בס"ד

IML
תרגיל 2

1) יהי $x \in \ker(X^T)$ כלומר:

$$XX^Tx = X(X^Tx) = X \cdot 0 = 0$$

ולכן $x \in \ker(XX^T)$

$$\ker(X^T) \subseteq \ker(XX^T)$$

• יהי $x \in \ker(XX^T)$ כלומר

$$XX^Tx = 0 \iff x^t XX^t x = 0$$
$$\iff (X^t x)^t X^t x = 0$$
$$\iff \|X^t x\|_2^2 = 0$$
$$\iff X^t x = 0$$
$$\Rightarrow x \in \ker(X^t)$$

$$\ker(XX^t) \subseteq \ker(X^t)$$

ולכן מהכלה דו כיוונית $\ker(XX^t) = \ker(X^t)$.

2) יודעים שמתקיים $(A^T)^T = A$ ולכן

$$Im(A) = \ker(A^T)^\perp \iff Im(A^T) = \ker(A)^\perp$$

• יהי $x \in Im(A^T)$ ולכן ק"מ $v \in V$ כך ש. $x = A^Tv$

ויהי $y \in \ker(A)$ ולכן $A \cdot y = 0 \Leftarrow$

$$\langle x, y \rangle = x^T y = (A^T v)^T y = v^T A y$$

$$= v^T \cdot 0 = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker(A^T)$$

$$Im(A^T) \subseteq \ker(A)^\perp.$$

Scanné avec CamScanner

ססק

$x \in Im(A^T)^\perp$. אזי לכל v $x^T (A^T) v$

$\Leftarrow$ $(Ax)^T v = 0$ ונגדיר $v = Ax$ כאשר $x \in kerA$

ולכן $Im(A^T) \subseteq ker(A)$ וגם $ker(A)^\perp \subseteq Im(A)^{\perp\perp}$

ולכן $Im(A^T) \subseteq ker(A)^\perp \subseteq Im(A^T)^{\perp\perp} = Im(A^T)$

מהכלה דו כיוונית $ker(A)^\perp = Im(A^T)$

3) X^T לא הפיכה ולכן יש אין סוף פתרונות או שאין פתרונות בכלל. (כאשר $y = X^t w$)

∞ פתרונות $\iff y \in Im(X^t) \leftarrow$ (ולכן יש לפחות פתרון אחד. ולכן ∞ פתרונות.)

$\overset{\text{(סעיף 2)}}{\iff} y \in ker(X)^\perp$

$\iff y \perp ker(A)$

4) נרצה להוכיח שיש פתרון יחיד למערכת $XX^t w = Xy$ אם״ם XX^t הפיכה ולכן יש אינסוף פתרונות אחרת.

$$XX^t w = Xy \underset{\text{הכפלה ב-}X}{\overset{\text{שאלה 3.}}{\iff}} X^t w = y$$

נחלק לשני מקרים

⊛ (XX^t) הפיכה $\Rightarrow$ יש פתרון יחיד והפתרון הוא $w = (XX^t)^{-1} Xy$

⊛ (XX^t) לא הפיכה $\iff X^t y \in ker(X^t X) \overset{\text{שאלה 2}}{=} Im(X)^\perp$

שאלה 3 $\Rightarrow$ ∞ פתרונות

5)

א) $P^T = \sum_{i=1}^{k} (v_i v_i^T)^T \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T = P$

$(v_i v_i^T)^T = (v_i^T)^T v_i^T = v_i v_i^T$

ב) נשתמש בפירוק EVD כאשר $D = \begin{pmatrix} I_{k\times k} & 0 \\ 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}$

ולכן פירוק של P הוא $P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_d \\ | & & | \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} I_{k\times k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{d} \begin{pmatrix} -v_1- \\ \vdots \\ -v_d- \end{pmatrix}$

ונקבל רק 0 או 1.

יהי j כך ש- $v_j \in \{v_1, \dots, v_k\}$ ולכן

$P v_j = \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T v_j = \sum_{i=1}^{k} v_i \langle v_i, v_j \rangle$

ידוע ש- $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ מ אורתונורמליות.

$\Rightarrow P v_j = \sum_{i=1}^{k} v_i \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{k} v_i \delta_{ij} = v_j.$

ג) $P v = \left(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T\right) v = \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T v_i$

$= \sum_{i=1}^{k} v_i = v.$

ד) $P^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} (v_i v_i^T)^2$

$= \sum_{i=1}^{k} (v_i \underbrace{v_i^T)(v_i}_{I} v_i^T) = \sum_{i=1}^{k} (v_i v_i^T) = P.$

ה) $(I-P)P = P - P^2 \underset{\text{לפי הקודם}}{=} P - P = 0.$

6) נשים לב $U\Sigma V^T$ להיות את ה-SVD של X.

(א)

$$XX^t = U\Sigma\Sigma^T U^T$$

$$\Leftrightarrow (XX^t)^{-1} = (U^T)^{-1}(\Sigma^T)^{-1}(\Sigma)^{-1}U^{-1}$$

$$= UD^{-1}U^T$$

(ב)

ניעזר שוב מהמשוואות/הגדרות

$$X^{t+} = X^{t\perp} = U\Sigma^{t+}V^T$$

$$(XX^t)^{-1}X = UD^{-1}U^t X = U\underbrace{D^{-1}\Sigma}V^T$$

ונשים לב:

$$D^{-1}\Sigma = (\Sigma\Sigma^t)^{-1}\Sigma = (\Sigma^t)^{-1}\Sigma^{-1}\Sigma = (\Sigma^t)^{-1}$$

$$\Rightarrow (XX^t)^{-1}X = X^{t\perp} = U$$

7) XX^t הפיכה $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rank}(XX^t) = d$

$\ker(X^t) = \{0\} \cap \mathrm{Rank}(X^t) = d \Leftrightarrow$

$\dim(\mathrm{Im}(X^t)) = d \Leftrightarrow$

$\mathrm{Span}\{x_1, \dots, x_m\} = \mathbb{R}^d \Leftrightarrow$

8) נרצה להוכיח ש: $\|\bar{\omega}\|_2 \geq \|\hat{\omega}\|$

ונניח שהדרגה של X היא $R < d$ ולכן R ערכים הראשונים של $\bar{\omega}$ ו-$\hat{\omega}$ הם שווים ונשים לב $i > R$

$\hat{\omega}_i = 0$ כלומר נקבל:

$$\|\bar{\omega}\|_2 = \sum_{i=1}^{d} \bar{\omega}_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^{R} \bar{\omega}_i^2 + \sum_{i=R+1}^{d}$$

$$= \sum_{i=1}^{R} \hat{\omega}_i^2 + \sum_{i=R+1}^{d} \bar{\omega}_i^2 \geq \sum_{i=1}^{R} \hat{\omega}_i^2 = \|\hat{\omega}\|_2$$