

Proposition de corrigé

Concours Commun Mines-Ponts

Sujet 2 Mathématiques 2024, filière MP/MPI
Phénomènes de seuil dans les graphes

Si vous repérez une coquille, une erreur, ou si vous avez une question ou une suggestion,
n'hésitez pas à me contacter !

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1.

On désigne par $\llbracket 1, n \rrbracket$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n .

Le groupe symétrique des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est noté \mathcal{S}_n .

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\text{card}(E)$ ou $|E|$.

Un graphe G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés sommets du graphe G ;
- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés arêtes du graphe G , une arête étant un ensemble $\{s, s'\}$ où s et s' sont des sommets distincts de S .

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit isolé.

Par convention, le graphe vide est le couple d'ensembles vides (\emptyset, \emptyset) .

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe ;
- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la Figure 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = \llbracket 1, 9 \rrbracket, \quad A = \left\{ \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{2, 9\}, \{2, 8\} \right\}$$

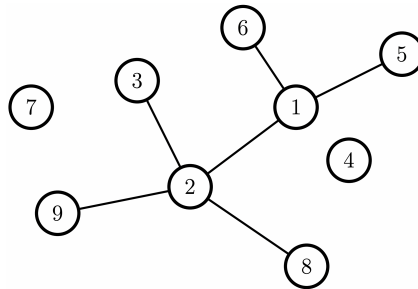


FIGURE 1. Un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de « boucles » reliant un sommet à lui-même.

De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une étoile de centre s et à d branches, avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \{s, s_1, s_2, \dots, s_d\}$ est de cardinal $d + 1$, et A est du type

$$A = \left\{ \{s, s_1\}, \{s, s_2\}, \dots, \{s, s_d\} \right\}.$$

On a représenté Figure 2, une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$. Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes ; on dit que :

- G' est inclus dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$;
- G' est une copie de G s'il existe une bijection $\sigma : S' \rightarrow S$ telle que

$$\forall (s', t') \in S' \times S', \quad \{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la Figure 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

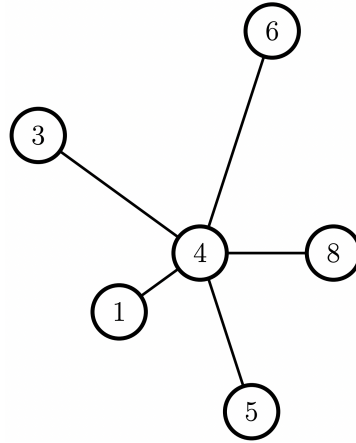


FIGURE 2. Une étoile à 5 branches

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires. Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I - Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi indexation) σ entre $\llbracket 1, n \rrbracket$ et S .

On pourra alors noter :

$$S = \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i .

Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la i -ème ligne et la j -ème colonne est :

$$(M_{G,\sigma})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\{i, j\} = \{j, i\}$), et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\text{id}}$ du graphe G représenté sur la Figure 1 :

$$M_{G,\text{id}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique \mathcal{S}_n et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 ▷ Montrer que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S , alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

☞ Réponse (première façon ; la plus efficace en passant par un endomorphisme)

On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et on considère u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que sa matrice dans la base canonique est M . On a donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i.$$

Par conséquent,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_{\rho(j)}) = \sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)} e_i.$$

Comme $\rho : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ est une bijection, on effectue un changement d'indice dans la somme :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(e_{\rho(j)}) = \sum_{i=1}^n m_{\rho(i),\rho(j)} e_{\rho(i)}.$$

Etant donné que $(e_{\rho(i)})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de \mathbb{R}^n , et que la matrice de u dans cette base est $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$, on en déduit que les matrices M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ représentent le même endomorphisme, donc M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

Fixons une permutation ρ que l'on choisira plus tard. D'après ci-dessus, $M_{G,\sigma}$ et $((M_{G,\sigma})_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables. Or,

$$(M_{G,\sigma})_{\rho(i),\rho(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(\rho(i)), \sigma(\rho(j))\} \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En choisissant $\rho = \sigma^{-1} \circ \sigma'$, on obtient $(M_{G,\sigma})_{\rho(i),\rho(j)} = (M_{G,\sigma'})_{i,j}$ donc $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

☞ Réponse (deuxième façon ; un peu plus calculatoire en n'utilisant que des matrices)

On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n et on considère $P_\rho \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de permutation associée à ρ , à savoir :

$$\text{Pour tout } j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_\rho e_j = e_{\rho(j)}.$$

P_ρ est une matrice orthogonale (car elle envoie une base orthonormale sur une base orthonormale) donc, en particulier, P_ρ est inversible, d'inverse P_ρ^{-1} .

(En effet, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(P_\rho^{-1} P_\rho) e_j = P_\rho^{-1} (P_\rho e_j) = P_\rho^{-1} (e_{\rho(j)}) = e_j$).

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$M e_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 (P_\rho^{-1} M P_\rho) e_j &= P_{\rho^{-1}} M (P_\rho e_j) \\
 &= P_{\rho^{-1}} (M e_{\rho(j)}) \\
 &= P_{\rho^{-1}} \left(\sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)} e_i \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)} (P_{\rho^{-1}} e_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n m_{i,\rho(j)} e_{\rho^{-1}(i)}.
 \end{aligned}$$

Comme $\rho : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ est une bijection, on effectue un changement d'indice dans la somme :

$$\begin{aligned}
 (P_\rho^{-1} M P_\rho) e_j &= \sum_{i=1}^n m_{\rho(i),\rho(j)} e_i \\
 &= \widetilde{M} e_j,
 \end{aligned}$$

où $\widetilde{M} = (m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$.

On en déduit que $P_\rho^{-1} M P_\rho = \widetilde{M}$, donc M et $(m_{\rho(i),\rho(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont semblables.

Si $M_{G,\text{id}} = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors, par définition, on a $M_{G,\sigma} = (m_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$, et le calcul ci-dessus montre que $M_{G,\sigma} = (P_\sigma)^{-1} M_{G,\text{id}} P_\sigma$.

De même, on a aussi : $M_{G,\sigma'} = (P_{\sigma'})^{-1} M_{G,\text{id}} P_{\sigma'}$, que l'on peut réécrire comme $M_{G,\text{id}} = P_{\sigma'} M_{G,\sigma'} (P_{\sigma'})^{-1}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 M_{G,\sigma} &= (P_\sigma)^{-1} M_{G,\text{id}} P_\sigma \\
 &= (P_\sigma)^{-1} P_{\sigma'} M_{G,\sigma'} (P_{\sigma'})^{-1} P_\sigma \\
 &= ((P_{\sigma'})^{-1} P_\sigma)^{-1} M_{G,\sigma'} ((P_{\sigma'})^{-1} P_\sigma).
 \end{aligned}$$

Il vient alors que $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

Remarque : On peut montrer que pour tout $\rho, \tau \in \mathcal{S}_n$, $P_{\rho \circ \tau} = P_\rho P_\tau$, et la dernière égalité se réécrit :

$$M_{G,\sigma} = (P_{\sigma'^{-1} \circ \sigma})^{-1} M_{G,\sigma'} (P_{\sigma'^{-1} \circ \sigma}).$$

Cela permet de retrouver la permutation ρ choisie dans la première approche.

2 ▷ Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

📖 Réponse

Comme une matrice d'adjacence d'un graphe est symétrique réelle, le théorème spectral s'applique : une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

3 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

📖 Réponse

Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe non vide. Si $n = 1$, le graphe est constitué d'un sommet et $M = 0$. On considère donc le cas $n \geq 2$.

Supposons par l'absurde que $\text{rg}(M) = 1$. Par le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(M) = n - 1$ donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$ (et, en fait, de multiplicité exactement $n - 1$ car la matrice M n'est pas nulle). La matrice étant diagonalisable, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \neq 0$.

Or, $\text{tr}(M) = 0$ (car il n'y a pas de boucle dans le graphe donc tous les termes diagonaux sont nuls) et deux matrices semblables ont la même trace, on trouve : $\text{tr}(M) = \lambda \neq 0$, ce qui est contradictoire.

Ainsi, une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

📖 Autre réponse possible

On se place dans le cas d'un graphe non vide ayant au moins $n \geq 2$ sommets.

Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe non vide. Il existe donc $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m_{i,j} = 1$ (et donc par symétrie $m_{j,i} = 1$). De plus, $m_{i,i} = m_{j,j} = 0$.

La i -ème colonne et la j -ème colonne ne sont pas liées. En effet, on peut extraire un mineur d'ordre 2 non nul :

$$\begin{vmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Donc $\text{rg}(M) \geq 2$.

Remarque : A noter que la question 1 montre que le rang d'une matrice d'adjacence ne dépend pas de l'indexation choisie car deux matrices semblables ont le même rang.

4 ▷ Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

📖 Réponse

Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets ($S = \llbracket 1, n \rrbracket$) non isolés forment une étoile, disons de centre i_0 et de branches $\left\{ \{i_0, i_1\}, \{i_0, i_2\}, \dots, \{i_0, i_d\} \right\}$ (avec $i_0, i_1, \dots, i_d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ deux à deux distincts). On a :

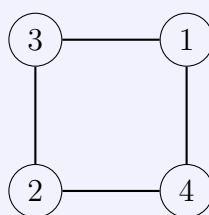
$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,j} = m_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j \notin \{i_1, \dots, i_d\} \\ 0 & \text{si } i \neq i_0. \end{cases}$$

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $C_j \in \mathbb{R}^n$ la j -ème colonne de M . On a :

$$C_j = \begin{cases} e_{i_0} & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ e_{i_1} + \dots + e_{i_d} & \text{si } j = i_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\text{Im}(M) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}(e_{i_0}, e_{i_1} + \dots + e_{i_d})$ et la famille $\{e_{i_0}, e_{i_1} + \dots + e_{i_d}\}$ est libre, on obtient que $\boxed{\text{rg}(M) = 2}$.

Voici un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type étoile :



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S , comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le polynôme caractéristique du graphe G .

Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

5 ▷ Soit G un graphe et G' une copie de G . Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

📖 Réponse

Si G est vide et G' une copie de G alors G' est également vide et on a $\chi_G = 1 = \chi_{G'}$. Sinon, on note $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$. Soit σ une indexation de S . Comme G' est une copie de G , il existe une bijection $\sigma' : S' \rightarrow S$ telle que :

$$\forall (s, t) \in S \times S, \quad \{s, t\} \in A \iff \{\sigma'(s), \sigma'(t)\} \in A'.$$

Ainsi, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} (M_{G,\sigma})_{i,j} &= \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma'(\sigma(i)), \sigma'(\sigma(j))\} \in A' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ &= (M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)}. \end{aligned}$$

On en déduit que $M_{G,\sigma} = ((M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$. Or, d'après la question 1, la matrice $((M_{G,\sigma'})_{\sigma(i),\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ est semblable à $M_{G,\sigma'}$ donc $M_{G,\sigma}$ est semblable à $M_{G,\sigma'}$. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, on en déduit que

$$\boxed{\chi_G = \chi_{G'}}.$$

6 ▷ Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geq 2$. On note $\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

📖 Réponse

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice d'adjacence du graphe G . On sait que $a_{n-1} = -\text{tr}(M)$ et les coefficients diagonaux de M sont nuls, donc $a_{n-1} = 0$.

On a : $X I_n - M = (P_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où

$$P_{i,j} = \begin{cases} X - m_{i,i} & \text{si } i = j \\ -m_{i,j} & \text{si } i \neq j \end{cases} = \begin{cases} X & \text{si } i = j \\ -m_{i,j} & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Par la formule du déterminant, on a

$$\chi_G(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)}.$$

Les termes de la somme qui nous intéressent sont les polynômes de degré $n - 2$.

Or, on peut remarquer que pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$:

$$\deg \left(\prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)} \right) = \text{Card} \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(i) = i\}.$$

- Si σ est une transposition de la forme $(i \ j)$ avec $1 \leq i < j \leq n$, on a $\deg \left(\prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)} \right) = n - 2$ et $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)} = -m_{i,j} m_{j,i} X^{n-2} = -m_{i,j}^2 X^{n-2}$.
- Si $\sigma = \text{Id}$, on a $\deg \left(\prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)} \right) = n$ et $(-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)} = X^n$.

- Si σ n'est ni l'identité, ni une transposition alors $\deg(\prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)}) < n - 2$.

Finalement : Pour un certain polynôme Q avec $\deg(Q) < n - 2$, on a

$$\begin{aligned}\chi_G(X) &= X^n + \sum_{\sigma \text{ transposition}} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^n P_{i,\sigma(i)} + Q \\ &= X^n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-m_{i,j}^2) X^{n-2} + Q.\end{aligned}$$

Par identification, on trouve :

$$a_{n-2} = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_{i,j}^2$$

Comme $m_{i,j} \in \{0, 1\}$ et que $m_{i,j} = 1$ représente une arête, on peut écrire :

$$a_{n-2} = - \sum_{1 \leq i < j \leq n, m_{i,j}=1} 1 = -\text{Card}(\{1 \leq i < j \leq n \mid m_{i,j} = 1\}) = -|A|.$$

En conclusion, on a $\boxed{a_{n-1} = 0 \text{ et } a_{n-2} = -|A|}$.

🔍 Autre réponse possible pour déterminer a_{n-2} ; un peu plus astucieuse

La matrice M étant diagonalisable de valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in [1,n]}$, son polynôme caractéristique est scindé :

$$\chi_G(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i).$$

Par les relations coefficients-racines on a :

$$a_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j.$$

Un calcul montre qu'on peut réécrire cela sous la forme :

$$a_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j = \frac{(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^2 - (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)}{2}.$$

Or, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(M) = 0$ et $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = \text{tr}(M^2)$ donc

$$a_{n-2} = -\frac{1}{2} \text{tr}(M^2) = -\frac{1}{2} \text{tr}({}^t M M)$$

(La dernière égalité vient du fait que M est symétrique).

On rappelle que le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donné par la forme bilinéaire $(P, N) \mapsto \text{tr}({}^t P N) = \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} p_{i,j} n_{i,j}$ donc on obtient finalement :

$$a_{n-2} = -\frac{1}{2} \text{tr}({}^t M M) = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} m_{i,j}^2 = -\frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in [1,n]^2, m_{i,j}=1} 1 = -\frac{1}{2} \times 2|A| = -|A|.$$

- 7 ▷ En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leq d \leq n - 1$.
Déterminer alors les valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

📖 Réponse

Soit $G = (S, A)$ un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches, disons de centre i_0 et de branches $\{\{i_0, i_1\}, \{i_0, i_2\}, \dots, \{i_0, i_d\}\}$ (avec $i_0, i_1, \dots, i_d \in \llbracket 1, n \rrbracket$ deux à deux distincts).

Si $n = 2$, nécessairement $d = 1$ et la question précédente montre que

$$\chi_G(X) = X^2 - d = (X - 1)(X + 1).$$

Les valeurs propres sont données par :

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{1, -1\}}.$$

On suppose dans la suite $n \geq 3$ et on considère M la matrice d'adjacence de G . On a vu à la question 4 :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_{i,j} = m_{j,i} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ 1 & \text{si } i = i_0 \text{ et } j \notin \{i_1, \dots, i_d\} \\ 0 & \text{si } i \neq i_0. \end{cases}$$

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en notant $C_j \in \mathbb{R}^n$ la j -ème colonne de M , on a :

$$C_j = \begin{cases} e_{i_0} & \text{si } j \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ e_{i_1} + \dots + e_{i_d} & \text{si } j = i_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a également vu à la question 4 que M est de rang 2, donc par le théorème du rang $\dim \text{Ker}(M) = n - 2$. La matrice étant diagonalisable, on en déduit que 0 est valeur propre de multiplicité (algébrique) $n - 2$. Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$\chi_G(X) = X^{n-2} (X^2 + a_{n-1} X + a_{n-2}) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + a_{n-2} X^{n-2},$$

avec $a_{n-1}, a_{n-2} \in \mathbb{R}$.

Comme les sommets non isolés de G forment une étoile à d branches, on a $|A| = d$ et la question précédente permet de calculer ces coefficients :

$$\boxed{\chi_G(X) = X^n - d X^{n-2} = X^{n-2} (X - \sqrt{d}) (X + \sqrt{d})}.$$

Les valeurs propres sont données par :

$$\boxed{\text{Sp}(M) = \{0, \sqrt{d}, -\sqrt{d}\}}.$$

Déterminons maintenant les vecteurs propres associés à chaque valeur propre. On note $E_\lambda(M)$ l'espace propre associé à λ .

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$MX = \left(\sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j \right)_{1 \leq i \leq n} \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j = \begin{cases} x_{i_1} + \dots + x_{i_d} & \text{si } i = i_0 \\ x_{i_0} & \text{si } i \in \{i_1, \dots, i_d\} \\ 0 & \text{si } i \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\}. \end{cases}$$

- Pour $E_0(M)$:

$$\begin{aligned}
 X \in E_0(M) &\iff MX = 0 \\
 &\iff \begin{cases} x_{i_1} + \dots + x_{i_d} = 0 \\ x_{i_0} = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_{i_1} = -x_{i_2} - \dots - x_{i_d} \\ x_{i_0} = 0 \\ x_j \in \mathbb{R}, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\} \end{cases} \\
 &\iff X = \sum_{j=2}^d x_{i_j} (e_{i_j} - e_{i_1}) + \sum_{j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\}} x_j e_j
 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E_0(M) = \text{Vect} \left(\{e_{i_j} - e_{i_1}, j \in \{2, \dots, d\}\} \cup \{e_j, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\}\} \right).$$

[cela nous donne bien $d - 1 + (n - (d + 1)) = n - 2$ vecteurs qui, de surcroît, sont linéairement indépendants]

- Pour $E_\lambda(M)$ avec $\lambda \in \{\sqrt{d}, -\sqrt{d}\}$:

$$\begin{aligned}
 X \in E_\lambda(M) &\iff MX = \lambda X \\
 &\iff \begin{cases} x_{i_1} + \dots + x_{i_d} = \lambda x_{i_0} \\ x_{i_0} = \lambda x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_d} = \lambda x_{i_d} \\ x_j = 0, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} \lambda^2 x_{i_0} = d x_{i_0} \\ x_{i_1} = \frac{1}{\lambda} x_{i_0} \\ \vdots \\ x_{i_d} = \frac{1}{\lambda} x_{i_0} \\ x_j = 0, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

La première condition étant vérifiée, cela n'impose pas de condition sur x_{i_0} . D'où :

$$X \in E_\lambda(M) \iff \begin{cases} x_{i_0} \in \mathbb{R} \\ x_{i_1} = \frac{1}{\lambda} x_{i_0} \\ \vdots \\ x_{i_d} = \frac{1}{\lambda} x_{i_0} \\ x_j = 0, j \notin \{i_0, i_1, \dots, i_d\} \end{cases}$$

$$\iff X = \frac{1}{\lambda} x_{i_0} (\lambda e_{i_0} + e_{i_1} + \dots + e_{i_d}).$$

Ainsi :

$$E_\lambda(M) = \text{Vect}(\lambda e_{i_0} + e_{i_1} + \dots + e_{i_d}) \text{ avec } \lambda \in \{\sqrt{d}, -\sqrt{d}\}.$$

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S , on définit le graphe $G \setminus s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S \setminus \{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s .

Voici par exemple Figure 3 un graphe G et le graphe $G \setminus 2$:

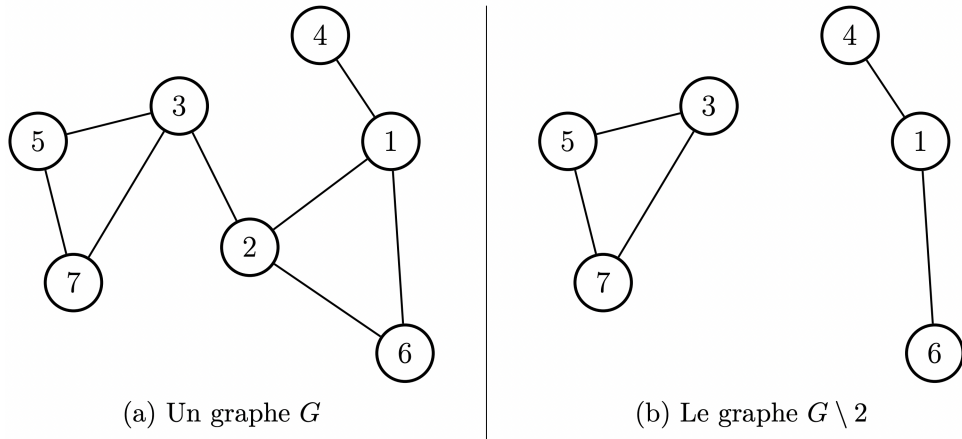


FIGURE 3. Un graphe G , et le graphe $G \setminus 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$.

On définit le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = S_1 \cup S_2, \quad A = A_1 \cup A_2 \cup \left\{ \{s_1, s_2\} \right\}.$$

8 ▷ Montrer que :

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}$$

📖 Réponse

Notons $n = \text{Card}(S)$ et écrivons $n = n_1 + n_2$ avec $n_1 = \text{Card}(S_1)$ et $n_2 = \text{Card}(S_2)$.
Posons $S_1 = \{s_{1,1}; \dots; s_{n_1,1}\}$ et $S_2 = \{s_{1,2}; \dots; s_{n_2,2}\}$ où $s_{n_1,1} = s_1$ et $s_{n_2,1} = s_2$.

Tout d'abord, définissons une nouvelle indexation de G , car cela nous aidera à simplifier la suite des calculs :

Définissons σ_1 et σ_2 par :

$$\begin{cases} \sigma_1(i) = s_{i,1} & \text{si } i \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \\ \sigma_2(i) = s_{n_2+1-i,2} & \text{si } i \in \llbracket 1, n_2 \rrbracket, \end{cases}$$

Remarquons que $\sigma_1 : \llbracket 1, n_1 \rrbracket \rightarrow S_1$ et $\sigma_2 : \llbracket 1, n_2 \rrbracket \rightarrow S_2$ sont des bijections donc ce sont deux indexations de S_1 et S_2 et on obtient deux copies de G_1 et G_2 , notées $G'_1 = (S'_1, A'_1)$ et $G'_2 = (S'_2, A'_2)$, avec $S'_1 = \llbracket 1, n_1 \rrbracket$ et $S'_2 = \llbracket 1, n_2 \rrbracket$.

Il s'ensuit qu'on obtient une indexation de $S = S_1 \cup S_2$ en définissant σ par :

$$\sigma(j) = \begin{cases} \sigma_1(j) & \text{si } j \in \llbracket 1, n_1 \rrbracket \\ \sigma_2(j - n_1) & \text{si } j \in \llbracket n_1 + 1, n \rrbracket. \end{cases}$$

On obtient alors une copie $G' = (S', A')$ de G avec :

$S' = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $A' = A'_1 \cup A'_2 \cup \{\{n_1, n_1 + 1\}\}$.

La matrice d'adjacence s'écrit par blocs :

$$M_{G',\sigma} = \begin{pmatrix} & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & M_{G'_1,\sigma_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & M_{G'_2,\sigma_2} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & \end{pmatrix}.$$

Comme G' , G'_1 , G'_2 sont respectivement des copies de G , G_1 , G_2 , ils ont respectivement le même polynôme caractéristique en vertu de la question 5.

On obtient :

$$\chi_G(X) = \left| \begin{array}{cc|ccc} & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & XI_{n_1} - M_{G'_1,\sigma_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & -1 & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & \end{array} \right|$$

On utilise la multilinéarité du déterminant par rapport à la n_1 -ème colonne :

$$\chi_G(X) = \begin{vmatrix} & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ XI_{n_1} - M_{G'_1, \sigma_1} & & & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ N_1 & & & & & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & \end{vmatrix},$$

où $N_1 \in \mathcal{M}_{n_1, n_1-1}(\mathbb{R})$ est obtenue à partir de $XI_{n_1} - M_{G'_1, \sigma_1}$ en supprimant sa dernière colonne.

Remarquons que le premier déterminant est triangulaire par blocs et cela correspond à $\chi_{G_1}(X) \times \chi_{G_2}(X)$:

$$\chi_G(X) = \chi_{G_1}(X) \times \chi_{G_2}(X) + \begin{vmatrix} & & & & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ N_1 & & & & & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & & & \end{vmatrix}.$$

On utilise maintenant la multilinéarité du déterminant par rapport à la $(n_1 + 1)$ -ème colonne :

$$\chi_G(X) = \chi_{G_1}(X) \times \chi_{G_2}(X) + \begin{vmatrix} & & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & N_1 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & N_1 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & & \end{vmatrix},$$

où $N_2 \in \mathcal{M}_{n_2, n_2-1}(\mathbb{R})$ est obtenue à partir de $XI_{n_2} - M_{G'_2, \sigma_2}$ en supprimant sa première colonne.

Remarquons que le premier déterminant est triangulaire par blocs et le bloc en haut à gauche est de déterminant nul (il y a une colonne de 0). Concernant le deuxième déterminant, on développe par rapport à la n_1 -ème colonne pour obtenir :

$$\chi_G(X) = \chi_{G_1}(X) \times \chi_{G_2}(X) + (-1)^{n_1+n_1+1}(-1) \begin{vmatrix} & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \end{vmatrix},$$

où $N'_2 \in \mathcal{M}_{n_2-1, n_2-1}(\mathbb{R})$ est obtenue à partir de N_2 en supprimant sa première ligne. On développe maintenant par rapport à la n_1 -ème colonne (ce qui correspondait initialement à la $(n_1 + 1)$ -ème colonne) pour obtenir :

$$\chi_G(X) = \chi_{G_1}(X) \times \chi_{G_2}(X) + (-1)^{n_1+n_1}(-1) \begin{vmatrix} & & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & N'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & & \end{vmatrix},$$

où $N'_1 \in \mathcal{M}_{n_1-1, n_1-1}(\mathbb{R})$ est obtenue à partir de N_1 en supprimant sa dernière ligne.

La matrice N'_1 est donc obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière

colonne de $XI_{n_1} - M_{G'_1, \sigma_1}$, ce qui correspond au polynôme caractéristique de $G'_1 \setminus n_1$ qui est une copie de $G_1 \setminus s_1$. De même, N'_2 est donc obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de $XI_{n_2} - M_{G'_2, \sigma_2}$, ce qui correspond au polynôme caractéristique de $G'_2 \setminus (n_1 + 1)$ qui est une copie de $G_2 \setminus s_2$.

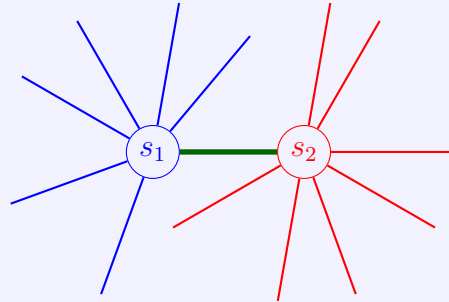
Finalement, on obtient

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1 \setminus s_1} \times \chi_{G_2 \setminus s_2}.$$

- 9 ▷ Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles. Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

📖 Réponse

Soient G_1 et G_2 deux étoiles disjointes, à respectivement d_1 et d_2 branches, de sommets respectifs s_1 et s_2 (donc G_1 et G_2 contiennent respectivement $d_1 + 1$ et $d_2 + 1$ sommets). Soit également G la réunion des deux graphes en ajoutant l'arête $\{s_1, s_2\}$ (donc G contient respectivement $d_1 + d_2 + 2$ sommets).



D'après la question précédente,

$$\chi_G(X) = \chi_{G_1}(X) \times \chi_{G_2}(X) - \chi_{G_1 \setminus s_1}(X) \times \chi_{G_2 \setminus s_2}(X).$$

Soit $i \in \{1, 2\}$.

- ★ Le calcul de la question 7 montre que

$$\chi_{G_i}(X) = X^{(d_i+1)-2}(X^2 - d_i).$$

- ★ Le graphe $G_i \setminus s_i$ est formé de d_i sommets isolés, donc la matrice d'adjacence est nulle, ce qui permet d'obtenir

$$\chi_{G_i \setminus s_i}(X) = X^{d_i}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \chi_G(X) &= X^{d_1+d_2-2}(X^2 - d_1)(X^2 - d_2) - X^{d_1+d_2} \\ &= X^{d_1+d_2-2}(X^4 - (d_1 + d_2)X^2 + d_1d_2) - X^{d_1+d_2} \\ &= X^{d_1+d_2-2}(X^4 - (d_1 + d_2 + 1)X^2 + d_1d_2). \end{aligned}$$

On considère $M \in \mathcal{M}_{d_1+d_2+2}(\mathbb{R})$ une matrice d'adjacence de G .

Comme M est diagonalisable, $\text{Ker}(M)$ est de dimension égale à la multiplicité de 0

dans χ_G , à savoir $d_1 + d_2 - 2$ (car $d_1 d_2 \neq 0$).

Ainsi, par le théorème du rang,

$$\text{rg}(M) = (d_1 + d_2 + 2) - (d_1 + d_2 - 2) = 4.$$

En conclusion,

$$\chi_G(X) = X^{d_1+d_2-2} (X^4 - (d_1 + d_2 + 1)X^2 + d_1 d_2) \text{ et } \text{rg}(M) = 4.$$

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

- N l'entier $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$;
- Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = \llbracket 1, n \rrbracket$;
- p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\{0, 1\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in A \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $(X_{\{i,j\}} = 1) = \{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\{i, j\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire :

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \cap \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0)$$

On admet l'existence d'une probabilité \mathbb{P} sur $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n))$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P})$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n , la probabilité qu'une arête $\{i, j\}$ soit contenue dans G est p_n , et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

- 10 ▷** Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(\{G\})$ de l'événement élémentaire $\{G\}$ en fonction de p_n , q_n , N et $a = \text{card}(A)$.
Retrouver alors le fait que $\mathbb{P}(\Omega_n) = 1$.

Réponse

Par construction de \mathcal{E}_n , pour tous indices $i, j, i', j' \in S$, les événements $(X_{\{i,j\}} = 1)$ et $(X_{\{i',j'\}} = 0)$ sont mutuellement indépendants.

De l'expression

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} (X_{\{i,j\}} = 1) \cap \bigcap_{\{i,j\} \notin A} (X_{\{i,j\}} = 0),$$

on tire :

$$\mathbb{P}(\{G\}) = \prod_{\{i,j\} \in A} \mathbb{P}(X_{\{i,j\}} = 1) \times \prod_{\{i,j\} \notin A} \mathbb{P}(X_{\{i,j\}} = 0).$$

Comme $\mathbb{P}(X_{\{i,j\}} = 1) = p_n$ si $\{i, j\} \in A$ et $\mathbb{P}(X_{\{i,j\}} = 0) = q_n$ si $\{i, j\} \notin A$, on a :

$$\mathbb{P}(\{G\}) = p_n^{\text{card}(A)} q_n^{\text{card}(\bar{A})}.$$

Or $\text{card}(A) = a$ et $N = \binom{n}{2}$ est le nombre de toutes les paires possibles $\{i, j\}$ lorsque $i, j \in S = \llbracket 1, n \rrbracket$, avec $i \neq j$ donc $\text{card}(\bar{A}) = N - a$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(\{G\}) = p_n^a q_n^{N-a}.$$

Pour tout $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$, posons :

$$\Omega_{n,a} := \{G = (S, A) \in \Omega_n \mid \text{card}(A) = a\}.$$

Comme $(\Omega_{n,a})_{a \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ est une partition de Ω_n , on obtient :

$$\mathbb{P}(\Omega_n) = \sum_{a=0}^N \sum_{G \in \Omega_{n,a}} \mathbb{P}(\{G\}) = \sum_{a=0}^N p_n^a q_n^{N-a} \text{card}(\Omega_{n,a}).$$

Or $\text{card}(\Omega_{n,a}) = \binom{N}{a}$ (choisir un graphe de sommets $S = \llbracket 1, n \rrbracket$ avec a arêtes, revient à choisir a arêtes parmi les N arêtes possibles)^a, donc :

$$\mathbb{P}(\Omega_n) = \sum_{a=0}^N \binom{N}{a} p_n^a q_n^{N-a},$$

et le binôme de Newton permet d'obtenir :

$$\boxed{\mathbb{P}(\Omega_n) = (p_n + q_n)^N = 1.}$$

a. Autrement dit, l'application $A \mapsto G = (S, A)$ définie de l'ensemble de toutes les parties de cardinal a que l'on peut faire parmi toutes les parties à deux éléments de $S = \llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\Omega_{n,a}$ est une bijection.

Dans la suite du problème, on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété \mathcal{P}_n vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n .

Une fonction de seuil pour la propriété \mathcal{P}_n est une suite $(t_k)_{k \geq 2}$ de réels strictement positifs tels que :

- si $p_n = o(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété \mathcal{P}_n soit réalisée vaut 0 ;
- si $t_n = o(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété \mathcal{P}_n soit réalisée vaut 1.

Partie II - Une première fonction de seuil

Section A - Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{N} et admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$.

11 ▷ Montrer que $\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}(X)$.

Réponse

Comme X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} , on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X > 0).$$

D'où :

$$\boxed{\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}(X)}.$$

12 ▷ Montrer que si $\mathbb{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}$.

Indication : on remarquera que $(X = 0) \subset (|X - \mathbb{E}(X)| \geq \mathbb{E}(X))$.

Réponse

Supposons que $\mathbb{E}(X) \neq 0$.

Pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = 0$ on a :

$$|X(\omega) - \mathbb{E}(X)| = |\mathbb{E}(X)| = \mathbb{E}(X)$$

(La dernière égalité vient du fait que $\mathbb{E}(X) \geq 0$, comme on peut le voir sur l'expression de $\mathbb{E}(X)$ à la question précédente)

On obtient donc l'inclusion $(X = 0) \subset (|X - \mathbb{E}(X)| \geq \mathbb{E}(X))$ et, par croissance de \mathbb{P} , on en déduit :

$$\mathbb{P}(X = 0) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \mathbb{E}(X)).$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne la majoration attendue :

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\mathbb{E}(X)^2}}.$$

Section B - Une fonction de seuil

13 ▷ Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

📖 Réponse

Notons Δ l'ensemble de toutes les paires de $S = \llbracket 1, n \rrbracket$ ($\text{Card}(\Delta) = \binom{n}{2} = N$). On peut écrire la variable A_n sous la forme suivante :

$$A_n = \sum_{\{i,j\} \in \Delta} X_{\{i,j\}}.$$

(On regarde pour chaque graphe G s'il contient l'arête $\{i, j\}$)

Les $X_{\{i,j\}}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n , alors :

A_n suit la loi binomiale de paramètres (N, p_n) .

Pour le voir, on peut utiliser les fonctions génératrices :

La fonction génératrice d'une loi de Bernoulli de paramètre p_n est donnée par $t \in]-1, 1[\mapsto (q_n + p_n t)$.

Par indépendance des $X_{\{i,j\}}$, on a pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$G_{A_n}(t) = \prod_{\{i,j\} \in \Delta} G_{X_{\{i,j\}}}(t) = (q_n + p_n t)^N,$$

qui est la fonction génératrice d'une loi binomiale de paramètres (N, p_n) .

14 ▷ Montrer que si $p_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 0$.

📖 Réponse

Supposons $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'après la question 11, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A_n > 0) \leq \mathbb{E}(A_n) = N p_n = \frac{n(n-1)}{2} p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} n^2 p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 0.$$

📖 Une autre réponse possible

Supposons $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On a :

$$\mathbb{P}(A_n > 0) = 1 - \mathbb{P}(A_n = 0) = 1 - (1 - p_n)^N = 1 - \exp\left(\binom{n}{2} \ln(1 - p_n)\right).$$

Comme $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, on a en particulier $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela nous permet d'obtenir :

$$\binom{n}{2} \ln(1 - p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n(n-1)}{2} (-p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n^2 p_n}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle, on trouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 1 - e^0 = 0.$$

15 ▷ Montrer que si $\frac{1}{n^2} = o(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 1$.

📖 Réponse

Supposons $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(p_n)$.

Comme $\mathbb{E}(A_n) = N p_n \neq 0$, on peut utiliser la question 12 :

$$0 \leq 1 - \mathbb{P}(A_n > 0) = \mathbb{P}(A_n = 0) \leq \frac{\mathbb{V}(A_n)}{\mathbb{E}(A_n)^2}.$$

La variable A_n suit une loi binomiale de paramètres (N, p_n) , donc

$$\mathbb{E}(A_n) = N p_n \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(A_n) = N p_n (1 - p_n),$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{\mathbb{V}(A_n)}{\mathbb{E}(A_n)^2} = \frac{1 - p_n}{N p_n} = \frac{2(1 - p_n)}{n(n-1)p_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2(1 - p_n)}{n^2 p_n} = \frac{2}{n^2 p_n} - \frac{2}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par encadrement, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 1.$$

📖 Une autre réponse possible

Supposons $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(p_n)$. Par définition, $\frac{1}{n^2 p_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $n^2 p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Comme précédemment,

$$0 \leq 1 - \mathbb{P}(A_n > 0) = \mathbb{P}(A_n = 0) = \exp \left(\binom{n}{2} \ln(1 - p_n) \right).$$

Par concavité du logarithme, on a :

$$\ln(1 - p_n) \leq -p_n,$$

et, par croissance de l'exponentielle,

$$\exp \left(\binom{n}{2} \ln(1 - p_n) \right) \leq \exp \left(-\binom{n}{2} p_n \right).$$

Or,

$$-\binom{n}{2} p_n = -\frac{n(n-1)}{2} p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} n^2 p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\binom{n}{2} \ln(1 - p_n) \right) = 0.$$

Par encadrement, on conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n > 0) = 1.$$

16 ▷ En déduire une propriété \mathcal{P}_n et sa fonction de seuil associée.

📖 Réponse

L'évènement $(A_n > 0) = (A_n \geq 1)$ représente la propriété suivante :

\mathcal{P}_n : "Un graphe choisi aléatoirement possède au moins une arête".

D'après les questions 14 et 15, la fonction de seuil associée est $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k \geq 2}$.

Remarque : En pratique, cela veut dire que si l'on considère un graphe aléatoire G avec n sommets (où n est un nombre très grand) avec l'hypothèse que chaque arête a une probabilité p_n d'exister dans le graphe, alors on a l'alternative suivante :

- Si p_n est négligeable devant $1/n^2$, il est presque certain que G ne possédera aucune arête.
- Si p_n est prépondérant devant $1/n^2$, il est presque certain que G au moins une arête.