

# Proposition de corrigé

---

## Concours Commun Mines-Ponts

Sujet 2 Mathématiques 2024, filière PC  
Problème inverse pour les matrices de distance  
euclidienne

Si vous repérez une coquille, une erreur, ou si vous avez une question ou une suggestion,  
n'hésitez pas à me contacter !

## Notations et rappels

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1.

- On note  $(x, y)$  (resp.  $X^T Y$ ) le produit scalaire euclidien usuel de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $X$  et  $Y$  de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  identifiés canoniquement à  $\mathbb{R}^n$ ) et  $\|x\|$  la norme de  $x$  (resp.  $\|X\|$  la norme de  $X$ ) associée au produit scalaire.
- Étant donnés deux points  $P$  et  $P'$  de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $d(P, P')$  la distance entre  $P$  et  $P'$  associée à la norme euclidienne usuelle :

$$d(P, P') = \|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP'}\|$$

où  $O$  est le point origine.

- Un endomorphisme symétrique  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  est dit **positif** si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x, f(x)) \geq 0$$

- Une matrice symétrique  $A$  de  $M_n(\mathbb{R})$  est dite **positive** si

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^T A X \geq 0$$

- Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . Un endomorphisme symétrique  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  est positif si, et seulement si, sa matrice (symétrique) dans  $\mathcal{B}$  est positive.
- On appelle matrice de distance euclidienne (on notera MDE pour abréger) une matrice carrée  $D = (d_{i,j})$  d'ordre  $n$  telle qu'il existe un entier naturel non nul  $m$  et des points  $A_1, \dots, A_n$  de  $\mathbb{R}^m$  tels que pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  on a :

$$d_{i,j} = d(A_i, A_j)^2.$$

On se propose dans ce sujet d'apporter une réponse partielle au problème consistant à déterminer, étant donnés des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , une MDE de spectre  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

On admet sans démonstration dans ce sujet que les endomorphismes symétriques de  $\mathbb{R}^n$  sont positifs si et seulement si leur spectre est inclus dans  $[0, +\infty[$ .

## 1 Matrices de Hadamard

On appelle matrice de Hadamard d'ordre  $n$  toute matrice  $H$  carrée d'ordre  $n$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou  $-1$  et telle que  $\frac{1}{\sqrt{n}}H$  soit orthogonale.

1 ▷ Donner des exemples de matrices de Hadamard d'ordre 1 et 2.

### Réponse

Voici un exemple d'une matrice de Hadamard d'ordre 1 :  $(1)$ .

Voici un exemple d'une matrice de Hadamard d'ordre 2 :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

(Cette matrice a été construite en choisissant deux vecteurs orthogonaux à coefficients dans  $\{\pm 1\}$ )

Remarque : Le terme  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  dans la définition d'une matrice de Hadamard d'ordre  $n$

est nécessaire car les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale de taille  $n$  sont unitaires et la norme (euclidienne) d'un vecteur à coefficients dans  $\{\pm 1\}$  vaut  $\sqrt{n}$ .

- 2 ▷ Montrer que si  $H$  est une matrice de Hadamard alors toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de  $H$  par  $-1$  ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de  $H$  est encore une matrice de Hadamard.

### Réponse

Remarquons que  $H$  est une matrice de Hadamard si et seulement si  $\frac{1}{\sqrt{n}}H$  est une matrice orthogonale si et seulement si  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}H\right)^T = \frac{1}{\sqrt{n}}H^T$  est une matrice orthogonale si et seulement si  $H^T$  est une matrice de Hadamard.

Ainsi, les opérations possibles sur les lignes seront également valables pour les opérations sur les colonnes et inversement. Il suffit donc de démontrer les résultats uniquement sur les colonnes.

Soit  $H$  une matrice de Hadamard d'ordre  $n$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $C_i \in \mathbb{R}^n$  la  $i$ -ème colonne de la matrice  $H : H = [C_1 | \dots | C_n]$ .

Fixons  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $i < j$ . On introduit  $J = [C_1 | \dots | -C_i | \dots | C_n]$  (multiplication d'une colonne de  $H$  par  $-1$ ) et  $K = [C_1 | \dots | C_j | \dots | C_i | \dots | C_n]$  (échange de deux colonnes de  $H$ ).

On veut montrer que  $J$  et  $K$  sont deux matrices de Hadamard.

Par hypothèse,  $\frac{1}{\sqrt{n}}H = \left[\frac{1}{\sqrt{n}}C_1 | \dots | \frac{1}{\sqrt{n}}C_n\right]$  est orthogonale donc les colonnes  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}C_\ell\right)_{\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  forment une base orthonormée.

Pour la matrice  $J$  : Montrons que les colonnes de  $\frac{1}{\sqrt{n}}J$  forment une base orthonormée.

Notons  $D_1, \dots, D_n$  les colonnes. Pour  $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on distingue plusieurs cas :

- Si  $k = i$  et  $\ell = i$ ,  $(D_k, D_\ell) = \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}C_i, -\frac{1}{\sqrt{n}}C_i\right) = (-1)^2 \frac{1}{n} (C_i, C_i) = 1$ .
- Si  $k = i$  et  $\ell \neq i$ ,  $(D_k, D_\ell) = \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}C_i, \frac{1}{\sqrt{n}}C_\ell\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{n}}C_i, \frac{1}{\sqrt{n}}C_\ell\right) = 0$ .
- Si  $k \neq i$  et  $\ell = i$ ,  $(D_k, D_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}C_k, -\frac{1}{\sqrt{n}}C_i\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{n}}C_k, \frac{1}{\sqrt{n}}C_i\right) = 0$ .
- Si  $k \neq i$  et  $\ell \neq i$ ,  $(D_k, D_i) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}C_k, \frac{1}{\sqrt{n}}C_\ell\right) = 0$ .

Ainsi, les colonnes de  $\frac{1}{\sqrt{n}}J$  forment une base orthonormée donc  $J$  est une matrice de Hadamard.

Étant donné que le fait d'échanger l'ordre d'une famille ne change pas l'orthogonalité, les colonnes de  $\frac{1}{\sqrt{n}}K$  forment une base orthonormée donc  $K$  est une matrice de Hadamard.

On a donc montré :

Toute matrice obtenue en multipliant une ligne ou une colonne de  $H$  par  $-1$  ou en échangeant deux lignes ou deux colonnes de  $H$  est encore une matrice de Hadamard.

### Autre réponse

On note  $(E_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$  les matrices élémentaires.

Soit  $H$  une matrice de Hadamard d'ordre  $n$ .

Multiplier la colonne  $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$  de  $H$  par  $-1$  revient à multiplier à droite de  $H$  par la matrice de dilatation  $D = I_n - 2E_{i,i}$ . On peut voir que la matrice  $D$  vérifie  $D^T D = I_n$ .

Montrons que  $HD$  est une matrice de Hadamard d'ordre  $n$  :

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{n}} HD \right) x, \left( \frac{1}{\sqrt{n}} HD \right) y \right) &= \left( \left( \frac{1}{\sqrt{n}} HD \right) x \right)^T \left( \left( \frac{1}{\sqrt{n}} HD \right) y \right) \\ &= x^T D^T \left( \frac{1}{\sqrt{n}} H \right)^T \left( \frac{1}{\sqrt{n}} H \right) Dy. \end{aligned}$$

Comme  $H$  est une matrice de Hadamard, on obtient

$$\begin{aligned} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{n}} HD \right) x, \left( \frac{1}{\sqrt{n}} HD \right) y \right) &= x^T D^T Dy \\ &= x^T I_n y \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

La matrice  $\frac{1}{\sqrt{n}} HD$  préserve le produit scalaire, ce qui montre que  $HD$  est une matrice de Hadamard.

Echanger la colonne  $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$  avec la colonne  $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$  ( $j > i$ ) de  $H$  revient à multiplier à droite de  $H$  par la matrice de permutation  $P = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ . On peut voir que la matrice  $P$  vérifie  $P^T P = I_n$ .

Le même calcul que ci-dessus montre que  $HP$  est une matrice de Hadamard.

- 3** ▷ Montrer que si  $H$  est une matrice de Hadamard d'ordre  $n$  alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre  $n$  dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1. En déduire que si  $n \geq 2$  alors  $n$  est pair.

### Réponse

Soit  $H = (h_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2}$  une matrice de Hadamard d'ordre  $n$ . On construit une nouvelle matrice  $H_1$  à partir de  $H$  vérifiant : Pour chaque colonne  $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$  de  $H$ , si  $h_{1,j} = -1$ , on multiplie la colonne  $j$  par  $-1$ .

D'après la question précédente,  $H_1$  est une matrice de Hadamard et les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1.

Ainsi :

S'il existe une matrice de Hadamard d'ordre  $n$  alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre  $n$  dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1.

Supposons maintenant  $n \geq 2$ . Comme  $\frac{1}{\sqrt{n}} H_1$  est orthogonale, on a  $H_1 H_1^T = n I_n$ .

Regardons le coefficient en position  $(1, 2)$  de cette égalité :

$$0 = (nI_n)_{1,2} = (H_1 H_1^T)_{1,2} = \sum_{k=1}^n (H_1)_{1,k} (H_1^T)_{k,2} = \sum_{k=1}^n (H_1)_{2,k}.$$

(La dernière égalité vient du fait que, par construction,  $(H_1)_{1,k} = 1$ ).

Comme  $H_1$  est à coefficients dans  $\{\pm 1\}$ , il y a autant de coefficients égaux 1 que de coefficients égaux à  $-1$  sur la deuxième ligne :

En effet, pour  $p \in \{\pm 1\}$  on définit  $N_p = \text{Card} \left( \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid (H_1)_{2,k} = p \right\} \right)$ . On a  $n = N_1 + N_{-1}$  et la relation ci-dessus s'écrit  $0 = N_1 - N_{-1}$  donc  $N_{-1} = N_1$  d'où  $n = 2N_1$  donc  $n$  est pair.

Ainsi :

S'il existe une matrice de Hadamard d'ordre  $n \geq 2$  alors  $n$  est pair.

- 4 ▷ Montrer que si  $H$  est une matrice de Hadamard d'ordre  $n$  supérieur ou égal à 4, alors  $n$  est multiple de 4. On pourra commencer par montrer que l'on peut supposer que la première ligne de  $H$  uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne composée de  $n/2$  coefficients égaux à 1 puis  $n/2$  coefficients égaux à  $-1$ .

### Réponse

Soit  $H$  une matrice de Hadamard d'ordre  $n \geq 4$ .

Commençons par justifier l'indication de l'énoncé. Reprenons les notations de la question précédente. La matrice  $H_1$  est une matrice de Hadamard et est construite à partir de  $H$  avec la particularité que les coefficients de la première ligne valent 1. On a vu à la question précédente qu'il y a autant de coefficients égaux à 1 que de coefficients égaux à  $-1$  sur la deuxième ligne donc il y a  $n/2$  coefficients égaux à 1 et  $n/2$  coefficients égaux à  $-1$ .

Par conséquent, on construit la matrice  $H_2$  en échangeant les colonnes de  $H_1$  afin de regrouper les coefficients de la deuxième ligne égaux à 1, et ceux égaux à  $-1$ . D'après la question 2,  $H_2$  est une matrice de Hadamard.

S'il existe une matrice de Hadamard d'ordre  $n \geq 4$  alors il existe une matrice de Hadamard d'ordre  $n$  dont la première ligne est uniquement composée de 1 et sa deuxième ligne est composée de  $n/2$  coefficients égaux à 1 puis de  $n/2$  coefficients égaux à  $-1$ .

Comme  $H_2 H_2^T = nI_n$ , on regarde d'abord le coefficient en position  $(1, 3)$  de cette égalité :

$$0 = (nI_n)_{1,3} = (H_2 H_2^T)_{1,3} = \sum_{k=1}^n (H_2)_{1,k} (H_2^T)_{k,3} = \sum_{k=1}^n (H_2)_{3,k}.$$

(La dernière égalité vient du fait que, par construction,  $(H_2)_{1,k} = 1$ ).

On regarde maintenant le coefficient en position  $(2, 3)$  de l'égalité  $H H^T = nI_n$  :

$$0 = (nI_n)_{2,3} = (H_2 H_2^T)_{2,3} = \sum_{k=1}^n (H_2)_{2,k} (H_2^T)_{k,3} = \sum_{k=1}^{n/2} (H_2)_{3,k} - \sum_{k=n/2+1}^n (H_2)_{3,k}.$$

(La dernière égalité vient du fait que, par construction, la deuxième ligne de  $H_2$  est composée de  $n/2$  coefficients égaux à 1 puis de  $n/2$  coefficients égaux à  $-1$ ).

Ainsi,

$$\begin{cases} 0 = \sum_{k=1}^{n/2} (H_2)_{3,k} + \sum_{k=n/2+1}^n (H_2)_{3,k} \\ 0 = \sum_{k=1}^{n/2} (H_2)_{3,k} - \sum_{k=n/2+1}^n (H_2)_{3,k} . \end{cases}$$

Par somme, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n/2} (H_2)_{3,k} = 0.$$

Le même raisonnement qu'à la question précédente montre que  $n/2$  est pair.

On en déduit :

S'il existe une matrice de Hadamard d'ordre  $n \geq 4$  alors  $n$  est un multiple de 4.

## 2 Quelques résultats sur les endomorphismes symétriques

Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  les valeurs propres classées par ordre croissant de  $f$ . Pour  $k \in [1, n]$ , on introduit l'ensemble  $\pi_k$  des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ . On admettra ici que les min et max considérés existent bien (cela découle de la continuité des expressions considérées).

**5 ▷** Justifier l'existence d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$  orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $f$ , le vecteur  $e_i$  étant associé à  $\lambda_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On garde par la suite cette base.

### Réponse

Comme  $f$  est un endomorphisme symétrique, le théorème spectral nous donne l'existence d'une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ , constituée de vecteurs propres de  $f$ .

**6 ▷** Soit  $k \in [1, n]$ , et  $S_k$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ . On pose  $T_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ . Justifier que  $S_k \cap T_k \neq \{0\}$ .

### Réponse

La famille  $(e_k, \dots, e_n)$  est libre car orthonormée et engendre  $T_k$  par construction donc  $\dim(T_k) = n - k + 1$ . Par définition,  $\dim(S_k) = k$ . Comme  $S_k + T_k$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\dim(S_k + T_k) \leq n$ . D'après la formule de Grassman,

$$\dim(S_k \cap T_k) = \dim(S_k) + \dim(T_k) - \dim(S_k + T_k) = n + 1 - \dim(S_k + T_k) \geq 1.$$

Par conséquent,

$$S_k \cap T_k \neq \{0\}.$$

**7 ▷** En considérant  $x \in S_k \cap T_k$ , justifier que :

$$\max_{x \in S_k, \|x\|=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k.$$

### 📖 Réponse

Soit  $x \in S_k \cap T_k$  tel que  $x \neq 0$  et, quitte à diviser le vecteur par sa norme, on peut supposer  $\|x\| = 1$ .

Comme  $x \in T_k$ , on décompose  $x$  dans  $\text{Vect}(e_k, \dots, e_n)$  : Il existe  $x_i \in \mathbb{R}$  tel que

$$x = \sum_{i=k}^n x_i e_i.$$

Comme la famille  $(e_k, \dots, e_n)$  est orthonormée, on a

$$1 = \|x\|^2 = \sum_{i=k}^n x_i^2.$$

Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$  formée de vecteurs propres de  $f$ , on a par linéarité de  $f$  :

$$f(x) = \sum_{i=k}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=k}^n \lambda_i x_i e_i.$$

En utilisant que les valeurs propres de  $f$  sont rangées dans l'ordre croissant, on a par bilinéarité du produit scalaire :

$$(x, f(x)) = \left( \sum_{i=k}^n x_i e_i, \sum_{j=k}^n \lambda_j x_j e_j \right) = \sum_{k \leq i, j \leq n} x_i x_j \lambda_j (e_i, e_j) = \sum_{i=k}^n x_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k \sum_{i=k}^n x_i^2 = \lambda_k.$$

Il existe  $x \in S_k$ ,  $\|x\| = 1$  tel que  $(x, f(x)) \geq \lambda_k$  donc le maximum vérifie :

$$\max_{x \in S_k, \|x\|=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k.$$

8 ▷ Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . À l'aide de  $S = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \in \pi_k$ , montrer l'égalité :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left( \max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right)$$

### 📖 Réponse

D'un côté, d'après la question précédente, pour tout  $S \in \pi_k$ , on a :

$$\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \geq \lambda_k.$$

En passant au minimum, on trouve :

$$\min_{S \in \pi_k} \left( \max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right) \geq \lambda_k.$$

De l'autre côté, prenons  $S = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \in \pi_k$ . Pour tout  $x \in S$  tel que  $\|x\| = 1$ , par un calcul similaire à la question précédente, en décomposant  $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i$ , on obtient :

$$(x, f(x)) = \sum_{i=1}^k x_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k \sum_{i=1}^k x_i^2 = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k.$$

En passant au maximum sur  $x$ , on a :

$$\max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \leq \lambda_k$$

Il vient alors :

$$\min_{S \in \pi_k} \left( \max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right) \leq \lambda_k.$$

On a donc établi l'égalité :

$$\lambda_k = \min_{S \in \pi_k} \left( \max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right).$$

C'est le théorème de Courant-Fischer. On aura également besoin par la suite du résultat de factorisation suivant :

**9** ▷ Soit  $M$  une matrice symétrique de  $M_n(\mathbb{R})$ . Montrer que si  $M$  est positive, alors il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $M = B^T B$ .

Bien que si  $M$  n'est plus supposée positive, mais admet une unique valeur propre strictement positive  $\lambda$  d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire  $u$ , alors il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que

$$M = \lambda u u^T - B^T B.$$

### Réponse

Supposons d'abord que  $M$  est positive.

D'après le théorème spectral, il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice orthogonale  $P$  tel que  $M = P D P^T = P D P^{-1}$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les coefficients diagonaux de  $D$ . Par hypothèse  $M$  est positive, donc ces coefficients sont positifs. Posons  $E = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$  (matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont  $\sqrt{\lambda_i}$ ) et  $B = E P^T$ . Alors  $B \in M_n(\mathbb{R})$  et on a :

$$B^T B = P E^T E P^T = P E^2 P^T = P D P^T = M.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est positive, alors il existe } B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } M = B^T B.}$$

Remarque : On peut préciser que  $B$  est même symétrique positive (mais ce n'est pas demandé.)

Supposons maintenant que  $M$  admet une unique valeur propre strictement positive  $\lambda$  d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire  $u$  et on veut montrer qu'il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que  $M = \lambda u u^T - B^T B$ , ce qui s'écrit encore  $\lambda u u^T - M = B^T B$ .

Pour établir l'existence de  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $M = \lambda u u^T - B B^T$  il suffit de montrer que  $N := \lambda u u^T - M$  est symétrique positive d'après la première partie de la question.

On a  $N^T = (\lambda u u^T - M)^T = \lambda u u^T - M = N$  donc  $N$  est symétrique (et réelle). Montrons que  $Sp(N) \subset \mathbb{R}_+$ .

On écrit  $Sp(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  avec, par hypothèse,  $\lambda_1 = \lambda > 0$  et pour tout  $k \in [2, n]$ ,  $\lambda_k \leq 0$ . On prend une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  constituée de



vecteurs propres de  $M$  vérifiant  $e_1 = u$  et pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $Me_k = \lambda_k e_k$ .  
Comme  $Mu = \lambda u$  et  $u^T u = \|u\|^2 = 1$ , on a :

$$Nu = \lambda uu^T u - Mu = \lambda u - \lambda u = 0.$$

Pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $Me_k = \lambda_k e_k$  et  $u^T e_k = 0$  donc :

$$Ne_k = \lambda uu^T e_k - Me_k = -\lambda e_k.$$

Ainsi,  $(u, e_2, \dots, e_n)$  est une base de vecteurs propres de  $N$  et comme  $\lambda_k \leq 0$  pour  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $Sp(N) = \{0, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+$ .

Il vient alors que  $\lambda uu^T - M$  est une matrice symétrique positive donc, par la première partie, il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $\lambda uu^T - M = B^T B$ .

Si  $M$  admet une unique valeur propre strictement positive  $\lambda$  d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre unitaire  $u$ , alors il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  telle que

$$M = \lambda uu^T - B^T B.$$

### 3 Caractérisation des MDE

On note  $e$  la matrice de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. On note  $\Delta_n$  l'ensemble des MDE d'ordre  $n$  et  $\Omega_n$  l'ensemble des matrices  $M$  symétriques positives d'ordre  $n$  telles que  $M.e = 0$ . On note  $P$  la matrice d'ordre  $n$  définie par

$$P = I_n - \frac{1}{n} ee^T$$

On note  $T$  l'application de  $\Delta_n$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  qui à  $D$  associe

$$T(D) = -\frac{1}{2} P D P$$

et  $K$  l'application de  $\Omega_n$  dans  $M_n(\mathbb{R})$  qui à une matrice  $A$  associe

$$K(A) = ea^T + ae^T - 2A$$

où  $a$  est la matrice colonne de  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  dont les coefficients sont les coefficients diagonaux de  $A$ .

**10** ▷ Montrer que  $P$  est symétrique et que l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé est une projection orthogonale sur  $\text{Vect}(e)^\perp$ .

#### Réponse

Comme  $ee^T = (1)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ , alors  $ee^T$  est symétrique et vérifie  $(ee^T)^2 = nee^T$ .

Par linéarité de la transposée,  $P^T = I_n^T - \frac{1}{n}(ee^T)^T = I_n - \frac{1}{n}ee^T = P$  donc  $P$  est une matrice symétrique.

Comme  $I_n$  et  $\frac{1}{n}(ee^T)$  commutent, on a :

$$\begin{aligned} P^2 &= \left( I_n - \frac{1}{n}ee^T \right)^2 \\ &= I_n^2 - 2\frac{1}{n}ee^T + \frac{1}{n^2}(ee^T)^2 \\ &= I_n - 2\frac{1}{n}ee^T + \frac{1}{n^2}nee^T \\ &= I_n - \frac{1}{n}ee^T \\ &= P. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $P$  est une matrice de projection orthogonale.

On a  $\mathbb{R}^n = \text{Vect}(e) \oplus \text{Vect}(e)^\perp$  et :

Pour tout  $x \in \text{Vect}(e)^\perp$ ,  $e^T x = (e, x) = 0$  et  $Px = x - \frac{1}{n}ee^T x = x - \frac{1}{n}e(e^T x) = x$ .

Comme  $e^T e = n$ ,  $Pe = (I_n - \frac{1}{n}ee^T)e = e - \frac{1}{n}e(e^T e) = e - \frac{1}{n}en = 0$  donc pour tout  $x \in \text{Vect}(e)$ ,  $Px = 0$ .

On en déduit que l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $P$  est la projection sur  $\text{Vect}(e)^\perp$  parallèlement à  $\text{Vect}(e)$ . Autrement dit :

La matrice  $P$  est symétrique et l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé est la projection orthogonale sur  $\text{Vect}(e)^\perp$ .

**11 ▷** Soit  $D \in \Delta_n$ . Soient  $A_1, \dots, A_n$  des points dont la matrice  $D$  est la matrice de distance euclidienne. On note  $x_i$  les vecteurs coordonnées des  $A_i$ . Soit  $M_A$  la matrice dont les colonnes sont les  $x_i$  et  $C$  la colonne formée des  $\|x_i\|^2$ . Écrire  $D$  comme combinaison linéaire de  $Ce^T$ ,  $eC^T$  et  $M_A^T M_A$ . En déduire que pour toute matrice  $D$  de  $\Delta_n$ , on a  $T(D) \in \Omega_n$ .

### Réponse

Par produit matriciel, on montre que

$$\begin{aligned} Ce^T &= (\|x_i\|^2)_{1 \leq i, j \leq n} \\ eC^T &= (Ce^T)^T = (\|x_j\|^2)_{1 \leq i, j \leq n} \\ M_A^T M_A &= (x_i^T x_j)_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

Pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $d_{i,j} = d(A_i, A_j)^2$  donc

$$d_{i,j} = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 - 2(x_i, x_j) + \|x_j\|^2 = (Ce^T)_{i,j} - 2(M_A^T M_A)_{i,j} + (eC^T)_{i,j}.$$

D'où l'égalité matricielle :

$$D = Ce^T - 2M_A^T M_A + eC^T.$$

Soit  $D \in \Delta_n$ . En particulier  $D$  est symétrique. Comme  $P$  est aussi symétrique, on a

$$T(D)^T = -\frac{1}{2}P^T D^T P^T = -\frac{1}{2}PDP = T(D).$$

Donc  $T(D)$  est une matrice symétrique.

En utilisant  $Pe = 0$  (relation établie à la question précédente) et la décomposition  $D = Ce^T - 2M_A^T M_A + eC^T$ , on a :

$$\begin{aligned} T(D) &= -\frac{1}{2} (PCe^T P - 2PM_A^T M_A P + PeC^T P) \\ &= -\frac{1}{2} (PC(Pe)^T - 2PM_A^T M_A P + (Pe)C^T P) \\ &= PM_A^T M_A P \\ &= (M_A P)^T M_A P. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,

$$X^T T(D) X = X^T (M_A^T P M_A P) X = (M_A P X)^T (M_A P X) = \|M_A P X\|^2 \geq 0,$$

donc  $T(D)$  est positive.

De plus  $T(D)e = -\frac{1}{2} P D (Pe) = 0$ , donc  $T(D) \in \Omega_n$ .

Pour toute matrice  $D$  de  $\Delta_n$ , on a  $T(D) \in \Omega_n$ .

**12** ▷ Montrer que pour toute matrice  $A$  de  $\Omega_n$  on a  $K(A) \in \Delta_n$ .

### Réponse

Soit  $A \in \Omega_n$ . En particulier,  $A$  est symétrique positive donc d'après la question 9, il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $A = B^T B$ . Ecrivons  $B = [X_1 | \dots | X_n]$ , où  $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{R}^n$ . Ainsi, pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $(A)_{i,j} = (B^T B)_{i,j} = X_i^T X_j = (X_i, X_j)$ . En particulier,  $(A)_{i,i} = \|X_i\|^2$ . On désigne par  $A_1, \dots, A_n$  les points de  $\mathbb{R}^n$  associés aux vecteurs coordonnées  $X_1, \dots, X_n$ . Pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$\begin{aligned} (K(A))_{i,j} &= (e \cdot a^T)_{i,j} + (a \cdot e^T)_{i,j} - 2(A)_{i,j} \\ &= (A)_{j,j} + (A)_{i,i} - 2(A)_{i,j} \\ &= \|X_j\|^2 + \|X_i\|^2 - 2(X_i, X_j) \\ &= \|x_i - x_j\|^2 \\ &= d(A_i, A_j)^2. \end{aligned}$$

Donc  $K(A) \in \Delta_n$ .

Ainsi :

Pour toute matrice  $A$  de  $\Omega_n$ , on a  $K(A) \in \Delta_n$ .

**13** ▷ Montrer que les applications  $T : \Delta_n \rightarrow \Omega_n$  et  $K : \Omega_n \rightarrow \Delta_n$  vérifient :

$$T \circ K = \text{Id}_{\Omega_n}.$$

### 📖 Réponse

Soit  $A \in \Omega_n$ . Comme  $Pe = 0$ ,  $e^T P = (Pe)^T = 0$ ,  $Ae = 0$  et  $e^T A = (Ae)^T = 0$ , on a

$$\begin{aligned}
 T \circ K(A) &= T(ea^T + ae^T - 2A) \\
 &= -\frac{1}{2}P(ea^T + ae^T - 2A)P \\
 &= -\frac{1}{2}(Pea^T P + Pae^T P) + PAP \\
 &= PAP \\
 &= \left(I_n - \frac{1}{n}ee^T\right) A \left(I_n - \frac{1}{n}ee^T\right) \\
 &= A - \frac{1}{n}Ae.e^T - \frac{1}{n}ee^T.A + \frac{1}{n^2}ee^T.A.ee^T \\
 &= A.
 \end{aligned}$$

On a démontré :

$$T \circ K = \text{Id}_{\Omega_n}.$$

On peut montrer (mais ce n'est pas demandé) que l'on a également  $K \circ T = \text{Id}_{\Delta_n}$ , et que ces deux applications sont bijections réciproques l'une de l'autre.

**14** ▷ Montrer qu'une matrice symétrique  $D$  d'ordre  $n$  à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle est MDE si et seulement si  $-\frac{1}{2}PDP$  est positive.

### 📖 Réponse

**15** ▷ Montrer que toute matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre  $\text{Vect}(e) = \text{Vect}(\frac{1}{\sqrt{n}}e)$ . On applique la question 9 avec  $u = \frac{1}{\sqrt{n}}e$  qui est un vecteur propre unitaire : il existe  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tel que  $D = \frac{\lambda}{n}ee^T - B^T B$ . Comme  $Pe = 0$ , on a :

$$-\frac{1}{2}(PDP) = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{n}(Pe e^T P) + \frac{1}{2}(PB^T BP) = \frac{1}{2}PB^T BP.$$

Ainsi pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ ,

$$X^T \left(-\frac{1}{2}PDP\right) X = \frac{1}{2}X^T (PB^T BP) X = \frac{1}{2}(BPX)^T (BPX) = \frac{1}{2}\|BPX\|^2 \geq 0.$$

On en déduit que  $-\frac{1}{2}PDP$  est symétrique positive d'où  $D$  est MDE d'après la question précédente.

Par conséquent :

Toute matrice symétrique à coefficients positifs, non nulle et de diagonale nulle, ayant une unique valeur propre strictement positive d'espace propre de dimension 1 et de vecteur propre  $e$  est MDE.

## 4 Spectre des MDE

On conserve ici les notations de la partie précédente.

**16** ▷ Préciser la somme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$  des valeurs propres d'une MDE d'ordre  $n$ .

### Réponse

Soit  $D = (d_{i,j})$  une MDE d'ordre  $n$  : Il existe des points  $A_1, \dots, A_n$  tels que pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  on a  $d_{i,j} = d(A_i, A_j)^2$ . Comme  $D$  est symétrique, le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale  $Q$  telle que  $D = Q^T E Q$ , où  $E$  est une matrice diagonale avec  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

D'un côté, par cyclicité de la trace, on a :

$$\text{tr}(D) = \text{tr}(Q^T E Q) = \text{tr}(Q Q^T E) = \text{tr}(E) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

De l'autre côté, par définition de  $D$  :

$$\text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \sum_{i=1}^n d(A_i, A_i)^2 = 0.$$

Ainsi :

La somme  $\sum_{i=1}^n \lambda_i$  des valeurs propres d'une MDE d'ordre  $n$ .

**17** ▷ Soit  $D$  une MDE d'ordre  $n$  non nulle. Montrer que pour tout  $x \in \text{Vect}(e)^\perp$ , on a

$$x^T D x \leq 0.$$

### Réponse

Comme  $D$  est MDE, symétrique à coefficients positifs ou nuls et de diagonale nulle, la question 14 nous donne que  $-\frac{1}{2}PDP$  est positive.

Pour tout  $x \in \text{Vect}(e)^\perp$ ,  $Px = x$  d'après la question 10 donc

$$x^T D x = (Px)^T D (Px) = x^T P^T D P x = -2 \left( x^T \left( -\frac{1}{2} P^T D P \right) x \right) \leq 0.$$

Pour tout  $x \in \text{Vect}(e)^\perp$ , on a  $x^T D x \leq 0$ .

**18** ▷ Soit  $D$  une MDE d'ordre  $n$  non nulle. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres, ordonnées dans l'ordre croissant. Montrer

$$\lambda_{n-1} \leq 0$$

et en déduire que  $D$  a exactement une valeur propre strictement positive.

### Réponse

On applique le théorème de Courant-Fischer (question 8), à la matrice  $D$  (ou plus précisément à l'endomorphisme associé à  $D$ ,  $f : x \mapsto Dx$ ) :

$$\lambda_{n-1} = \min_{S \in \pi_{n-1}} \left( \max_{x \in S, \|x\|=1} (x, f(x)) \right)$$

Pour  $S = \text{Vect}(e)^\perp \in \pi_{n-1}$ , on a la majoration :

$$\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in \text{Vect}(e)^\perp, \|x\|=1} (x, f(x))$$

La question précédente nous donne que pour tout  $x \in \text{Vect}(e)^\perp$ ,  $(x, f(x)) = x^T Dx \leq 0$  d'où :

$$\lambda_{n-1} \leq \max_{x \in \text{Vect}(e)^\perp, \|x\|=1} (x, f(x)) \leq 0.$$

Ainsi, on a obtenu :

$$\boxed{\lambda_{n-1} \leq 0}$$

Les valeurs propres étant rangées dans l'ordre croissant, on obtient

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq 0.$$

En utilisant la question 16 :

$$\lambda_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \geq 0.$$

Si  $\lambda_n = 0$ , alors  $\sum_{i=1}^{n-1} (-\lambda_i) = 0$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $(-\lambda_i) \geq 0$  d'où  $\lambda_i = 0$ . Ainsi, toutes les valeurs propres de  $D$  sont nulles, donc  $D$  est nulle, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi,  $\lambda_n > 0$  et

$$\boxed{D \text{ a exactement une valeur propre strictement positive.}}$$

## 5 Problème inverse pour les MDE

Soit  $H$  une matrice de Hadamard d'ordre  $n$  et de première ligne constante égale à 1. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels tels que

$$\lambda_1 > 0 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$$

et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0.$$

On note  $U$  la matrice  $\frac{1}{\sqrt{n}}H$  et  $\Lambda$  la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les  $\lambda_i$ . On note enfin  $D = U^T \Lambda U$ .

**19** ▷ Montrer que  $D$  est symétrique, à coefficients positifs et à diagonale nulle, et a pour valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , avec  $\lambda_1$  d'espace propre de dimension 1.

 **Réponse**

**20** ▷ Montrer que  $D$  est MDE.

 **Réponse**

**21** ▷ Donner une matrice de distance euclidienne d'ordre 4 tel que son spectre soit  $\{5, -1, -2, -2\}$ .

 **Réponse**

Remarquons pour finir que la portée de ce résultat est à nuancer, car outre les conditions sur les ordres possibles pour les matrices de Hadamard, on ne sait même pas s'il existe de telles matrices pour tout ordre multiple de 4 ! D'autre part, il existe évidemment des matrices de distance euclidienne d'ordre impair...

FIN DU PROBLÈME.