Valor numérico e raiz de um polinômio

Dado um polinômio $P(x)$, quando substituímos a variável x por um número complexo z qualquer e efetuamos os cálculos indicados, obtemos $P(z)$, que é o **valor numérico** de $P(x)$ para $x = z$.

Quando $P(z) = 0$, dizemos que o número complexo z é **raiz** do polinômio $P(x)$.

Exemplos:

a) Dado o polinômio $P(x) = -3x^3 - 5x^2 + 4x - 2$, vamos calcular $P(1)$. vídeo

$P(1) = -3 - 5 + 4 - 2$

$P(1) = -10 + 4 = -6$ //

b) Vamos encontrar o valor de b em $P(x) = 2x^3 - bx^2 + x - 2$ para que $-2i$ seja raiz desse polinômio. vídeo

$0 = 2.(-2i)^3 - b(-2i)^2 + (-2i) - 2$

$0 = 2.8i - b.(-4) - 2i - 2$

$0 = 16i + 4b - 2i - 2$

$0 = 14i + 4b - 2$

$4b = 2 - 14i$

$b = \frac{2 - 14i}{4}$

$b = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}i$ //

Exercícios resolvidos:

1) Determinar o polinômio $P(x)$ do 1º grau para que $P(8) = 13$ e $P(2) = 1$. vídeo

$\begin{cases} 8a + b = 13 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \times(-1)$

$8a + b = 13$
$-2a - b = -1$
$6a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{6} = 2$

$\begin{cases} 8a + b = 13 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow 2.2 + b = 1$

$b = 1 - 4$

$b = -3$ //

$P(x) = 2x - 3$

2) Sendo $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, calcular a e b sabendo que 2 e -1 são raízes de P e que $P(0) = -2$. vídeo

$P(2)=0 \quad P(-1)=0$

$c=-2$

$$\begin{cases} 0 = a\cdot 4 + b\cdot 2 - 2 \\ 0 = a\cdot 1 - b - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=2 \\ a-b=2 \quad \times 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4a+\cancel{2b}=2 \\ 2a-\cancel{2b}=4 \\ \hline 6a=6 \end{array}$$

$a = \frac{6}{6} = 1$

$a - b = 2$

$1-b=2$

$1-2=b$

$-1=b$

$\boxed{P(x)=x^2-x-2}$

Igualdade de polinômios

Dois polinômios, P e Q, na variável complexa x, são **iguais** (ou **idênticos**) quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável.

Assim: $P = Q \Leftrightarrow P(x) = Q(x)$, para $\forall\, x \in \mathbb{C}$

Para que dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ sejam iguais, é necessário e suficiente que os coeficientes dos termos semelhantes de $P(x)$ e $Q(x)$ sejam iguais.

Exemplo:

Para que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e $Q(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ sejam iguais, devemos ter $a = 4, b = 3, c = 2$ e $d = 1$.

Exercícios resolvidos:

1) Obter a, b, c, d, e e f, para que os polinômios $P(x) = -x^5 + 2x^3 + (d+2)x^2 - i\cdot x + 2$ e $Q(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 - x^2 + ex + f$ sejam iguais. vídeo

$$P(x) = -x^5 + 2x^3 + (d+2)x^2 - i\cdot x + 2$$

$$Q(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 - x^2 + ex + f$$

$a=1 \qquad e=-i \qquad d+2=-1$

$b=0 \qquad f=2 \qquad d=-1-2$

$c=2 \qquad\qquad\quad d=-3$

$d=-3$

2) Obter p, q e r, para que os polinômios $F(x) = (p+q)x^2 + (p-q)x + p + q - 2r$ e $H(x) = 5x - 6$ sejam idênticos. [vídeo]

$$\begin{cases} p + \cancel{q} = 0 \\ p - \cancel{q} = 5 \end{cases}$$

$2p = 5$

$p = \frac{5}{2}$

$q = -\frac{5}{2}$

$-2r = -6$

$r = \frac{-6}{-2} = 3$

Exercícios:

1) Discuta, em função dos valores de k, o grau de:

a) $G(x) = (k-7)x^3 + (k^2 - 49)x^2 + 2x - 1$

b) $P(x) = (k+3)x^4 + (k+1)x^3 - (k-1)x^2 - 5x + 4$

2) Dado $P(x) = 2x^4 + bx^3 - x^2 + 3$, calcule o valor de b para que $P(1) = 2i$.

3) Sendo $P(x)$ um polinômio do 2º grau tal que $P(-3) = 6$, $P(0) = 2$ e $P(2) = 1$, determine esse polinômio.

4) Encontre o valor de c para que 3 seja raiz de $P(x) = -x^3 + 2x^2 - cx + 1$.

5) Seja $P(x) = x^4 - (2a-1)x^3 + (b-3)x^2 - 3x$ um polinômio de raízes 2 e -1. Determine a e b.

6) Se i é raiz de $P(x) = px^3 + (q-3)x^2 - 2px - 1$, encontre p e q, sabendo que $P(1) = -i$.

7) Determine os valores de a, b, c e d para que os polinômios P e Q sejam iguais, sendo:

$P(x) = (a+3)x^2 + cx + 3$ e

$Q(x) = (b-6)x^3 + (4a-4)x^2 + 3x + d + 2$

8) Para que valores de a, b e c o polinômio $P(x) = (2a - b + 2)x^2 + (b - c)x + c - a + 1 = 0$ é idêntico ao polinômio nulo?