U \quad (l\leq c\leq u)$

**הוכחה:**

**הוכחת 1:**

מכיון ש U,L קבוצות לא ריקות, אזי , $\forall\, l\in L \quad \forall u\in U \quad l\leq u$

אז בפרט : $\exists \; l_1\in L \quad \forall u\in U \quad l_1\leq u$ כלומר, $l_1$ חסם מלמטה של U ולכן U חסומה מלמטה.

וגם : $\exists u_1\in u \quad \forall l\in L \quad l\leq u_1$ כלומר $u_1$ חסם מלמעלה של L ולכן L חסומה מלמעלה.

**הוכחת 2**: **(רעיון – נגדיר איבר באמצע הקטע $(supL,infU)$)**

נסמן: infU=I , supL = s

נוכיח בשלילה, נניח כי i<s.

אזי נסמן $d=\frac{i+s}{2}$ , $i<d<s$

$$d<s\Longrightarrow \quad \exists l\in L \quad d<l$$

$$d>i\Longrightarrow \quad \exists u\in U \quad d>u$$

כלומר קיבלנו ש $u < d < l$ , כלומר $u < l$ בסתירה לנתון כי $l \le u$ $\quad \forall u \in U \quad \forall\, l \in L$

ולכן $supL \le infU$

**הוכחה 3 :**

$a \Rightarrow b$ **(רעיון – הגדרת הסופרמום/אינפימום)**

נסמן: $supL = infU = m$

מהגדרת הסופרמום, קיים l עבורו:

$$m - \frac{\varepsilon}{2} < l \le m \quad \Rightarrow \quad (-l) < \frac{\varepsilon}{2} - m$$

כמו כן, מהגדרת האינפימום, קיים U עבורו:

$$m \le u < m + \frac{\varepsilon}{2}$$

נחבר בין אי השיווינות:

$$u - l < \varepsilon$$

$b \Rightarrow c$ **(רעיון יחידות - $\varepsilon = c_2 - c_1$ )**

מאקסיומת השלמות אנו יודעים כי קיים c כזה, לפחות אחד, כעת נוכיח יחידות:

נוכיח בשלילה כי קיימים $c_1, c_2$ המקיימים $\forall l \in L, u \in U \quad (l \le c_1 < c_2 \le u)$

ידוע כי $u - l < \varepsilon \quad \exists l \in L\,, u \in U \quad \forall \varepsilon > 0$ ולכן, נבחר $\varepsilon = c_2 - c_1$

$$c_1 < c_2 \le u \;\Rightarrow\; c_1 - c_1 < c_2 - c_1 \le u - c_1 \;\Rightarrow\; 0 < \varepsilon \le u - c_1$$

ידוע גם כי מתקיים:

$$l < c_1 \Rightarrow \; -c_1 < -l$$

ולכן:

$$0 < \; \varepsilon \; \le \; u - c_1 \; \le \; u - l$$

בסתירה לכך ש $u - l < \varepsilon$

$c \Rightarrow a$ **(רעיון -לסתור יחידות)**

נתון כי קיים $c \in \mathbb{R}$ <u>יחיד</u> כך ש: $(l \le c \le u)$ $\forall l \in L, u \in U$ וצריך להוכיח ש $supL = infU$

נניח בשלילה כי $supL < infU$ ולכן מתקיים :

$$\forall l \in L, u \in U \quad (l \le supL < infU \le u)$$

בסתירה לכך שקיים C יחיד $\forall l \in L, u \in U \quad (l \le c \le u)$

# ארכימדיות:

**$\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל ב $\mathbb{R}$**

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי $\mathbb{N}$ חסומה ב$\mathbb{R}$. $\mathbb{N}$ אינה ריקה ולכן יש לה חסם עליון, נסמנו s.

קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $n > s - 1$. אחרת, s-1 הוא החסם העליון של $\mathbb{N}$ ידוע שאם $n \in \mathbb{N}$ אזי $(n+1) \in \mathbb{N}$. קיים טבעי שערכו גדול מהחסם העליון לקבוצה. סתירה. בהכרח של $\mathbb{N}$ אין חסם עליון, ולכן היא גם לא חסומה מלעיל.

# צפיפות הרציונלים בממשים:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R} \quad \exists \boldsymbol{q} \in \mathbb{Q} \quad \boldsymbol{x} < \boldsymbol{q} < \boldsymbol{y}$$

**הוכחה:** **(רעיון- ליצור משני המספרים מרווח גדול מ-1)**

ידוע שקיים טבעי כך ש $n > \frac{1}{y-x}$ מארכימדיות. מתקיים $yn - xn > 1$. נתייחס אל $(xn, yn)$ כאל קטע.

(הרעיון הוא שניפחנו את הקטע $(x, y)$ מספר שלם של פעמים, עד שאורכו גדול יותר מ 1, ולכן יש בקטע מספר שלם)

נגדיר, $y' = yn$ , $x' = xn$ , מתקיים כי $x' < y'$ $\Longrightarrow$ $xn < yn$ ולכן:

$$y' - x' = ny - nx = n(y - x) > \frac{1}{y - x} \cdot (y - x) = 1$$

כלומר הקטע $(y' - x')$ אורכו גדול מ 1 , ולכן קיים m המקיים:

$$x' < m < y' \Leftrightarrow \quad xn < m < yn \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{m}{n} < y$$

ולכן , $\frac{m}{n}$ הוא הרציונלי המבוקש. כנדרש ■

## <u>$supA \cdot supB = sup(A \cdot B)$ עבור קבוצות של איברים חיוביים.</u>

**הוכחה + רעיון ודרך חשיבה :**

יהיו $A, B$ קבוצות , כך שמתקיים: $s_a$ הוא החסם העליון של הקבוצה A , ו $s_b$ הוא החסם העליון של הקבוצה B.

צריך להוכיח כי : $s_a \cdot s_b - \varepsilon < a \cdot b \le s_a \cdot s_b \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a \cdot b \in A \cdot B$

ראשית נוכיח כי $s_a \cdot s_b$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה $A \cdot B$ .

יהיו $a \in A , b \in B$ . מהנתון , נשים לב כי מתקיים:

$0 < b \le s_b \quad , \quad 0 < a \le s_a$ ולכן, מאקסיומות השדה ניתן להסיק כי $0 < a \cdot b \le s_a \cdot s_b$ .

כלומר, $s_a \cdot s_b$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה $s_a \cdot s_b$.

כעת נוכיח כי $s_a \cdot s_b$ הוא החסם מלעיל הקטן ביותר, ולכן הסופרמום.

---

**טיוטה, ואופן קביעת ה $\delta$:**

צריך להוכיח : $s_a \cdot s_b - \varepsilon < a \cdot b \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a \cdot b \in A \cdot B$

נחפש דרך להביע את $ab$ באמצעות $s_a \cdot s_b$ ולכן נגדיר אותם, כאיברים ה"כמעט" הכי גדולים בקבוצה :

$$a = s_a - \delta \quad , \quad b = s_b - \delta$$

מצד אחד (החלק הימני של אי השיוויון שצריך להוכיח), ידוע כי :

$$a \cdot b = (s_a - \delta)(s_b - \delta) = s_a \cdot s_b - \delta(s_a + s_b) + \delta^2$$

נסתכל במה שצריך להוכיח וננסה להגדיר את $\delta$ באמצעות $\varepsilon$

$$s_a \cdot s_b - \varepsilon < a \cdot b = s_a \cdot s_b - \delta(s_a + s_b) + \delta^2$$

נרצה ליצור שיוויון בין מה שמסומן באדום , כלומר:

$$\varepsilon = \delta(s_a + s_b) \implies \quad \delta = \frac{\varepsilon}{s_a + s_b}$$

אם נגדיר כך את $\delta$ נוכל להבטיח את התקיימות אי השיוויון. נחזור להוכחה:

---

נגדיר $\delta = \frac{\varepsilon}{s_a + s_b}$ , וכעת נוכל להסיק כי : $\varepsilon = \delta(s_a + s_b)$

ונסמן את a,b: $a = s_a - \delta \quad , \quad b = s_b - \delta$

נשים לב כי :

$$a \cdot b = (s_a - \delta)(s_b - \delta) = s_a \cdot s_b - \delta(s_a + s_b) + \delta^2$$

נראה כי $s_a \cdot s_b - \varepsilon < a \cdot b \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a \cdot b \in A \cdot B$:

$$s_a \cdot s_b - \varepsilon = s_a \cdot s_b - \delta(s_a + s_b) \overset{+\delta^2}{<} s_a \cdot s_b - \delta(s_a + s_b) + \delta^2 = a \cdot b$$

ולכן: $s_a \cdot s_b - \varepsilon < a \cdot b$, כלומר $s_a \cdot s_b$ הוא הסופרמום של הקבוצה AB ומתקיים:

$$supA \cdot supB = sup(A \cdot B)$$

כנדרש ■

## לכל מספר ממשי חיובי קיים שורש חיובי:

**לכל $0 \leq a \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $0 \leq r \in \mathbb{R}$ המקיים $r^n = a$**

**הוכחה:**

נגדיר $B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \wedge x^n < a\}$

אם $0 \leq a \leq 1$ אז לפי אקסיומות השדה מתקיים $a^n \leq a$ ולכן עבור $x > a$ מתקיים $a_n \leq a < x$

אם $a \geq 1$ אז לפי אקסיומות השדה מתקיים $a \leq a^n$ ולכן עבור $x > a$ מתקיים $a \leq a^n < x^n$

ב-2 המקרים $x \notin B$ ולכן נוכל להסיק כי $B$ חסומה מלעיל על ידי $x = a + 1$ למשל (שקיים מארכימדיות) ולכן קיים גם $r = \sup(B)$ מתכונת השלמות. נראה כי $r^n = a$ .

---

טענת עזר: $r > 0$

הוכחה: מתקיים $\left(\frac{a}{a+1}\right)^n \leq \frac{a}{a+1} \leq a$ לכן $\frac{a}{a+1} \in B$ ומהנחה $a > 0$ לכן $\frac{a}{a+1} > 0$.

מהגדרת הסופרימום מתקיים $r \geq \frac{a}{a+1} > 0$ ולכן $r > 0$.

---

נניח בשלילה כי $r^n < a$ ונגיע לסתירה.

נסמן $\mathcal{E} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{a-r^n}{a \cdot n}\right\}$ . מהנחה $r^n < a$ לכן $a - r^n > 0$.

בנוסף $a > 0$ וגם $n > 0$ ולכן $a \cdot n > 0$. מכך נוכל להסיק כי $0 < \mathcal{E} \leq \frac{1}{2} < 1$.

נגדיר כעת $y = \frac{r}{1-\mathcal{E}}$ . מתקיים $y > r > 0$ מכיוון שחילקנו את $r$ במספר בין 0 ל-1, ולכן הגדלנו אותו.

בנוסף מתקיים $a \cdot n \cdot \mathcal{E} \leq a - r^n$ (מהגדרת אפסילון) ולכן מתקיים:

$$r^n \leq a - a \cdot n \cdot \mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; r^n \leq a(1 - n \cdot \mathcal{E}) \;\Leftrightarrow\; \frac{r^n}{a} \leq 1 - n \cdot \mathcal{E}$$

מאי-שוויון ברנולי מתקיים $y^n = \left(\frac{r}{1-\mathcal{E}}\right)^n = \frac{r^n}{(1-\mathcal{E})^n} \leq \frac{r^n}{1-n \cdot \mathcal{E}} \leq \frac{r^n}{\frac{r^n}{a}} = a$ ולכן $y \in B$.

אך הראנו ש-$x < y$ וזו סתירה לכך ש-$x$ הוא הסופרימום של $B$ ולכן $r^n \geq a$.

נניח בשלילה כי $r^n > a$ ונגיע לסתירה.

נסמן $\mathcal{E} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r^n-a}{r^n \cdot n}\right\}$ . מהנחה $r^n > a$ לכן $r^n - a > 0$.

בנוסף $r^n \geq r > 0$ וגם $n > 0$ ולכן $r^n \cdot n > 0$. מכך נוכל להסיק כי $0 < \mathcal{E} \leq \frac{1}{2} < 1$.

נגדיר כעת $y = r(1 - \mathcal{E})$ . $0 < y < r$ מכיוון שהכפלנו את $r$ במספר בין 0 ל-1.

בנוסף מתקיים $r^n \cdot n \cdot \mathcal{E} \leq r^n - a$ (מהגדרת אפסילון) ולכן מתקיים:

$$a \leq r^n - r^n \cdot n \cdot \mathcal{E} \;\Leftrightarrow\; a \leq r^n(1 - n \cdot \mathcal{E})$$

לפי אי-שוויון ברנולי מתקיים $y^2 = r^n(1-\mathcal{E})^n \geq r^n(1-n\cdot\mathcal{E}) \geq a$ ולכן $y$ הוא חסם מלעיל של $B$. אך הראנו ש-$x < y$ וזו בסתירה להגדרת הסופרימום כחסם עליון הכי הדוק.
לכן $r^n \leq a$.

לסיכום, הראנו ש- $r^n \leq a$ וגם $r^n \geq a$ ולכן מתקיים $r^n = a$ כנדרש. מ.ש.ל

## אי שיוויון הממוצעים:

**יהיו $x_1, x_2, \dots x_n$ מספרים ממשיים חיוביים הגדולים מאפס , אזי:**

$$\left(\frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{n}\right) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

**נשים לב כי שייוויון מתקבל אם ורק אם כל המספרים שווים.**

**הוכחה:**

ראשית נוכיח למת עזר:

יהיו $x_1, x_2, \dots, x_n$ המקיימים: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ נוכיח כי : $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה, נגדיר קבוצה :

$$A = \{n \in \mathbb{N} |\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \Longrightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n\} \subset \mathbb{N}$$

נראה כי הקבוצה A אינדוקטיבית :

נוכיח את בסיס האינדוקציה, עבור n=1 :

$$x_1 = 1 \Longrightarrow x_1 \geq 1$$

כלומר: $1 \in A$ , הוכחנו את בסיס האינדוקציה.

נוכיח את צעד האינדוקציה:

נניח כי $n \in A$ ונוכיח כי $n+1 \in A$

מהנחת האינדוקציה אנו יודעים כי עבור : $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = 1$ מתקיים $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$

(כלומר, אם מכפלה של n איברים שווה ל 1, אזי סכום n האיברים גדול או שווה ל n.)

נניח כי מתקיים : $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$ ונוכיח כי $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} \geq n+1$

בלי הגבלת הכלליות נבחר $x_1, x_2$ המקיימים:

$x_1 \leq 1 , x_2 \geq 1$ (לא הגבלנו את הכלליות כיון שקיימים איברים כאלו במכפלה הנ"ל (מתעצלת להוכיח-לפי טריכוטמיה צריך לפרק למקרים) ולכן ניתן להחליף את האינדקס שלהם ל 1,2 )

**יהי** $a = x_1 \cdot x_2$ , **ולכן** $a \cdot x_3 \cdot ... \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$ קיבלנו מכפלה של n איברים השווה ל 1, מהנחת האינדוקציה ניתן לדעת כי :

$$a + x_3 + x_4 + \cdots + x_{n+1} \leq n \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \leq n$$

הנחנו כי : $x_2 \geq 1$ , $x_1 \leq 1$ **ולכן** :

הערה: נשים לב כי $x_1 \leq 1 \implies 1 - x_1 \geq 0$

$$1 - x_1 = 1 - x_1 \overset{for\ x_2 \geq 1}{\implies} x_2(1 - x_1) \geq 1 - x_1 \implies x_2 - x_1 \cdot x_2 \geq 1 - x_1 \implies$$

$$\implies x_2 + x_1 \geq x_1 \cdot x_2 + 1 \implies x_1 \cdot x_2 \leq x_1 + x_2 - 1$$

נציב בביטוי אליו הגענו מקודם: $(x_1 \cdot x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \leq n)$

$$x_1 + x_2 - 1 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \leq n \implies x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \leq n + 1$$

כנדרש .

(צריך להוכיח את א"ש הממוצעים בעזרת הלמה)

# סדרות:

## יחידות הגבול:

**תהי $a_n$ סדרה , אם $a,b$ הם גבולות של הסדרה אזי , $a=b$:**

**הוכחה:** ( רעיון- נגדיר $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$ , ונפתח את $2\varepsilon$ )

נניח בשלילה ובלי הגבלת הכלליות כי $a<b$. (בה"כ – הסבר- אם b<a אז ניקח את $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$)

מכיון שידוע כי a,b הם גבולות של הסדרה בהכרח מתקיים:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_0 \quad n>N_0 \Longrightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N_1 \quad n>N_1 \Longrightarrow |a_n-b|<\varepsilon$$

נבחר $N=max\{N_1,N_2\}$ , ולכן מתקיים :

$$2\varepsilon=2\cdot\frac{b-a}{2}=b-a\overset{b-a>0}{=}|b-a|=|b-a_n+a_n-a|\overset{\text{א"ש המשולש}}{\leq}|a_n-a|+|a_n-b|$$
$$<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

כלומר, קיבלנו סתירה , $2\varepsilon<2\varepsilon$ ולכן מתקיים כי $a=b$.

■

## חסומה כפול אפסה היא אפסה:

**אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ואם $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה אז :**

$$\lim_{n\to\infty}a_n\cdot b_n$$

**הוכחה:** (רעיון – לזכור שצריך להגיע ל $\frac{\varepsilon}{M}\cdot M$ )

$b_n$ חסומה, ולכן קיים $M\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $\forall n\in\mathbb{N} \quad |b_n|<M$

מכיון שאנו יודעים ש $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ אזי, לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n>N$ $|a_n-0|<\varepsilon$

יהי $\varepsilon>0$ , המקיים $\frac{\varepsilon}{M}>0$ כך שלכל $n>N$ , $|a_n|<\frac{\varepsilon}{M}$

צריך להוכיח כי: $\forall\varepsilon>0 \ \exists N\in\mathbb{N} \quad n>N \ => \ |a_n\cdot b_n-0|<\varepsilon$

$$|a_n\cdot b_n-0|=|a_n\cdot b_n|=|a_n|\cdot|b_n|\leq|a_n|\cdot M\leq\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$$

$\leq$ **כיוון ש $|b_n|<M \quad \forall n\in\mathbb{N}$**

$\leq$ **כיוון ש $|a_n|<\frac{\varepsilon}{M}$**

■

## <u>משפט הסנדוויץ':</u>

**יהיו $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ , $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך שכמעט לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים : $a_n \leq b_n \leq c_n$**

**וגם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$**

**אזי : $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$**

**הוכחה:**

צריך להוכיח כי $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad n > N \Longrightarrow |b_n - l| < \varepsilon$

אנו יודעים כי מתקיים :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \qquad n > N_0 \Longrightarrow |a_n - l| < \varepsilon$$

ולכן עבור $n > n_0$ :

$$|a_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

מסקנה: $l - \varepsilon < a_n$

עוד אנו יודעים כי מתקיים :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \qquad n > N_1 \Longrightarrow |c_n - l| < \varepsilon$$

ולכן עבור $n > n_1$ :

$$|c_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < c_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$$

מסקנה: $c_n < l + \varepsilon$

ולכן עבור : $n > N = max\{N_0, N_1\}$ , מתקיים :

$$l - \varepsilon < a_n < b_n < c_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < b_n - l < \varepsilon \Leftrightarrow |b_n - l| < \varepsilon$$

כלומר , $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ כנדרש.

■

## אריתמטיקה של גבולות:

**יהיו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות של ממשיים , נניח כי : $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ , $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ אזי:**

1. $(a_n + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a+b)$
2. $(a_n \cdot b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a \cdot b)$
3. **אם לכל n , $b_n \neq 0$ אזי,** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$

**הוכחה:**

**הוכחת 1:**

ידוע כי $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \qquad n > N_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

וגם: $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \qquad n > N_1 \Longrightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

נבחר $N = max\{N_1, N_0\}$

צריך להוכיח כי : $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad n > N \Longrightarrow |a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$

$$|a_n + b_n - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \overset{\text{א"ש המשולש}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ולכן: $(a_n + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a+b)$

**הוכחת 2: (רעיון-לחסום את הסדרות , ולפתח באמצעות $+a \cdot b_n - a \cdot b_n$ )**

הסדרות $a_n, b_n$ מתכנסות ולכן חסומות. מתקיים כי קיימים $r_1, r_2$ המקיימים:

$\forall n \in \mathbb{N} \;\; |a_n| < r_1 \; , |b_n| < r_2$

נסמן : $0 < r = max\{r_1, r_2, 1\}$ כך שמתקיים : $\forall n \;\; |a_n|, |b_n| < r$

ידוע כי $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \qquad n > N_0 \Longrightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2r}$

וגם: $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \qquad n > N_1 \Longrightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2r}$

נבחר $N = max\{N_1, N_0\}$

צריך להוכיח כי : $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \qquad n > N \Longrightarrow |a_n \cdot b_n - (a \cdot b)| < \varepsilon$

$$|a_n \cdot b_n - (a \cdot b)| = |a_n \cdot b_n - ab_n + ab_n - a \cdot b| = |b_n(a_n - a) + a(b_n - b)|$$

$$\overset{\text{א"ש המשולש}}{\leq} |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| = |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \overset{*}{<} r \cdot \frac{\varepsilon}{2r} + r \cdot \frac{\varepsilon}{2r} = \varepsilon$$

*נשים לב כי במעבר זה השתמשנו בהגדרת הגבול של הסדרות , והגדרת הסדרה החסומה
ולכן הוכחנו כי $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot b$ כנדרש.

**הוכחת 3:**

**אם לכל n , $b_n \neq 0$ אזי, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$**

בהינתן סדרות : $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\ ,\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ , $\forall n\ \ b_n \neq 0$ , צריך להוכיח כי :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\frac{1}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

(אריתמטיקה של גבולות- בהתחשב בתנאי כי $\forall n\ b_n \neq 0$)

## <u>סדרה מונוטונית עולה וחסומה מתכנסת:</u>

**תהא $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל , אזי הסדרה מתכנסת ומתקיים:**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$$

**הערה: הוכחה זהה עבור סדרה מונוטונית יורדת חסומה מלמטה .**

**הוכחה:**

$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה , ולכן מתקיים כי : $\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall N\in\mathbb{N}\quad n>N\quad a_N\leq a_n$

ויהי $L=sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$ (L קיים ממשפט החסם העליון , " לכל קבוצה חסומה מלעיל לא ריקה ב $\mathbb{R}$ קיים סופרימום"), מתכונת החסם העליון אנו יודעים כי :

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists N\in\mathbb{N}\qquad L-\varepsilon<a_N\leq L$$

ולכן: קיים N עבורו לכל $n>N$ מתקיים $a_n\geq a_N$ (כי הסדרה מונוטונית עולה) :

$$L-\varepsilon<a_N\leq a_n\leq L\leq L+\varepsilon$$

ובפרט : $L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$ <= $-\varepsilon<a_n-L<\varepsilon$ <= $|a_n-L|<\varepsilon$

■

# משפט צזארו:

**תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ממשית ונניח ש $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ אזי , לכל n טבעי נגדיר :**

**$s_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ ומתקיים: $\lim_{n\to\infty} s_n = a$**

**הוכחה:**

ראשית נוכיח מקרה פרטי של ההוכחה: $\left(s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right) \Leftarrow \left(a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$

מכיון שהסרה $a_n$ מתכנסת, היא בהכרח חסומה. יהי c חסם של הסדרה, ויהי $\varepsilon > 0$

מהגדרת הגבול נובע כי : $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \Longrightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

נסתכל בסכום : $a_1 + \cdots + a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n$ .

נשים לב כי סכום זה ניתן לפירוק באופן הבא: $(a_1 + \cdots + a_N) + (a_{N+1} + \cdots + a_n)$ .

(הסכום עד האיבר ה $a_N$ , והסכום החל ממנו )

נשים לב כי $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > N$ כלומר סכום n-N האיברים האחרונים מקיים:

$$a_{N+1} + \cdots + a_n < (n - N) \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

בעוד שסכום N האיברים הראשונים מקיים : $a_1 + \cdots + a_N < Nc$

(זאת כיון ש c הוא חסם של הסדרה , ולכן גדול מכל איברי הסדרה)

נבחן את הסדרה $s_n$:

$$s_n = \left|\frac{a_1 + \cdots + a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n}{n}\right| \le \frac{1}{n} \cdot |a_1 + \cdots + a_N| + \frac{1}{n} \cdot |a_{N+1} + \cdots + a_n|$$

$$\le \frac{1}{n} \cdot Nc + \frac{1}{n} \cdot \frac{(n - N)\varepsilon}{2} \quad \overset{\frac{1}{n}\cdot(n-N)\varepsilon<\frac{\varepsilon}{2}}{\le} \quad \frac{1}{n} \cdot Nc + \frac{\varepsilon}{2}$$

מכייון שאנו יודעים כי $\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ אזי הסדרה $\left(\frac{1}{n} \cdot Nc\right)_{n=1}^{\infty}$ שואפת לאפס, ולכן מתקיים:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists M \quad n > M \Longrightarrow \quad \frac{Nc}{n} > \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן, נבחר $n > max\{M, N\}$ ולכן ייתקיים :

$$|s_n - 0| < \frac{1}{n} \cdot Nc + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |s_n| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 0$$

כלומר , אם הסדרה מתכנסת לאפס , גם סדרת הממוצעים שלה מתכנסת לאפס.

כעת נוכיח את המקרה הכללי:

נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ , נגדיר סדרה חדשה $b_n = a_n - a$ . נשים לב כי $b_n$ מתכנסת לאפס.

תהי $t_n = \frac{1}{n}(b_1 + \cdots + b_n)$ סדרת הממוצעים . הוכחנו כי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} t_n = 0$$

כעת, נשים לב:

$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a = s_n - a$$

ניתן להסיק כי $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - a) = 0$

כלומר מתקיים : $\lim_{n\to\infty} s_n = a$

כנדרש ■

## **הלמה של קנטור:**

**תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות, המקיימות :**

1. $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

**אזי קיים מספר ממשי יחיד $c \in \mathbb{R}$ כך ש : כך ש $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = c$ (c הוא המספר הממשי היחיד שמקיים $a_n \le c \le b_n$)**

**הוכחה:**

מכיון שאנו יודעים כי $a_n \le a_{(n+1)} \quad \forall n$ אפשר להסיק כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה וחסומה ,(חסומה מלמעלה על ידי $b_1$ ומלמטה על ידי $a_1$), לפיכך, ל $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יש גבול.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$$

ומכיוון שאנו יודעים כי $b_{n+1} \le b_n \quad \forall n$ אפשר להסיק כי $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת וחסומה,(חסומה מלמטה על ידי $a_1$ ומלמעלה על ידי $b_1$), לפיכך, ל $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ יש גבול.

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$$

אנו יודעים כי :

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n + a_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}((b_n - a_n) + a_n)$$

מכיוון ש: $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, ואנחנו יודעים כי הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ קיים, נשתמש באריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(b_n + a_n - a_n) = 0 + L_1 = L_2$$

כלומר $L_1 = L_2$ ולכן $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L_1$.

עבור $c = L_1 = L_2$ הביטוי $a_n \le c \le b_n$ מתקיים, הוכחנו קיום, כעת נוכיח יחידות. נניח כי קיים $c'$ המקיים $a_n \le c' \le b_n$ כך ש $c > c'$

אזי:

$$a_n \le c \le b_n$$

$$a_n \le c' \le b_n \implies -b_n \le -c' \le -a_n$$

אם נחבר בין אי השוויונות נקבל: $-(b_n - a_n) \le c - c' \le b_n - a_n$ וזה שקול ל: $0 < |c - c'| \le b_n - a_n$

(מהגדרת הערך המוחלט. וגם לא ייתכן כי $c - c' = 0$ ולכן היא שיוויון חזק.

נשים לב כי : $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ , ולכן $0 < |c - c'| \le b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

בסתירה להנחה כי $c \neq c'$ . ולכן קיים c יחיד המקיים $a_n \le c \le b_n$. ■

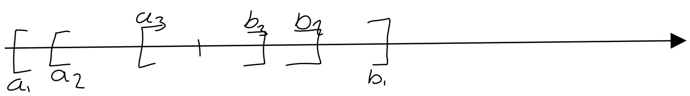
<u>**ניסוח גאומטרי ללמה של קנטור:**</u>

**תהי $([a_n, b_n])_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים סגורים , המוכלת ב $\mathbb{R}$ , כל שכמתקיים:**

1. **אורכי הקטעים שואפים לאפס.**
2. $\forall n \;\; [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$

**אזי קיימת נקודה יחידה c , המקיימת :** $\forall n \quad c \in [a_n, b_n]$

**הוכחה:**



## המספר e: (הוכחה עבור $x = 1$)

**הסדרה $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ מתכנסת והגבול שלה מסומן $e$.**

**הוכחה:**

ראשית נוכיח כי מדובר בסדרה מונוטונית עולה ממש וחסומה , ולכן היא מתכנסת.

לפי אי שיוויון הממוצעים, לכל $m \in \mathbb{N}$ ולכל $0 < a_1, \dots a_m$ מתקיים:

$$\sqrt[m]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m} \le \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}$$

נשים לב כי באי שיויון הממוצעים יתקבל שיויון רק אם $a_1 = \cdots = a_m = 1$

נתבונן באי שיויון הממוצעים כאשר $m = n+1$

ולכן אם נסתכל על $a_1 = \cdots = a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)$ וגם על $a_{n+1} = 1$ , נקבל:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^{n+1} \le \left(\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\frac{n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}\right)^{n+1}$$
$$= \left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}$$

כלומר: $a_n < a_{n+1}$ , ולכן הסדרה מונוטונית עולה ממש.

נוכיח כי הסדרה חסומה בעזרת נוסחת הבינום של ניוטון:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot\frac{1}{n^i} = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$
$$= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{n^n}\cdot\frac{1}{n!}$$
$$= 1 + 1 + \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{2!} + \cdots + \left(\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!} =$$

$$(\#) = 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}$$

נשים לב כי לכל n ולכל x מתקיים: $\left(1-\frac{x}{n}\right) < 1$ ולכן מתקיים:

$$2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!} \;<\; 2 + 1\cdot\frac{1}{2!} + \cdots + 1\cdot\frac{1}{n!}$$

ולכן:

$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \overset{x!>2^{x-1}}{<} 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = (\#\#) = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

נשים לב כי

$$\frac{1}{2}>0 \qquad \Rightarrow \qquad \forall n\in\mathbb{N}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n>0$$

ולכן :

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0 \qquad \Rightarrow \qquad 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$$

כלומר: נציב בביטוי (##)

$$1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

<u>הסברים:</u>

(#) עבור $n>1$ .

(##) סכום סדרה הנדסית

ולכן הסדרה חסומה על ידי 3.

הוכחנו כי הסדרה היא מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת. והיא מתכנסת לסופרימום של קבוצת האיברים שלה המסומן כ e .

$$e=sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

■

## משפט הפרוסה:

**אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ וגם $b_n > a_n$ לכל n אזי : $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$**

**הוכחה:**

ידוע כי $a_n \to \infty$ ולכן $\forall M \quad \exists N_0 \quad n > N_0 \Longrightarrow \quad a_n > M$ .

וגם: $\exists N_1 \quad n > N_1 \quad b_n > a_n$

נבחר , $N_2 = max\{N_0, N_1\}$ והחל ממנו מתקיימים שני התנאים יחד,

ולכן , $\forall M \quad \exists N \quad n > N \Longrightarrow \quad b_n > a_n > M$ .

ולכן מתקיים : $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$

## אריתמטיקה של גבולות במובן הרחב:

**יהיו $(b_n)_{n=1}^{\infty}, \ (a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות של ממשיים , נניח כי : $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ , $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אזי:**

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$
2. $b > 0 \implies \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \infty$
3. $b < 0 \implies \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = -\infty$
4. **יהיו $(b_n)_{n=1}^{\infty}, \ (a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות של ממשיים , נניח כי : $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ , $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ אזי:**

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$$

**הוכחה:**

**הוכחת 1:**

**"כלל הסכום"** : אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע אז $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$ .

<u>הוכחה</u> :

יהי $M \in \mathbb{R}$ . עלינו להראות שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n + b_n > M$ .

יהי $B \in \mathbb{R}$ חסם מלרע של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ , כלומר $B \leqslant b_n$ עבור כל $n \in \mathbb{N}$ .

מהנתון $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ נובע שלכל $M_1 \in \mathbb{R}$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n > M_1$ .

בפרט עבור $M_1 = M - B$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n > M - B$ .

נבחר $N = N_1$ ואז לכל $n > N$ מתקיים $a_n + b_n > (M - B) + B = M$ , כנדרש . ■

**מסקנה** :

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אז $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty$ .

## הוכחת 2:

**"כלל המכפלה"** : אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של ממשיים שהחל ממקום מסויים חסומה מלרע באמצעות חסם **חיובי** , אז $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$ .

<u>הוכחה</u> :

יהי $M \in \mathbb{R}$ . עלינו להראות שקיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n b_n > M$ .

לפי הנתון קיימים $N_0 \in \mathbb{N}$ ו- $0 < B \in \mathbb{R}$ כך ש- $B \leqslant b_n$ עבור כל $N_0 \leqslant n$ .

מהנתון $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ נובע שלכל $M_1 \in \mathbb{R}$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n > M_1$ .

בפרט עבור $M_1 = \frac{M}{B}$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $a_n > \frac{M}{B}$ .

נבחר $N = \max(N_0, N_1)$ ואז לכל $n > N$ מתקיים $a_n b_n > \frac{M}{B} \cdot B = M$ , כנדרש . ■

**מסקנה** :

אם $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $0 < L_2 \in \mathbb{R}$ אז $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$ .

## <u>תתי-סדרות:</u>

### <u>משפט הירושה:</u>

**אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת במובן הרחב (לאינסוף או למספר ממשי ) , כך ש $\lim_{n\to\infty} a_n \to a$ , אזי כל סדרה חלקית שלה מתכנסת גם היא לאותו הגבול.**

**הוכחה:**

נניח כי $a \in \mathbb{R}$

תהי $a_n$ סדרה מתכנסת ל- a. ותהי $a_{n_k}$ תת סדרה שלה .

צריך להראות כי מתקיים שלכל סביבת $\varepsilon$ של a שנסמנה : $B_\varepsilon(a)$ מתקיים כי $a_{n_k} \in B_\varepsilon(a)$
ידוע כי קיים N עבורו $a_n \in B_\varepsilon(a)$ ולכן אם נבחר $n_k > N$ גם $a_{n_k} \in B_\varepsilon(a)$ (תכונות של תתי סדרות)

נניח כי $a = \infty$

ידוע כי $a_n \to \infty$ ולכן , היא לא חסומה כלומר:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \quad n > N \Longrightarrow a_n > M$$

יהי M , קיים N עבורו $a_N > M$ הסדרה $a_{n_k}$ מוכלת ב $a_n$ ולכן עבור $n_k > N$ מתקיים כי $a_{n_k} > M$
כלומר, הסדרה לא חסומה ולכן לפי ההגדרה של שאיפה לאינסוף, מתכנסת גם היא לאינסוף

■

# תת סדרה מתכנסת אם"ם בכל סביבה יש אינסוף מאיברי הסדרה:

**מספר ממשי a הוא גבול חלקי של הסדרה $(a_n)$ אם"ם כל סביבה של a מכילה אינסוף מאיברי הסדרה:**

**הוכחה:**

ראשית, נניח כי a הוא גבול חלקי של הסדרה ונוכיח כי בכל סביבת $\varepsilon$ של a יש אינסוף מאיברי הסדרה:
a הוא גבול חלקי של הסדרה ולכן, קיימת תת סדרה $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ , כך שמתקיים:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists K \quad k > K \Longrightarrow \left|a_{n_k} - a\right| < \varepsilon$$

כלומר:

$$-\varepsilon < a_{n_k} - a < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon < a_{n_k} < a + \varepsilon$$

מכיון שהסדרה $a_{n_k}$ היא אינסופית, קיימים אינסוף מאיברי הסדרה בסביבת ה $\varepsilon$ הנ"ל.

כנדרש.

נוכיח כיוון שני:

נניח כי בכל סביבת $\varepsilon$ של a קיימים אינסוף מאיברי הסדרה , ונוכיח כי a הוא גבול חלקי של הסדרה.

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad n > N \Longrightarrow a_n \in (a - \varepsilon\,, a + \varepsilon)$$

מכיון שהביטוי מתקיים לכל $\varepsilon$ ולכל $N$ נבחר:

עבור: $\varepsilon = 1\,, N = 1$ ולכן עבור: $n_1 > N = 1$ כך ש: $a_{n_1} \in (a - 1, a + 1)$

עבור: $\varepsilon = \frac{1}{2}\,, N = n_1$ ולכן עבור: $n_2 > n_1$ כך ש: $a_{n_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$

עבור: $\varepsilon = \frac{1}{3}\,, N = n_2$ ולכן עבור: $n_3 > n_2$ כך ש: $a_{n_3} \in (a - \frac{1}{3}, a + \frac{1}{3})$

נמשיך כך, וניצור סדרה של אפסילונים: $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ ולכן מתקיים :

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k$$

כך ש: $a_{n_r} \in \left(a - \frac{1}{r}, a + \frac{1}{r}\right)$ לכל $1 \le r \le k$

עבור $\varepsilon = \frac{1}{k}$ $\quad N = n_{k-1}$ קיים : $n_k > n_{k-1}$ כך ש: $a_{n_k} \in \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)$

כלומר: $a - \frac{1}{k} \le a_{n_k} \le a + \frac{1}{k}$

נשים לב כי $\left(\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ולכן מאריתמטיקה : $\left(a + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} a$ , $\left(a - \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} a$

ולכן, ממשפט הכריך : $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} a$

■

## **$a_n$ לא חסומה מלעיל ⇔ ∞ הוא גבול חלקי של $a_n$:**

**הוכחה:**

ראשית נוכיח כי בהנתן סדרה $a_n$ לא חסומה מלעיל , ∞ הוא גבול חלקי שלה.

תחילה נוכיח למת עזר:

תהי $a_n$ סדרה לא חסומה, אזי כל סדרה , המקיימת שהיא זנב של $a_n$ החל מהאיבר ה $a_k$ מתקיים :

שגם הזנב של הסדרה אינו חסום .
נוכיח את הלמה:

תהי $a_n$ סדרה , ו $b_n$ זנב של $a_n$ החל מהאיבר ה k.

נניח בשלילה כי $b_n$ חסומה. אזי קיים M המקיים $|b_n| < M$ ,

מכיוון ש k הוא מספר , נסמן: $C = max\{M , |a_1|, |a_2|, \dots |a_k|\}$ . נשים לב כי איבריה של הסדרה $a_n$ הם:

$a_1, a_2, a_3, \dots , a_k, b_1, b_2, \dots , b_n$ ולכן c חסם מלעיל של הסדרה . בסתירה לנתון כי $a_n$ לא חסומה.
ולכן , גם הסדרה $b_n$ "הזנב של הסדרה" לא חסומה .

נמשיך בהוכחת המשפט :

$a_n$ לא חסומה מלעיל , ולכן:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \ \ a_N > M$$

נבנה תת סדרה המקיימת :

עבור : $k = 1 , M = 1$ קיים $n_1$ עבורו $a_{n_1} > 1$
(בהגדרת הגבול הראנו שקיים N המקיים את זה, נסמן אותו כ - $n_1$ )

עבור : $k = 2 \ , M = 2$ קיים $n_2$ המקיים $n_2 > n_1$ וגם $a_{n_2} > M$

(מכיון שהסדרה לא חסומה ניתן להסתכל על הזנב של הסדרה החל מהאיבר $n_1$ , והזנב מהווה סדרה לא חסומה)

נמשיך כך, באופן רקורסיבי כמו בהוכחה הקודמת .קיבלנו סדרה המקיימת :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{n_k} > k$$

הסדרה המייצגת את k היא סדרה אינסופית המתכנסת לאינסוף, ולכן ממשפט הפרוסה גם $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$

כנדרש.

נוכיח כיוון שני:

תהי $a_n$ סדרה כך ש: ∞ הוא גבול חלקי שלה, נוכיח כי $a_n$ לא חסומה מלעיל :

נניח בשלילה כי $a_n$ חסומה מלעיל. ולכן יהי M' המקיים : $a_n < M'$

ניתן לדעת מהנתון כי קיימת $a_{n_k}$ תת סדרה המקיימת: $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ , ולכן:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists K \quad k > K \Longrightarrow a_{n_k} > M$$

מכיוון שתנאי זה מתקיים לכל M הוא מתקיים בפרט עבור M′ . כלומר קיים k′ עבורו $a_{n_{k'}} > M'$

אבל ! הסדרה $a_{n_k}$ היא תת סדרה של $a_n$ ולכן קיים $n' = n_{k'}$ , כלומר : $a_{n'} > M$ בסתירה להנחה.

ולכן $a_n$ לא חסומה מלעיל .

■

## לכל סדרה ממשית יש תת סדרה מונטונית:

**הוכחה:**

(מוטיבציה - נבחר איבר, החל ממנו האיברים גדולים ממנו ו\או האיברים קטנים ממנו. אם גדולים אזי קיימת ת"ס מונוטונית עולה, אם קטנים אזי קיימת ת"ס מונוטונית יורדת, נפרמל )

תהי $a_n$ סדרה , צריך להוכיח כי קיימת לה תת סדרה $a_{n_k}$ מונוטונית.
נגדיר , נקרא ל m נקודת שיא בסדרה אם לכל $n > m$ $a_n < a_m$ (במילים פשוטות -נקודת שיא היא נקודה שהחל ממנה כל האיברים קטנים ממנה ) כעת יש שני אפשרויות:

1. יש אינסוף נקודות שיא. (כלומר קיימות אינסוף נקודות כך שככל שהאינדקס שלהן עולה הערך שלהן יורד ) במקרה זה נסמן $n_1$ נקודת השיא הראשונה , $n_2$ נקודת השיא השנייה , נשים לב כי $n_2 > n_1$ . נסמן את נקודת השיא ה K – $a_{n_k}$. מתקיים:
$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k \;\; \wedge \;\; a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots > a_{n_k}$$
קיבלנו סדרת אינדקסים מונוטונית עולה ממש , ולכן הסדרה $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}$ מהווה תת סדרה ל $a_n$ . ובנוסף תת סדרה זו , מקיימת : $a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots > a_{n_k}$ , כלומר מונוטונית יורדת ממש.
2. יש אפס או מספר סופי של נקודות שיא(כלומר, לכל נקודה שנבחר שהאינדקס שלה גדול מהאינדקס של נקודת השיא האחרונה, קיימת נקודה הגדולה או שווה לה) :
נסמן את נקודת השיא האחרונה ב $n_1$ (אם קיימת, אם לא קיימת נבחר את $n_1 = 1$ ), מכיוון שלא קיימות יותר נקודת שיא , מתקיים:
$$\exists k > n_1 \quad a_k \geq a_{n_1}$$
נסמן את k ב $n_2$ .
נשים לב כי $n_2 > n_1 \;\; \wedge \;\; a_{n_2} \geq a_{n_1}$.
נוכח להמשיך כך באופן רקורסיבי, (כי לא קיימות עוד נקודות שיא , ולכל n שנבחר קיים $n_0$ המקיים : $n_0 > n \;\; \wedge \;\; a_{n_0} \geq a_n$ )
ולכן עבור הנקודה ה k מתקיים :
$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k \;\; \wedge \;\; a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \cdots \leq a_{n_k}$$
כלומר , קיבלנו תת סדרה של $a_n$ שהיא סדרה מונוטונית עולה(לא ממש)

כלומר הראנו שלכל סדרה , קיימת סדרה מונוטונית או עולה או יורדת .

- הערה- נשים לב כי באופן מיידי ניתן להוכיח באמצעות משפט זה את משפט בולצאנו-ויירשטראס : הוכחנו שלכל סדרה קיימת תת סדרה מונוטונית – אם היא גם חסומה היא בהכרח מתכנסת, ולכן לכל סדרה חסומה קיימת תת סדרה מתכנסת.

## <u>משפט בולצאנו ויירשטראס:</u>

**תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה , אזי קיימת ל $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת.**

**הוכחה:**

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה , ולכן קיימים $a,b$ כך שמתקיים $a \le a_n \le b \quad \forall n$ .

נחלק את הקטע [a,b] לשני חלקים : $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ , $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ מכיון שהסדרה אינסופית, לפחות באחד משני החלקים בקטע נמצאים אינסוף איברים של הסדרה. נסמן את הקטע שבו נמצאים אינסוף איברים ב $[a_1,b_1]$ . ונחלק אותו שוב לשני קטעים כמו קודם, ושוב לפחות ב 1 משני הקטעים יש אינסוף איברים של הסדרה. נבחר את הקטע האינסופי ונסמן אותו כ : $[a_2,b_2]$ .

מתקיים כי : $[a_2,b_2] \subseteq [a_1,b_1]$ . נמשיך הלאה, ובאופן כזה נקבל סדרה של קטעים $([a_k,b_k])_{k=1}^{\infty}$ , אשר אורכיהם:

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

נשים לב כי מאריתמטיקה של גבולות : $\lim_{k\to\infty} b_k - a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{b-a}{2^k} = 0$

לפי הלמה של קנטור אם קיימת סדרה של קטעים כך שאורכי הקטעים שואפים לאפס, קיימת נקודה c המקיימת:

$$\forall n \qquad c \in [a_n,b_n]$$

ומתקיים : $\lim_{k\to\infty} b_k = c$ , $\lim_{k\to\infty} a_k = c$

נבנה תת סדרה $\left(x_{n_k}\right)_{n=1}^{\infty}$ ששואפת ל c. כך ש $x_{n_1} = x_1$ מתקיים כי $a_1 \le x_{n_1} \le b_1$

ב $[a_2,b_2]$ יש אינסוף מאיברי הסדרה $x_n$. נבחר ש $x_{n_2} = x_2$ מתקיים כי $a_2 \le x_{n_2} \le b_2$

נניח שבחרנו k-1 איברים. $x_{n_1} \ldots . x_{n_{k-1}}$ של הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , המקיימים :

$$n_1 < n_2 < n_3 \ldots . . < n_{k-1} \qquad a_i \le x_{n_i} \le b_i \qquad i = 1,2 \ldots . , k-1$$

נבחר בקטע $[a_k,b_k]$ אבר כלשהו של $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , שיהיה עוקב ל $x_{n_{k-1}}$ , כך שמתקיים:

$$n_{k-1} < n_k \qquad a_k \le x_{n_k} \le b_k$$

ולכן קיבלנו סדרה של קטעים כך שמתקיים:

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k$$

מכיון שהסדרות $\lim_{k\to\infty} b_k = c$ , $\lim_{k\to\infty} a_k = c$ , ממשפט הסנדוויץ אנו יודעים כי $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = c$

■

## לכל סדרה יש תת סדרה המתכנסת במובן הרחב:

**הוכחה:**

תהי $a_n$ סדרה , צריך להוכיח שקיימת לה תת סדרה $a_{n_k}$ המתכנסת במובן הרחב .

אם הסדרה חסומה , לפי משפט בולצאנו ויירשטראס קיימת לה תת סדרה המתכנסת במובן הצר, לגבול ממשי .
אם הסדרה לא חסומה, הוכחנו שלכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית , הוכחנו גם כי סדרה מונוטונית לא חסומה שואפת לאינסוף (או למינוס אינסוף).

## גבול חלקי יחיד הוא גבול הסדרה:

**תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה . אזי , $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ אם"ם $l$ הוא הגבול החלקי היחיד של הסדרה**

**הוכחה:**

תהי $a_n$ סדרה , ויהי $l \in \mathbb{R} \ \vee \ l = \pm\infty$

# תנאי קושי להתכנסות:

**$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת אם ורק אם :**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad m, n > N \Longrightarrow \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

**הוכחה:**

<u>נוכיח כיוון ראשון <= אם $a_n$ מתכנסת , אז תנאי קושי מתקיים:</u>

אנו יודעים מהגדרת ההתכנסות כי :

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1 \in \mathbb{N} \quad n > N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_2 \in \mathbb{N} \quad m > N_2 \quad \Longrightarrow \quad |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

לכל $\varepsilon > 0$ נבחר: $N = max\{N_1, N_2\}$

ולכן ניתן להסיק כי $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ , $|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| = |a_n - L| + |a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**$\leq$ אי שיוויון המשולש.**

**= הגדרת הערך המוחלט.**

ולכן מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$ .

<u>נוכיח כיוון שני $\Longrightarrow$ , אם תנאי קושי מתקיים אז $a_n$ מתכנסת.</u>

צריך להוכיח ש

$$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - L| < \varepsilon$$

אנו יודעים כי :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, p \in \mathbb{N} \quad p, n > N \Longrightarrow \ |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$$

נבחר $\varepsilon = 1$ , לפיכך בפרט מתקיים: $|a_n - a_{N+1}| < 1$

מהגדרת הערך המוחלט אנו יודעים כי :

$$a_{N+1} - 1 < a_n < 1 + a_{N+1}$$

ולכן לכל $n > N$ הסדרה חסומה על ידי $1 + a_{N+1}$ מלמעלה, ועל ידי $a_{N+1} - 1$ מלמטה .

נבחר $M = max\{(1 + |a_{N+1}|), |a_1|, \dots, |a_N|\}$ , ולכן הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה כולה על ידי M מלמעלה ו $-M$ מלמטה.

ממשפט בולצאנו ויירשטראס אנו יודעים כי לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת. נסמן אותה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ אנו יודעים כי $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = L$ .

נראה כי L הוא הגבול של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
נבחר m כך ש $N < n_k = m$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad m, n > N \Longrightarrow \ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ולכן:

$$|a_n - L| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - L| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L| = |a_n - a_m| + |a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

**$\le$ אי שיוויון המשולש.**

**= $|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ - מתנאי קושי. $|a_{n_k} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ מהגדרת הגבול של $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$**

לפיכך $|a_n - L| < \varepsilon$ והסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

מכיוון שהוכחנו גרירה בשני הכיוונים, הוכחו את הטענה.

■

# **פונקציות:**

## **יחידות הגבול :**

**תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0$ אם מתקיים $\lim_{x\to x_0} f(x) = M$ וגם $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$**
**אזי , $L = M$.**

**הוכחה:**

נניח בשלילה כי $L \neq M$ , ולכן נוכל להגדיר $\varepsilon = |M - L|$ .

מהנתון $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ נובע כי קיים $\delta_1$ עבורו $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

מהנתון $\lim_{x\to x_0} f(x) = M$ נובע כי קיים $\delta_2$ עבורו $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

נגדיר $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , ונקבל סתירה –

$$\varepsilon = |M - L| = |M - f(x) + f(x) - L| \le |M - f(x)| + |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon$$

■

## **תנאי היינה להתכנסות (שקול להגדרת הגבול של קושי):**

**תהי $f(x)$ פונקציה המוגדת בסביבה מנוקבת של a , אזי ,הטענות הבאות שקולות:**

1. $\lim_{x\to a} f(x) = L$
2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in Domf \quad 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
3. לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת:
   a. $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in Domf$
   b. $\forall n \quad x_n \neq a$
   c. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$

**מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$**

**הוכחה:**

$1 \Rightarrow 2$

נובע ישירות מהגדרת הגבול של קושי .

**$2 \Longrightarrow 3$**

תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ו - $\forall n \quad x_n \neq a$ וגם $x_n \in Domf \quad \forall n \in \mathbb{N}$. צריך להוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$

מהגדרת הגבול של קושי אנו יודעים כי בהינתן $\varepsilon > 0$ אזי , קיים $\delta > 0$ , המקיימים:

$$0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

מהגדרת הגבול של הסדרה אנו יודעים כי קיים $N$ כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|x_n - a| < \varepsilon$

מכייון שמתקיים לכל $\varepsilon$ מתקיים בפרט עבור $\varepsilon = \delta$ .

$$0 < |x_n - a| < \delta$$

ידוע לנו גם כי $x_n \neq a$ , אזי עבור N ועבור $x = x_n$ (קיים כיון ש $\forall n \; x_n \in Domf$) נקבל:

$$|f(x_n) - L| = |f(x) - L| \overset{(2)}{<} \varepsilon$$

כלומר מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$

**$3 \Longrightarrow 1$**

נניח כי לכל סדרה המקיימת $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ו - $\forall n \quad x_n \neq a$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.
צריך להוכיח כי $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ .

נניח בשלילה כי $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$ לכן , מהגדרת הגבול של קושי :

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \quad \exists x \in Domf \;\; 0 < |x-a| < \delta \quad \Longrightarrow |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

לכל n קיים $x_n$ המקיים $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ וגם מההנחה , $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$ .
בסתירה לנתון שלנו ! ולכן $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

(הסבר: מכייון שקריטריון היינה מתקיים לכל סדרה $x_n$ הראנו שעבור סדרה אחת כזו , אם $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq L$ , מתקבלת סתירה )

מכייון שמתקיים:

$$1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 1$$

3 הטענות הנ"ל שקולות , כנדרש. ■

# גבולות חד צדדים:

**תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0$.**

**נאמר ש $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ אם"ם $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ וגם $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$**

- <u>הוכחה</u>: (א' $\Rightarrow$ ב')

נניח כי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. כלומר, $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

נשים לב כי - $\{0<|x-x_0|<\delta\} = \{0<x-x_0<\delta \wedge 0<x_0-x<\delta\}$, כמבוקש.

<u>הוכחה</u>: (ב' $\Rightarrow$ א')

נניח כי $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$.

מהגדרת גבול ימני נובע כי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת ימנית של $x_0$, ומהגדרת גבול שמאלי נובע כי $f(x)$ מוגדרת בסביבה מנוקבת שמאלית של $x_0$, ולכן היא מוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0$.

מהגדרת גבול ימני נובע כי קיימת $\delta_r$, כך ש- $0<x-x_0<\delta_r \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

מהגדרת גבול שמאלי נובע כי קיימת $\delta_l$, כך ש- $0<x-x_0<\delta_l \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

נבחר $\delta = \min(\delta_r, \delta_l)$, ונקבל שעבור סביבה זו מתקיימים שני התנאים יחד -

$$0<x-x_0<\delta \wedge 0<x_0-x<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

כלומר - $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

## משפט הסנדוויץ' לפונקציות:

**אם $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ו- $\lim_{x\to a} g(x) = l$ וגם קיים $\delta > 0$ כך שהפונקציות $f, g, h$ מוגדרות בסביבת $\delta$ מנוקבת של a , וגם, לכל x בסביבה זו מתקיים:**

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

**אזי, $\lim_{x\to a} h(x) = l$**

נניח ש- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$, ונניח שקיים $\delta > 0$ כך שהפונקציות $f, g, h$ מוגדרות בסביבות $\delta$ מנוקבת של $a$, ושלכל $x$ בסביבת $\delta$ מנוקבת של $a$ מתקיים:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

אזי $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת את התנאים של $Heine$, ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = L$$

ע"פ הנתון, לכל $x$ בסביבת $\delta$ מנוקבת של $a$ מתקיים $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$.
לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x$ שמקיימים $0 < |x_n - a| < \delta$, מתקיים $f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n)$.
ממשפט הסנדוויץ' $\lim_{n\to\infty} h(x_n) = L$.
מכיוון ש- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את התנאים של $Heine$, מתקיים:

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} h(x) = L$$

# תנאי קושי לגבול פונקציה בנקודה:

# הגדרות לנקודות אי רציפות :

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מלאה של $x_0$.

נמיין 3 סוגים של נקודות אי רציפות בקטע.

1. **אי רציפות מסוג סליקה :**הגבולות החד צדדים קיימים ושווים, ולכן קים גבול כללי ב $x_0$ אבל !

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

2. **אי רציפות מסוג ראשון:** הגבולות החד צדדים קיימים ושונים, ולכן אין גבול ב $x_0$.
3. **אי רציפות מסוג שני:** לפחות אחד משני הגבולות החד צדדים לא קיים במובן הצר בנקודה $x_0$

**תנאים להמשכה רציפה:**

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה $x_0$,נאמר של-f יש הרחבה רציפה אם התנאים הבאים מתקיימים:

1. קיימת פונקציה g המקיימת: $f(x) = g(x) \quad \forall \ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
2. g רציפה בנקודה $x_0$

## לפונקציה מונוטונית יש רק נקודות אי רציפות מסוג ראשון:

**תהי f פונקציה מונוטונית בקטע $(a,b)$ ומוגדרת בסביבה שמאלית של b אם היא לא רציפה, אז נקודת אי הרציפות של היא מסוג ראשון בלבד.**

**הוכחה (לא פורמאלית בכלל) :**

תהי f פונקציה מונוטונית עולה. ראשית נניח כי הפונקציה חסומה מלעיל:
אם הפונקציה חסומה מלעיל אזי יש לה סופרמום מאקסיומת השלמות , נסמן :

$M = sup\{f(x)|\ x \in a,b)\}$ נוכיח כי הגבול משמאל של b הוא M ולכן:

$f(x_0) + \varepsilon > M \quad \exists x_0 \in (a,b)$ (תכונת הסופרמום)

נבחר $\delta = b - x_0$ ומכיון ש $f$ מונוטונית מתקיים:

$$0 < b - x < \delta \Longrightarrow \quad 0 < b - x < b - x_0 \Longrightarrow \; -b < -x < -x_0 \; \Longrightarrow x_0 < x < b$$

ולכן: $0 \le M - f(x) \overset{\text{מונוטונית}}{<} M - f(x_0) < \varepsilon$

זה שקול להגדרת הגבול , על ידי משחק עם הערך המוחלט, נראה:

$$0 \le |f(x) - M| < \varepsilon$$

כלומר, הוכחנו כי לפונקציה חסומה מלעיל יש גבול משמאל ל $b$ והוא הסופרמום שלה.
וכך גם לגבי האינפימום של הקטע , המתכנס לסביבה ימנית של $a$.
כעת, נוכיח כי אם קיימת נקודת אי רציפות בקטע $x_0 \in (a,b)$ כך שלא קיים הגבול בנקודה זו, נקודת אי רציפות זו היא מסוג ראשון .
נסתכל על הקטע $(a,x_0) \subset (a,b)$ הפונקציה מונוטונית בקטע זה , ולכן מתקיים כי הגבול משמאל של $\boldsymbol{x_0}$ קיים והוא הסופרמום של הקטע . כמו כן גם בקטע $(x_0,b)$ הגבול מימין של $x_0$ קיים והוא האינפימום של הקטע. מכיוון שהפונקציה לא רציפה ב $\boldsymbol{x_0}$ אבל מונוטונית מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) < \lim_{x\to x_0+} f(x)$$

# משפט ערך הביניים:

## טענת עזר לערך הביניים:

**תהי f פונקציה רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ , אם ל $f(a)$ ול- $f(b)$ יש סימנים הפוכים $(f(a)\cdot f(b))<0$ אז קיימת $a<c<b$ כך ש $f(c)=0$ .**

**הוכחה:**

תהי f פונקציה רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ .

בלי הגבלת הכלליות, נניח כי $f(a)<0 \, , f(b)>0$ .

נאמר על הקטע $[a,b]$ שהוא נורמאלי אם מתקיים $f(a)\cdot f(b)<0$

נתבונן בנקודה $\frac{a+b}{2}$. אם $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ אז סיימנו . אחרת, נחלק את הקטע $[a,b]$ לשניים: $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ , $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ . ולכן מתקיים $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$ או $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ , כלומר, לפחות אחד הקטעים הוא נורמאלי .נסמן את הקטע הנורמאלי ב $[a_1,b_1]$. ונתבונן בנקודה $\frac{a_1,+b_1}{2}$ . אם $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=0$ אז סיימנו. אם לא , אז לפחות אחד מהקטעים: $\left[\frac{a_1+b_1}{2},b_1\right]$ , $\left[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}\right]$ הוא נורמאלי, נסמן את הקטע הנורמאלי ב $[a_2,b_2]$ .

נמשיך באופן זה ואז ייתכנו 2 אפשרויות:

1. התהליך מסתיים עבור איזשהו n , כלומר $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ , ואז סיימנו.
2. התהליך לא מסתיים וקיבלנו סדרה של קטעים נורמאלים שמקיימים:
   a. $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$
   b. $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to_{n\to\infty}0$

כלומר, סדרה של קטעים המקיימים את תנאי הלמה של קנטור, ולכן קיימת נקודה $c\in[a,b]$ שמקיימת:

$\underset{n\to\infty}{Lim}\,a_n=\underset{n\to\infty}{lim}\,b_n=c$ , וגם , $a_n\le c\le b_n \quad \forall n$ .

נתבונן ב $f(c)$. היות ש f רציפה ב- c , מתקיים על פי הגדרת הרציפות של היינה שאם $\lim_{n\to\infty}a_n=c$ , אזי , $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(c)$ וכמו כן גם : $\lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(c)$.

בנינו את סדרת הקטעים כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty}f(a_n)\le 0$ וגם $\lim_{n\to\infty}f(b_n)\ge 0$ ולכן מתקיים:

$$\big(f(c)\big)^2=\lim_{n\to\infty}f(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty}f(b_n)\le 0$$

**= מאריתמטיקה של גבולות.**

**$\le$ על פי בניית סדרת הקטעים.**

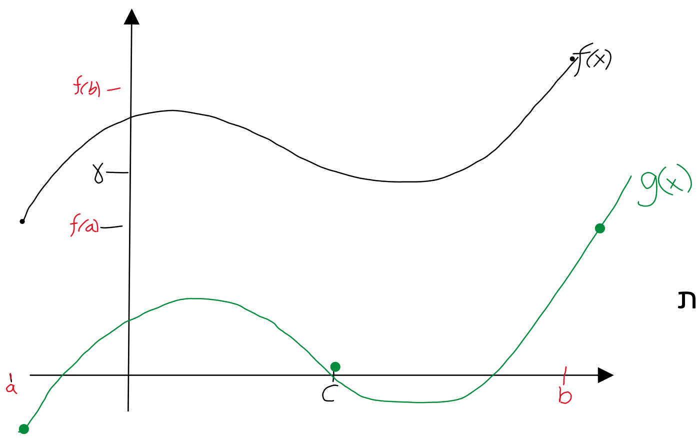
עוד אנחנו יודעים כי : $\big(f(c)\big)^2\ge 0$ , כי כל מספר בחזקה זוגית גדול או שווה לאפס.

ולכן בהכרח מתקיים כי $\big(f(c)\big)^2=0$ כלומר : $f(c)=0$ וסיימנו.

### משפט ערך הביניים (הוכחה בעזרת טענת העזר):

**תהי f פונקציה רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ . ונניח $f(a)<f(b)$ . יהי $f(a)<\gamma<f(b)$ , אזי קיים $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=\gamma$ .**

**הוכחה:**




(הסבר גאומטרי אינטואיטיבי להוכחה- "מוטיבציה")

תהי f פונקציה רציפה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

נגדיר פונקציה $g(x)=f(x)-\gamma$ , $g:[a,b]\to\mathbb{R}$

g רציפה ב $[a,b]$ כי f רציפה שם, וסכום פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה.

$g(a)=f(a)-\gamma$ , אנו יודעים כי $\gamma>f(a)$ ולכן בהכרח $g(a)<0$. כמו כן, $f(b)=g(b)-\gamma$ אנו יודעים כי $\gamma>f(b)$ ולכן $g(b)>0$ .

נפעיל את טענת העזר על g . נשים לב כי : $g(a)\cdot g(b)<0$

ולכן קיימת נקודה c , כך $g(c)=0$.

$$g(c)=f(c)-\gamma=0 \quad\Longrightarrow\quad f(c)=\gamma$$

■

## <u>משפט ויירשטראס הראשון:</u>

**תהי $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה , אזי f חסומה בטווח. (פונקציה רציפה בקטע סגור חסומה שם)**

**הוכחה:**

צריך להוכיח שהקבוצה $\{f(x)|x \in [a, b]\}$ חסומה.

נניח בשלילה כי f לא חסומה ב $[a, b]$ , אזי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x_n \in [a, b]$ כך ש $f(x_n) > n$ (בגלל שהנחנו ש f לא חסומה).

נתבונן בסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , $x_n$ סדרה חסומה (לכל $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in [a, b]$) אזי, ממשפט בולצאנו ויירשטראס אנחנו יודעים כי ל $x_n$ סדרה חסומה, קיימת תת סדרה מתכנסת. נסמן אותה $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ .
אנחנו יודעים כי אם $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה ב $[a, b]$ אז גם $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ חסומה ב $[a, b]$ וגם מתקיים:

$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$ .

אנחנו יודעים כי f רציפה ב $x_0$ (אם $x_0$ הוא באחד הקצוות , אזי רציפה מימין/ משאל של $x_0$ )

לכן מהגדרת היינה לרציפות : $\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$

אבל , אנו יודעים כי $f(x_n) > n$ כלומר, $f(x_n)$ שואפת לאינסוף(משפט הפרוסה , כי n שואפת לאינסוף), ולכן ממשפט הירושה מתקיים גם כי $f(x_{n_k})$ היא סדרה השואפת לאינסוף . נשים לב כי הסדרה $n_k$ היא סדרה השואפת לאינסוף.

בסתירה למה שהראנו כי $\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$ . ולכן בהכרח מתקיים כי $f(x)$ חסומה בקטע $[a, b]$

■

## משפט ויירשטראס השני:

**תהי $\boldsymbol{f}: [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי f מקבלת ערכי מינימום ומקסימום בקטע [a,b].**

**הוכחה:**

עלינו להוכיח כי קיימים $x_1, x_2 \in [a, b]$ כך שלכל $x \in (a, b)$ מתקיים:

$$f(x_1) \le f(x) \ \wedge \ f(x_2) \ge f(x)$$

ממשפט ויירשטראס הראשון אנו יודעים כי f חסומה ב [a,b] . ולכן נסמן :

$$M = sup\{f(x)|a \le -x \le b\} \ , \qquad m = inf\{f(x)|a \le x \le b\}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $x_n \in [a, b]$ כך שמאפיון החסם העליון מתקיים:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad M - \varepsilon < f(x_n) \le M$$

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ולכן $M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$ (#)

נשים לב כי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, ולכן ממשפט בולצאנו ויירשטראס קיימת לה תת סדרה מתכנסת. נסמן: $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ ומתקיים: $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$ . ומכיוון ש f רציפה, מהגדרת היינה לרציפות מתקיים: $\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(x_0)$

מכייון שלכל n , (#) מתקיים . אזי גם לכל k . כלומר:

$$M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \le M$$

הסדרה $\frac{1}{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ולכן מיחידות הגבול :

$$\lim_{k\to\infty}(M - \frac{1}{n_k}) \le \lim_{k\to\infty}(f\left(x_{n_k}\right) \le \lim_{k\to\infty}(M) \Leftrightarrow \quad M \le f(x_0\ ) \le M$$

כלומר $f(x_0) = M = sup\{f(x)|a \le -x \le b\}$ .

הפונקציה מקבלת ערך מקסימום בקטע .

באותו אופן ניתן להוכיח עבור ערך המינימום בקטע.

■

## **רציפה במ"ש גוררת רציפה**

**אם $f$ רציפה במ"ש , ב $A$ אז $f$ רציפה בכל נקודה ב $A$.**

## **משפט קנטור:**

**תהי f(x) פונקציה רציפה ממשית בקטע סגור וחסום $[a,b]$ , אזי ,היא רציפה בו במידה שווה.**

**הוכחה:**

נניח ש f לא רציפה במש בקטע $[a,b]$ . כלומר $\exists\varepsilon_0 > 0\ \ \forall\delta > 0\ \exists x,y \in [a,b]$ כך ש:

$$|x-y| < \delta \implies |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon_0$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימות 2 נקודות $x_n, y_n \in [a,b]$ כך שמתקיים $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$

אבל, אנו יודעים כי : $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$

נבחן את הסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ . עבור כל $n \in \mathbb{N}$ , $x_n \in [a,b]$ . כלומר זוהי סדרה חסומה . ולכן ממשפט בולצאנו ויירשטראס יש לה תת סדרה מתכנת $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L_1 \in [a,b]$

באותו אופן קיימת גם סדרה $\left(y_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ (חסומה בקטע סגור ולכן מתכנסת)

נוכיח כי $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = L_2$:

אני יודעים כי $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ ולכן נובע מכך ש $\left|x_{n_k} - y_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$

ידוע כי לסדרה $y_{n_k}$ יש גבול ניתן לומר כי סדרת ההפרשים $\left|x_{n_k} - y_{n_k}\right| < \frac{1}{n_k}$ שואפת לאפס. מכיון שהסדרה $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} = 0$ . וסדרת ההפרשים תמיד קטנה מהסדרה הנ"ל $(\frac{1}{n_k})$.

ולכן: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(x_{n_k} - y_{n_k}\right) + \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = 0 + L_2 = L_1$

כלומר: $L_1 = L_2$ ולכן: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = L_1$

אנחנו יודעים ש f רציפה בכל תחום הגדרתה ולכן, על פי הגדרת הרציפות של היינה, מתקיים :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(L_1), \qquad \lim_{k\to\infty} f\left(y_{n_k}\right) = f(L_1)$$

הנחנו כי $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ לכל n , ולכן בהכרח יתקיים לתתי הסדרות $x_{n_k}, y_{n_k}$ , אבל :

$$\left|f\left(x_{n_k}\right) - f\left(y_{n_k}\right)\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} |f(L_1) - f(L_1)| = 0 < \varepsilon_0$$

וזו סתירה להנחה כי $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ . ■

## רציפה במש ניתנת להרחבה:

**תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי ניתן להרחיב את f לפונקציה רציפה על הקטע $[a,b]$ אם"ם f רציפה במ"ש ב $(a,b)$**

**משפט:**

הערה: ניתן להרחיב את $f$ לפונקציה רציפה על הקטע *[a,b]*, - הכוונה- קיימת פונקציה $F:[a,b]\to R$ כך שלכל $x\in(a,b)$ , $F(x)=f(x)$ (ממשפט קנטור).

**הוכחה:**

כיוון ראשון:

אם ניתן להרחיב את f לפונקציה רציפה על הקטע הסגור , אז ההרחבה רציפה במש , ולכן fרציפה במש (כי $(a,b)\subseteq[a,b]$) .

כיוון שני:

נניח ש $f$ רציפה במש כדי להראות שיש הרחבה רציפה, די להראות שקיימים גבולות

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad , \lim_{x\to b^-} f(x)$$

נראה שקיים הגבול $\lim_{x\to a^+} f(x)$, (ההוכחה עבור הגבול של $b$ דומה)

נניח בשלילה שלא קיים הגבול $\lim_{x\to a^+} f(x)$ , מקריטריון היינה לקיום גבול נובע שקיימת סדרה $x_n$ המוגדרת בסביבה ימנית של $a$(ובגלל זה הסדרה נמצאת בתחום ההגדרה של $f$) כך ש $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ אבל $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ לא קיים.

נשים לב כי : $\forall\varepsilon'>0 \quad \exists N \quad \forall n>N \quad |x_n-a|<\varepsilon'$ , וכמו כן, נתון כי היא רציפה במידה שווה , כלומר היא מקיימת:

$$\forall\varepsilon>0 \ \ \exists\delta>0 \quad \forall x_1,x_2\in(a,b) \ \ |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow \ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

מכיוון שהתנאי מתקיים לכל $\varepsilon'$ אז בפרט גם עבור $\delta=\varepsilon'$ מתקיים גם: $|x_n-a|<\delta$

בגלל שהסדרה $x_n$ מתכנסת, היא מקיימת את תנאי קושי ולכן עבור $x_{n_1},x_{n_2}>N$ מתקיים:

$\left|x_{n_1}-x_{n_2}\right|<\delta \quad \Rightarrow \left|f\left(x_{n_1}\right)-f\left(x_{n_2}\right)\right|<\varepsilon$ ולכן מתקיים כי $f(x_n)$ היא סדרת קושי , כלומר בהכרח מתכנסת, בסתירה להנחה . ולכן קיים גבול בסביבה ימנית של $a$ .

## ליפשיץ:

**הגדרה :** תהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה. נאמר ש־ $f$ **ליפשיצית** (או, מקיימת **תנאי ליפשיץ**) ב־ $D$ אם"ם קיים $K>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant K\,|x_1-x_2|$ .

הקבוע $K$ נקרא קבוע ליפשיץ של הפונקציה.

**טענה :** כל פונקציה ליפשיצית ב־ $D$ הינה רציפה במ"ש ב־ $D$ .

הוכחה :

תהא $f:D\to\mathbb{R}$ פונקצייה ליפשיצית ב־ $D$ עם קבוע ליפשיץ $K$. יהא $\varepsilon>0$ . נקבע $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$ .

כעת, בהינתן $x_1,x_2\in D$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ , מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant K\,|x_1-x_2|<K\delta=\varepsilon$ . ■

## משפט: קריטריון קארתאדורי לגזירות

**תהי $F$ פונקציה המוגרת בסביבה של $a \in \mathbb{R}$ ., אזי $f$ גזירה ב $a$, אםם קיימת פונקציה$\phi$ המוגדרת בסביבה של $a$ ורציפה ב $a$כך ש : $f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a)$ .**

**הוכחה:**

אם $F$ גזירה ב $a$ , נגדיר , היכן ש $F$ מוגדרת:

$$\phi(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, & \mathrm{x} \neq \mathrm{a} \\ f'(\mathrm{a}) \quad , & \mathrm{x} = \mathrm{a} \end{cases}$$

אזי $\phi$ רציפה ב $a$ ומתקיים : $f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a)$ .

<u>כיוון שני:</u>

אם יש כזו $\phi$ נכתוב לכל $x \neq a$ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \phi(x)$ , אבל $\phi$ רציפה ב $a$ ולכן קיים הגבול

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \phi\,(x) = \phi(a)$$

ומתקיים : $\phi(a) = f'(a)$

הערה: הראינו שבתנאי המשפט , אם קיימת $\phi$ כזו אז $\phi(a) = f'(a)$

## גזירה גוררת רציפה:

**אם $f$ גזירה ב $a$ אז $f$ רציפה ב $a$.**

**הוכחה:**

נניח ש $f$ גזירה ב $a$, אז ניתן לכתוב, $f(x) - f(a) = \phi(x)(x - a)$

ו ϕ רציפה ב $a$ . בפרט $\lim_{x\to a} \phi(x) = \phi(a)$ . קיים ובנוסף $\lim_{x\to a} x - a = 0$ לכן:

$$\lim_{x\to a} \phi(x)(x - a) = \lim \phi(a) \cdot \lim_{x\to a}(x - a) = 0$$

ולכן:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x\to a} \phi(x)(x - a) = 0$$

כלומר: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

## אריתמטיקה -כלל החיבור:

**אם f ו g גזירות ב a , אזי , הפונקציה $(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})$ גזירה ב a , ומתקיים :**

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$$

**הוכחה:**

נבדוק קיום עבור $lim\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$ , ואכן:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\ ,\lim_{x\to a}\frac{\big(g(x)-g(a)\big)}{x-a}=g'(x)$$

הגבולות קיימים, ולכן מאריתמטיקה של גבולות מתקיים:

$$lim\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)-f(a)\big)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{\big(g(x)-g(a)\big)}{x-a}=f'(x)+g'(x)$$

■

## אריתמטיקה -כלל הכפל- לייבוביץ:

**אם f ו g גזירות ב a , אז הפונקציה $(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})$ גזירה ב a ומתקיים**

$$(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$$

**הוכחה:**

$$\frac{f\cdot g(x)-f\cdot g(a)}{x-a}=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}=(\#)$$

$$(\#)=g(x)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\ f(a)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$g$ גזירה ב a ולכן רציפה שם, ולכן:

$$\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(x)$$

ולכן מאריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

■

## <u>אריתמטיקה -כלל החילוק:</u>

**אם f,g גזירות ב a , ו $g(a) \neq 0$ אז הפונקציה $\frac{f}{g}$ מוגזרת בסביבת a וגזירה ב a ומתקיים :**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(a)\cdot g(a) - g'(a)\cdot f(a)}{\left(g(a)\right)^2}$$

**הוכחה:**

g גזירה ולכן, רציפה ב a , ולכן יש סביבה של a שבה g היא לא אפס. ולכן שם $\frac{f}{g}$ מוגדרת.

נחשב:

$$\frac{1}{x-a}\cdot\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)\right] = \frac{1}{x-a}\left[\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right] = \frac{1}{x-a}\left[\frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right]$$
$$= \frac{1}{x-a}\left[\frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)}\right]$$
$$= \left(\frac{g(a)\left(f(x)-f(a)\right)}{(x-a)\left(g(x)g(a)\right)} - \frac{f(a)\left(g(x)-g(a)\right)}{(x-a)\left(g(x)g(a)\right)}\right) \rightarrow_{x\to a} \quad \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{\left(g(a)\right)^2}$$

(בשלב האחרון "השאפנו" את $x$ ל $a$ ולכן קיבלנו את הנגזרת המבוקשת)

■

# נגזרת של פונקציה הפיכה:

**תהי f מוגדרת בסביבה של a , נסמן , b=f(a) נניח ש:**

**f.1 גזירה ב a ומתקיים $f'(a) \neq 0$**

**2. קיימת ל f פונקציה הפוכה (g) , והיא רציפה ב b , אזי g גזירה ב b ומתקיים $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ .**

**הוכחה:**

צריך להוכיח שיש ϕ רציפה ב b , כך ש : $g(y) - g(b) = \phi(y)(y - b)$ , ושּ- $\phi(b) = \frac{1}{f'(a)}$

אבל לכל Y יש x יחיד כך ש $f(x) = y$ , (הערה : הכל כאן בסביבות מתאימות של a ו b.) .

ידוע שקיימת $\tilde{\phi}$ , רציפה ב a כך ש :

$f(x) - f(a) = \tilde{\phi}(x)(x - a)$ , כי f גזירה ב a.

נכתוב:

$g(y) - g(b) = x - a = \frac{1}{\tilde{\phi}(x)}\big(f(x) - f(a)\big) = (\#)$

$\frac{1}{\tilde{\phi}(x)}$ , מוגדרת בסביבת a ב $\tilde{\phi}(a) \neq 0$ ו $\tilde{\phi}$ , רציפה ב a.

$$(\#) = \frac{1}{\tilde{\phi}(x)}(y - b) = \frac{1}{\tilde{\phi}\big(g(y)\big)}(y - b)$$

כלומר קיבלנו :

$$\phi(y) = \frac{1}{\tilde{\phi}(g(y))}$$

אבל g רציפה ב b ו $\tilde{\phi}$ רציפה ב $a = g(b)$ , ומתקיים:

$\tilde{\phi}\big(g(b)\big) \neq 0$ לכן, $\phi(y) = \frac{1}{\tilde{\phi}(g(y))}$ רציפה ב $b$ ומתקיים :

$$\phi(b) = \frac{1}{\tilde{\phi}(g(b))} = \frac{1}{\tilde{\phi}(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

# <u>כלל השרשרת:</u>

**תהי $f$ פונקציה המוגרת בסביבת $a$ ונסמן $f(a)=b$, תהי $g$ פונקציה המוגדרת בסביבת $b$ כך שההרכבה $g \circ f$ מוגדרת בסביבה של $a$ .**
**נניח בנוסף ש $f$ גזירה ב $a$ ו$g$ גזירה ב $f(a)=b$, אזי $g \circ f$ גזירה ב $a$ ומתקיים :**

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

**הוכחה:**

נראה שיש פונקצית $\phi$ , המוגרת בסביבת $a$ ורציפה ב $a$ , כך ש $(*)$ $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = \phi(x)(x-a)$ (קארתאודורי) , ו $\phi(a) = g'(f(a))f'(a)$ נכתוב , ל $x$ בסביבה מתאימה של $a$ .

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a) = g(f(x)) - g(f(a)) = (*)$$

$G$ גזירה ב $f(a)=b$, ולכן יש פונקציה ψ , המוגרת בסביבה של $b$ ורציפה ב $b$, כך ש

$g(y) - g(b) = \psi(y)(y-b)$ , ובפרט , $g(f(x)) - g(f(a)) = \psi f(x)(f(x) - f(a))$

בנוסף, $\psi(b) = \psi(f(a)) = g'(f(a)$ . יתרה מזאת , $\psi \circ f$ ,רציפה ב $a$ ו ψ , רציפה ב $f(a)$.

Fגזירה ב a ולכן יש פונקציה $\eta$ , המוגרת בסביבה a ורציפה ב a כך ש: $f(x) - f(a) = \eta(x)(x-a)$

יתרה מזאת : $\eta(a) = f'(a)$ , ובפרט :

$$g(f(x)) - g(f(a)) = \psi(f(x))(f(x) - f(a)) = \psi(f(x))\eta(x)(x-a)$$

לכן: $\phi(x) = \psi(f(X)) \cdot \eta(x)$ - רציפה ב $a$ כמכפלה של רציפות ומתקיים :

$$\phi(a) = \psi(f(a))\eta(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

הסבר:

$$\phi = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}, \quad x \neq x_0, \quad h(x) - h(x_0) = \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

## משפט פרמה (fermat):

**תהי F פונקציה המוגדת ב (a,b) , ו $x_0 \in (a,b)$ נניח ש f גזירה ב $x_0$ ומקבלת ב $x_0$ את ערכה המינימילי או המקסימלי בקטע (a,b) , אזי $f'(x_0) = 0$**

**הוכחה:**

נניח ש f מקבלת מקסימום(ההוכחה במקרה ש f מקבלת מינימום ב $x_0$ היא דומה).

$f$ גזירה ב $x_0$ ולכן $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ מכייון ש f גזירה ב $x_0$, מתקיים כי הנגזרת מימין והנגזרת משמאל קיימות ושוות זו לזו, כלומר $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$

ידוע כי $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in (a,b)$ כי $f(x_0)$ מקבלת את ערך המקסימום.

אבל לכל $h \neq 0$ $f(x_0+h) \leq f(x_0) \Longrightarrow f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$ ולכן נבדוק לפי מקרים:

אם $h > 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$$

(מונה שלילי ומכנה חיובי)

ולכן , $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$

מצד שני, אם $h < 0$ אז :

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

(מונה שלילי ומכנה שלילי) ולכן:

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

ולכן, $f'(x_0) = 0$

■

## משפט Rolle :

**תהי f פונקציה המוגדרת בקטע הסגור [a,b] ורציפה שם. נניח בנוסף ש f גזירה ב (a,b) ומתקיים גם כי $\boldsymbol{f(a)=f(b)}$ אזי , יש נקודה $\boldsymbol{c\in(a,b)}$ כך ש $\boldsymbol{f'(c)=0}$**

**הוכחה :**

מכיוון ש f רציפה ב $[a,b]$ לפי המשפט השני של ויירשטראס( =פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת ערכי מינימום ומקסימום), f מקבלת מקסימום ומינימום בקטע הסגור $[a,b]$ , נסמן:

$$M=max\{f(x)|a\le x\le b\}\quad ,m=min\{f(x)|a\le x\le b\}$$

אם : $m=M$ , אז f קבועה ואז $f'(c)=0$ לכל $c\in(a,b)$.

אם $m<M$ אז היות ש $f(a)=f(b)$ , יש נקודה $c\in(a,b)$ שבה $f(c)=m$ או $f(c)=M$

כלומר, f מקבלת את המקסימום או המינימום ב $c\in(a,b)$ ולכן ממשפט פרמה $f'(c)=0$

■

## משפט לה גרנז' (lagrange), משפט הערך הממוצע של לאגרנז' :

**תהי f פונקציה רציפה בקטע [a,b] וגזירה בקטע (a,b) אזי יש נקודה $\boldsymbol{c\in(a,b)}$ כך ש : $\boldsymbol{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$**

**הוכחה:**

נגדיר את הפונקציה $F(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$

(*קיבלנו פונקציה חדשה "מסובבת" – החסרנו את הישר העובר דרך הנקודות : $\left(a,f(a)\right),\left(b,f(b)\right)$ )

ערכי הפונקציה עבור הנקודות a,b:

$$F(a)=f(a)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)+f(a)\right)=0$$

$$F(b)=f(b)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)+f(a)\right)=0$$

קיבלנו כי הפונקציה F רציפה ב [a,b] וגזירה ב (a,b), ומקיימת $F(a)=F(b)=0$ כלומר , קיבלנו שתנאי משפט רול מתקיימים , יש נקודה $c\in(a,b)$ כך ש : $F'(c)=0$ ולכן (נגזור את F(x)):

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

כלומר, $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ■.

## <u>מסקנה ממשפט לגרנז:</u>

**תהי f רציפה ב [a,b] וגזירה ב (a,b), אם $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$ אז f קבועה ב[a,b] .**

**הוכחה:**

נבחר $a\neq d\in[a,b]$, ולכן ממשפט לה גרנז', יש $c\in(a,b)$ כך ש $f'(c)=\frac{f(d)-f(a)}{d-a}$. כי f רציפה ב [a,d] וגזירה ב (a,d) מכיוון שהקטע $[a,d]\subset[a,b]$.

אבל $f'(c)=0$ ולכן ,

$$f'(c)=\frac{f(d)-f(a)}{d-a}=0 \quad\Longrightarrow\quad f(d)=f(a)$$

כלומר:

$$\forall d\neq a\in[a,b]\quad f(d)=f(a)$$

ולכן הפונקציה f היא פונקציה קבועה.

■

## <u>מסקנה נוספת:</u>

**תהי f רציפה ב [a,b] וגזירה ב (a,b), ומתקיים שלכל $x\in(a,b)$ $f'(x)>0$ אז f מונוטונית עולה ממש בקטע [a,b] .**

**הוכחה:**

יהיו : $x_1,x_2\in[a,b]$ כך ש $x_1<x_2$ אזי f רציפה ב $[x_1,x_2]$ וגזירה ב $(x_1,x_2)$ , ולכן יש $c\in(x_1,x_2)$ כך שמתקיים ממשפט לה גרנז':

$$0<f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\quad => \quad f(x_2)>f(x_1)$$

(הסבר: מכייון שידוע כי $x_1<x_2$ המכנה חיובי , ועל מנת שכל הביטוי (השווה ל $f'(c)$) יהיה חיובי בהכרח מתקיים כי $f(x_2)-f(x_1)>0 \quad\Longrightarrow\quad f(x_2)>f(x_1)$

■

## משפט הערך הממוצע של קושי:

**יהיו f ,g רציפות ב [a,b] וגזירות ב (a,b) , נניח בנוסף ש : $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a,b)$ , אזי $g(b) \neq g(a)$ וקיימת $c \in (a,b)$ , כך ש:**

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

**הערה: אם נבחר $g(x) = x$ , נקבל את משפט לה גרנז'.**

**הוכחה:**

(נגדיר פונקציה חדשה ונפעיל עליה את משפט רול)

$g(b) \neq g(a)$ כי אחרת , ממשפט רול יש $c \in (a,b)$ שעבורה $g'(c) = 0$ . אבל נתון שאין כזו נקודה .

אם כך נתבונן בפונקציה $G(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big) + f(a)\right)$ .

מכיון שידוע כי $g(b) \neq g(a)$ הפונקציה G מוגדרת היטב.

G רציפה ב [a,b] כי היא סכום של פונקציות רציפות ב [a,b] , והיא גזירה ב (a,b) , בנוסף מתקיים:

$$G(a) = f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(a)-g(a)\big) + f(a)\right) = 0$$

$$G(b) = f(b) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(b)-g(a)\big) + f(a)\right) = 0$$

$G(a) = G(b) = 0$

ולכן ממשפט רול , קיימת $c \in (a,b)$ כך ש: $G'(c) = 0$ .

$$G'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

ולכן (מכיון שידוע כי $g'(c) \neq 0$ ) : $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{\mathrm{f(b)-f(a)}}{\mathrm{g(b)-g(a)}}$

# משפט דרבו:

**תהי $f$ פונקציה גזירה בקטע $[a,b]$ (היא גם גזירה בקטע הפתוח ומימין ב $a$ ומשמאל ב $b$ ), נניח ש**

**$f'_+(a) < f'_-(b)$ ויהי $f'_+(a) < \gamma < f'_-(b)$ אזי יש $a < c < b$ כך ש: $\mathbf{f}'(\mathbf{c}) = \boldsymbol{\gamma}$**

**הוכחה:**

(מוטיבציה: נראה כי הפונקציה החדשה שנגדיר רציפה והמינימום לא מתקבל בקצוות , על מנת שכשנגזור את הפונקציה, תהיה איזשהי נקודת מינימום שהנגזרת שלה שווה לאפס )

יהי $f'_+(a) < \gamma < f'_-(b)$ נתבונן בפונקציה:

$$\mathrm{F}(x) = f(x) - \gamma x$$

$f$ גזירה ב $[a,b]$ ולכן רציפה שם.

ולכן F רציפה ב $[a,b]$ ומתקיים : $F'(x) = f'(x) - \gamma \quad x \in (a,b)$

$$\mathrm{F}'_+(a) = f'_+(a) - \gamma$$

$$F'_-(b) = f'_-(b) - \gamma$$

מכאן ש F רציפה ב [a,b], ממשפט ויירשטראס השני, היא מקבלת מינימום ב [a,b] . נראה ש F מקבלת את המינימום ב (a,b) (בקטע פתוח, כלומר , לא בקצוות).

הנחנו כי : $f'_+(a) < \gamma$ ומכך נובע ש- $\mathrm{F}'(a) = f'(a) - \gamma$ כלומר : $F'_+(a) < 0$

כלומר:

$$F'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} < 0$$

בפרט, קיימת סביבה של h שבה, $h > 0$ :

$$\frac{F(a+h) - F(a)}{h} < 0$$

ובפרט, המינימום של F לא מתקבל ב a (הסבר: מכיוון שהביטוי הנ"ל שלילי , ניתן להסיק כי קיימת נקודה שיותר קטנה מ $\mathrm{F}(a)$ ולכן , לא ייתכן ש ב $F(a)$ מתקבל מינימום) .

באותו אופן, מכך ש $\gamma < f'_-(b)$ נובע ש $\mathrm{F}'_-(b) > 0$

$$\mathrm{F}'_-(b) = \lim_{h\to 0^-} \frac{F(b+h) - F(b)}{h} > 0$$

בפרט , קיים $h < 0$ שעבורו :

$$\frac{F(b+h) - F(b)}{h} > 0$$

כלומר, $\mathrm{F}(b+h) < F(b)$ ולכן המינימום לא מתקבל ב $b$, מכאן, המינימום של $F$ מתקבל ב $c \in (a,b)$ אבל אז ממשפט פרמה $F'(c) = f'(c) - \gamma \ = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \gamma$ ■

# כלל לופיטל:

**יהיו f ו g פונקציות גזירות בסביבת a פרט אולי לנקודה a עצמה. נניח שמתקיים :**

1. $g'(x) \neq 0$ **לכל x בסביבת a.**
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$
3. $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**אזי ,** $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ **קיים, ומתקיים** $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

**הערות:**

1. המשפט נכון גם בניסוח חד צדדי (כלומר, אם הסביבה היא ימנית או שמאלית והגבולות בהתאם )
2. המשפט נשאר נכון גם אם $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$ או $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$

**הוכחה:**

נגדיר מחדש פונקציות $f, g$ שהן שוות לפונקציות המקוריות פרט לנקודה a כך שמתקיים :

$$f(a) = g(a) = 0$$

נניח שתנאי המשפט מתקיימים בסביבה ימנית של a , כלומר קיים $h > 0$ כך שf וg גזירות ב $(a, a+h)$ ורציפות ב $[a, a+h]$ (הסבר: כי הפונקציה רציפה בנקודה a וגזירה בסביבה ימנית של a)

נשים לב כי $g'(x) \neq 0$ לכל $x \in (a, a+h)$ .

מכיון ש $g(a) = 0$ , ואילו היה $x > a$ כך ש $g(x) = 0$ אז, משפט רול היה אומר ש $g'(c) = 0$ עבור $a < c < x$ וזה סותר את העובדה ש $g'(c) \neq 0$ לכל $c \in (a, a+h)$ .

נפעיל את משפט קושי לכל $x \in (a, a+h]$ יש $c_x$ כלומר, c שתלוי ב x

כך ש: $a < c_x < x$

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

כי $f(a) = g(a) = 0$ .

אבל , נשים לב שכאשר $x \to a$ מימין , $c_x \to a$ מימין.

ולכן:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x \to a^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L$$

חזרה על ההוכחה הזו לסביבה שמאלית מסיימת את ההוכחה.

■

# קעירות:

**הגדרה:**

פונקציה f המוגדרת על קטע I תקרא קמורה ב I אם לכל $a,b \in I$ שעבורן $a < b$ וגם $x \in I$ כך ש $a < x < b$ מתקיים:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

## ההוכחה עם ה t:

**f קמורה ב I אם ורק אם לכל $\boldsymbol{a,b \in I}$ , $\boldsymbol{a < b}$ ולכל $\boldsymbol{0 \leq t \leq 1}$ מתקיים:**

$$\boldsymbol{f(ta + (1-t)b) \leq t \cdot f(a) + (1-t)f(b)}$$

**הוכחה:**

נניח כי f קמורה , ויהיו $a,b \in I$ , $a < b$ . אזי עבור $0 < t < 1$:

$$a = ta + (1-t)a < ta + (1-t)b < tb + (1-t)b = b$$

ולכן מתקיים : $a < ta + (1-t)b < b$

אם $t = 0$ , $b = ta + (1-t)b$ או $t = 1$ זה טריוואלי.

נסמן: $x = ta + (1-t)b = t(a-b) + b$ ונקבל ש:

$$1 - t = \frac{x - a}{b - a} \quad , \quad \frac{b - x}{b - a} = t$$

מהקמירות:

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) = \left(1 - \frac{x - a}{b - a}\right) f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b) = \frac{b - a}{b - a} \cdot f(a) + \frac{x - a}{b - a} \cdot f(b)$$
$$= tf(a) + (1-t)f(b)$$

כיוון שני :

נניח ש f מקיימת את האי שייוון :

$$a < ta + (1-t)b < b$$

ויהיו $a < x < b$ ונשים לב ש $x = ta + (1-t)b$ עבור $t = \frac{b-x}{b-a}$

אם נציב x באי שיויון הנל , נקבל את

$$f\left(\frac{b - x}{b - a} a + \left(1 - \frac{b - x}{b - a}\right) b\right) \leq \frac{b - x}{b - a} \cdot f(a) + \left(1 - \frac{b - x}{b - a}\right) f(b)$$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

כנדרש.

# <u>למת המיתרים:</u>

**תהי $f$ פונקציה המוגרת על קטע $I$ .התנאים הבאים שקולים:**

1. **$f$ קמורה ב $I$.**
2. **לכל $x_1,x_2,x_3$ המקיימים $\mathrm{x_1} < \mathrm{x_2} < x_3$**
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$
3. **לכל $\mathrm{a} \in \mathrm{I}$ הפונקציה: $\mathrm{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ היא פונקציה עולה ב $I\backslash\{a\}$**

**הוכחה:**

$1 \Longrightarrow 2$

יהיו $x_1,x_2,x_3$ כך ש $\mathrm{x_1} < \mathrm{x_2} < x_3$

(מוטיבציה לאלגברה: נסמן את $t$ כך שהוא יהיה בין 0 ל-1 , ונחלץ את $\mathrm{x_2}$ ולאחר מכן, נציב אותו , כך ש $a,b$ במשוואה של ההגדרה יהיו $(x_1,x_3$

$$t=\frac{(x_3-x_2)}{x_3-x_1} \quad\Longrightarrow\quad ,x_2=tx_1+(1-t)x_3$$

ומתקיים :

$$\mathrm{f(x_2)} = f(tx_1+(1-t)x_3) \le \frac{(x_3-x_2)}{x_3-x_1}\cdot f(x_1)+\frac{(x_2-x_1)}{x_3-x_1}f(x_3)$$

$$(x_3-x_1)f(x_2) \le (x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$$

נשים לב כי :

$$x_2=\overbrace{\frac{(x_3-x_2)}{x_3-x_1}}^{t}x_1+\overbrace{\left(1-\frac{(x_3-x_2)}{x_3-x_1}\right)}^{1-t}x_3$$

$$(x_3-x_1)f(x_2) \le (x_3-x_1+x_1-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$$

$$(x_3-x_1)(f(x_2)-f(x_1) \le (x_2-x_1)(f(x_3)-f(x_1))$$

ולכן: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

נשים לב כי זהו האי שייויון השמאלי. על מנת להוכיח את אי השיויון הימיני:

$$(x_3-x_1)f(x_2) \le (x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_3+x_3+x_1)f(x_3)$$

ונמשיך באופן אלגברי עד שנקבל את אי השיויון הימני.

■

נוכיח את : $2 \Longrightarrow 3$

צריך להוכיח ש לכל $\mathrm{a} \in \mathrm{I}$ הפונקציה: $\mathrm{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ היא פונקציה מונוטונית עולה ב $I\backslash\{a\}$

כלומר, צריך להראות שאם $\mathrm{x} < \mathrm{y}$ , $\mathrm{x,y} \in \mathrm{I}$ אז :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

אם $x < y < a$ נשתמש ב 2:

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

כאשר : $x_3 = a\,, x_2 = y\,, x_1 = x$

במקרה שבו $x < a < y$ :, נשתמש ב 2:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_3 = y\,, x_2 = a\,, x_1 = x$$

אם $a < x < y$

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

$$x_3 = y\,, x_2 = x\,, x_1 = a$$

נראה כי $1 \Longrightarrow 3$:

יהיו $a, x, y \in I$ , $a < x < y$ , אזי מ 3 :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

אזי: $f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x - a)$

# <u>פונקציה קמורה בקטע פתוח רציפה שם:</u>

**תהי *f* פונקציה קמורה בקטע פתוח *I* אזי *f* רציפה ב *I* .**

**הוכחה:**

תהי $x \in I$ ו $a, b \in I$ כך ש $a < b$ (מכייון ש *I* קטע פתוח יש כאלו *a,b*).

נראה ש $f$ רציפה מימין ב $x$ .(ההוכחה לרציפות משמאל דומה )

תהי $t \in (a, b)$

נשתמש בלמת המיתרים עם $x_3 = b$ , $x_2 = t$ , $x_1 = x$ ונקבל:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

כלומר:

$$f(t) - f(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \, (t - x)$$

נשתמש שוב בלמת המיתרים ,

$x_1 = a \, , x_2 = x \, , x_3 = t$

ונקבל :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

כלומר:

$$(t - x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f(t) - f(x)$$

קיבלנו ש:

$$(t - x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq f(t) - f(x) \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \, (t - x)$$

ומשפט הסנדוויץ' נקבל ש:

$$\lim_{t \to x+} f(t) = f(x)$$

## פונקציה קמורה מקיימת תנאי ליפשיץ:

**אם f קמורה ב (a,b) אז f ליפשיצית בכל תת קטע סגור**

**הוכחה:**

$$(x-x_0)\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}\le f(x)-f(x_0)\le\frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}\,(x-x_0)$$

לכל x מימין ל $x_0$ ובין a ל b .

אבל אם נתבונן ב $x_0<x<b'<b$

$$\frac{f(x_0)-f(b)}{x_0-b}\le\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}$$

וכנ"ל עבור :

$$a<a'<x_0$$

$$\frac{f(a')-f(a)}{a'-a}\le\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$$

ולכן:

$$\forall x,x_0\in[a,b]$$

$$\overbrace{\frac{f(a')-f(a)}{a'-a}}^{\text{מספר קבוע}}\le\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}\le\overbrace{\frac{f(b')-f(b)}{b'-b}}^{\text{מספר קבוע}}$$

קבוע הליפשיץ יהיה :

$$\mathrm{c}=\max\left(\left|\frac{f\left(a^{'}\right)-f(a)}{a^{'}-a}\right|,\left|\frac{f\left(b^{'}\right)-f(b)}{b^{'}-b}\right|\right)$$

ולכן $F$ היא ליפשיצית בקטע $[a',b']$ .

## פונקציה קמורה גזירה מימין ומשמאל:

**תהי f פונקציה קמורה בקטע $(a,b)$ אזי F גזירה מימין ומשמאל בכל נקודה $x_0 \in (a,b)$ ומתקיים לכל $x,y \in (a,b)$ , $x<y$.**

$$f'_-(x) \le f'_+(x) \le f'_-(y)$$

**הוכחה:**

תהי $x_0 \in (a,b)$ נראה ש f גזירה משמאל ב $x_0$ .

תהי $y_0 \in (a,b)$ , $x_0 < y_0$ , נשים לב שהפונקציה $g:(a,x_0) \to \mathbb{R}$ , $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

מונוטונית עולה, יתרה מזאת, $g$ חסומה על ידי :

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(y_0)-f(x_0)}{y_0-x_0}$$

ולכן $g$ מתכנסת וקיים לה גבול .

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \left( \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) = f_-(x_0)$$

באותו אופן נמצא לצד ימין.

מהמונוטוניות ברור ש $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0)$ , אם $x_0 < y_0$ נבחר נקודה $x_0 < z < y_0$

ונקבל:

$$f'_+(x_0) = \inf_{x > x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(z)-f(x_0)}{z-x_0} \underset{\text{למת הימתרים}}{\le} \frac{f(z)-f(y_0)}{z-y_0} \le \sup_{y > y_0} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = f'_-(y_0)$$

$$g_{y_0}(x) = \frac{f(x)-f(y_0)}{x-y_0}$$

## פונקציה גזירה קמורה אם"ם הנגזרת קמורה :

**אם $\boldsymbol{f}: (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \to \mathbb{R}$ גזירה אזי f קמורה (ממש) אם"ם f’ עולה (ממש).**

**הוכחה:**

אם f קמורה (ממש) , הראנו הרגע שלכל $x, y \in (a, b)$ $x < y$ , $f'(x) \le f'(y)$ (א"ש חזק אם f קמורה ממש )

כיון שני:

f גזירה ו f’ מונוטונית עולה (ממש) , כלומר $\forall x, y \in (a, b), \quad x < y \Longrightarrow f'(x) \le f'(y)$

צ"ל שלכל $\alpha, \beta \in (a, b)$ ולכל $0 \le t \le 1$

$$f(t\alpha + (1 - t)\beta) \le t \cdot f(\alpha) + (1 - t)f(\beta)$$

יהיו $\alpha, \beta \in (a, b)$ נקודות, ו $0 \le t \le 1$ נגדיר:

$$x_t = t\alpha + (1 - t)\beta$$

נשים לב:

$$\frac{f(x_t) - f(\alpha)}{(1 - t)(\beta - \alpha)} = \frac{f(x_t) - f(\alpha)}{x_t - \alpha}$$

ממשפט לה גרנז קיימת נקודה $\alpha < x < x_t$ כך ש- $\frac{f(x_t) - f(\alpha)}{x_t - \alpha} = f'(x)$

בדומה , ושוב בעזרת לגרנז:

$$\frac{f(\beta) - f(x_t)}{t(\beta - \alpha)} \le \frac{f(\beta) - f(x_t)}{t(\beta - \alpha)}$$

ולכן:

$$t \cdot f(x_t) - tf(\alpha) \le (1 - t)f(\beta) - (1 - t)f(x_t)$$

$$f(x_t) \le tf(\alpha) + (1 - t)f(\beta)$$

(עם א"ש חזק אז f’ מונוטונית עולה ממש )

ולפיכך f קמורה . ■

| טבלת הנגזרות | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $(c)'=0$ (c - קבוע) | 2 | $x'=1$ |
| 3 | $(u+v+w)'=u'+v'+w'$ (u, v, w - פונקציות של x) | 4 | $(u\cdot v)'=u'v+uv'$ |
| 5 | $(c\cdot u)'=cu'$ | 6 | $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| 7 | $\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c}$ | 8 | $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{c}{v^2}\cdot v'$ |
| 9 | $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ α - מספר ממשי | 10 | $(u^\alpha)'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}u'$ |
| 11 | $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | 12 | $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$ |
| 13 | $(\ell^x)'=\ell^x$ $\ell\approx 2.7\ldots$ | 14 | $(\ell^u)'=\ell^u\cdot u'$ |
| 15 | $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ (a- קבוע) a > 1 | 16 | $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$ |
| 17 | $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ | 18 | $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$ |
| 19 | $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$ | 20 | $(\sin x)'=\cos x$ |
| 21 | $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$ | 22 | $(\cos x)'=-\sin x$ |
| 23 | $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$ | 24 | $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ |
| 25 | $(\tan u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$ | 26 | $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 27 | $(\cot u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$ | 28 | $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ |
| 29 | $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$ | 30 | $(\arctan u)'=\frac{u'}{1+u^2}$ |
| 31 | $(arc\cot u)'=-\frac{u'}{1+u^2}$ | 32 | $(f[g(x)])'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$ |
| 33 | $y''=(y')'$ | 34 | $x'_y=\frac{1}{y'_x}$ |