高中数学常用公式及常用结论

1．元素与集合的关系

$x\in A\Leftrightarrow x\notin C_UA$，$x\in C_UA\Leftrightarrow x\notin A$．

2. 德摩根公式

$C_U(A\cap B)=C_UA\cup C_UB;C_U(A\cup B)=C_UA\cap C_UB$．

3. 包含关系

$A\cap B=A\Leftrightarrow A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B\Leftrightarrow C_UB\subseteq C_UA\Leftrightarrow A\cap C_UB=\Phi\Leftrightarrow C_UA\cup B=R$

4. 容斥原理

$card(A\cup B)=cardA+cardB-card(A\cap B)$

$card(A\cup B\cup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\cap B)-card(A\cap B)-card(B\cap C)-card(C\cap A)+card(A\cap B\cap C)$．

5．集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$的子集个数共有2^n 个；真子集有2^n－1 个；非空子集有2^n －1 个；非空的真子集有2^n 2 个.

6. 二次函数的解析式的三种形式

(1) 一般式 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$；

(2) 顶点式 $f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$；

(3) 零点式 $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$．

7. 解连不等式$N<f(x)<M$常有以下转化形式

$N<f(x)<M\Leftrightarrow[f(x)-M][f(x)-N]<0$

$\Leftrightarrow|f(x)-\frac{M+N}{2}|<\frac{M-N}{2}\Leftrightarrow\frac{f(x)-N}{M-f(x)}>0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{f(x)-N}>\frac{1}{M-N}$．

8. 方程 $f(x)=0$在(k_1,k_2)上有且只有一个实根，与 $f(k_1)f(k_2)<0$不等价，前者是后者的一个必要而不是充分条件．特别地，方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有且只有一个实根在(k_1,k_2)内，等价于 $f(k_1)f(k_2)<0$，或 $f(k_1)=0$且$k_1<-\frac{b}{2a}<\frac{k_1+k_2}{2}$，或 $f(k_2)=0$且$\frac{k_1+k_2}{2}<-\frac{b}{2a}<k_2$．

9. 闭区间上的二次函数的最值

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$在闭区间$[p,q]$上的最值只能在$x=-\frac{b}{2a}$处及区间的两端点处取得，具体如下：

(1) 当 a>0时，若$x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则$f(x)_{\min}=f(-\frac{b}{2a}),f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$；

$x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，$f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$．

– 当 a<0 时，若 $x=-\frac{b}{2a}\in[p,q]$，则 $f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$，若 $x=-\frac{b}{2a}\notin[p,q]$，则 $f(x)_{\max}=\max\{f(p),f(q)\}$，$f(x)_{\min}=\min\{f(p),f(q)\}$．

10. 一元二次方程的实根分布

依据：若 $f(m)f(n)<0$，则方程 $f(x)=0$在区间(m,n)内至少有一个实根．设$f(x)=x_2+px+q$，则

（1）方程 $f(x)=0$在区间$(m,+\infty)$内有根的充要条件为$f(m)=0$或$\begin{cases}p^2-4q\geq 0\\ -\frac{p}{2}>m\end{cases}$；（2）方程 $f(x)=0$在区间(m,n)内有根的充要条件为$f(m)f(n)<0$或$\begin{cases}f(m)>0\\ f(n)>0\\ p^2-4q\geq 0\\ m<-\frac{p}{2}<n\end{cases}$或$\begin{cases}f(m)=0\\ af(n)>0\end{cases}$或$\begin{cases}f(n)=0\\ af(m)>0\end{cases}$；

（3）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(-\infty,n)$ 内有根的充要条件为 $f(m)<0$ 或 $\begin{cases} p^2-4q\geq 0 \\ \frac{p}{2}<m \end{cases}$

11. 定区间上含参数的二次不等式恒成立的条件依据

(1) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间 L（形如 $[\alpha,\beta]$，$(-\infty,\beta]$，$[\alpha,+\infty)$ 不同）上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geq 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{\min}\geq 0(x\notin L)$。

(2) 在给定区间 $(-\infty,+\infty)$ 的子区间上含参数的二次不等式 $f(x,t)\geq 0$（t 为参数）恒成立的充要条件是 $f(x,t)_{man}\leq 0(x\notin L)$。

– $f(x)=ax^4+bx^2+c>0$ 恒成立的充要条件是 $\begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \\ c>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases}$。

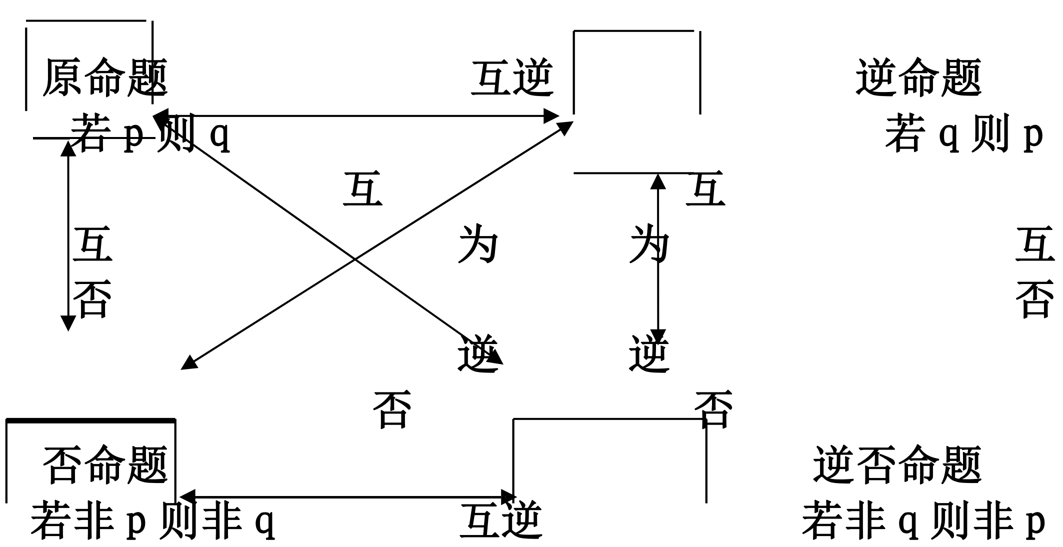
12. 真值表

p	q	非p	p或q	p且q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

13. 常见结论的否定形式

原结论	反设	原结论	反设词
是	不是	至少有一个	一个也没有
都是	不都是	至多有一个	至少有两个
大于	不大于	至少有 n 个	至多有 $(n-1)$ 个
小于	不小于	至多有 n 个	至少有 $(n+1)$ 个
对所有 x	存在某 x，	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
对任何 x，	存在某 x	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

14. 四种命题的相互关系



15. 充要条件

（1）充分条件：若 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 充分条件.

（2）必要条件：若 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 必要条件.

（3）充要条件：若 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 充要条件.

注：如果甲是乙的充分条件，则乙是甲的必要条件；反之亦然.

16. 函数的单调性

(1) 设 $x_1\cdot x_2\in[a,b], x_1\neq x_2$ 那么

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是增函数；

$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$在$[a,b]$上是减函数.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在某个区间内可导，如果 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数；如果 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数.

17. 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是减函数，则在公共定义域内，和函数 $f(x)+g(x)$ 也是减函数；如果函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 在其对应的定义域上都是减函数，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 是增函数.

18. 奇偶函数的图象特征

奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称；反过来，如果一个函数的图象关于原点对称，那么这个函数是奇函数；如果一个函数的图象关于 y 轴对称，那么这个函数是偶函数.

19. 若函数 $y=f(x)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x-a)$；若函数 $y=f(x+a)$ 是偶函数，则 $f(x+a)=f(-x+a)$.

20. 对于函数 $y=f(x)$（$x\in R$），$f(x+a)=f(b-x)$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的对称轴是函数 $x=\dfrac{a+b}{2}$；两个函数 $y=f(x+a)$ 与 $y=f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称.

21. 若 $f(x)=-f(-x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(\dfrac{a}{2},0)$ 对称；若 $f(x)=-f(x+a)$，则函数 $y=f(x)$ 为周期为 $2a$ 的周期函数.

22. 多项式函数 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的奇偶性

多项式函数 $P(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow P(x)$ 的偶次项(即奇数项)的系数全为零.

多项式函数 $P(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow P(x)$ 的奇次项(即偶数项)的系数全为零.

23. 函数 $y=f(x)$ 的图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$ $\Leftrightarrow f(2a-x)=f(x)$.

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+mx)=f(b-mx)$ $\Leftrightarrow f(a+b-mx)=f(mx)$.

24. 两个函数图象的对称性

(1) 函数 $y=f(x)$ 与函数 $y=f(-x)$ 的图象关于直线 $x=0$ (即 y 轴)对称.

(2) 函数 $y=f(mx-a)$ 与函数 $y=f(b-mx)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2m}$ 对称.

(3) 函数 $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 y=x 对称.

25. 若将函数 $y=f(x)$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到函数 $y=f(x-a)+b$ 的图象；若将曲线 $f(x,y)=0$ 的图象右移 a、上移 b 个单位，得到曲线 $f(x-a,y-b)=0$ 的图象.

26. 互为反函数的两个函数的关系

$f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$.

27. 若函数 $y=f(kx+b)$ 存在反函数，则其反函数为 $y=\dfrac{1}{k}[f^{-1}(x)-b]$，并不是 $y=[f^{-1}(kx+b)$，而函数 $y=[f^{-1}(kx+b)$ 是 $y=\dfrac{1}{k}[f(x)-b]$ 的反函数.

28. 几个常见的函数方程

(1) 正比例函数 $f(x)=cx$，$f(x+y)=f(x)+f(y), f(1)=c$.

(2) 指数函数 $f(x)=a^x$，$f(x+y)=f(x)f(y), f(1)=a\neq 0$.

(3) 对数函数 $f(x)=\log_a x$，$f(xy)=f(x)+f(y), f(a)=1(a>0, a\neq 1)$.

(4) 幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$，$f(xy)=f(x)f(y), f'(1)=\alpha$.

(5) 余弦函数 $f(x)=\cos x$，正弦函数 $g(x)=\sin x$，$f(x-y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$，

$f(0)=1,\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=1$.

29.几个函数方程的周期(约定a>0)

（1） $f(x)=f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=a；

（2） $f(x)=f(x+a)=0$，

或 $f(x+a)=\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$，

或 $f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}(f(x)\neq 0)$,

或 $\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}=f(x+a),(f(x)\in[0,1])$，则 $f(x)$ 的周期 T=2a；

(3) $f(x)=1-\frac{1}{f(x+a)}(f(x)\neq 0)$，则 $f(x)$ 的周期 T=3a；

– $f(x_1+x_2)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{1-f(x_1)f(x_2)}$ 且 $f(a)=1(f(x_1)\cdot f(x_2)\neq 1,0<|x_1-x_2|<2a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=4a；

(5) $f(x)+f(x+a)+f(x+2a)f(x+3a)+f(x+4a)$

$=f(x)f(x+a)f(x+2a)f(x+3a)f(x+4a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=5a；

(6) $f(x+a)=f(x)-f(x+a)$，则 $f(x)$ 的周期 T=6a.

30.分数指数幂

(1) $a^{\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$（$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

(2) $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$（$a>0,m,n\in N^*$，且 $n>1$）.

31．根式的性质

（1） $(\sqrt[n]{a})^n=a$.

（2）当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0\\ -a, & a<0\end{cases}$

32．有理指数幂的运算性质

(1) $a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in Q)$.

(2) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in Q)$.

(3) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in Q)$.

注： 若 a>0，p 是一个无理数，则 a^p 表示一个确定的实数．上述有理指数幂的运算性质，对于无理数指数幂都适用.

33.指数式与对数式的互化式

$\log_a N=b\Leftrightarrow a^b=N\ (a>0,a\neq 1,N>0)$.

34.对数的换底公式

$\log_a N=\frac{\log_m N}{\log_m a}$（$a>0$，且 $a\neq 1$，$m>0$，且 $m\neq 1$，$N>0$）.

推论 $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$（$a>0$，且 $a>1$，$m,n>0$，且 $m\neq 1$，$n\neq 1$，$N>0$）.

35．对数的四则运算法则

若 a>0，a≠1，M>0，N>0，则

（1） $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

（2） $\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(3) $\log_a M^n=n\log_a M(n\in R)$.

36.设函数 $f(x)=\log_m(ax^2+bx+c)(a\neq 0)$，记 $\Delta=b^2-4ac$．若 $f(x)$ 的定义域为 R，则 $a>0$，且 $\Delta<0$；若 $f(x)$ 的值域为 R，则 $a>0$，且 $\Delta\geq 0$．对于 $a=0$ 的情形，需要单独检验.

(1) 对数换底不等式及其推广

若 $a>0$，$b>0$，$x>0$，$x\neq\frac{1}{a}$，则函数 $y=\log_{ax}(bx)$

(1)当 $a>b$ 时，在 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $y=\log_{ax}(bx)$ 为增函数.

(2)当 $a<b$ 时，在 $(0,\frac{1}{a})$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上 $y=\log_{ax}(bx)$ 为减函数.

推论：设 $n>m>1$，$p>0$，$a>0$，且 $a\neq 1$，则

(1) $\log_{m+p}(n+p)<\log_m n$.

(2) $\log_a m \log_a n < \log_a^2 \frac{m+n}{2}$.

(2) 平均增长率的问题

如果原来产值的基础数为N，平均增长率为p，则对于时间x的总产值y，有$y=N(1+p)^x$.

39.数列的同项公式与前n项的和的关系

$a_n=\begin{cases} s_1, & n=1 \\ s_n-s_{n-1}, & n\geq 2 \end{cases}$（数列$\{a_n\}$的前n项的和为$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$).

40.等差数列的通项公式

$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d\,(n\in N^*)$；

其前n项和公式为

$s_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{1}{2}d)n$.

41.等比数列的通项公式

$a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\cdot q^n\,(n\in N^*)$；

其前n项的和公式为

$s_n=\begin{cases} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & q\neq 1 \\ na_1, & q=1 \end{cases}$

或$s_n=\begin{cases} \frac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1 \\ na_1, & q=1 \end{cases}$.

42.等比差数列$\{a_n\}$：$a_{n+1}=qa_n+d,a_1=b(q\neq 0)$的通项公式为

$a_n=\begin{cases} b+(n-1)d, & q=1 \\ \frac{bq^n+(d-b)q^{n-1}-d}{q-1}, & q\neq 1 \end{cases}$；

其前n项和公式为

$s_n=\begin{cases} nb+n(n-1)d, & (q=1) \\ (b-\frac{d}{1-q})\frac{1-q^n}{q-1}+\frac{d}{1-q}n, & (q\neq 1) \end{cases}$.

43.分期付款(按揭贷款)

每次还款$x=\frac{ab(1+b)^n}{(1+b)^n-1}$元(贷款$a$元,$n$次还清,每期利率为$b$).

44. 常见三角不等式

（1）若$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$\sin x<x<\tan x$.

– 若$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$1<\sin x+\cos x\leq\sqrt{2}$.

– $|\sin x|+|\cos x|\geq 1$.

45.同角三角函数的基本关系式

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\tan\theta\cdot\cot\theta=1$.

46.正弦、余弦的诱导公式（奇变偶不变，符号看象限）

$\sin(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin\alpha, & \text{(n 为偶数)} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\alpha, & \text{(n 为奇数)} \end{cases}$

$\cos(\frac{n\pi}{2}+\alpha)=\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\cos\alpha, & \text{(n 为偶数)} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin\alpha, & \text{(n 为奇数)} \end{cases}$

47.和角与差角公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$;

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$.

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$(平方正弦公式)；

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=$ $\sin(\alpha+\varphi)$(辅助角φ所在象限由点(a,b)的象限决定，$\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$).

48.二倍角公式

$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$.

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

49. 三倍角公式

$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\sin(\dfrac{\pi}{3}-\theta)\sin(\dfrac{\pi}{3}+\theta)$.

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos\theta\cos(\dfrac{\pi}{3}-\theta)\cos(\dfrac{\pi}{3}+\theta)$. $\tan 3\theta=\dfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\tan\theta\tan(\dfrac{\pi}{3}-\theta)\tan(\dfrac{\pi}{3}+\theta)$.

50.三角函数的周期公式

函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$，x∈R及函数$y=\cos(\omega x+\varphi)$，x∈R(A，ω，φ为常数，且A≠0，ω>0)的周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$；函数$y=\tan(\omega x+\varphi)$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$(A，ω，$\varphi$为常数，且A≠0，ω>0)的周期$T=\dfrac{\pi}{\omega}$.

51.正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

52.余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

53.面积定理

+ $S=\dfrac{1}{2}ah_a=\dfrac{1}{2}bh_b=\dfrac{1}{2}ch_c$（$h_a$、$h_b$、$h_c$分别表示a、b、c边上的高）.
+ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$.

(3) $S_{\triangle OAB}=$.

54.三角形内角和定理

在△ABC中，有$A+B+C=\pi\Leftrightarrow C=\pi-(A+B)$

$\Leftrightarrow\dfrac{C}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A+B}{2}\Leftrightarrow 2C=2\pi-2(A+B)$.

- 简单的三角方程的通解

$\sin x=a\Leftrightarrow x=k\pi+(-1)^k\arcsin a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\cos x=a\Leftrightarrow x=2k\pi\pm\arccos a(k\in Z,|a|\le 1)$.

$\tan x=a\Rightarrow x=k\pi+\arctan a(k\in Z,a\in R)$.

特别地,有

$\sin\alpha=\sin\beta\Leftrightarrow\alpha=k\pi+(-1)^k\beta(k\in Z)$.

$\cos\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\alpha=2k\pi\pm\beta(k\in Z)$.

$\tan\alpha=\tan\beta\Rightarrow\alpha=k\pi+\beta(k\in Z)$.

56.最简单的三角不等式及其解集

$\sin x>a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arcsin a,2k\pi+\pi-\arcsin a),k\in Z$.

$\sin x<a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi-\pi-\arcsin a,2k\pi+\arcsin a),k\in Z$.

$\cos x>a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi-\arccos a,2k\pi+\arccos a),k\in Z$.

$\cos x<a(|a|\le 1)\Leftrightarrow x\in(2k\pi+\arccos a,2k\pi+2\pi-\arccos a),k\in Z$.

$\tan x>a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi+\arctan a,k\pi+\dfrac{\pi}{2}),k\in Z$.

$\tan x<a(a\in R)\Rightarrow x\in(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\arctan a),k\in Z$.

57.实数与向量的积的运算律

设λ、μ为实数，那么

- 结合律：λ(μa)=(λμ)a;

(2)第一分配律：(λ+μ)a=λa+μa;

(3)第二分配律：λ(a+b)=λa+λb.

58.向量的数量积的运算律：

– a•b= b•a（交换律）;

(2)（λa）•b= λ（a•b）=λa•b= a•（λb）; (3)（a+b）•c= a•c +b•c.

59.平面向量基本定理

如果e_1、e_2是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任一向量，有且只有一对实数λ_1、λ_2，使得a=$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$.

不共线的向量e_1、e_2叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

60. 向量平行的坐标表示

设a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2)，且b≠0，则a∥b(b≠0)$\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

53. a与b的数量积(或内积)

a•b=|a||b|cosθ.

61. a•b的几何意义

数量积a•b等于a的长度|a|与b在a的方向上的投影|b|cosθ的乘积.

62.平面向量的坐标运算

(1)设a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2)，则a+b=(x_1+x_2,y_1+y_2).

(2)设a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2)，则a-b=(x_1-x_2,y_1-y_2).

(3)设A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2),则$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

(4)设a=$(x,y),\lambda\in R$，则λa=$(\lambda x,\lambda y)$.

(5)设a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2)，则a•b=$(x_1x_2+y_1y_2)$.

63.两向量的夹角公式

$\cos\theta=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\quad}$ (a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2)).

64.平面两点间的距离公式

$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=$

$=\sqrt{\quad}$ (A(x_1,y_1)，B(x_2,y_2)).

65.向量的平行与垂直

设a=(x_1,y_1),b=(x_2,y_2)，且b≠0，则

A||b⇔b=λa $\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

a⊥b(a≠0)⇔a•b=0$\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

66.线段的定比分公式

设$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$是线段P_1P_2的分点,λ是实数，且$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OP_1}+(1-t)\overrightarrow{OP_2}$ （$t=\dfrac{1}{1+\lambda}$）.

67.三角形的重心坐标公式

△ABC三个顶点的坐标分别为$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$,则△ABC的重心的坐标是$G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

68.点的平移公式

$$\begin{cases} x'=x+h \\ y'=y+k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x'-h \\ y=y'-k \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PP'}.$$

注:图形F上的任意一点P(x，y)在平移后图形F'上的对应点为$P'(x',y')$，且$\overrightarrow{PP'}$的坐标为(h,k).

69.“按向量平移”的几个结论

（1）点$P(x,y)$按向量a=(h,k)平移后得到点$P'(x+h,y+k)$.

– 函数$y=f(x)$的图象C按向量a=(h,k)平移后得到图象C',则C'的函数解析式为$y=f(x-h)+k$.

– 图象C'按向量a=(h,k)平移后得到图象C，若C的解析式$y=f(x)$，则C'的函数解析式为$y=f(x+h)-k$.

(4)曲线C：$f(x,y)=0$按向量a=(h,k)平移后得到图象C'，则C'的方程为$f(x-h,y-k)=0$.

(5) 向量m=(x,y)按向量a=(h,k)平移后得到的向量仍然为m=(x,y).

70. 三角形五“心”向量形式的充要条件

设O为ΔABC所在平面上一点，角A,B,C所对边长分别为a,b,c，则

（1）O为ΔABC的外心$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$.

（2）O为ΔABC的重心$\Leftrightarrow OA+OB+OC=0$.

（3）O为ΔABC的垂心$\Leftrightarrow OA\cdot OB=OB\cdot OC=OC\cdot OA$.

（4）O为ΔABC的内心$\Leftrightarrow aOA+bOB+cOC=0$.

（5）O为ΔABC的$\angle A$的旁心$\Leftrightarrow aOA=bOB+cOC$.

71.常用不等式：

54. $a,b\in R\Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab$（当且仅当a＝b时取“=”号）.

55. $a,b\in R^+\Rightarrow \frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$（当且仅当a＝b时取“=”号）.

（3）$a^3+b^3+c^3\ge 3abc(a>0,b>0,c>0)$.

（4）柯西不等式

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2,\ a,b,c,d\in R.$

– $|a|-|b|\le|a+b|\le|a|+|b|$.

72.极值定理

已知x,y都是正数，则有

（1）若积xy是定值p，则当$x=y$时和$x+y$有最小值$2\sqrt{p}$；

（2）若和$x+y$是定值s，则当$x=y$时积xy有最大值$\frac{1}{4}s^2$.

推广 已知$x,y\in R$，则有$(x+y)^2=(x-y)^2+2xy$

（1）若积xy是定值,则当$|x-y|$最大时,$|x+y|$最大；

当$|x-y|$最小时,$|x+y|$最小.

（2）若和$|x+y|$是定值,则当$|x-y|$最大时,$|xy|$最小；

当$|x-y|$最小时，$|xy|$最大.

73.一元二次不等式$ax^2+bx+c>0(或<0)$ $(a\ne 0,\Delta=b^2-4ac>0)$，如果$a$与$ax^2+bx+c$同号，则其解集在两根之外；如果$a$与$ax^2+bx+c$异号，则其解集在两根之间.简言之：同号两根之外，异号两根之间.

$x_1<x<x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)<0(x_1<x_2)$；

$x<x_1,或x>x_2\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)>0(x_1<x_2)$.

74.含有绝对值的不等式

当a> 0时，有

$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a$.

$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a$或 $x<-a$.

75.无理不等式

（1）$\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$.

（2）$\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ f(x)>[g(x)]^2\end{cases}$或$\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)<0\end{cases}$.

（3）$\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)>0\\ f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$.

76.指数不等式与对数不等式

(1)当$a>1$时,

$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$；

$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$.

(2)当$0<a<1$时,

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$；

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$

77.斜率公式

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$（$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$）.

78.直线的五种方程

（1）点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$ （直线l过点$P_1(x_1,y_1)$，且斜率为k）.

（2）斜截式 $y=kx+b$ (b 为直线l在 y 轴上的截距).

（3）两点式 $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$（$y_1\neq y_2$）($P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$ （$x_1\neq x_2$）).

(4)截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$($a$、$b$分别为直线的横、纵截距，$a$、$b\neq 0$）

（5）一般式 $Ax+By+C=0$(其中A、B 不同时为 0).

79.两条直线的平行和垂直

(1)若$l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$

①$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1=k_2, b_1\neq b_2$;

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$.

(2)若$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，且 A_1、A_2、B_1、B_2都不为零，

① $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$；

②$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0$；

80.夹角公式

37. $\tan\alpha=|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}|$.

($l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$)

(2) $\tan\alpha=|\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}|$.

($l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线$l_1\perp l_2$时，直线 l_1与 l_2的夹角是$\frac{\pi}{2}$.

81. l_1到l_2的角公式

\+ $\tan\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$.

($l_1: y=k_1x+b_1$，$l_2: y=k_2x+b_2$，$k_1k_2\neq -1$)

(2) $\tan\alpha=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$.

($l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$，$A_1A_2+B_1B_2\neq 0$).

直线$l_1\perp l_2$时，直线 l_1到 l_2的角是$\frac{\pi}{2}$.

82．四种常用直线系方程

(1)定点直线系方程：经过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程为$y-y_0=k(x-x_0)$(除直线$x=x_0$),其中k是待定的系数；经过定点$P_0(x_0,y_0)$的直线系方程为$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$,其中A,B是待定的系数.

\+ 共点直线系方程：经过两直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线系方程为$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$(除$l_2$)，其中λ是待定的系数.

(3)平行直线系方程：直线$y=kx+b$中当斜率 k 一定而 b 变动时，表示平行直线系方程．与直线$Ax+By+C=0$平行的直线系方程是$Ax+By+\lambda=0$ ($\lambda\neq 0$)，λ是参变量.

(4)垂直直线系方程：与直线$Ax+By+C=0$ (A≠0，B≠0)垂直的直线系方程是$Bx-Ay+\lambda=0$，λ是参变量.

83.点到直线的距离

$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$(点$P(x_0,y_0)$,直线$l$： $Ax+By+C=0$).

$Ax+By+C>0$或<0所表示的平面区域

设直线$l: Ax+By+C=0$，则$Ax+By+C>0$或<0所表示的平面区域是：

若$B\neq 0$，当B与$Ax+By+C$同号时，表示直线l的上方的区域；当B与$Ax+By+C$异号时，表示直线l的下方的区

域.简言之,同号在上,异号在下.

若$B=0$，当 A 与 $Ax+By+C$ 同号时，表示直线l 的右方的区域；当 A 与 $Ax+By+C$ 异号时，表示直线l 的左方的区域. 简言之,同号在右,异号在左.

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$或$<0$所表示的平面区域

设曲线$C:(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)=0$ （$A_1A_2B_1B_2\neq 0$），则

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$或$<0$所表示的平面区域是：

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0$所表示的平面区域上下两部分；

$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)<0$所表示的平面区域上下两部分.

圆的四种方程

（1）圆的标准方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

（2）圆的一般方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$（$D^2+E^2-4F>0$）.

（3）圆的参数方程 $\begin{cases}x=a+r\cos\theta\\ y=b+r\sin\theta\end{cases}$

（4）圆的直径式方程 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$(圆的直径的端点是$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$).

圆系方程

(1)过点$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$的圆系方程是

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda[(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)]=0$

$\Leftrightarrow(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+\lambda(ax+by+c)=0$,其中$ax+by+c=0$是直线$AB$的方程,λ是待定的系数.

(2)过直线l：$Ax+By+C=0$与圆C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$，λ是待定的系数.

过圆 C_1：$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 C_2：$x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 的交点的圆系方程是 $x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$，λ是待定的系数.

88.点与圆的位置关系

点$P(x_0,y_0)$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系有三种

若$d=$ ______，则

$d>r\Leftrightarrow$点P在圆外;$d=r\Leftrightarrow$点P在圆上;$d<r\Leftrightarrow$点P在圆内.

89.直线与圆的位置关系

直线$Ax+By+C=0$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$的位置关系有三种:

$d>r\Leftrightarrow$相离 $\Leftrightarrow\Delta<0$；

$d=r\Leftrightarrow$相切 $\Leftrightarrow\Delta=0$；

$d<r\Leftrightarrow$相交 $\Leftrightarrow\Delta>0$.

其中$d=$ ______.

90.两圆位置关系的判定方法

设两圆圆心分别为O₁，O₂，半径分别为r₁，r₂，$|O_1O_2|=d$

$d>r_1+r_2\Leftrightarrow$外离 $\Leftrightarrow$4条公切线；

$d=r_1+r_2\Leftrightarrow$外切 $\Leftrightarrow$3条公切线；

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2\Leftrightarrow$相交 $\Leftrightarrow$2条公切线；

$d=|r_1-r_2|\Leftrightarrow$内切 $\Leftrightarrow$1条公切线；

$0<d<|r_1-r_2|\Leftrightarrow$内含 $\Leftrightarrow$无公切线.

91.圆的切线方程

(1)已知圆$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

①若已知切点(x_0,y_0)在圆上，则切线只有一条，其方程是

$x_0x+y_0y+\frac{D(x_0+x)}{2}+\frac{E(y_0+y)}{2}+F=0$.

当(x_0,y_0)圆外时，$x_0x+y_0y+\frac{D(x_0+x)}{2}+\frac{E(y_0+y)}{2}+F=0$表示过两个切点的切点弦方程.

②过圆外一点的切线方程可设为$y-y_0=k(x-x_0)$，再利用相切条件求k，这时必有两条切线，注意不要漏掉平行于y轴的切线.

③斜率为k的切线方程可设为$y=kx+b$，再利用相切条件求b，必有两条切线.

(2) 已知圆 $x^2+y^2=r^2$.

①过圆上的 $P_0(x_0,y_0)$ 点的切线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$;

②斜率为 k 的圆的切线方程为 $y=kx\pm r\sqrt{1+k^2}$.

92. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的参数方程是 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$.

93. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 焦半径公式

$|PF_1|=e(x+\frac{a^2}{c})$，$|PF_2|=e(\frac{a^2}{c}-x)$.

94. 椭圆的的内外部

（1）点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

（2）点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

95. 椭圆的切线方程

(1) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（2）过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（3）椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $A^2a^2+B^2b^2=c^2$.

96. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦半径公式

$|PF_1|=|e(x+\frac{a^2}{c})|$，$|PF_2|=|e(\frac{a^2}{c}-x)|$.

97. 双曲线的内外部

(1) 点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}>1$.

(2) 点 $P(x_0,y_0)$ 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}<1$.

98. 双曲线的方程与渐近线方程的关系

（1）若双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow$ 渐近线方程：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Leftrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x$.

(2) 若渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x\Leftrightarrow\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=0\Rightarrow$ 双曲线可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$.

(3) 若双曲线与 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有公共渐近线，可设为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda$（$\lambda>0$，焦点在 x 轴上，$\lambda<0$，焦点在 y 轴上）.

1. 双曲线的切线方程

(1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（2）过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.

（3）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $A^2a^2-B^2b^2=c^2$.

2. 抛物线 $y^2=2px$ 的焦半径公式

抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 焦半径 $|CF|=x_0+\frac{p}{2}$.

过焦点弦长 $|CD|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p$.

101. 抛物线 $y^2=2px$ 上的动点可设为 P$(\frac{y_\circ^2}{2p},y_\circ)$ 或 $P(2pt^2,2pt)$ 或 P$(x_\circ,y_\circ)$，其中 $y_\circ^2=2px_\circ$.

102. 二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}(a\neq0)$ 的图象是抛物线：（1）顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$；（2）焦点的坐标为 $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2+1}{4a})$；（3）准线方程是 $y=\frac{4ac-b^2-1}{4a}$.

103. 抛物线的内外部

(1) 点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的内部 $\Leftrightarrow y^2<2px(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的外部 $\Leftrightarrow y^2>2px(p>0)$.

(2)点 $P(x_0,y_0)$在抛物线 $y^2=-2px(p>0)$的内部 $\Leftrightarrow y^2<-2px(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$在抛物线 $y^2=-2px(p>0)$的外部 $\Leftrightarrow y^2>-2px(p>0)$.

(3)点 $P(x_0,y_0)$在抛物线 $x^2=2py(p>0)$的内部 $\Leftrightarrow x^2<2py(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$在抛物线 $x^2=2py(p>0)$的外部 $\Leftrightarrow x^2>2py(p>0)$.

+ 点 $P(x_0,y_0)$在抛物线 $x^2=2py(p>0)$的内部 $\Leftrightarrow x^2<2py(p>0)$.

点 $P(x_0,y_0)$在抛物线 $x^2=-2py(p>0)$的外部 $\Leftrightarrow x^2>-2py(p>0)$.

104. 抛物线的切线方程

(1)抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $P(x_0,y_0)$ 处的切线方程是 $y_0y=p(x+x_0)$.

（2）过抛物线 $y^2=2px$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 所引两条切线的切点弦方程是 $y_0y=p(x+x_0)$.

（3）抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 与直线 $Ax+By+C=0$ 相切的条件是 $pB^2=2AC$.

105. 两个常见的曲线系方程

(1)过曲线 $f_1(x,y)=0$，$f_2(x,y)=0$ 的交点的曲线系方程是

$f_1(x,y)+\lambda f_2(x,y)=0$（$\lambda$为参数）.

187. 共焦点的有心圆锥曲线系方程 $\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}=1$，其中 $k<\max\{a^2,b^2\}$. 当 $k>\min\{a^2,b^2\}$ 时，表示椭圆； 当 $\min\{a^2,b^2\}<k<\max\{a^2,b^2\}$ 时，表示双曲线.

106. 直线与圆锥曲线相交的弦长公式 $|AB|=$ 或 $|AB|=|x_1-x_2|\sqrt{1+\tan^2\alpha}=|y_1-y_2|\sqrt{1+\cot^2\alpha}$（弦端点 A $(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$），由方程 $\begin{cases}y=kx+b\\F(x,y)=0\end{cases}$ 消去 y 得到 $ax^2+bx+c=0$， $\Delta>0$，α为直线 AB 的倾斜角， k 为直线的斜率）.

107. 圆锥曲线的两类对称问题

（1）曲线 $F(x,y)=0$关于点 $P(x_0,y_0)$成中心对称的曲线是 $F(2x_0-x,2y_0-y)=0$.

（2）曲线 $F(x,y)=0$ 关于直线 $Ax+By+C=0$ 成轴对称的曲线是

$F(x-\frac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2},y-\frac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2})=0$.

108. “四线”一方程

对于一般的二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$，用 x_0x 代 x^2，用 y_0y 代 y^2，用 $\frac{x_0y+xy_0}{2}$ 代 xy，用 $\frac{x_0+x}{2}$ 代 x，用 $\frac{y_0+y}{2}$ 代 y 即得方程

$Ax_0x+B\cdot\frac{x_0y+xy_0}{2}+Cy_0y+D\cdot\frac{x_0+x}{2}+E\cdot\frac{y_0+y}{2}+F=0$，曲线的切线，切点弦，中点弦，弦中点方程均是此方程得到.

109. 证明直线与直线的平行的思考途径

（1）转化为判定共面二直线无交点；

（2）转化为二直线同与第三条直线平行；

（3）转化为线面平行；

（4）转化为线面垂直；

（5）转化为面面平行.

110. 证明直线与平面的平行的思考途径

（1）转化为直线与平面无公共点；

（2）转化为线线平行；

（3）转化为面面平行.

111. 证明平面与平面平行的思考途径

（1）转化为判定二平面无公共点；

（2）转化为线面平行；

（3）转化为线面垂直.

112. 证明直线与直线的垂直的思考途径

（1）转化为相交垂直；

（2）转化为线面垂直；

（3）转化为线与另一线的射影垂直；

（4）转化为线与形成射影的斜线垂直.

113. 证明直线与平面垂直的思考途径

（1）转化为该直线与平面内任一直线垂直；
（2）转化为该直线与平面内相交二直线垂直；
（3）转化为该直线与平面的一条垂线平行；
（4）转化为该直线垂直于另一个平行平面；
（5）转化为该直线与两个垂直平面的交线垂直.

114. 证明平面与平面的垂直的思考途径
（1）转化为判断二面角是直二面角；
（2）转化为线面垂直.

115.空间向量的加法与数乘向量运算的运算律
(1)加法交换律：a＋b=b＋a.
(2)加法结合律：(a＋b)＋c=a＋(b＋c).
(3)数乘分配律：λ(a＋b)=λa＋λb.

116.平面向量加法的平行四边形法则向空间的推广

始点相同且不在同一个平面内的三个向量之和，等于以这三个向量为棱的平行六面体的以公共始点为始点的对角线所表示的向量.

117.共线向量定理

对空间任意两个向量 a、b(b≠0)，a∥b⇔存在实数λ使 a=λb.

P、A、B 三点共线⇔ $AP \parallel AB \Leftrightarrow AP = tAB \Leftrightarrow OP = (1-t)OA + tOB$.

$AB \parallel CD \Leftrightarrow AB$、$CD$ 共线且 AB、CD 不共线⇔ $AB = tCD$ 且 AB、CD 不共线.

118.共面向量定理

向量 p 与两个不共线的向量 a、b 共面的⇔存在实数对 x, y，使 $p = ax + by$.

推论　空间一点P 位于平面 MAB 内的⇔存在有序实数对 x, y，使 $MP = xMA + yMB$，或对空间任一定点 O，有序实数对 x, y，使 $OP = OM + xMA + yMB$.

119.对空间任一点 O 和不共线的三点 A、B、C，满足 $OP = xOA + yOB + zOC$（$x + y + z = k$），则当 $k = 1$ 时，对于空间任一点 O，总有 P、A、B、C 四点共面；当 $k \neq 1$ 时，若 $O \in$ 平面 ABC，则 P、A、B、C 四点共面；若 $O \notin$ 平面 ABC，则 P、A、B、C 四点不共面.

A、B、C、D 四点共面⇔ AD 与 AB、AC 共面⇔ $AD = xAB + yAC \Leftrightarrow$
$OD = (1-x-y)OA + xOB + yOC$（$O \notin$ 平面 ABC）.

120.空间向量基本定理

如果三个向量 a、b、c 不共面，那么对空间任一向量 p，存在一个唯一的有序实数组 x，y，z，使 p＝xa＋yb＋zc.

推论　设 O、A、B、C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在唯一的三个有序实数 x，y，z，使 $OP = xOA + yOB + zOC$.

121.射影公式

已知向量 AB=a和轴 l，e 是 l 上与 l 同方向的单位向量.作 A 点在 l 上的射影 A'，作 B 点在 l 上的射影 B'，则

$A'B' = |AB|\cos$〈a，e〉=a·e

122.向量的直角坐标运算设

a＝(a_1, a_2, a_3)，b＝ (b_1, b_2, b_3) 则
(1) a＋b＝$(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$；
(2) a—b＝$(a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3)$；
(3) λa＝$(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$　　(λ∈R)；
(4) a·b＝$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$；

123.设 A(x_1, y_1, z_1)，B(x_2, y_2, z_2)，则

$AB = OB - OA$＝ $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

124. 空间的线线平行或垂直

设 $a = (x_1, y_1, z_1)$，$b = (x_2, y_2, z_2)$，则

$a \parallel b \Leftrightarrow a = \lambda b (b \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = \lambda y_2 \\ z_1 = \lambda z_2 \end{cases}$；

$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$.

125.夹角公式

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\cos\langle a, b\rangle=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

推论 $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\le(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$，此即三维柯西不等式.

126. 四面体的对棱所成的角

四面体 $ABCD$ 中，AC 与 BD 所成的角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|(AB^2+CD^2)-(BC^2+DA^2)|}{2AC\cdot BD}.$$

127. 异面直线所成角

$$\cos\theta=|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{|x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

（其中 θ（$0^\circ<\theta\le 90^\circ$）为异面直线 a,b 所成角，$\vec{a},\vec{b}$ 分别表示异面直线 a,b 的方向向量）

128. 直线 AB 与平面所成角

$\beta=\arcsin\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{m}|}$（$\vec{m}$ 为平面 α 的法向量）.

129. 若 $\triangle ABC$ 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A、B 为 $\triangle ABC$ 的两个内角，则

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=(\sin^2A+\sin^2B)\sin^2\theta.$$

特别地，当 $\angle ACB=90^\circ$ 时，有

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta.$$

130. 若 $\triangle ABC$ 所在平面若 β 与过若 AB 的平面 α 成的角 θ，另两边 AC，BC 与平面 α 成的角分别是 θ_1、θ_2，A'、B' 为 $\triangle ABO$ 的两个内角，则

$$\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2=(\sin^2A'+\sin^2B')\tan^2\theta.$$

特别地，当 $\angle AOB=90^\circ$ 时，有

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2=\sin^2\theta.$$

131. 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角

$\theta=\arccos\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$ 或 $\pi-\arccos\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$（$\vec{m}$，$\vec{n}$ 为平面 α，β 的法向量）.

132. 三余弦定理

设 AC 是 α 内的任一条直线，且 BC⊥AC，垂足为 C，又设 AO 与 AB 所成的角为 θ_1，AB 与 AC 所成的角为 θ_2，AO 与 AC 所成的角为 θ．则 $\cos\theta=\cos\theta_1\cos\theta_2$.

133. 三射线定理

若夹在平面角为 φ 的二面角间的线段与二面角的两个半平面所成的角是 θ_1，θ_2，与二面角的棱所成的角是 θ，则有 $\sin^2\varphi\sin^2\theta=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi$；

$|\theta_1-\theta_2|\le\varphi\le 180^\circ-(\theta_1+\theta_2)$（当且仅当 $\theta=90^\circ$ 时等号成立）.

134. 空间两点间的距离公式

若 A(x_1,y_1,z_1)，B(x_2,y_2,z_2)，则

$$d_{A,B}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

135. 点 Q 到直线 l 距离

$h=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$（点 P 在直线 l 上，直线 l 的方向向量 a=$\overrightarrow{PA}$，向量 b=$\overrightarrow{PQ}$）.

136. 异面直线间的距离

$d=\dfrac{|\overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$（$l_1,l_2$ 是两异面直线，其公垂向量为 $\vec{n}$，C、D 分别是 l_1,l_2 上任一点，d 为 l_1,l_2 间的距离）.

137. 点 B 到平面 α 的距离

$d=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$（$\vec{n}$ 为平面 α 的法向量，AB 是经过面 α 的一条斜线，$A\in\alpha$）.

138. 异面直线上两点距离公式

$$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2\mp 2mn\cos\theta}.$$

$d=$.

$d=\sqrt{h^2+m^2+n^2-2mn\cos\varphi}$（$\varphi=E-AA'-F$）.

（两条异面直线 a、b 所成的角为 θ ，其公垂线段 AA' 的长度为 h. 在直线 a、b 上分别取两点 E、F，$A'E=m$，$AF=n$，$EF=d$）.

139. 三个向量和的平方公式

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+2|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\langle\vec{b},\vec{c}\rangle+2|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cos\langle\vec{c},\vec{a}\rangle$

(1) 长度为 l 的线段在三条两两互相垂直的直线上的射影长分别为 l_1、l_2、l_3，夹角分别为 θ_1、θ_2、θ_3，则有

$l^2=l_1^2+l_2^2+l_3^2\Leftrightarrow\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+\cos^2\theta_3=1\Leftrightarrow\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3=2$.

（立体几何中长方体对角线长的公式是其特例）.

(2) 面积射影定理

$S=\dfrac{S'}{\cos\theta}$.

(平面多边形及其射影的面积分别是 S、S'，它们所在平面所成锐二面角的为 θ).

(3) 斜棱柱的直截面

已知斜棱柱的侧棱长是 l，侧面积和体积分别是 $S_{斜棱柱侧}$ 和 $V_{斜棱柱}$，它的直截面的周长和面积分别是 c_1 和 S_1，则

①$S_{斜棱柱侧}=c_1l$.

②$V_{斜棱柱}=S_1l$.

143. 作截面的依据

三个平面两两相交，有三条交线，则这三条交线交于一点或互相平行.

144. 棱锥的平行截面的性质

如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么所得的截面与底面相似，截面面积与底面面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比（对应角相等，对应边对应成比例的多边形是相似多边形，相似多边形面积的比等于对应边的比的平方）；相应小棱锥与小棱锥的侧面积的比等于顶点到截面距离与棱锥高的平方比.

145. 欧拉定理(欧拉公式)

$V+F-E=2$ (简单多面体的顶点数 V、棱数 E 和面数 F).

（1）E=各面多边形边数和的一半. 特别地，若每个面的边数为 n 的多边形，则面数 F 与棱数 E 的关系：$E=\dfrac{1}{2}nF$；

（2）若每个顶点引出的棱数为 m，则顶点数 V 与棱数 E 的关系：$E=\dfrac{1}{2}mV$.

146. 球的半径是 R，则

其体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$,

其表面积 $S=4\pi R^2$.

147. 球的组合体

(1) 球与长方体的组合体:

长方体的外接球的直径是长方体的体对角线长.

(2) 球与正方体的组合体:

正方体的内切球的直径是正方体的棱长, 正方体的棱切球的直径是正方体的面对角线长, 正方体的外接球的直径是正方体的体对角线长.

188. 球与正四面体的组合体:

棱长为 a 的正四面体的内切球的半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a$，外接球的半径为 $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

148. 柱体、锥体的体积

$V_{柱体}=\dfrac{1}{3}Sh$（S 是柱体的底面积、h 是柱体的高）.

$V_{锥体}=\dfrac{1}{3}Sh$（S 是锥体的底面积、h 是锥体的高）.

149. 分类计数原理（加法原理）

$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

150. 分步计数原理（乘法原理）

$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$.

151. 排列数公式

$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.（$n$，$m\in N^*$，且$m\leq n$）.

注:规定$0!=1$.

152.排列恒等式

(1) $A_n^m=(n-m+1)A_n^{m-1}$;

- $A_n^m=\dfrac{n}{n-m}A_{n-1}^m$;
- $A_n^m=nA_{n-1}^{m-1}$;
- $nA_n^n=A_{n+1}^{n+1}-A_n^n$;
- $A_{n+1}^m=A_n^m+mA_n^{m-1}$.

(6) $1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

153.组合数公式

$C_n^m=\dfrac{A_n^m}{A_m^m}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times 2\times\cdots\times m}=\dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$（$n\in N^*$，$m\in N$，且$m\leq n$）.

154.组合数的两个性质

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$；

(2) $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

注:规定$C_n^0=1$.

155.组合恒等式

- $C_n^m=\dfrac{n-m+1}{m}C_n^{m-1}$;
- $C_n^m=\dfrac{n}{n-m}C_{n-1}^m$;
- $C_n^m=\dfrac{n}{m}C_{n-1}^{m-1}$;

(4) $\sum\limits_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$;

(5) $C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$.

(6) $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^r+\cdots+C_n^n=2^n$.

(7) $C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots 2^{n-1}$.

(8) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n2^{n-1}$.

(9) $C_m^rC_n^0+C_m^{r-1}C_n^1+\cdots+C_m^0C_n^r=C_{m+n}^r$.

(10) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

156.排列数与组合数的关系

$A_n^m=m!\cdot C_n^m$.

157. 单条件排列

以下各条的大前提是从n个元素中取m个元素的排列.

（1）“在位”与“不在位”

①某（特）元必在某位有A_{n-1}^{m-1}种；②某（特）元不在某位有$A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$（补集思想）$=A_{n-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼位置）$=A_{n-1}^m+A_{m-1}^1A_{n-1}^{m-1}$（着眼元素）种.

（2）紧贴与插空（即相邻与不相邻）

①定位紧贴：$k(k\leq m\leq n)$个元在固定位的排列有$A_k^kA_{n-k}^{m-k}$种.

②浮动紧贴：n个元素的全排列把k个元排在一起的排法有$A_{n-k+1}^{n-k+1}A_k^k$种.注：此类问题常用捆绑法；

③插空：两组元素分别有k、h个（$k\leq h+1$），把它们合在一起来作全排列，k个的一组互不能挨近的所有排列数有$A_h^hA_{h+1}^k$种.

（3）两组元素各相同的插空

m个大球n个小球排成一列，小球必分开，问有多少种排法？

当$n>m+1$时，无解；当$n\leq m+1$时，有$\dfrac{A_{m+1}^n}{A_n^n}=C_{m+1}^n$种排法.

（4）两组相同元素的排列：两组元素有m个和n个，各组元素分别相同的排列数为C_{m+n}^n.

158. 分配问题

（1）(平均分组有归属问题)将相异的m、n个物件等分给m个人，各得n件，其分配方法数共有

$N=C_{mn}^{n}\cdot C_{mn-n}^{n}\cdot C_{mn-2n}^{n}\cdots C_{2n}^{n}\cdot C_{n}^{n}=\frac{(mn)!}{(n!)^{m}}$.

（2）(平均分组无归属问题)将相异的$m\cdot n$个物体等分为无记号或无顺序的m堆，其分配方法数共有

$N=\frac{C_{mn}^{n}\cdot C_{mn-n}^{n}\cdot C_{mn-2n}^{n}\cdots C_{2n}^{n}\cdot C_{n}^{n}}{m!}=\frac{(mn)!}{m!(n!)^{m}}$.

（3）(非平均分组有归属问题)将相异的$P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$个物体分给m个人，物件必须被分完，分别得到n_1，n_2，…，n_m件，且n_1，n_2，…，n_m这m个数彼此不相等，则其分配方法数共有$N=C_{p}^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_m}^{n_m}\cdot m!=\frac{p!m!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

（4）(非完全平均分组有归属问题)将相异的$P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$个物体分给m个人，物件必须被分完，分别得到n_1，n_2，…，n_m件，且n_1，n_2，…，n_m这m个数中分别有 a、b、c、…个相等，则其分配方法数有$N=\frac{C_{p}^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_m}^{n_m}\cdot m!}{a!b!c!\ldots}$

$=\frac{p!m!}{n_1!n_2!\ldots n_m!(a!b!c!\ldots)}$.

（5）(非平均分组无归属问题)将相异的$P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$个物体分为任意的n_1，n_2，…，n_m件无记号的m堆，且n_1，n_2，…，n_m这m个数彼此不相等，则其分配方法数有$N=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

（6）(非完全平均分组无归属问题)将相异的$P(P=n_1+n_2+\cdots+n_m)$个物体分为任意的n_1，n_2，…，n_m件无记号的m堆，且n_1，n_2，…，n_m这m个数中分别有 a、b、c、…个相等，则其分配方法数有$N=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!(a!b!c!\ldots)}$.

（7）(限定分组有归属问题)将相异的p（$p=n_1+n_2+\cdots+n_m$）个物体分给甲、乙、丙，……等m个人，物体必须被分完，如果指定甲得n_1件，乙得n_2件，丙得n_3件，…时，则无论n_1，n_2，…，n_m等m个数是否全相异或不全相异其分配方法数恒有

$N=C_{p}^{n_1}\cdot C_{p-n_1}^{n_2}\cdots C_{n_m}^{n_m}=\frac{p!}{n_1!n_2!\ldots n_m!}$.

159．“错位问题”及其推广

贝努利装错笺问题:信n封信与n个信封全部错位的组合数为

$f(n)=n![\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{n!}]$.

推广：n个元素与n个位置,其中至少有m个元素错位的不同组合总数为

$$\begin{aligned}f(n,m)&=n!-C_{m}^{1}(n-1)!+C_{m}^{2}(n-2)!-C_{m}^{3}(n-3)!+C_{m}^{4}(n-4)!\\&\quad-\cdots+(-1)^{p}C_{m}^{p}(n-p)!+\cdots+(-1)^{m}C_{m}^{m}(n-m)!\\&=n![1-\frac{C_{m}^{1}}{A_{n}^{1}}+\frac{C_{m}^{2}}{A_{n}^{2}}-\frac{C_{m}^{3}}{A_{n}^{3}}+\frac{C_{m}^{4}}{A_{n}^{4}}-\cdots+(-1)^{p}\frac{C_{m}^{p}}{A_{n}^{p}}+\cdots+(-1)^{m}\frac{C_{m}^{m}}{A_{n}^{m}}].\end{aligned}$$

160．不定方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$的解的个数

(1)方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）的正整数解有C_{m-1}^{n-1}个.

- 方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）的非负整数解有C_{n+m-1}^{n-1}个.
- 方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）满足条件$x_i\ge k$（$k\in N^*$，$2\le i\le n-1$）的非负整数解有$C_{m+1-(n-2)(k-1)}^{n-1}$个.
- 方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$（$n,m\in N^*$）满足条件$x_i\le k$（$k\in N^*$，$2\le i\le n-1$）的正整数解有$C_{n+m-1}^{n-1}-C_{n-2}^{1}C_{m+n-k-2}^{n-1}+C_{n-2}^{2}C_{m+n-2k-3}^{n-1}-\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-2}^{n-2}C_{m+1-(n-2)k}^{n-1}$个.

161.二项式定理 $(a+b)^{n}=C_{n}^{0}a^{n}+C_{n}^{1}a^{n-1}b+C_{n}^{2}a^{n-2}b^{2}+\cdots+C_{n}^{r}a^{n-r}b^{r}+\cdots+C_{n}^{n}b^{n}$；

二项展开式的通项公式

$T_{r+1}=C_{n}^{r}a^{n-r}b^{r}\ (r=0,1,2\cdots,\ n)$.

162.等可能性事件的概率

$P(A)=\frac{m}{n}$.

163.互斥事件 A，B 分别发生的概率的和

P(A＋B)=P(A)＋P(B).

164. n个互斥事件分别发生的概率的和 P(A_1＋A_2＋…＋A_n)=P(A_1)＋P(A_2)＋…＋P(A_n).

165.独立事件 A，B 同时发生的概率

P(A•B)= P(A)•P(B).

166.n 个独立事件同时发生的概率

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n)=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n)$.

167. n 次独立重复试验中某事件恰好发生 k 次的概率

$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$.

168. 离散型随机变量的分布列的两个性质

（1） $P_i \ge 0 (i=1,2,\cdots)$；

（2） $P_1+P_2+\cdots=1$.

169. 数学期望

$E\xi=x_1P_1+x_2P_2+\cdots+x_nP_n+\cdots$

170. 数学期望的性质

（1） $E(a\xi+b)=aE(\xi)+b$.

（2）若 $\xi \sim B(n,p)$，则 $E\xi=np$.

(3) 若 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)=q^{k-1}p$，则 $E\xi=\frac{1}{p}$.

171. 方差

$D\xi=(x_1-E\xi)^2\cdot p_1+(x_2-E\xi)^2\cdot p_2+\cdots+(x_n-E\xi)^2\cdot p_n+\cdots$

172. 标准差

$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}$.

173. 方差的性质

(1) $D(a\xi+b)=a^2D\xi$;

(2) 若 $\xi \sim B(n,p)$，则 $D\xi=np(1-p)$.

(3) 若 ξ 服从几何分布，且 $P(\xi=k)=g(k,p)=q^{k-1}p$，则 $D\xi=\frac{q}{p^2}$.

174. 方差与期望的关系

$D\xi=E\xi^2-(E\xi)^2$.

175. 正态分布密度函数

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，式中的实数 μ，$\sigma$（$\sigma>0$）是参数，分别表示个体的平均数与标准差.

176. 标准正态分布密度函数

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, x\in(-\infty,+\infty)$.

177. 对于 $N(\mu,\sigma^2)$，取值小于 x 的概率

$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

$$\begin{aligned}P(x_1<x_0<x_2)&=P(x<x_2)-P(x<x_1)\\&=F(x_2)-F(x_1)\\&=\Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

178. 回归直线方程

$\hat{y}=a+bx$，其中 $\begin{cases} b=\dfrac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum_{i=1}^n x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2-n\bar{x}^2} \\ a=\bar{y}-b\bar{x} \end{cases}$.

179. 相关系数

$$r=\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^n(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2-n\bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2-n\bar{y}^2)}}.$$

|r|≤1，且|r|越接近于 1，相关程度越大；|r|越接近于 0，相关程度越小.

180. 特殊数列的极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0 & |q|<1\\ 1 & q=1\\ \text{不存在} & |q|<1\text{或}q=-1\end{cases}$.

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_k n^k+a_{k-1}n^{k-1}+\cdots+a_0}{b_t n^t+b_{t-1}n^{t-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}0 & (k<t)\\ \frac{a_t}{b_k} & (k=t)\\ \text{不存在} & (k>t)\end{cases}$.

（3） $S=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}$（$S$无穷等比数列$\{a_1q^{n-1}\}$ （$|q|<1$）的和）.

181. 函数的极限定理

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$.

182. 函数的夹逼性定理

如果函数 f(x)，g(x)，h(x)在点 x_0 的附近满足：

（1） $g(x)\le f(x)\le h(x)$；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a, \lim\limits_{x\to x_0} h(x)=a$ （常数），

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

本定理对于单侧极限和$x\to\infty$的情况仍然成立.

183. 几个常用极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$， $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$ （$|a|<1$）；

（2） $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$， $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}$.

184. 两个重要的极限

+ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；
+ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (e=2.718281845…).

185. 函数极限的四则运算法则

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$， $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$， 则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right]=a\pm b$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=a\cdot b$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}(b\ne 0)$.

186. 数列极限的四则运算法则

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$， 则

140. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$；

141. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$；

142. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}(b\ne 0)$

143. $\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n=c\cdot a$（ c 是常数）.

(2) $f(x)$在x_0处的导数（或变化率或微商）

$f'(x_0)=y'\big|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

188. 瞬时速度

$\upsilon=s'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

189. 瞬时加速度

$a=v'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$.

- $f(x)$在(a,b)的导数

$f'(x)=y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{df}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

- 函数$y=f(x)$在点x_0处的导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数是曲线 $y=f(x)$ 在 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率 $f'(x_0)$，相应的切线方程是 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

192. 几种常见函数的导数

(1) $C'=0$（C 为常数）.

(2) $(x^n)'=nx^{n-1}(n\in Q)$.

- $(\sin x)'=\cos x$.
- $(\cos x)'=-\sin x$.
- $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e$.
- $(e^x)'=e^x$；$(a^x)'=a^x\ln a$.

193. 导数的运算法则

（1）$(u\pm v)'=u'\pm v'$.

（2）$(uv)'=u'v+uv'$.

（3）$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq 0)$.

194. 复合函数的求导法则

设函数$u=\varphi(x)$在点x处有导数$u_x'=\varphi'(x)$，函数$y=f(u)$在点x处的对应点 U 处有导数$y_u'=f'(u)$，则复合函数$y=f(\varphi(x))$在点x处有导数，且$y_x'=y_u'\cdot u_x'$，或写作$f_x'(\varphi(x))=f'(u)\varphi'(x)$.

195. 常用的近似计算公式（当$|x|$充小时）

(1) $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{2}x$；$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\dfrac{1}{n}x$；

(2) $(1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x(\alpha\in R)$；$\dfrac{1}{1+x}\approx 1-x$；

(3) $e^x\approx 1+x$；

(4) $l_n(1+x)\approx x$；

- $\sin x\approx x$（x为弧度）；
- $\tan x\approx x$（x为弧度）；
- $\arctan x\approx x$（x为弧度）

196. 判别 $f(x_0)$是极大（小）值的方

法当函数 $f(x)$ 在点x_0处连续时，

（1）如果在x_0附近的左侧$f'(x)>0$，右侧$f'(x)<0$，则$f(x_0)$是极大值;

（2）如果在x_0附近的左侧$f'(x)<0$，右侧$f'(x)>0$，则$f(x_0)$是极小值.

197. 复数的相等

$a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c,b=d$.（$a,b,c,d\in R$）

198. 复数$z=a+bi$的模（或绝对值）

$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

199. 复数的四则运算法则 (1)

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$；

(2) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$；

(3) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$；

(4) $(a+bi)\div(c+di)=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di\neq 0)$.

200. 复数的乘法的运算律

对于任何 $z_1,z_2,z_3\in C$，有

交换律：$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

结合律：$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.分

配律：$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

201.复平面上的两点间的距离公式

$d=|z_1-z_2|=$ （$z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$）.

202.向量的垂直

非零复数 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 对应的向量分别是 OZ_1，OZ_2，则

$OZ_1\perp OZ_2\Leftrightarrow \overline{z_1}\cdot z_2$ 的实部为零$\Leftrightarrow \dfrac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数$\Leftrightarrow |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$

$\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2\Leftrightarrow |z_1+z_2|=|z_1-z_2|\Leftrightarrow ac+bd=0\Leftrightarrow z_1=\lambda zi_2$（λ为非零实数）.

203.实系数一元二次方程的解

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，

①若 $\Delta=b^2-4ac>0$，则 $x_{1,2}=\dfrac{\qquad}{2a}$；

②若 $\Delta=b^2-4ac=0$，则 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；

③若 $\Delta=b^2-4ac<0$，它在实数集 R 内没有实数根；在复数集 C 内有且仅有两个共轭复数根 $x=\dfrac{\qquad}{2a}$ $(b^2-4ac<0)$.

高中数学知识点总结

99.对于集合，一定要抓住集合的代表元素，及元素的“确定性、互异性、无序性”。

如：集合 $A=\{x|y=\lg x\}$，$B=\{y|y=\lg x\}$，$C=\{(x,y)|y=\lg x\}$，A、B、C

中元素各表示什么？

100. 进行集合的交、并、补运算时，不要忘记集合本身和空集∅的特殊情况。

注重借助于数轴和文氏图解集合问题。

空集是一切集合的子集，是一切非空集合的真子集。

如：集合 $A=\{x|x^2-2x-3=0\}$，$B=\{x|ax=1\}$

若 $B\subset A$，则实数a的值构成的集合为 ________

（答：$\left\{-1,\ 0,\ \dfrac{1}{3}\right\}$）

101. 注意下列性质：

（1）集合$\left\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\right\}$的所有子集的个数是$2^n$；

（2）若$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A$，$A\cup B=B$；

（3）德摩根定律：

$$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB),\ C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$$

102. 你会用补集思想解决问题吗？（排除法、间接法）

如：已知关于x的不等式$\frac{ax-5}{x^2-a}<0$的解集为M，若$3\in M$且$5\notin M$，求实数a

的取值范围。

（$\because 3\in M$，$\therefore \frac{a\cdot 3-5}{3^2-a}<0$

$\because 5\notin M$，$\therefore \frac{a\cdot 5-5}{5^2-a}\geq 0$ $\Rightarrow a\in\left[1, \frac{5}{3}\right)\cup(9, 25]$）

103. 可以判断真假的语句叫做命题，逻辑连接词有“或”$(\vee)$，“且”$(\wedge)$和

“非”$(\neg)$.

若$p\wedge q$为真，当且仅当p、q均为真

若$p\vee q$为真，当且仅当p、q至少有一个为真

若$\neg p$为真，当且仅当p为假

104. 命题的四种形式及其相互关系是什么？

（互为逆否关系的命题是等价命题。）

原命题与逆否命题同真、同假；逆命题与否命题同真同假。

105. 对映射的概念了解吗？映射 f：A→B，是否注意到 A 中元素的任意性和 B 中与之对应元素的唯一性，哪几种对应能构成映射？

（一对一，多对一，允许 B 中有元素无原象。）

106. 函数的三要素是什么？如何比较两个函数是否相同？

（定义域、对应法则、值域）

107. 求函数的定义域有哪些常见类型？

例：函数 $y=\frac{\quad}{\lg(x-3)^2}$的定义域是________

（答：$(0, 2)\cup(2, 3)\cup(3, 4)$）

108. 如何求复合函数的定义域？

如：函数$f(x)$的定义域是$[a, b]$，$b>-a>0$，则函数$F(x)=f(x)+f(-x)$的定

义域是______________。

（答：$[a, -a]$）

109. 求一个函数的解析式或一个函数的反函数时，注明函数的定义域了吗？

如：$f(\sqrt{x}+1)=e^x+x$，求$f(x)$.

令$t=\sqrt{x}+1$，则$t\geq 0$

$\therefore x = t^2 - 1$

$\therefore f(t) = e^{t^2-1} + t^2 - 1$

$\therefore f(x) = e^{x^2-1} + x^2 - 1 \ (x \geq 0)$

110. 反函数存在的条件是什么？

（一一对应函数）

求反函数的步骤掌握了吗？

（①反解 x；②互换 x、y；③注明定义域）

如：求函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + x & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 的反函数

（答：$f^{-1}(x) = \begin{cases} x - 1 & (x > 1) \\ -\sqrt{-x} & (x < 0) \end{cases}$）

111. 反函数的性质有哪些？

①互为反函数的图象关于直线 y＝x 对称；

②保存了原来函数的单调性、奇函数性；

③设 $y = f(x)$ 的定义域为 A，值域为 C，$a \in A$，$b \in C$，则 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

$\therefore f^{-1}[f(a)] = f^{-1}(b) = a$，$f[f^{-1}(b)] = f(a) = b$

112. 如何用定义证明函数的单调性？

（取值、作差、判正负）

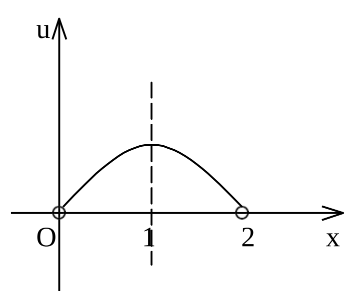
如何判断复合函数的单调性？

（$y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则 $y = f[\varphi(x)]$
（外层） （内层）

当内、外层函数单调性相同时 $f[\varphi(x)]$ 为增函数，否则 $f[\varphi(x)]$ 为减函数。）如：求 $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 2x)$ 的单调区间

（设 $u = -x^2 + 2x$，由 $u > 0$ 则 $0 < x < 2$

且 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$，$u = -(x-1)^2 + 1$，如图：



当 $x \in (0, 1]$ 时，$u \uparrow$，又 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$，$\therefore y \downarrow$

当 $x \in [1, 2)$ 时，$u \downarrow$，又 $\log_{\frac{1}{2}} u \downarrow$，$\therefore y \uparrow$

∴……）

113. 如何利用导数判断函数的单调性？

在区间 (a, b) 内，若总有 $f'(x) \geq 0$ 则 $f(x)$ 为增函数。（在个别点上导数等于零，不影响函数的单调性），反之也对，若 $f'(x) \leq 0$ 呢？

如：已知 $a > 0$，函数 $f(x) = x^3 - ax$ 在 $[1, +\infty)$ 上是单调增函数，则 a 的最大

值是（　　）

A. 0　　　B. 1　　　C. 2　　　D. 3

（令$f'(x)=3x^2-a=3\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\geq 0$

则$x\leq-\sqrt{\frac{a}{3}}$或$x\geq\sqrt{\frac{a}{3}}$

由已知$f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数，则$\sqrt{\frac{a}{3}}\leq 1$，即$a\leq 3$

∴a 的最大值为 3）

114. 函数 f(x)具有奇偶性的必要（非充分）条件是什么？

（f(x)定义域关于原点对称）

若$f(-x)=-f(x)$总成立$\Leftrightarrow f(x)$为奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于原点对称

若$f(-x)=f(x)$总成立$\Leftrightarrow f(x)$为偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数图象关于y轴对称

注意如下结论：

（1）在公共定义域内：两个奇函数的乘积是偶函数；两个偶函数的乘积是偶函数；一个偶函数与奇函数的乘积是奇函数。

（2）若f(x)是奇函数且定义域中有原点，则$f(0)=0$。

如：若$f(x)=\dfrac{a\cdot 2^x+a-2}{2^x+1}$为奇函数，则实数$a=$ ________

（∵$f(x)$为奇函数，$x\in R$，又$0\in R$，∴$f(0)=0$

即$\dfrac{a\cdot 2^0+a-2}{2^0+1}=0$，∴$a=1$）

又如：$f(x)$为定义在$(-1,1)$上的奇函数，当$x\in(0,1)$时，$f(x)=\dfrac{2^x}{4^x+1}$，

求$f(x)$在$(-1,1)$上的解析式。

（令$x\in(-1,0)$，则$-x\in(0,1)$，$f(-x)=\dfrac{2^{-x}}{4^{-x}+1}$

又$f(x)$为奇函数，∴$f(x)=-\dfrac{2^{-x}}{4^{-x}+1}=-\dfrac{2^x}{1+4^x}$

又$f(0)=0$，∴$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2^x}{4^x+1} & x\in(-1,0)\\ & x=0\\ \dfrac{2^x}{4^x+1} & x\in(0,1)\end{cases}$）

115. 你熟悉周期函数的定义吗？

（若存在实数T（$T\neq 0$），在定义域内总有$f(x+T)=f(x)$，则$f(x)$为周期函数，T 是一个周期。）

如：若$f(x+a)=-f(x)$，则______________

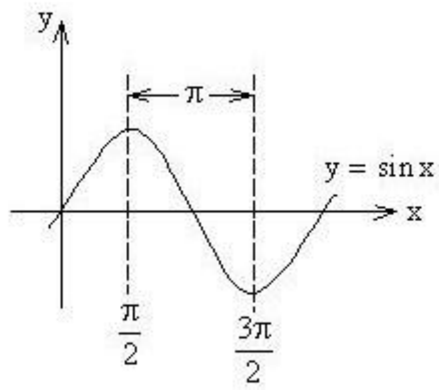
（答：$f(x)$是周期函数，$T=2a$为$f(x)$的一个周期）

又如：若$f(x)$图象有两条对称轴$x=a$，$x=b$ $(\Leftrightarrow)$

即$f(a+x)=f(a-x)$，$f(b+x)=f(b-x)$

则$f(x)$是周期函数，$2|a-b|$为一个周期

如：



116. 你掌握常用的图象变换了吗？

$f(x)$与$f(-x)$的图象关于 <u>y轴</u> 对称

$f(x)$与$-f(x)$的图象关于 <u>x轴</u> 对称

$f(x)$与$-f(-x)$的图象关于 <u>原点</u> 对称

$f(x)$与$f^{-1}(x)$的图象关于 <u>直线$y=x$</u> 对称

$f(x)$与$f(2a-x)$的图象关于 <u>直线$x=a$</u> 对称

$f(x)$与$-f(2a-x)$的图象关于 <u>点$(a，0)$</u> 对称

将$y=f(x)$图象$\xrightarrow[\text{右移}a(a>0)\text{个单位}]{\text{左移}a(a>0)\text{个单位}}$ $y=f(x+a)$　$y=f(x-a)$

$\xrightarrow[\text{下移}b(b>0)\text{个单位}]{\text{上移}b(b>0)\text{个单位}}$ $y=f(x+a)+b$　$y=f(x+a)-b$

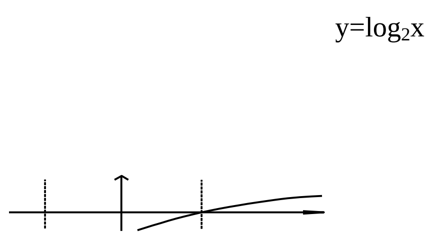
注意如下"翻折"变换：

$f(x)\longrightarrow|f(x)|$

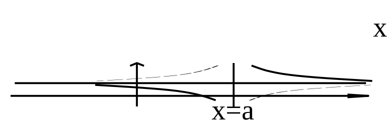
$f(x)\longrightarrow f(|x|)$

如：$f(x)=\log_2(x+1)$

作出$y=|\log_2(x+1)|$及$y=\log_2|x+1|$的图象



117. 你熟练掌握常用函数的图象和性质了吗？



（1）一次函数：$y=kx+b\ (k\neq 0)$

（2）反比例函数：$y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$推广为$y=b+\frac{k}{x-a}(k\neq 0)$是中心$O'(a，b)$

的双曲线。

（3）二次函数$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$图象为抛物线

顶点坐标为$\left(-\dfrac{b}{2a}，\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴$x=-\dfrac{b}{2a}$

开口方向：$a>0$，向上，函数$y_{min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

$a<0$，向下，$y_{max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

应用：①"三个二次"（二次函数、二次方程、二次不等式）的关系——二次方程

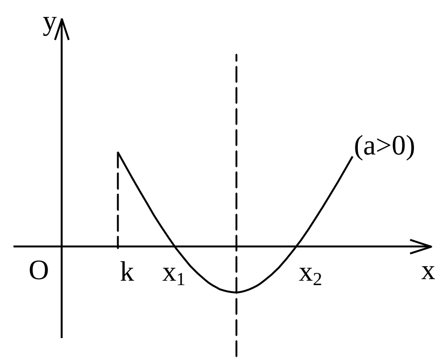
$ax^2+bx+c=0$，$\Delta>0$时，两根x_1、x_2为二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象与x轴的两个交点，也是二次不等式$ax^2+bx+c>0\ (<0)$解集的端点值。

②求闭区间［m，n］上的最值。

③求区间定（动），对称轴动（定）的最值问题。

④一元二次方程根的分布问题。

如：二次方程$ax^2+bx+c=0$的两根都大于$k\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta\geq 0\\ -\dfrac{b}{2a}>k\\ f(k)>0\end{cases}$

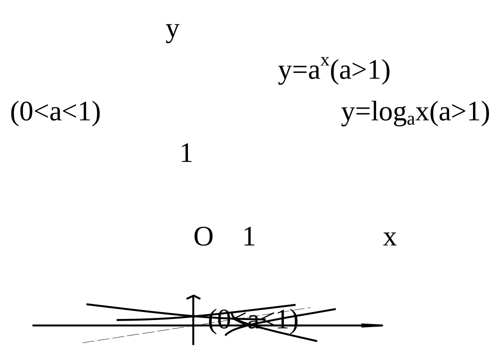


一根大于k，一根小于$k\Leftrightarrow f(k)<0$

（4）指数函数：$y=a^x\ (a>0，a\neq 1)$

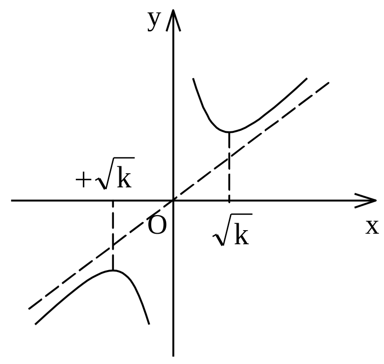
（5）对数函数$y=\log_a x\ (a>0，a\neq 1)$

由图象记性质！　　　　（注意底数的限定！）



（6）"对勾函数"　$y=x+\dfrac{k}{x}\ (k>0)$

利用它的单调性求最值与利用均值不等式求最值的区别是什么？



118. 你在基本运算上常出现错误吗？

指数运算：$a^0=1\ (a\neq 0)$，$a^{-p}=\frac{1}{a^p}\ (a\neq 0)$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geq 0)$，$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\ (a>0)$

对数运算：$\log_a M\cdot N=\log_a M+\log_a N\ (M>0，N>0)$

$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$，$\log_a\sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$

对数恒等式：$a^{\log_a x}=x$

对数换底公式：$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\Rightarrow\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

119. 如何解抽象函数问题？

（赋值法、结构变换法）

如：（1）$x\in R$，$f(x)$满足$f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明$f(x)$为奇函数。

（先令$x=y=0\Rightarrow f(0)=0$再令$y=-x$，……）

（2）$x\in R$，$f(x)$满足$f(xy)=f(x)+f(y)$，证明$f(x)$是偶函数。

（先令$x=y=-t\Rightarrow f[(-t)(-t)]=f(t\cdot t)$

$\therefore f(-t)+f(-t)=f(t)+f(t)$

$\therefore f(-t)=f(t)$……）

（3）证明单调性：$f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_2]=$……

120. 掌握求函数值域的常用方法了吗？

（二次函数法（配方法），反函数法，换元法，均值定理法，判别式法，利用函数单调性法，导数法等。）

如求下列函数的最值：

（1）$y=2x-3+\sqrt{13-4x}$

（2）$y=\frac{2x-4}{x+3}$

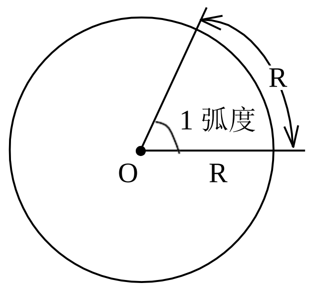
（3）$x>3$，$y=\frac{2x^2}{x-3}$

（4）$y=x+4+\underline{\qquad}$ $(设x=3\cos\theta，\theta\in[0，\pi])$

（5）$y=4x+\frac{9}{x}$，$x\in(0，1]$

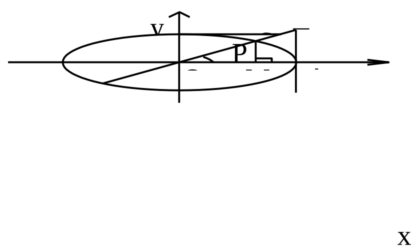
121. 你记得弧度的定义吗？能写出圆心角为α，半径为R的弧长公式和扇形面积公式吗？

（$l=|\alpha|\cdot R$，$S_{扇}=\frac{1}{2}l\cdot R=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot R^2$）



122. 熟记三角函数的定义，单位圆中三角函数线的定义

$\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$，$\tan\alpha=AT$

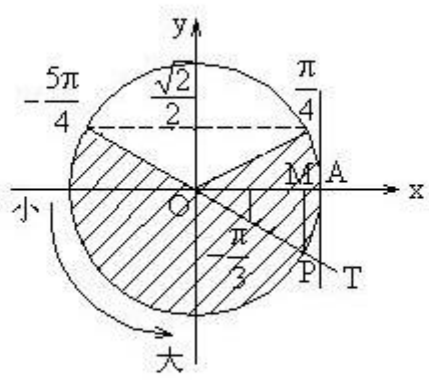


如：若 $-\pi<\theta<0$，则sin θ，cosθ，tan θ的大小顺序是 8________

又如：求函数 $y=\sqrt{1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ 的定义域和值域。

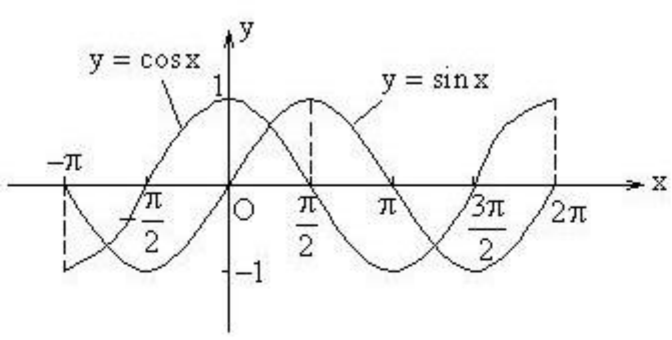
（∵ $1-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ）$=1-\sqrt{2}\sin x\geq 0$

∴ $\sin x\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$，如图：

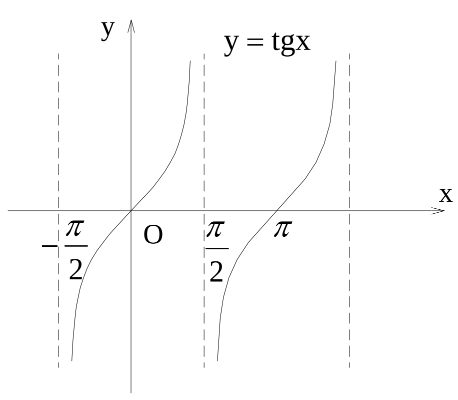


∴ $2k\pi-\frac{5\pi}{4}\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in Z)$，$0\leq y\leq$

123. 你能迅速画出正弦、余弦、正切函数的图象吗？并由图象写出单调区间、对称点、对称轴吗？



$|\sin x|\leq 1$，$|\cos x|\leq 1$



对称点为$\left(\frac{k\pi}{2}，0\right)$，$k\in Z$

$y=\sin x$的增区间为$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in Z)$

减区间为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}，2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in Z)$

图象的对称点为$(k\pi，0)$，对称轴为$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

$y=\cos x$的增区间为$[2k\pi，2k\pi+\pi](k\in Z)$

减区间为$[2k\pi+\pi，2k\pi+2\pi](k\in Z)$

图象的对称点为$\left(k\pi+\frac{\pi}{2}，0\right)$，对称轴为$x=k\pi\ (k\in Z)$

$y=\tan x$的增区间为$\left(k\pi-\frac{\pi}{2}，k\pi+\frac{\pi}{2}\right)\ k\in Z$

124. 正弦型函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象和性质要熟记。$[或y=A\cos(\omega x+\varphi)]$

（1）振幅$|A|$，周期$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$

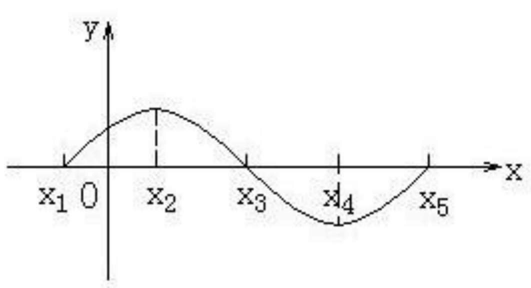
若$f(x_0)=\pm A$，则$x=x_0$为对称轴。

若$f(x_0)=0$，则$(x_0，0)$为对称点，反之也对。

（2）五点作图：令 $\omega x+\varphi$ 依次为 0，$\frac{\pi}{2}$，π，$\frac{3\pi}{2}$，2π，求出x与y，依点

（x，y）作图象。

（3）根据图象求解析式。（求A、ω、φ值）



如图列出$\begin{cases}\omega(x_1)+\varphi=0\\ \omega(x_2)+\varphi=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

解条件组求ω、φ值

Δ正切型函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$，$T=\frac{\pi}{|\omega|}$

125. 在三角函数中求一个角时要注意两个方面——先求出某一个三角函数值，再判定角的范围。

如：$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x\in\left[\pi，\frac{3\pi}{2}\right]$，求$x$值。

（$\because\pi<x<\frac{3\pi}{2}$，$\therefore\frac{7\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{3}$，$\therefore x+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{4}$，$\therefore x=\frac{13}{12}\pi$）

126. 在解含有正、余弦函数的问题时，你注意（到）运用函数的有界性了吗？

如：函数$y=\sin x+\sin|x|$的值域是________

（$x\geq0$时，$y=2\sin x\in[-2，2]$，$x<0$时，$y=0$，$\therefore y\in[-2，2]$）

127. 熟练掌握三角函数图象变换了吗？

（平移变换、伸缩变换）

平移公式：

（1）点P（x，y）$\xrightarrow[\text{平移至}]{\vec{a}=(h,k)}$P'（x'，y'），则$\begin{cases}x'=x+h\\ y'=y+k\end{cases}$

（2）曲线f（x，y）= 0沿向量$\vec{a}=(h,k)$平移后的方程为$f(x-h, y-k)=0$

如：函数 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ 的图象经过怎样的变换才能得到 $y=\sin x$ 的图象？

（$y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1\xrightarrow{\text{横坐标伸长到原来的2倍}}y=2\sin\left[2\left(\frac{1}{2}x\right)-\frac{\pi}{4}\right]-1$

$=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\xrightarrow{\text{左平移}\frac{\pi}{4}\text{个单位}}y=2\sin x-1\xrightarrow{\text{上平移1个单位}}y=2\sin x$

$\xrightarrow{\text{纵坐标缩短到原来的}\frac{1}{2}\text{倍}}y=\sin x$）

128. 熟练掌握同角三角函数关系和诱导公式了吗？

如：$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\cos\alpha\cdot\sec\alpha=\tan\frac{\pi}{4}$

$=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=$……称为1的代换。

“$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$”化为 α 的三角函数——“奇变，偶不变，符号看象限”，“奇”、“偶”指k取奇、偶数。

如：$\cos\frac{9\pi}{4}+\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+\sin(21\pi)=$ __________

又如：函数$y=\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$，则y的值为 __________

• 正值或负值　　B. 负值　　C. 非负值　　D. 正值

（$y=\dfrac{\sin\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\dfrac{\sin^2\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)}>0$，$\because\alpha\neq 0$）

129. 熟练掌握两角和、差、倍、降幂公式及其逆向应用了吗？

理解公式之间的联系：

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\xrightarrow{\text{令}\alpha=\beta}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\xrightarrow{\text{令}\alpha=\beta}\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\downarrow$

$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$　　　　$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow$

$\downarrow$

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$　　　　$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{\quad}\sin(\alpha+\varphi)$，$\tan\varphi=\frac{b}{a}$

$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

应用以上公式对三角函数式化简。（化简要求：项数最少、函数种类最少，分母中不含三角函数，能求值，尽可能求值。）

具体方法：

（1）角的变换：如$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$……

（2）名的变换：化弦或化切

（3）次数的变换：升、降幂公式

（4）形的变换：统一函数形式，注意运用代数运算。

如：已知$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos 2\alpha}=1$，$\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{3}$，求$\tan(\beta-2\alpha)$的值。

（由已知得：$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}=1$，$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2}$

又$\tan(\beta-\alpha)=\frac{2}{3}$

$\therefore \tan(\beta-2\alpha)=\tan[(\beta-\alpha)-\alpha]=\frac{\tan(\beta-\alpha)-\tan\alpha}{1+\tan(\beta-\alpha)\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}$）

130. 正、余弦定理的各种表达形式你还记得吗？如何实现边、角转化，而解斜三角形？

余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A\Rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

（应用：已知两边一夹角求第三边；已知三边求角。）

正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Leftrightarrow\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$

$S_{\Delta}=\frac{1}{2}a\cdot b\sin C$

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore A+B=\pi-C$

$\therefore \sin(A+B)=\sin C$，$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$

如ΔABC中，$2\sin^2\frac{A+B}{2}+\cos 2C=1$

（1）求角C；

（2）若$a^2=b^2+\frac{c^2}{2}$，求$\cos 2A-\cos 2B$的值。

（（1）由已知式得：$1-\cos(A+B)+2\cos^2C-1=1$

又$A+B=\pi-C$，$\therefore 2\cos^2C+\cos C-1=0$

$\therefore \cos C=\frac{1}{2}$或$\cos C=-1$（舍）

又$0<C<\pi$，$\therefore C=\frac{\pi}{3}$

（2）由正弦定理及$a^2=b^2+\frac{1}{2}c^2$得：

$2\sin^2A-2\sin^2B=\sin^2C=\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}$

$1-\cos 2A-1+\cos 2B=\frac{3}{4}$

$\therefore \cos 2A-\cos 2B=-\frac{3}{4}$）

131. 用反三角函数表示角时要注意角的范围。

反正弦：$\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，$x \in [-1, 1]$

反余弦：$\arccos x \in [0, \pi]$，$x \in [-1, 1]$

反正切：$\arctan x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，$(x \in R)$

132. 不等式的性质有哪些？

（1）$a > b$，$\begin{matrix} c > 0 \Rightarrow ac > bc \\ c < 0 \Rightarrow ac < bc \end{matrix}$

（2）$a > b$，$c > d \Rightarrow a + c > b + d$

（3）$a > b > 0$，$c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$

（4）$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$，$a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

（5）$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$，$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

（6）$|x| < a\ (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a$，$|x| > a \Leftrightarrow x < -a$或$x > a$

如：若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$，则下列结论不正确的是（　　）

A. $a^2 < b^2$　　　　B. $ab < b^2$

C. $|a| + |b| > |a + b|$　　　　D. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

答案：C

133. 利用均值不等式：

$a^2 + b^2 \geq 2ab\ (a, b \in R^+)$；$a + b \geq 2\sqrt{ab}$；$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 求最值时，你是否注意到“$a, b \in R^+$”且“等号成立”时的条件，积(ab)或和$(a + b)$其中之一为定值？（一正、二定、三相等）

注意如下结论：

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}\ (a, b \in R_+)$

当且仅当$a = b$时等号成立。

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca\ (a, b \in R)$

当且仅当$a = b = c$时取等号。

$a > b > 0$，$m > 0$，$n > 0$，则

$\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m} < 1 < \frac{a+n}{b+n} < \frac{a}{b}$

如：若$x > 0$，$2 - 3x - \frac{4}{x}$的最大值为______

（设$y = 2 - \left(3x + \frac{4}{x}\right) \leq 2 - 2\sqrt{12} = 2 - 4\sqrt{3}$

当且仅当$3x = \frac{4}{x}$，又$x > 0$，$\therefore x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$时，$y_{max} = 2 - 4\sqrt{3}$）

又如：$x + 2y = 1$，则$2^x + 4^y$的最小值为______

（$\because 2^x + 2^{2y} \geq 2\sqrt{2^{x+2y}} = 2\sqrt{2^1}$，$\therefore$最小值为$2\sqrt{2}$）

134. 不等式证明的基本方法都掌握了吗？

（比较法、分析法、综合法、数学归纳法等）

并注意简单放缩法的应用。

如：证明 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2$

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right.$$

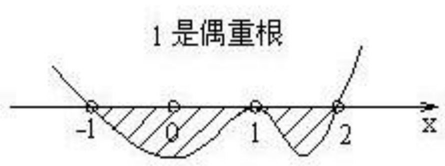
$$=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$\left.=2-\frac{1}{n}<2\right)$$

135. 解分式不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}>a\ (a\neq 0)$ 的一般步骤是什么？

（移项通分，分子分母因式分解，x 的系数变为 1，穿轴法解得结果。）

136. 用“穿轴法”解高次不等式——“奇穿，偶切”，从最大根的右上方开始



如：$(x+1)(x-1)^2(x-2)^3<0$

137. 解含有参数的不等式要注意对字母参数的讨论

如：对数或指数的底分 $a>1$ 或 $0<a<1$ 讨论

138. 对含有两个绝对值的不等式如何去解？

（找零点，分段讨论，去掉绝对值符号，最后取各段的并集。）

例如：解不等式 $|x-3|-|x+1|<1$

（解集为 $\left\{x \mid x>\frac{1}{2}\right\}$）

139. 会用不等式 $|a|-|b|\le|a\pm b|\le|a|+|b|$ 证明较简单的不等问题

如：设 $f(x)=x^2-x+13$，实数 a 满足 $|x-a|<1$

求证：$|f(x)-f(a)|<2(|a|+1)$

证明：$|f(x)-f(a)|=|(x^2-x+13)-(a^2-a+13)|$

$$=|(x-a)(x+a-1)|\ (\because |x-a|<1)$$
$$=|x-a||x+a-1|<|x+a-1|$$
$$\le|x|+|a|+1$$

又 $|x|-|a|\le|x-a|<1$，$\therefore |x|<|a|+1$

$\therefore |f(x)-f(a)|<2|a|+2=2(|a|+1)$

（按不等号方向放缩）

140. 不等式恒成立问题，常用的处理方式是什么？（可转化为最值问题，或“△”问题）

如：$a<f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a<f(x)$ 的最小值

$a>f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a>f(x)$ 的最大值

$a>f(x)$ 能成立 $\Leftrightarrow a>f(x)$ 的最小值

例如：对于一切实数 x，若 $|x-3|+|x+2|>a$ 恒成立，则 a 的取值范围是____

（设$u=|x-3|+|x+2|$，它表示数轴上到两定点 -2和3距离之和

$u_{min}=3-(-2)=5$，∴$5>a$，即$a<5$

或者：$|x-3|+|x+2|\geq|(x-3)-(x+2)|=5$，∴$a<5$）

141. 等差数列的定义与性质

定义：$a_{n+1}-a_n=d$（d为常数），$a_n=a_1+(n-1)d$

等差中项：x，A，y成等差数列 $\Leftrightarrow 2A=x+y$

前n项和$S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$

性质：$\{a_n\}$是等差数列

（1）若$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$；

（2）数列$\{a_{2n-1}\}$，$\{a_{2n}\}$，$\{ka_n+b\}$仍为等差数列；

S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$……仍为等差数列；

（3）若三个数成等差数列，可设为$a-d$，a，$a+d$；

（4）若a_n，b_n是等差数列S_n，T_n为前n项和，则$\dfrac{a_m}{b_m}=\dfrac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$；

（5）$\{a_n\}$为等差数列$\Leftrightarrow S_n=an^2+bn$（$a$，$b$为常数，是关于$n$的常数项为

0 的二次函数）

S_n的最值可求二次函数$S_n=an^2+bn$的最值；或者求出$\{a_n\}$中的正、负分界

项，即：

当$a_1>0$，$d<0$，解不等式组$\begin{cases}a_n\geq 0\\ a_{n+1}\leq 0\end{cases}$可得$S_n$达到最大值时的$n$值。

当$a_1<0$，$d>0$，由$\begin{cases}a_n\leq 0\\ a_{n+1}\geq 0\end{cases}$可得$S_n$达到最小值时的$n$值。

如：等差数列$\{a_n\}$，$S_n=18$，$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3$，$S_3=1$，则$n=$ ________

（由$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3\Rightarrow 3a_{n-1}=3$，∴$a_{n-1}=1$

又$S_3=\dfrac{(a_1+a_3)}{2}\cdot 3=3a_2=1$，∴$a_2=\dfrac{1}{3}$

$\therefore S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{(a_2+a_{n-1})\cdot n}{2}=\dfrac{\left(\frac{1}{3}+1\right)n}{2}=18$

$\therefore n=27$）

142. 等比数列的定义与性质

定义：$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$（q为常数，$q\neq 0$），$a_n=a_1q^{n-1}$

等比中项：x、G、y成等比数列 $\Rightarrow G^2=xy$，或$G=\pm\sqrt{xy}$

前n项和：$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1)\end{cases}$ （要注意！）

性质：$\{a_n\}$是等比数列

（1）若$m+n=p+q$，则$a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$

（2）S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$……仍为等比数列

143. 由S_n求a_n时应注意什么？

（$n=1$时，$a_1=S_1$，$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$）

144. 你熟悉求数列通项公式的常用方法吗？

例如：（1）求差（商）法

如：$\{a_n\}$满足$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}a_n=2n+5$　$<1>$

解： $n=1$时，$\frac{1}{2}a_1=2\times 1+5$，$\therefore a_1=14$

$n\geq 2$时，$\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2^2}a_2+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}=2n-1+5$　$<2>$

$<1>-<2>$得：$\frac{1}{2^n}a_n=2$

$\therefore a_n=2^{n+1}$

$$\therefore a_n=\begin{cases}14 & (n=1)\\ 2^{n+1} & (n\geq 2)\end{cases}$$

［练习］

数列$\{a_n\}$满足$S_n+S_{n+1}=\frac{5}{3}a_{n+1}$，$a_1=4$，求$a_n$

（注意到$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$代入得：$\frac{S_{n+1}}{S_n}=4$

又$S_1=4$，$\therefore\{S_n\}$是等比数列，$S_n=4^n$

$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\cdots\cdots=3\cdot 4^{n-1}$

（2）叠乘法

例如：数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$，求$a_n$

解： $\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}$，$\therefore\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{n}$

又$a_1=3$，$\therefore a_n=\frac{3}{n}$

（3）等差型递推公式

由$a_n-a_{n-1}=f(n)$，$a_1=a_0$，求a_n，用迭加法

$$n\geq 2\text{时，}\left.\begin{array}{l}a_2-a_1=f(2)\\ a_3-a_2=f(3)\\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots\\ a_n-a_{n-1}=f(n)\end{array}\right\}\text{两边相加，得：}$$

$a_n-a_1=f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)$

$\therefore a_n=a_0+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)$

［练习］

数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_n=3^{n-1}+a_{n-1}\ (n\geq 2)$，求$a_n$

（$a_n=\frac{1}{2}\left(3^n-1\right)$）

（4）等比型递推公式

$a_n=ca_{n-1}+d$（c、d为常数，$c\neq 0$，$c\neq 1$，$d\neq 0$）

可转化为等比数列，设 $a_n + x = c(a_{n-1} + x)$

$\Rightarrow a_n = ca_{n-1} + (c-1)x$

令 $(c-1)x = d$，∴ $x = \frac{d}{c-1}$

∴ $\left\{a_n + \frac{d}{c-1}\right\}$ 是首项为 $a_1 + \frac{d}{c-1}$，c为公比的等比数列

∴ $a_n + \frac{d}{c-1} = \left(a_1 + \frac{d}{c-1}\right)\cdot c^{n-1}$

∴ $a_n = \left(a_1 + \frac{d}{c-1}\right)c^{n-1} - \frac{d}{c-1}$

［练习］

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 9$，$3a_{n+1} + a_n = 4$，求 a_n

（$a_n = 8\left(-\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 1$）

（5）倒数法

例如：$a_1 = 1$，$a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$，求 a_n

由已知得：$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}$

∴ $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$

∴ $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列，$\frac{1}{a_1} = 1$，公差为 $\frac{1}{2}$

∴ $\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n+1)$

∴ $a_n = \frac{2}{n+1}$

145. 你熟悉求数列前 n 项和的常用方法吗？

例如：（1）裂项法：把数列各项拆成两项或多项之和，使之出现成对互为相反数的项。

如：$\{a_n\}$ 是公差为d的等差数列，求 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}}$

解： 由 $\frac{1}{a_k\cdot a_{k+1}} = \frac{1}{a_k(a_k + d)} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)(d \neq 0)$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

［练习］

求和：$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots\cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots\cdots+n}$

（$a_n = \cdots\cdots = \cdots\cdots$，$S_n = 2 - \frac{1}{n+1}$）

（2）错位相减法：

若 $\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，求数列 $\{a_nb_n\}$（差比数列）前n项和，可由S_n-qS_n求S_n，其中q为$\{b_n\}$的公比。

如：$S_n=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots+nx^{n-1}$ $<1>$

$x\cdot S_n=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$ $<2>$

$<1>-<2>$：$(1-x)S_n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$

$x\neq1$时，$S_n=\dfrac{(1-x^n)}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x}$

$x=1$时，$S_n=1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

（3）倒序相加法：把数列的各项顺序倒写，再与原来顺序的数列相加。

$$\left.\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n\\S_n&=a_n+a_{n-1}+\cdots\cdots+a_2+a_1\end{aligned}\right\}\text{相加}$$

$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots\cdots+(a_1+a_n)\cdots\cdots$

［练习］

已知$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，则$f(1)+f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$________

（由$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}=1$

$\therefore$原式$=f(1)+\left[f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right]+\left[f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right]+\left[f(4)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}+1+1+1=3\dfrac{1}{2}$）

146. 你知道储蓄、贷款问题吗？

△零存整取储蓄（单利）本利和计算模型：

若每期存入本金p元，每期利率为r，n期后，本利和为：

$S_n=p(1+r)+p(1+2r)+\cdots\cdots+p(1+nr)=p\left[n+\dfrac{n(n+1)}{2}r\right]$……等差问题

△若按复利，如贷款问题——按揭贷款的每期还款计算模型（按揭贷款——分期等额归还本息的借款种类）

若贷款（向银行借款）p元，采用分期等额还款方式，从借款日算起，一期（如一年）后为第一次还款日，如此下去，第n次还清。如果每期利率为r（按复利），那么每期应还x元，满足

$p(1+r)^n=x(1+r)^{n-1}+x(1+r)^{n-2}+\cdots\cdots+x(1+r)+x$

$=x\left[\dfrac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}\right]=x\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$

$\therefore x=\dfrac{pr(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$

p——贷款数，r——利率，n——还款期数

147. 解排列、组合问题的依据是：分类相加，分步相乘，有序排列，无序组合。

（1）分类计数原理：$N=m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n$

（m_i为各类办法中的方法数）

分步计数原理：$N=m_1\cdot m_2\cdots\cdots m_n$

（m_i 为各步骤中的方法数）

（2）排列：从 n 个不同元素中，任取 m（m≤n）个元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从n个不同元素中取出m个元素的一个排列，所有排列的个数记为A_n^m.

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}\ (m\le n)$$

规定：$0!=1$

（3）组合：从 n 个不同元素中任取 m（m≤n）个元素并组成一组，叫做从 n 个不同元素中取出m个元素的一个组合，所有组合个数记为C_n^m.

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

规定：$C_n^0=1$

（4）组合数性质：

$C_n^m=C_n^{n-m}$，$C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$，$C_n^0+C_n^1+\cdots\cdots+C_n^n=2^n$

148.解排列与组合问题的规律是：

相邻问题捆绑法；相间隔问题插空法；定位问题优先法；多元问题分类法；至多至少问题间接法；相同元素分组可采用隔板法，数量不大时可以逐一排出结果。

如：学号为1，2，3，4的四名学生的考试成绩

$x_i\in\{89，90，91，92，93\}$，$(i=1，2，3，4)$且满足$x_1<x_2\le x_3<x_4$，

则这四位同学考试成绩的所有可能情况是（　　）

A. 24　　B. 15　　C. 12　　D. 10

解析：可分成两类：

（1）中间两个分数不相等，

$$\underset{x_1}{\square}<\underset{x_2}{\square}<\underset{x_3}{\square}<\underset{x_4}{\square}$$

有$C_5^4=5$（种）

（2）中间两个分数相等

$x_1<x_2=x_3<x_4$

相同两数分别取90，91，92，对应的排列可以数出来，分别有3，4，3种，∴有10种。

∴共有5＋10＝15（种）情况

149.二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$$

二项展开式的通项公式：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r\ (r=0，1\cdots\cdots n)$

C_n^r为二项式系数（区别于该项的系数）

性质：

（1）对称性：$C_n^r=C_n^{n-r}\left(r=0，1，2，\cdots\cdots，n\right)$

（2）系数和：$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$

$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=2^{n-1}$

（3）最值：n 为偶数时，n+1 为奇数，中间一项的二项式系数最大且为第

$\left(\frac{n}{2}+1\right)$项，二项式系数为$C_n^{\frac{n}{2}}$；n为奇数时，$(n+1)$为偶数，中间两项的二项式

系数最大即第 $\frac{n+1}{2}$项及第 $\frac{n+1}{2}$ 87. 1项，其二项式系数为$C_n^{\frac{n-1}{2}}=C_n^{\frac{n+1}{2}}$

如：在二项式$(x-1)^{11}$的展开式中，系数最小的项系数为________（用数字

表示）

（∵n＝11

∴共有12项，中间两项系数的绝对值最大，且为第 $\frac{12}{2}=6$或第7项

由$C_{11}^r x^{11-r}(-1)^r$，∴取$r=5$即第6项系数为负值为最小：

$-C_{11}^6=-C_{11}^5=-426$

又如：$(1-2x)^{2004}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_{2004}x^{2004}\ (x\in R)$，则

$(a_0+a_1)+(a_0+a_2)+(a_0+a_3)+\cdots\cdots+(a_0+a_{2004})=$__________（用数字作答）

（令$x=0$，得：$a_0=1$

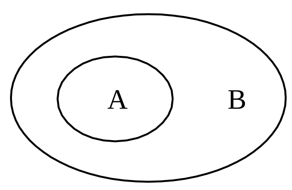
令$x=1$，得：$a_0+a_2+\cdots\cdots+a_{2004}=1$

∴原式$=2003a_0+(a_0+a_1+\cdots\cdots+a_{2004})=2003\times1+1=2004$）

150. 你对随机事件之间的关系熟悉吗？

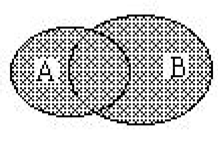
（1）必然事件Ω，$P(\Omega)=1$，不可能事件ϕ，$P(\phi)=0$

（2）包含关系：$A\subset B$，“A发生必导致B发生”称B包含A。

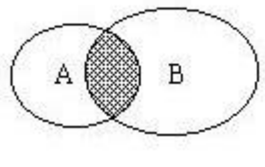


（3）事件的和（并）：$A+B$或$A\cup B$“A与B至少有一个发生”叫做A与B

的和（并）。

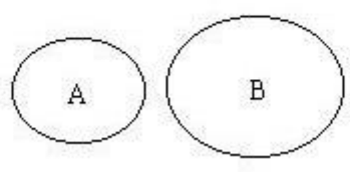


（4）事件的积（交）：$A\cdot B$或$A\cap B$“A与B同时发生”叫做A与B的积。



（5）互斥事件（互不相容事件）：“A 与 B 不能同时发生”叫做 A、B 互斥。

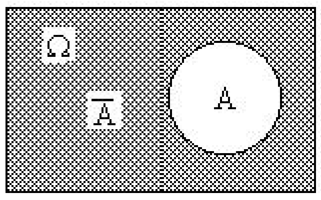
$A\cdot B=\phi$



（6）对立事件（互逆事件）：

“A不发生”叫做A发生的对立（逆）事件，$\bar{A}$

$A\cup\bar{A}=\Omega$，$A\cap\bar{A}=\phi$



（7）独立事件：A 发生与否对 B 发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

A与B独立，A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$也相互独立。

151. 对某一事件概率的求法：

分清所求的是：（1）等可能事件的概率（常采用排列组合的方法，即

$$P(A)=\frac{A\text{包含的等可能结果}}{\text{一次试验的等可能结果的总数}}=\frac{m}{n}$$

（2）若A、B互斥，则$P(A+B)=P(A)+P(B)$

（3）若A、B相互独立，则$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

（4）$P(\bar{A})=1-P(A)$

（5）如果在一次试验中 A 发生的概率是 p，那么在 n 次独立重复试验中 A 恰好发生

k次的概率：$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

如：设 10 件产品中有 4 件次品，6 件正品，求下列事件的概率。

（1）从中任取 2 件都是次品；

$$\left(P_1=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}\right)$$

（2）从中任取 5 件恰有 2 件次品；

$$\left(P_2=\frac{C_4^2C_6^3}{C_{10}^5}=\frac{10}{21}\right)$$

（3）从中有放回地任取 3 件至少有 2 件次品；

解析：有放回地抽取 3 次（每次抽 1 件），∴n＝10^3

而至少有 2 件次品为“恰有 2 次品”和“三件都是次品”

$$\therefore m=C_3^2\cdot 4^2 6^1+4^3$$

$$\therefore P_3=\frac{C_3^2\cdot 4^2\cdot 6+4^3}{10^3}=\frac{44}{125}$$

（4）从中依次取 5 件恰有 2 件次品。

解析：∵一件一件抽取（有顺序）

$$\therefore n=A_{10}^5,\ m=C_4^2A_5^2A_6^3$$

$$\therefore P_4=\frac{C_4^2A_5^2A_6^3}{A_{10}^5}=\frac{10}{21}$$

分清（1）、（2）是组合问题，（3）是可重复排列问题，（4）是无重复排列问题。

（1） 抽样方法主要有：简单随机抽样（抽签法、随机数表法）常常用于总体个数较少时，它的特征是从总体

中逐个抽取；系统抽样，常用于总体个数较多时，它的主要特征是均衡成若干部分，每部分只取一个；分层抽样，主要特征是分层按比例抽样，主要用于总体中有明显差异，它们的共同特征是每个个体被抽到的概率相等，体现了抽样的客观性和平等性。

（2） 对总体分布的估计——用样本的频率作为总体的概率，用样本的期望（平均值）和方差去估计总体的期望和方差。

要熟悉样本频率直方图的作法：

（1）算数据极差$\left(x_{max}-x_{min}\right)$；

（2）决定组距和组数；

（3）决定分点；

（4）列频率分布表；

（5）画频率直方图。

其中，频率 $=$ 小长方形的面积 $=$ 组距$\times\dfrac{频率}{组距}$

样本平均值：$\bar{x}=\dfrac{1}{n}\left(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n\right)$

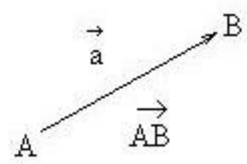
样本方差：$S^2=\dfrac{1}{n}\left[\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\cdots\cdots+\left(x_n-\bar{x}\right)^2\right]$

如：从10名女生与5名男生中选6名学生参加比赛，如果按性别分层随机抽样，则组成此参赛队的概率为____________。

（$\dfrac{C_{10}^4C_5^2}{C_{15}^6}$）

（3） 你对向量的有关概念清楚吗？

（1）向量——既有大小又有方向的量。



（2）向量的模——有向线段的长度，$|\vec{a}|$

（3）单位向量$|\vec{a}_0|=1$，$\vec{a}_0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

（4）零向量$\vec{0}$，$|\vec{0}|=0$

（5）相等的向量 $\Leftrightarrow\begin{cases}长度相等\\方向相同\end{cases}\vec{a}=\vec{b}$

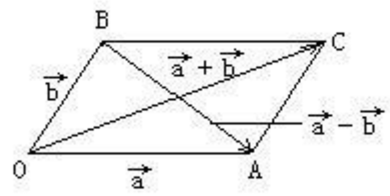
在此规定下向量可以在平面（或空间）平行移动而不改变。

（6）并线向量（平行向量）——方向相同或相反的向量。

规定零向量与任意向量平行。

$\vec{b}\parallel\vec{a}\,(\vec{b}\neq 0)\Leftrightarrow$ 存在唯一实数λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$

（7）向量的加、减法如图：



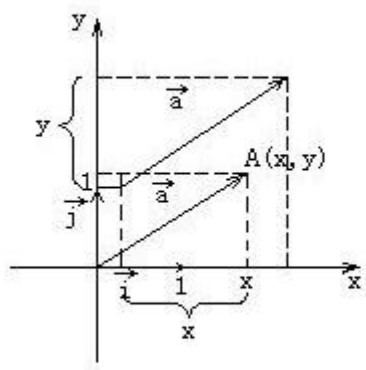
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

（8）平面向量基本定理（向量的分解定理）

$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$是平面内的两个不共线向量，$\vec{a}$为该平面任一向量，则存在唯一实数对λ_1、λ_2，使得$\vec{a}=\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2$，$\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$叫做表示这一平面内所有向量的一组基底。

（9）向量的坐标表示



$\vec{i}$，$\vec{j}$是一对互相垂直的单位向量，则有且只有一对实数x，y，使得$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$，称(x，y)为向量$\vec{a}$的坐标，记作：$\vec{a}=(x，y)$，即为向量的坐标表示。

设$\vec{a}=(x_1，y_1)$，$\vec{b}=(x_2，y_2)$

则$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1，y_1)\pm(y_1，y_2)=(x_1\pm y_1，x_2\pm y_2)$

$\lambda\vec{a}=\lambda(x_1，y_1)=(\lambda x_1，\lambda y_1)$

若$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$

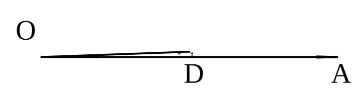
则$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1，y_2-y_1)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，A、B两点间距离公式

（4）　平面向量的数量积

（1）$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$叫做向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的数量积（或内积）。

θ为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，$\theta\in[0，\pi]$



数量积的几何意义：

$\vec{a}\cdot\vec{b}$等于$|\vec{a}|$与$\vec{b}$在$\vec{a}$的方向上的射影$|\vec{b}|\cos\theta$的乘积。

（2）数量积的运算法则

①$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

②$(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

③$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2$

注意：数量积不满足结合律$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}\neq\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$

（3）重要性质：设$\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$

①$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=0$

②$\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$或$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$\Leftrightarrow\vec{a}=\lambda\vec{b}$（$\vec{b}\neq 0$，$\lambda$惟一确定）

$\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$

③$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=x_1^2+y_1^2$，$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

④$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\quad}$

［练习］

（1）已知正方形ABCD，边长为1，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=$______

答案： 2

（2）若向量$\vec{a}=(x,1)$，$\vec{b}=(4,x)$，当$x=$_____时$\vec{a}$与$\vec{b}$共线且方向相同

答案：2

（3）已知$\vec{a}$、$\vec{b}$均为单位向量，它们的夹角为60°，那么$|\vec{a}+3\vec{b}|=$ _____

答案：

（5） 线段的定比分点

设$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，分点$P(x,y)$，设P_1、P_2是直线l上两点，P点在l上且不同于P_1、P_2，若存在一实数λ，使$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则$\lambda$叫做P分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$所成的比（$\lambda>0$，P在线段$P_1P_2$内，$\lambda<0$，P在$P_1P_2$外），且

$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$，P为$P_1P_2$中点时，$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2}{2}\\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{cases}$

如：ΔABC，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$

则ΔABC重心G的坐标是$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

※．你能分清三角形的重心、垂心、外心、内心及其性质吗？

（6） 立体几何中平行、垂直关系证明的思路清楚吗

？平行垂直的证明主要利用线面关系的转化：

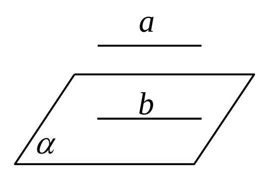
线∥线$\longleftrightarrow$线∥面$\longleftrightarrow$面∥面

$\xrightarrow{\text{判定}}$线⊥线$\longleftrightarrow$线⊥面$\longleftrightarrow$面⊥面$\xleftarrow{\text{性质}}$

线∥线$\longleftrightarrow$线⊥面$\longleftrightarrow$面∥面

线面平行的判定：

$a\parallel b$，$b\subset$面α，$a\not\subset\alpha\Rightarrow a\parallel$面$\alpha$



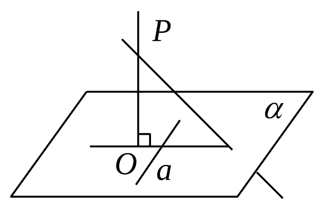
线面平行的性质：

$a /\!/ 面\alpha，a \subset 面\beta，\alpha \cap \beta = b \Rightarrow a /\!/ b$

三垂线定理（及逆定理）：

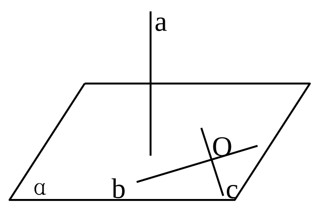
$PA \perp 面\alpha$，AO为PO在α内射影，$a \subset 面\alpha$，则

$a \perp OA \Rightarrow a \perp PO$；$a \perp PO \Rightarrow a \perp AO$



线面垂直：

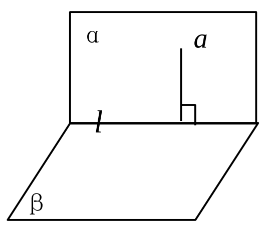
$a \perp b，a \perp c，b，c \subset \alpha，b \cap c = O \Rightarrow a \perp \alpha$



面面垂直：

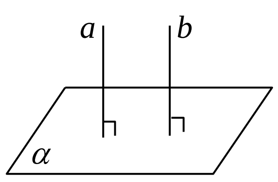
$a \perp 面\alpha，a \subset 面\beta \Rightarrow \beta \perp \alpha$

$面\alpha \perp 面\beta，\alpha \cap \beta = l，a \subset \alpha，a \perp l \Rightarrow a \perp \beta$



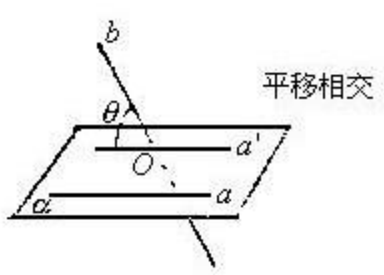
$a \perp 面\alpha，b \perp 面\alpha \Rightarrow a /\!/ b$

$面\alpha \perp a，面\beta \perp a \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$



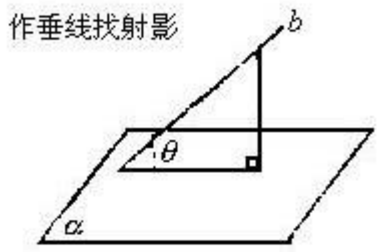
（7）　三类角的定义及求法

（1）异面直线所成的角θ，0°＜θ≤90°

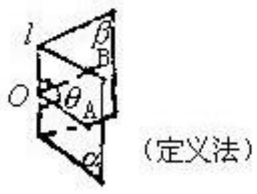


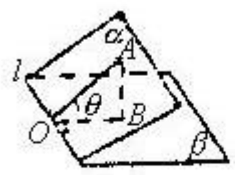
（2）直线与平面所成的角θ，0°≤θ≤90°

$\theta = 0^{\circ}$时，$b /\!/ \alpha$或$b \subset \alpha$



（3）二面角：二面角$\alpha-l-\beta$的平面角θ，$0^{\circ}<\theta\leq 180^{\circ}$





（三垂线定理法：A∈α 作或证 AB⊥β 于 B，作 BO⊥棱于 O，连 AO，则 AO⊥棱 *l*，∴∠AOB 为所求。）三类角的求法：

①找出或作出有关的角。

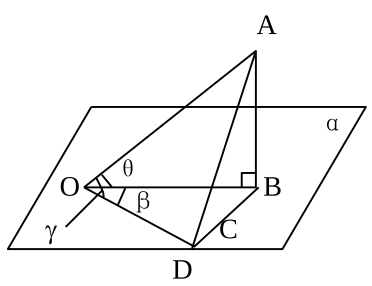
②证明其符合定义，并指出所求作的角。

③计算大小（解直角三角形，或用余弦定理）。

［练习］

（1）如图，OA 为α 的斜线 OB 为其在α 内射影，OC 为α 内过 O 点任一直线。

证明：$\cos\gamma=\cos\theta\cdot\cos\beta$



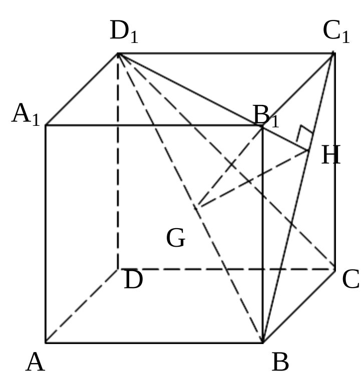
（θ为线面成角，∠AOC = γ，∠BOC = β）

（2）如图，正四棱柱 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 中对角线 BD_1＝8，BD_1 与侧面 B_1BCC_1 所成的为 30°。

①求 BD_1 和底面 ABCD 所成的角；

②求异面直线 BD_1 和 AD 所成的角；

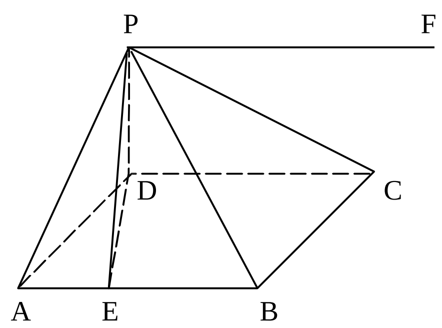
③求二面角 C_1—BD_1—B_1 的大小。



（①$\arcsin\frac{3}{4}$；②$60^{\circ}$；③$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$）

（3）如图 ABCD 为菱形，∠DAB＝60°，PD⊥面 ABCD，且 PD＝AD，求面 PAB 与面 PCD 所成的锐二面角的大

小。



（∵AB∥DC，P 为面 PAB 与面 PCD 的公共点，作 PF∥AB，则 PF 为面 PCD 与面PAB 的交线……）

（8）　空间有几种距离？如何求距离？

点与点，点与线，点与面，线与线，线与面，面与面间距离。

将空间距离转化为两点的距离，构造三角形，解三角形求线段的长（如：三垂线定理法，或者用等积转化法）。

如：正方形 ABCD—$A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 a，则：

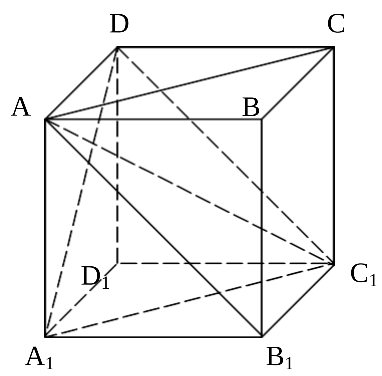
（1）点 C 到面 AB_1C_1 的距离为___________；

（2）点 B 到面 ACB_1 的距离为___________；

（3）直线 A_1D_1 到面 AB_1C_1 的距离为___________；

（4）面 AB_1C 与面 A_1DC_1 的距离为___________；

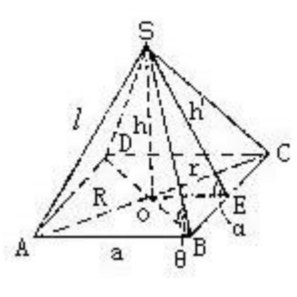
（5）点 B 到直线 A_1C_1 的距离为___________。



（9）　你是否准确理解正棱柱、正棱锥的定义并掌握它们的性质

? 正棱柱——底面为正多边形的直棱柱

正棱锥——底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面的中心。



正棱锥的计算集中在四个直角三角形中：

$Rt\Delta SOB$，$Rt\Delta SOE$，$Rt\Delta BOE$和$Rt\Delta SBE$

它们各包含哪些元素？

$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}C\cdot h'$（C——底面周长，h' 为斜高）

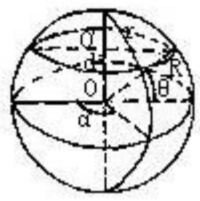
$V_{锥}=\frac{1}{3}$底面积×高

（10）　球有哪些性质？

（1）球心和截面圆心的连线垂直于截面 $r=$

（2）球面上两点的距离是经过这两点的大圆的劣弧长。为此，要找球心角！

（3）如图， θ 为纬度角，它是线面成角； α 为经度角，它是面面成角。



（4）$S_{球}=4\pi R^2$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

（5）球内接长方体的对角线是球的直径。正四面体的外接球半径 R 与内切球半径 r 之比为 R：r＝3：1。

如：一正四面体的棱长均为 $\sqrt{2}$，四个顶点都在同一球面上，则此球的表面

积为（　　）

□ 3π　　□ 4π　　C. $3\sqrt{3}\pi$　　D. 6π

答案：A

（11） 熟记下列公式了吗？

（1）l 直线的倾斜角 $\alpha\in[0,\pi)$，$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2},\ x_1\neq x_2\right)$

$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是 l 上两点，直线 l 的方向向量 $\vec{a}=(1,k)$

（2）直线方程：

点斜式：$y-y_0=k(x-x_0)$（k存在）

斜截式：$y=kx+b$

截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

一般式：$Ax+By+C=0$（A、B不同时为零）

（3）点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 l：$Ax+By+C=0$ 的距离 $d=$

（4）l_1 到 l_2 的到角公式：$\tan\theta=\frac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}$

l_1 与 l_2 的夹角公式：$\tan\theta=$

（12） 如何判断两直线平行、垂直？

$\left.\begin{array}{l}A_1B_2=A_2B_1\\ A_1C_2\neq A_2C_1\end{array}\right\}\Leftrightarrow l_1/\!/l_2$

$k_1=k_2\Rightarrow l_1/\!/l_2$（反之不一定成立）

$A_1A_2+B_1B_2=0\Leftrightarrow l_1\perp l_2$

$k_1\cdot k_2=-1\Rightarrow l_1\perp l_2$

（13） 怎样判断直线 l 与圆 C 的位置关系

？圆心到直线的距离与圆的半径比较。

直线与圆相交时，注意利用圆的“垂径定理”。

（14） 怎样判断直线与圆锥曲线的位置？

联立方程组 $\Rightarrow$ 关于x（或y）的一元二次方程 $\Rightarrow$ “Δ”

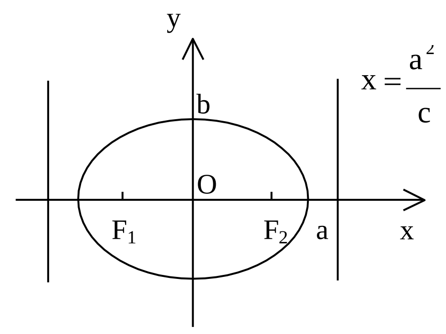
$\Delta>0 \Leftrightarrow$ 相交；$\Delta=0 \Leftrightarrow$ 相切；$\Delta<0 \Leftrightarrow$ 相离

（15） 分清圆锥曲线的定义

第一定义 $\begin{cases} \text{椭圆} \Leftrightarrow |PF_1|\ 88.\ |PF_2| = 2a,\ 2a>2c=|F_1F_2| \\ \text{双曲线} \Leftrightarrow \big||PF_1|-|PF_2|\big| = 2a,\ 2a<2c=|F_1F_2| \\ \text{抛物线} \Leftrightarrow |PF|=|PK| \end{cases}$

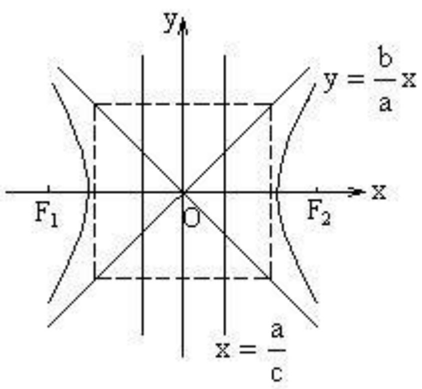
第二定义：$e = \frac{\quad}{\quad} = \frac{c}{a}$

$0<e<1 \Leftrightarrow$ 椭圆；$e>1 \Leftrightarrow$ 双曲线；$e=1 \Leftrightarrow$ 抛物线



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

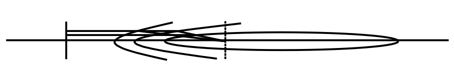
$(a^2=b^2+c^2)$



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$

$(c^2=a^2+b^2)$

e>1　e=1



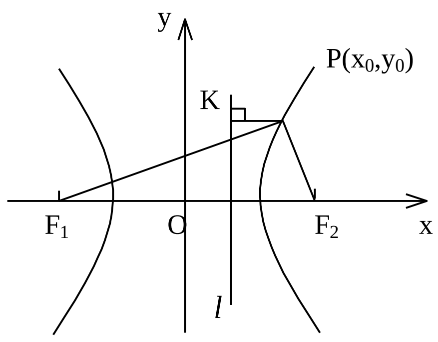
（16） 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 有相同焦点的双曲线系为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\lambda\ (\lambda\neq 0)$

（17） 在圆锥曲线与直线联立求解时，消元后得到的方程，要注意其二次项系数是否为零？△≥0 的限制。（求交点，弦长，中点，斜率，对称存在性问题都在△≥0　下进行。）

弦长公式 $|P_1P_2|=$

$=$

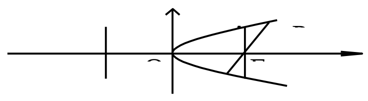
（18） 会用定义求圆锥曲线的焦半径吗？如：



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{|PF_2|}{|PK|}=e$，$|PF_2|=e\left(x_0-\frac{a^2}{c}\right)=ex_0-a$

$|PF_1|=ex_0+a$



x

$y^2=2px(p>0)$

通径是抛物线的所有焦点弦中最短者；以焦点弦为直径的圆与准线相切。

（19）有关中点弦问题可考虑用“代点法”。

如：椭圆$mx^2+ny^2=1$与直线 $y=1-x$交于M、N两点，原点与MN中点连线的斜率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\frac{m}{n}$的值为________

答案：$\frac{m}{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（20）如何求解“对称”问题？

（1）证明曲线C：F（x，y）＝0关于点M（a，b）成中心对称，设A（x，y）为曲线C上任意一点，设A’（x’，y’）为A关于点M的对称点。

（由$a=\frac{x+x'}{2}$，$b=\frac{y+y'}{2}\Rightarrow x'=2a-x$，$y'=2b-y$）

只要证明$A'(2a-x,\ 2b-y)$也在曲线C上，即$f(x')=y'$

（2）点A、A' 关于直线l对称$\Leftrightarrow\begin{cases}AA'\perp l\\ AA'\text{ 中点在 }l\text{ 上}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}k_{AA'}\cdot k_l=-1\\ AA'\text{ 中点坐标满足 }l\text{ 方程}\end{cases}$

（21） 圆$x^2+y^2=r^2$的参数方程为$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$（θ为参数）

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数方程为$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$（θ为参数）

（22）求轨迹方程的常用方法有哪些？注意讨论范围。

（直接法、定义法、转移法、参数法）

（23）对线性规划问题：作出可行域，作出以目标函数为截距的直线，在可行域内平移直线，求出目标函数的

最值

高中数学知识易错点梳理

一、集合、简易逻辑、函数

1. 研究集合必须注意集合元素的特征即三性(确定,互异,无序); 已知集合A={x,xy,lgxy},集合B={0,∣x∣,y},且A=B,则x+y=_______

2. 研究集合,首先必须弄清代表元素,才能理解集合的意义。已知集合M={y∣y=x^2 ,x∈R},N={y∣y=x^2+1,x∈R},求M∩N;与集合M={(x,y)∣y=x^2 ,x∈R},N={(x,y)∣y=x^2+1,x∈R}求M∩N的区别。

3. 集合 A、B,$A\cap B=\varnothing$时，你是否注意到“极端”情况：$A=\varnothing$或$B=\varnothing$；求集合的子集$A\subseteq B$时是否忘记$\varnothing$. 例如：$(a-2)x^2+2(a-2)x-1<0$对一切$x\in R$恒成立，求a的取植范围，你讨论了a＝2的情况了吗？

4. 对于含有n个元素的有限集合M, 其子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数依次为$2^n, 2^n-1, 2^n-1, 2^n-2.$ 如满足条件$\{1\}\subseteq M\subset\{1,2,3,4\}$的集合$M$共有多少个

5. 解集合问题的基本工具是韦恩图; 某文艺小组共有 10 名成员,每人至少会唱歌和跳舞中的一项,其中 7 人会唱歌跳舞 5 人会,现从中选出会唱歌和会跳舞的各一人，表演一个唱歌和一个跳舞节目,问有多少种不同的选法?

6. 两集合之间的关系。$M=\{x|x=2k+1,k\in Z\},N=\{x|x=4k\pm1,k\in Z\}$

7. $(C_UA)\cap(C_UB)=C_U(A\cup B)$ $(C_UA)\cup(C_UB)=C_U(A\cap B)$; $A\cap B=B\Rightarrow B\subseteq A$;

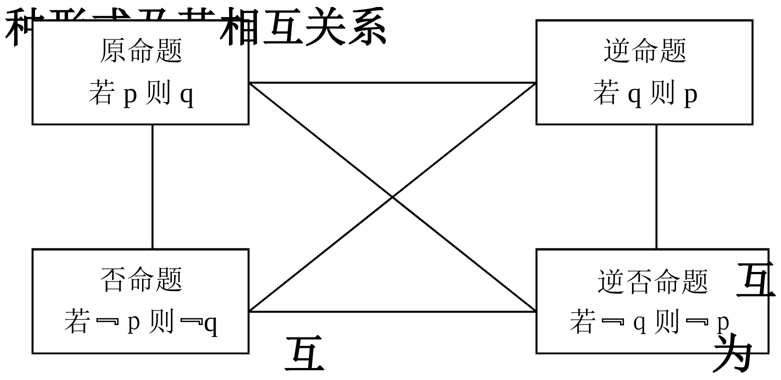
8、可以判断真假的语句叫做命题.

逻辑连接词有“或”、“且”和“非”.

p、q形式的复合命题的真值表:

p	q	P且	P或
真	真	真	真
真	假	假	真
假	真	假	真
假	假	假	假

A. 命题的四种形式及其相互关系



逆

互

互 为 互

否 逆 逆

否否 否

否 否

否　　互　　　　逆

原命题与逆否命题同真同假；逆命题与否命题同真同假.

10、你对映射的概念了解了吗？映射 f：A→B 中，A 中元素的任意性和 B 中与它对应元素的唯一性，哪几种对应能够成映射？

11、函数的几个重要性质：

①如果函数$y=f(x)$对于一切$x\in R$，都有$f(a+x)=f(a-x)$或 f（2a-x）=f（x），那么函数$y=f(x)$的图象关于直线$x=a$对称.

②函数$y=f(x)$与函数$y=f(-x)$的图象关于直线$x=0$对称；

函数$y=f(x)$与函数$y=-f(x)$的图象关于直线$y=0$对称；

函数$y=f(x)$与函数$y=-f(-x)$的图象关于坐标原点对称.

③若奇函数$y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是递增函数，则$y=f(x)$在区间$(-\infty,0)$上也是递增函数.

④若偶函数$y=f(x)$在区间$(0,+\infty)$上是递增函数，则$y=f(x)$在区间$(-\infty,0)$上是递减函数.

⑤函数$y=f(x+a)(a>0)$的图象是把函数$y=f(x)$的图象沿 x 轴向左平移 a 个单位得到的;函数$y=f(x+a)$($(a<0)$的图象是把函数$y=f(x)$的图象沿 x 轴向右平移$|a|$个单位得到的;

函数$y=f(x)$+a$(a>0)$的图象是把函数$y=f(x)$助图象沿 y 轴向上平移 a 个单位得到的;函数$y=f(x)$+a$(a<0)$的图象是把函数$y=f(x)$助图象沿 y 轴向下平移$|a|$个单位得到的.

12、求一个函数的解析式和一个函数的反函数时，你标注了该函数的定义域了吗？

13、求函数的定义域的常见类型记住了吗？函数 y=$\frac{\sqrt{x(4-x)}}{\lg(x-3)^2}$的定义域是__________；

复合函数的定义域弄清了吗？函数$f(x)$的定义域是[0,1],求$f(\log_{0.5}x)$的定义域. 函数$f(x)$的定义域是[a,b],$b>-a>0$,求函数$F(x)=f(x)+f(-x)$的定义域

14、含参的二次函数的值域、最值要记得讨论。若函数$y=a\sin^2x+2\cos x-a-2(a\in R)$的最小值为$m$，求$m$的表达

15、函数与其反函数之间的一个有用的结论：设函数 y=f(x)的定义域为A,值域为C,则

①若a∈A,则$a=f^{-1}[f(a)]$；　若b∈C,则$b=f[f^{-1}(b)]$；②若p∈C,求$f^{-1}(p)$就是令p=f(x),求x.(x∈A)　即$f^{-1}(a)=b\Leftrightarrow f(b)=a$.互为反函数的两个函数的图象关于直线 y=x 对称,

16、互为反函数的两个函数具有相同的单调性;原函数$y=f(x)$在区间$[-a,a]$上单调递增，则一定存在反函数，且反函数$y=f^{-1}(x)$也单调递增；但一个函数存在反函数，此函数不一定单调.

17、 判断一个函数的奇偶性时，你注意到函数的定义域是否关于原点对称这个必要非充分条件了吗？ 在公共定义域内:两个奇函数的乘积是偶函数;两个偶函数的乘积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数;

18、根据定义证明函数的单调性时，规范格式是什么？(取值, 作差,判正负.)可别忘了导数也是判定函数单调性的一种重要方法。

19、 你知道函数$y=x+\frac{a}{x}$ $(a>0)$的单调区间吗？（该函数在$(-\infty,-\sqrt{a}]$和$[\sqrt{a},+\infty)$上单调递增；在$[-\sqrt{a},0)$和$(0,\sqrt{a}]$上单调递减）这可是一个应用广泛的函数！

20、 解对数函数问题时，你注意到真数与底数的限制条件了吗？（真数大于零，底数大于零且不等于 1）字母底数还需讨论呀.

21、 对数的换底公式及它的变形，你掌握了吗？（ $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}, \log_{a^n} b^n=\log_a b$）

22、 你还记得对数恒等式吗？（$a^{\log_a b}=b$）

23、 “实系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0$有实数解”转化为“ $\Delta=b^2-4ac\geq 0$”，你是否注意到必须$a\neq 0$；当 a=0时，“方程有解”不能转化为$\Delta=b^2-4ac\geq 0$．若原题中没有指出是“二次”方程、函数或不等式，你是否考虑到二次项系数可能为零的情形？

二、三角、不等式

24、 三角公式记住了吗？两角和与差的公式________________； 二倍角公式:__________________万能公式______________正切半角公式____________________；解题时本着“三看”的基本原则来进行:“看角,看函数,看特征”,基本的技巧有:巧变角,公式变形使用,化切割为弦,用倍角公式将高次降次,

25、 在解三角问题时，你注意到正切函数、余切函数的定义域了吗？正切函数在整个定义域内是否为单调函数？你注意到正弦函数、余弦函数的有界性了吗？

26、 在三角中，你知道 1 等于什么吗？（$1=\sin^2 x+\cos^2 x=\sec^2 x-\tan^2 x=\tan x\cdot\cot x=\tan\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=\cdots\cdots$这些统称为 1 的代换）常数 “1”的种种代换有着广泛的应用．（还有同角关系公式：商的关系，倒数关系，平方关系；诱导公试：奇变偶不变，符号看象限）

27、 在三角的恒等变形中，要特别注意角的各种变换．（如$\beta=(\alpha+\beta)-\alpha, \beta=(\alpha-\beta)+\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}=\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$等）

28、 你还记得三角化简题的要求是什么吗？项数最少、函数种类最少、分母不含三角函数、且能求出值的式子，一定要算出值来）

29、 你还记得三角化简的通性通法吗？（切割化弦、降幂公式、用三角公式转化出现特殊角．异角化同角，异名化同名，高次化低次）；你还记得降幂公式吗？$\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$;$\sin^2 x=(1-\cos 2x)/2$

30、 你还记得某些特殊角的三角函数值吗？

$$\left(\sin 15^\circ=\cos 75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$$

31、 你还记得在弧度制下弧长公式和扇形面积公式吗？（$l=|\alpha|r, S_{扇形}=\frac{1}{2}lr$）

32、 辅助角公式：$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)$(其中$\theta$角所在的象限由 a, b 的符号确定，$\theta$角的值由$\tan\theta=\frac{b}{a}$确定)在求最值、化简时起着重要作用.

33、 三角函数（正弦、余弦、正切）图象的草图能迅速画出吗？能写出他们的单调区、对称轴，取最值时的 x 值的集合吗？（别忘了 $k\in Z$）

三角函数性质要记牢。函数 y=$A\sin(\omega\cdot x+\varphi)+k$ 的图象及性质：

振幅|A|，周期 T=$\frac{2\pi}{\quad}$, 若 x=x_0为此函数的对称轴，则 x_0是使 y 取到最值的点，反之亦然，使 y 取到最值的 x 的集合为——————————————， 当$\omega>0, A>0$时函数的增区间为———————— ，减区间为————————；当$\omega<0$时要利用诱导公式将ω变为大于零后再用上面的结论。

五点作图法：令$\omega x+\varphi$依次为$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ 求出 x 与 y，依点(x, y)作图

34、 三角函数图像变换还记得吗？

平移公式　（1）如果点 P（x，y）按向量 $\vec{a}=(h,k)$ 平移至 P′（x′，y′），则 $\begin{cases} x'=x+h, \\ y'=y+k. \end{cases}$

（2）曲线 f（x，y）=0 沿向量 $\vec{a}=(h,k)$ 平移后的方程为 f（x-h，y-k）=0

35、 有关斜三角形的几个结论：(1) 正弦定理：(2)余弦定理：(3)面积公式

36、 在用反三角函数表示直线的倾斜角、两条异面直线所成的角等时，你是否注意到它们各自的取值范围及意义？

①异面直线所成的角、直线与平面所成的角、向量的夹角的取值范围依次是 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right],\left[0,\frac{\pi}{2}\right],[0,\pi]$．

②直线的倾斜角、l_1 到 l_2 的角、l_1 与 l_2 的夹角的取值范围依次是 $[0,\pi),[0,\pi),\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$．

③反正弦、反余弦、反正切函数的取值范围分别是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],[0,\pi],\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$．

37、 同向不等式能相减，相除吗？

38、 不等式的解集的规范书写格式是什么？（一般要写成集合的表达式）

39、 分式不等式 $\frac{f(x)}{g(x)}>a(a\neq 0)$ 的一般解题思路是什么？（移项通分，分子分母分解因式，x 的系数变为正值，奇穿偶回）

40、 解指对不等式应该注意什么问题？（指数函数与对数函数的单调性，对数的真数大于零.）

41、 含有两个绝对值的不等式如何去绝对值？(一般是根据定义分类讨论)

42、 利用重要不等式 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 以及变式 $ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ 等求函数的最值时，你是否注意到 a，b $\in R^+$（或 a，b 非负），且“等号成立”时的条件，积 ab 或和 a＋b 其中之一应是定值？(一正二定三相等)

43、 $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\ge\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\ge\frac{2ab}{a+b}$ $(a,b\in R^+)$（当且仅当 $a=b=c$ 时，取等号）； a、b、c$\in$R，$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$（当且仅当 $a=b=c$ 时，取等号）；

44、 在解含有参数的不等式时，怎样进行讨论？（特别是指数和对数的底 $0<a<1$ 或 $a>1$）讨论完之后，要写出：综上所述，原不等式的解集是…….

45、 解含参数的不等式的通法是“定义域为前提，函数增减性为基础，分类讨论是关键.”

46、 对于不等式恒成立问题，常用的处理方式？（转化为最值问题）

三、数列

47、 等差数列中的重要性质：（1）若 $m+n=p+q$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$；（2）数列 $\{a_{2n-1}\},\{a_{2n}\},\{ka_n+b\}$ 仍成等差数；$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n}$ 仍成等差

（3）若三数成等差数列，则可设为a-d、a、a+d；若为四数则可设为a-$\frac{3}{2}d$、a-$\frac{1}{2}d$、a+$\frac{1}{2}d$、a+$\frac{3}{2}d$；

（4）在等差数列中,求S_n 的最大(小)值,其思路是找出某一项,使这项及它前面的项皆取正(负)值或0,而它后面各项皆取负(正)值,则从第一项起到该项的各项的和为最大(小).即:当a_1 >0,d<0,解不等式组 a_n ≥0 a_{n+1} ≤0 可得S_n 达最大值时的n的值;当a_1 <0,d>0,解不等式组 a_n ≤0 a_{n+1} ≥0 可得S_n 达最小值时的n的值;(5).若 a_n ,b_n 是等差数列,S_n ,T_n 分别为a_n ,b_n 的前n项和,则 $\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$。．(6)．若 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{a^{a_n}\}$ 是等比数列，若 $\{a_n\}$ 是等比数列且 $a_n>0$，则 $\{\log_a a_n\}$ 是等差数列.

48、 等比数列中的重要性质：（1）若$m+n=p+q$，则$a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$；（2）$S_k$，$S_{2k}-S_k$，$S_{3k}-S_{2k}$成等比数列

49、 你是否注意到在应用等比数列求前n 项和时，需要分类讨论．（$q=1$时，$S_n=na_1$；$q\neq 1$时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$）

50、 等比数列的一个求和公式：设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，公比为q， 则

$S_{m+n}=S_m+q^m S_n$。

51、 等差数列的一个性质：设S_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$\{a_n\}$为等差数列的充要条件是

$S_n=an^2+bn$ （a，b 为常数）其公差是2a.

52、 你知道怎样的数列求和时要用“错位相减”法吗？（若$c_n=a_nb_n$，其中$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，求$\{c_n\}$的前 n 项的和）

53、 用$a_n=S_n-S_{n-1}$求数列的通项公式时，你注意到$a_1=S_1$了吗？

54、 你还记得裂项求和吗？（如$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$．）

四、排列组合、二项式定理

55、 解排列组合问题的依据是：分类相加，分步相乘，有序排列，无序组合.

56、 解排列组合问题的规律是：相邻问题捆绑法；不邻问题插空法；多排问题单排法；定位问题优先法；多元问题分类法；有序分配问题法；选取问题先排后排法；至多至少问题间接法，还记得什么时候用隔板法？

57、 排列数公式是： 组合数公式是： 排列数与组合数的关系是：$P_n^m=m!\cdot C_n^m$

组合数性质：$C_n^m=C_n^{n-m}$ $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$ $\sum_{r=0}^{n}C_n^r=2^n$

$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\cdots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$

二项式定理：$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$

二项展开式的通项公式：$T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r\ (r=0,1,2\cdots,n)$

五、立体几何

58、 有关平行垂直的证明主要利用线面关系的转化：线//线⇔线//面⇔面//面，线⊥线⇔线⊥面⇔面⊥面，垂直常用向量来证。

59、 作出二面角的平面角主要方法是什么？（定义法、三垂线法）三垂线法：一定平面，二作垂线，三作斜线，射影可见.

60、 二面角的求法主要有：解直角三角形、余弦定理、射影面积法、法向量

61、 求点到面的距离的常规方法是什么？（直接法、等体积变换法、法向量法）

62、 你记住三垂线定理及其逆定理了吗？

63、 有关球面上两点的球面距离的求法主要是找球心角，常常与经度及纬度联系在一起，你还记得经度及纬度的含义吗？(经度是面面角；纬度是线面角)

64、 你还记得简单多面体的欧拉公式吗？(V+F-E=2，其中 V 为顶点数，E 是棱数，F 为面数)，棱的两种算法，你还记得吗？(①多面体每面为 n 边形，则 E=$\frac{nF}{2}$；②多面体每个顶点出发有 m 条棱，则 E=$\frac{mV}{2}$)

六、解析几何

65、 设直线方程时，一般可设直线的斜率为 k，你是否注意到直线垂直于 x 轴时，斜率 k 不存在的情况？（例

如：一条直线经过点$\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$，且被圆$x^2+y^2=25$截得的弦长为 8，求此弦所在直线的方程。该题就要注意，不要漏掉 x+3=0 这一解.）

66、 定比分点的坐标公式是什么？（起点，中点，分点以及λ值可要搞清）

线段的定比分点坐标公式

设 P（x，y），P_1（x_1，y_1），P_2（x_2，y_2），且$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}$$

中点坐标公式

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，则△ABC 的重心 G 的坐标是$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$。

67、 在利用定比分点解题时，你注意到$\lambda\neq-1$了吗？

68、 在解析几何中，研究两条直线的位置关系时，有可能这两条直线重合，而在立体几何中一般提到的两条直线可以理解为它们不重合.

69、 直线方程的几种形式：点斜式、斜截式、两点式、截矩式、一般式. 以及各种形式的局限性.（如点斜式不适用于斜率不存在的直线）

70、 对不重合的两条直线$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$，$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$，有

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \begin{cases} A_1B_2=A_2B_1 \\ A_1C_2\neq A_2C_1 \end{cases}; \quad l_1\perp l_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2=0.$$

71、 直线在坐标轴上的截矩可正，可负，也可为 0.

72、 直线在两坐标轴上的截距相等，直线方程可以理解为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，但不要忘记当 a=0 时，直线 y=kx 在两条坐标轴上的截距都是 0，也是截距相等.

73、 两直线$Ax+By+C_1=0$和$Ax+By+C_2=0$的距离公式 d=——————————

74、 直线的方向向量还记得吗？直线的方向向量与直线的斜率有何关系？当直线 L 的方向向量为$\vec{m}$=（x_0，y_0）时，直线斜率 k=————————；当直线斜率为 k 时，直线的方向向量$\vec{m}$=—————

75、 到角公式及夹角公式————————，何时用？

76、 处理直线与圆的位置关系有两种方法：（1）点到直线的距离；（2）直线方程与圆的方程联立，判别式. 一般来说，前者更简捷.

77、 处理圆与圆的位置关系，可用两圆的圆心距与半径之间的关系.

78、 在圆中，注意利用半径、半弦长、及弦心距组成的直角三角形并且要更多联想到圆的几何性质.

79、 在利用圆锥曲线统一定义解题时，你是否注意到定义中的定比的分子分母的顺序？两个定义常常结伴而用，有时对我们解题有很大的帮助，有关过焦点弦问题用第二定义可能更为方便。（焦半径公式：椭圆：$|PF_1|$=———；$|PF_2|$=———；双曲线：$|PF_1|$=———；$|PF_2|$=———（其中F_1为左焦点F_2为右焦点）；抛物线：$|PF|=|x_0|+\frac{p}{2}$）

80、 在用圆锥曲线与直线联立求解时，消元后得到的方程中要注意：二次项的系数是否为零？判别式$\Delta\geq 0$的限制．（求交点，弦长，中点，斜率，对称，存在性问题都在$\Delta>0$下进行）．

81、 椭圆中，a，b，c 的关系为____；离心率 e=____；准线方程为____；焦点到相应准线距离为____ 双曲线中，a，b，c 的关系为____；离心率 e=____；准线方程为____；焦点到相应准线距离为____

82、 通径是抛物线的所有焦点弦中最短的弦.

83、 你知道吗？解析几何中解题关键就是把题目中的几何条件代数化，特别是一些很不起眼的条件，有时起着关键的作用：如：点在曲线上、相交、共线、以某线段为直径的圆经过某点、夹角、垂直、平行、中点、角平分线、中点弦问题等。圆和椭圆参数方程不要忘，有时在解决问题时很方便。数形结合是解决解几问题的重要思想方法，要记得画图分析哟！

84、 你注意到了吗？求轨迹与求轨迹方程有区别的。求轨迹方程可别忘了寻求范围呀！

85、 在解决有关线性规划应用问题时，有以下几个步骤：先找约束条件，作出可行域，明确目标函数，其中关键就是要搞清目标函数的几何意义， 找可行域时要注意把直线方程中的 y 的系数变为正值。如： 求 2<5a-2b<4,-3<3a+b<3 求 a+b 的取值范围，但也可以不用线性规划。

七、向量

86、 两向量平行或共线的条件，它们两种形式表示，你还记得吗？注意$\vec{a}=\lambda\vec{b}$是向量平行的充分不必要条件。（定义及坐标表示）

87、 向量可以解决有关夹角、距离、平行和垂直等问题，要记住以下公式：$|\vec{a}|^2=\vec{a}\bullet\vec{a}$，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

88、 利用向量平行或垂直来解决解析几何中的平行和垂直问题可以不用讨论斜率不存在的情况，要注意$\vec{a}\bullet\vec{b}<0$是向量$\vec{a}$和向量$\vec{b}$ 夹角为钝角的必要而非充分条件。

89、 向量的运算要和实数运算有区别：如两边不能约去一个向量，向量的乘法不满足结合律，即$\vec{a}(\vec{b}\bullet\vec{c})\neq(\vec{a}\bullet\vec{b})\vec{c}$，切记两向量不能相除。

90、 你还记得向量基本定理的几何意义吗？它的实质就是平面内的任何向量都可以用平面内任意不共线的两个向量线性表示，它的系数的含义与求法你清楚吗？

91、 一个封闭图形首尾连接而成的向量和为零向量，这是题目中的天然条件，要注意运用，对于一个向量等式，可以移项，两边平方、两边同乘以一个实数，两边同时取模，两边同乘以 一个向量，但不能两边同除以一个向量。

92、 向量的直角坐标运算

设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$\vec{a}\bullet\vec{b}=(a_1\bullet b_1,a_2\bullet b_2,a_3 \square b_3)$

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1$ (7) $,a_1$ (8) $,a_2 b_2$ (9) $b_3 \quad b_3)$

$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)(\lambda\in R)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\quad} = \sqrt{\quad}$

$\cos < \vec{a}, \vec{b} > = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{\quad}\,\sqrt{\quad}}$

$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, a_3 = \lambda b_3, (\lambda \in R)$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

设 A=(x_1, y_1, z_1)，B=(x_2, y_2, z_2)，

则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\quad + \quad}$

八、导数

93、 导数的几何意义即曲线在该点处的切线的斜率，学会定义的多种变形。

94、 几个重要函数的导数：①$C' = 0$，（C 为常数）②$(x^n)' = nx^{n-1}(n \in Q)$

导数的四运算法则$(\mu \pm \upsilon)' = \mu' \pm \upsilon'$

95、 利用导数可以证明或判断函数的单调性，注意当 f ’(x)≥0 或 f ’(x)≤0，带上等号。

96、 $f'(x_0)$=0 是函数 f(x)在 x_0 处取得极值的非充分非必要条件，f(x)在 x_0 处取得极值的充分要条件是什么？

97、 利用导数求最值的步骤：（1）求导数 $f'(x)$（2）求方程 $f'(x)$=0 的根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$

（3）计算极值及端点函数值的大小

（4）根据上述值的大小,确定最大值与最小值.

98、 求函数极值的方法：先找定义域，再求导，找出定义域的分界点，根据单调性求出极值。告诉函数的极值这一条件，相当于给出了两个条件：①函数在此点导数值为零，②函数在此点的值为定值。

九、概率统计

99、 有关某一事件概率的求法：把所求的事件转化为等可能事件的概率(常常采用排列组合的知识)，转化为若干个互斥事件中有一个发生的概率，利用对立事件的概率，转化为相互独立事件同时发生的概率，看作某一事件在 n 次实验中恰有 k 次发生的概率，但要注意公式的使用条件。

1）若事件A、B 为互斥事件,则

P（A+B）=P（A）+P（B）

（2）若事件 A、B 为相互独立事件,则

P（A•B）=P（A）•P（B）

（3）若事件 A、B 为对立事件,则

P（A）+P（B）=1

一般地，$p(\overline{A}) = 1 - P(A)$

（4）如果在一次试验中某事件发生的概率是 p,那么在 n 次独立重复试验中这个事恰好发生 K 次的概率

$P_n(K) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

100、 抽样方法主要有：简单随机抽样(抽签法、随机样数表法)常常用于总体个数较少时，它的主要特征是从总体中逐个抽取；系统抽样，常常用于总体个数较多时，它的主要特征就是均衡成若干部分，每一部分只取一

个；分层抽样，主要特征分层按比例抽样，主要使用于总体中有明显差异。它们的共同特征是每个个体被抽到的概率相等。

101、用总体估计样本的方法就是把样本的频率作为总体的概率。

十、解题方法和技巧

102、总体应试策略：先易后难，一般先作选择题，再作填空题，最后作大题，选择题力保速度和准确度为后面大题节约出时间，但准确度是前提，对于填空题，看上去没有思路或计算太复杂可以放弃，对于大题，尽可能不留空白，把题目中的条件转化代数都有可能得分，在考试中学会放弃，摆脱一个题目无休止的纠缠，给自己营造一个良好的心理环境，这是考试成功的重要保证。

103、解答选择题的特殊方法是什么？(顺推法，估算法，特例法，特征分析法，直观选择法，逆推验证法、数形结合法等等)

104、解答填空题时应注意什么？（特殊化，图解，等价变形）

105、解答应用型问题时，最基本要求是什么？（审题、找准题目中的关键词，设未知数、列出函数关系式、代入初始条件、注明单位、答）

106、解答开放型问题时，需要思维广阔全面，知识纵横联系.

107、解答信息型问题时，透彻理解问题中的新信息，这是准确解题的前提.

108、解答多参型问题时，关键在于恰当地引出参变量， 想方设法摆脱参变量的困绕．这当中，参变量的分离、集中、消去、代换以及反客为主等策略，似乎是解答这类问题的通性通法.

109、学会跳步得分技巧，第一问不会，第二问也可以作，用到第一问就直接用第一问的结论即可，要学会用“由已知得”“由题意得”“由平面几何知识得”等语言来连接，一旦你想来了，可在后面写上“补证”即可。