

Logik und Informatik

Die Logik ist eine alte Wissenschaft, die als Lehre von den Regeln des Denkens schon in der Antike gepflegt wurde. Dabei ging es um Schlussmuster, mittels derer entschieden werden kann, ob eine Aussage wahr oder falsch sei. Im Mittelalter war diese Disziplin ein fester Bestandteil der Ausbildung jedes Akademikers. Heute wird sie meist als Teilbereich der Mathematik betrachtet, der sich hauptsächlich mit der Untersuchung formaler Systeme (sogenannten Kalkülen) beschäftigt. Für die Informatik sind neben der Logik und Deduktion auch die Berechenbarkeitstheorie und die Komplexitätstheorie relevant. Nach Schöningh ist Logik in der Informatik auf einen kurzen Nenner gebracht das «Rechnen mit Wissen».

Damit ein Computer zur Lösung von Problemen eingesetzt werden kann, müssen diese in einer Art formalisiert werden, dass der Computer sie verstehen und abarbeiten kann. Die Handlungsanleitung für die Abarbeitung nennt man gemeinhin *Algorithmus*. Das klassische Beispiel für einen Algorithmus stellt die auf Euklid von Alexandrien (360–280 v. Chr.) zurückgehende Kettendivision dar, die zur Ermittlung des grössten gemeinsamen Teilers verwendet wird. Allerdings fand Donald Knuth bereits auf babylonischen Tontafeln aus dem 2. Jahrtausend vor Christus Anleitungen, die er als Algorithmen im modernen Sinne bezeichnete.

Um das Jahr 1000 hatte ein strebsamer Mönch die Idee, man könnte mathematische Probleme dergestalt formalisieren, dass man sie anschliessend nach festen Regeln mechanisch abarbeiten könnte. Die Ursache für diese Idee lag wahrscheinlich bei einem Studienaufenthalt in Spanien, wo der spätere Papst Sylvester II. mit dem arabischen Zahlensystem in Kontakt gekommen ist. Mit den arabischen Ziffern und der Stellenschreibweise gelang es, feste Regeln für die vier Grundrechenarten auf der Grundlage des Einmaleins aufzustellen, sogenannte Algorithmen. Wer also das kleine Einmaleins beherrschte, konnte ohne zu zählen rechnen. Es scheint allerdings, dass die Welt wenig Verständnis für die innovativen Ideen ihres Papstes hatte, die er aus arabischen, sprich islamischen Quellen schöpfte. Sylvester geriet in den Ruf, ein Magier zu sein, der mit dem Teufel im Bunde stand: 1648 liessen die päpstlichen Behörden sogar sein Grab öffnen, um zu prüfen, ob es von Teufeln bewohnt sei.

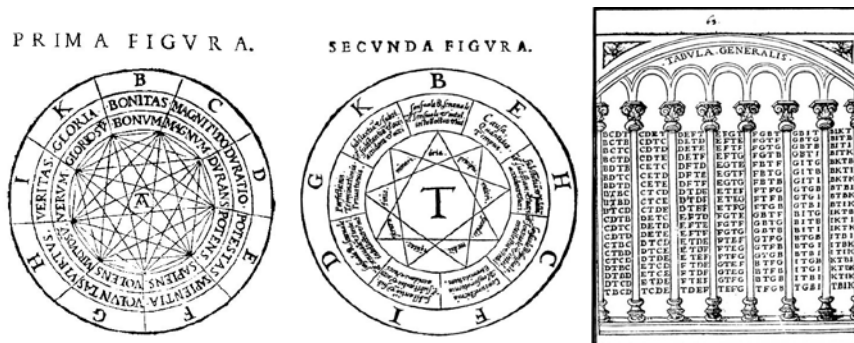


Der Pakt Silvesters mit dem Teufel

Der Begriff des Algorithmus geht auf den usbekischen Astronomen und Mathematiker Ibn Musa Al-Chwarizmi (ca. 780–850) zurück, der um 820 zwei Bücher schrieb: Eines mit dem Titel «Al-jabr w'al muqabala», was so viel bedeutet wie «ausgleichen und wiederherstellen». Darin gab er allgemeine Lösungswege für sechs Gleichungstypen an, mit denen sich alle linearen und quadratischen Gleichungen bewältigen lassen, allerdings noch ohne dazu Symbole zu verwenden. Das andere Buch befasste

sich mit der Verwendung der indischen Zahlzeichen und der Zahl Null. Auf der langen Reise von Bagdad, wo Chwarizmi wirkte, nach Europa, wo seine Bücher ins Latein übertragen wurden, entstand aus dem Titel des ersten Buches der Begriff *Algebra*, und aus der im zweiten Buch häufig verwendeten Wendung «dixit Algorizmi» wurde der Begriff *Algorithmus*.

Vor allem in Zeiten von Glaubenskämpfen übte die Logik eine besondere Anziehungskraft auf die Menschen aus, verhiess sie doch die Möglichkeit der Verständigung auf der Basis vernünftiger Kalkulation über ideologische Differenzen hinweg. Bereits im Spanien des 13. Jahrhundert hatte Raimundus Lullus (1232–1316) davon geträumt, mittels einer logischen Maschine die Wiedervereinigung von Christentum, Islam und Judentum bewerkstelligen zu können.



Logische Maschine von Raimundus Lullus

Anknüpfend an Lullus erhoffte sich Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) nach dem Ende des Dreissigjährigen Krieges von der Logik und der Formalisierung der Sprache, einer *characteristica universalis*, Frieden und die Wiedervereinigung der Konfessionen in Deutschland: «Es wird dann beim Auftreten von Streitfragen für zwei Philosophen nicht mehr Aufwand an wissenschaftlichem Gespräch erforderlich sein als für zwei Rechnerfachleute. Es wird genügen, Schreibzeug zu Hand zu nehmen, sich vor das Rechengerät zu setzen und zueinander (wenn es gefällt, in freundschaftlichem Ton) zu sagen: Lasst uns rechnen.» Die konfessionelle Aussöhnung kam trotz Leibniz' Idee nicht zustande, vielleicht weil es vorerst nicht gelang, die Sprache genügend zu formalisieren.

Neben der Idee der Codierung von formalen Denkprozessen zur Problemlösung, hatte Leibniz auch schon den Gedanken, zwecks Vereinfachung das binäre System zur Codierung zu benützen. Dieser Ansatz wurde erst im 19. Jahrhundert von George Boole (1815–1864) wieder aufgenommen. In seiner 1847 veröffentlichten Schrift «The Mathematical Analysis of Logic» beschrieb er das Binärsystem und behauptete, die Logik gehöre zur Mathematik, nicht zur Philosophie. 1854 schliesslich zeigte er in seinem Hauptwerk «An Investigation into the Laws of Thought», wie man alle sprachlichen Verknüpfungen von Urteilen, die Bauelemente *Konjunktion* (and), *Disjunktion* (or) und *Negation* (not), auf Binärzahlen zurückführen kann. Damit begründete er die nach ihm benannte *Boolsche Algebra* und legte den Grundstein für den Bau moderner Computer, obwohl vorerst niemand den Nutzen seiner Forschungen einsah.

Aber nicht nur die Sprache galt es, mittels der Logik präziser zu fassen, auch die Mathematik selber geriet Ende des 19. Jahrhunderts in den Blick der Logiker. Ihr Ziel war es, das Gebäude der Mathematik in strenger Logik neu zu errichten. Bis anhin war die Mathematik vorwiegend durch physikalische Beobachtungen vorangetrieben worden, aber nun begann man, die Zahlen unabhängig von ihrer pythagoreischen Bedeutung als reine Variablen zu betrachten. Diese zunehmende Abstraktion liess neue Fragen zu, beispielsweise die nach der Richtigkeit der *Euklidschen Axiome*. 1899 gelang es dem Göttinger Mathematiker David Hilbert (1862–1943), die Frage positiv zu beantworten. Angespornt von diesem Erfolg postulierte er 1900 auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Paris eine Liste von zu lösenden Problemen der Mathematik. Hilberts Motto lautete: «Wir müssen wissen.

Wir werden wissen». Mit seinem Programm wollte er die ganze Mathematik von den grundlegenden Axiomen her beweisen. Danach sollte es möglich sein, bei jeder Aussage algorithmisch zu entscheiden, ob sie richtig oder falsch sei.

Doch Hilberts Unternehmen, die Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Mathematik zu beweisen, erlitt nach einigen Anfangserfolgen, einen herben Rückschlag, als Bertrand Russell (1872 – 1970) seinen Kollegen Gottlob Frege (1848–1925), der im Gegensatz zu Boole die Meinung vertrat, dass die Mathematik ein Teil der Logik sei, kurz vor Drucklegung seines Hauptwerkes «Grundgesetze der Arithmetik» auf einen Widerspruch hinwies, der nicht ohne weiteres zu beseitigen war. Russell schrieb Frege, er solle seinen Blick auf die Menge aller Mengen richten, die sich nicht selbst enthalten. Und Frege sah sofort, dass hier ein fatales Paradox auftauchte.

Zwar machten sich Russell und Whitehead (1861–1947) an den Versuch, dennoch ein widerspruchsfreies Fundament der Mathematik zu errichten, und Hilbert war bei seiner Emeritierung 1930 noch zuversichtlich, dass sich sein Traum von der konsistenten Logik bald erfüllen werde. Aber bereits im folgenden Jahr erhielt Hilberts Programm den Todesstoss durch den Satz: «Alles, was ich sage, ist gelogen.» Dieser Satz stammte von Kurt Gödel (1906–1978) und bewies, dass es unentscheidbare Aussagen gibt.

Eine Weile blieb noch die Hoffnung, dass wenigstens ein systematisches Verfahren existiere, welches bestimmt, ob eine Aussage innerhalb eines Systems beweisbar ist oder nicht. Aber 1936 war auch diese Hoffnung dahin. In seinem Aufsatz «on computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem» bewies der englische Mathematiker Alan Turing (1912–1954) mittels eines einfachen Maschinenmodells, der sogenannten Turing-Maschine, dass die Grenzen der Berechenbarkeit formal nicht zu erfassen waren. Alan Turings Ansatz ist für die Informatik von besonderer Bedeutung, weil er weder auf Logik noch Arithmetik zurückgreift, sondern das Rechnen auf einen maschinellen Vorgang reduziert. Damit war die Hoffnung zerstört, man könne mit einer Maschine die Wahrheit finden, und der Beweis dafür, dass dies unmöglich war, wurde ausgerechnet mittels einer Maschine erbracht.

Literatur

Coy, Wolfgang (1993): Reduziertes Denken. In: Schefe, Peter; Hastedt, Heiner; Dittrich, Yvonne e.a. (1993): Informatik und Philosophie. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag

Dalakov, Georgi (2013): <http://history-computer.com/Dreamers/Llull.html> (26.4.2013)

Ernst, Hartmut (2000): Grundlagen und Konzepte der Informatik. Braunschweig: Vieweg

Ganzhorn, Karl/Walter, Wolfgang (1975): Die geschichtliche Entwicklung der Datenverarbeitung. Stuttgart: IBM

Hoffmann, Dirk. W. (2009): Theoretische Informatik. München: Hanser

http://de.wikipedia.org/wiki/Silvester_II. (25.8.2011)

Ifrah, Georges (1992): Die Zahlen. Frankfurt: Campus

Knuth, Donald (1972): Ancient Babylonian Algorithms. In: Communications of the Association for Computing Machinery 15/7

Leibniz, De scientia universali seu calculo philosophico. Zit. nach: Naumann, Friedrich (2001): Vom Abakus zum Internet. Die Geschichte der Informatik. Darmstadt: WBG

Naumann, Friedrich (2001): Vom Abakus zum Internet. Die Geschichte der Informatik. Darmstadt: WBG, S. 247