Méthode de Bessel

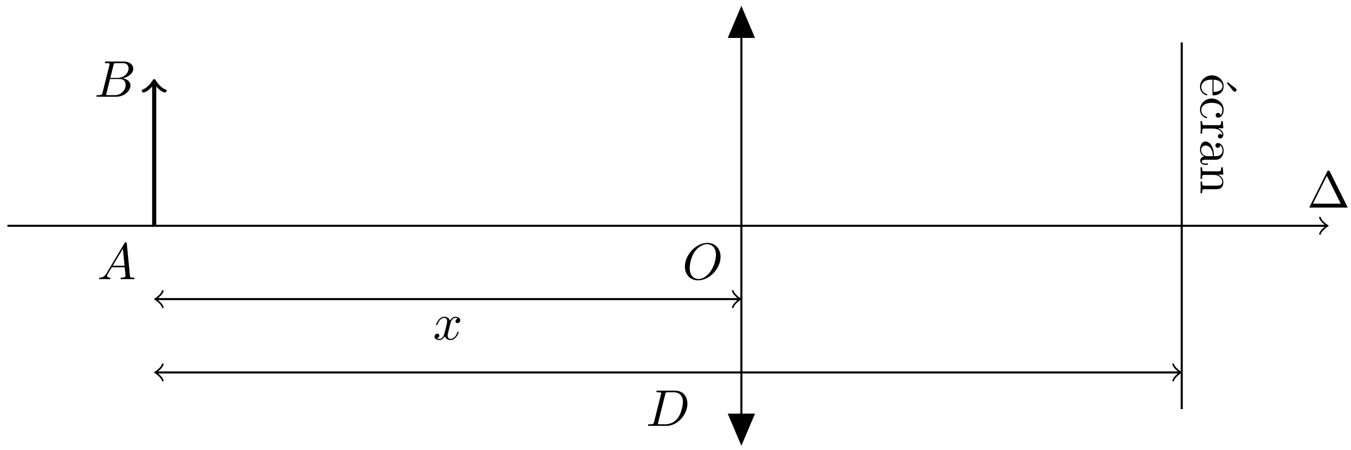
Le méthode de Bessel consiste à :

- fixer la distance objet/écran, qu'on appelle D et qu'on mesure ;
- placer la lentille près de l'objet et l'éloigner vers l'écran jusqu'à obtenir une image nette sur l'écran (agrandie), on mesure alors la distance objet/monture de la lentille qu'on appelle d_1 ;
- placer la lentille près de l'écran et la rapprocher de l'objet jusqu'à obtenir une image nette sur l'écran (rétrécie), on mesure alors la distance objet/monture de la lentille qu'on appelle d_2.

La position de l'objet, la position de l'écran et la position de la monture de la lentille sont clairement définies. Toutes les distances mesurées ici sont donc facilement mesurables au mètre-ruban. En particulier, on ne cherche pas à mesurer la distance jusqu'au centre optique, dont la position n'est pas connue. On peut alors considérer que l'incertitude-type sur les mesures de positions est égale à une demi-graduation du mètre-ruban, donc 0,5 mm ici. Autrement dit :

$$u(D) = u(d_1) = u(d_2) = 0{,}5\,\text{mm}$$

On peut schématiser l'expérience ainsi :



Ici, x est la distance entre l'objet et le centre optique de la lentille. Ce n'est donc pas tout à fait la distance mesurée en pratique. On verra dans la suite les conséquences de cette différence.

Le point A', image de A par la lentille, se situe à l'intersection de l'écran et de l'axe optique lorsqu'on parvient à faire l'image nette de AB sur l'écran. Avec les notations choisies ($D > 0$ et $x > 0$ car se sont ici des distances), on a alors $\overline{OA} = -x < 0$ et $\overline{OA'} = D - x > 0$. La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

En multipliant des deux côtés de l'équation par $(D-x)xf' \neq 0$, on obtient :

$$xf' + (D-x)f' = x(D-x)$$

En développant et en réarrangeant les termes, on trouve finalement :

$$x^2 - Dx + f'D = 0$$

On reconnaît un trinôme du second degré en x. On appelle Δ son discriminant :

$$\Delta = D^2 - 4f'D$$

Cette équation n'admet de solutions réelles que si Δ est positif ou nul :

$$D^2 - 4f'D \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{D \geqslant 4f'}$$

Condition de formation d'une image

Pour former l'image d'un objet sur un écran situé à une distance D grâce à une lentille convergente de distance focale image f', il faut impérativement que la relation suivante soit vérifiée :

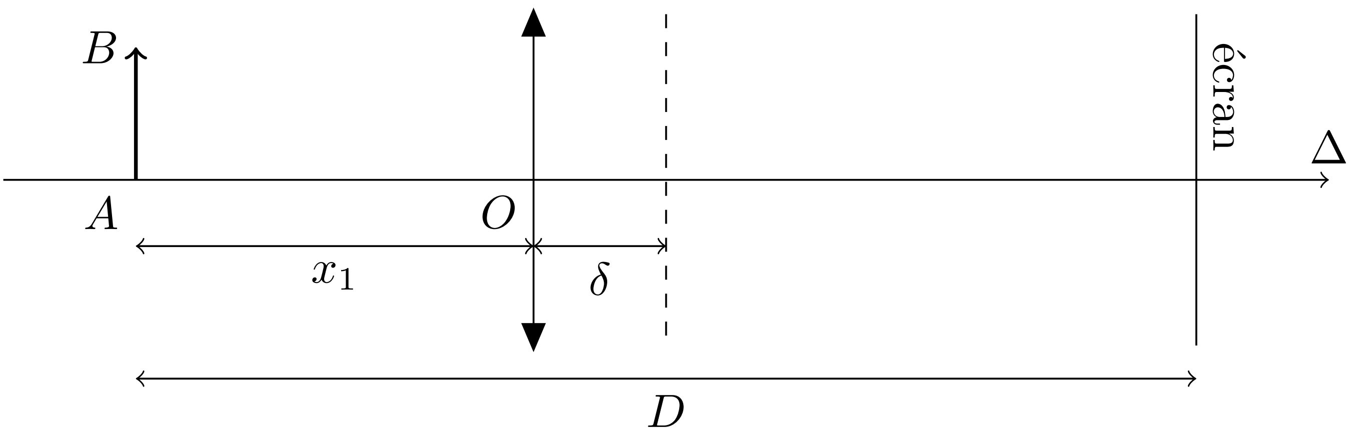
$$\boxed{D \geqslant 4f'}$$

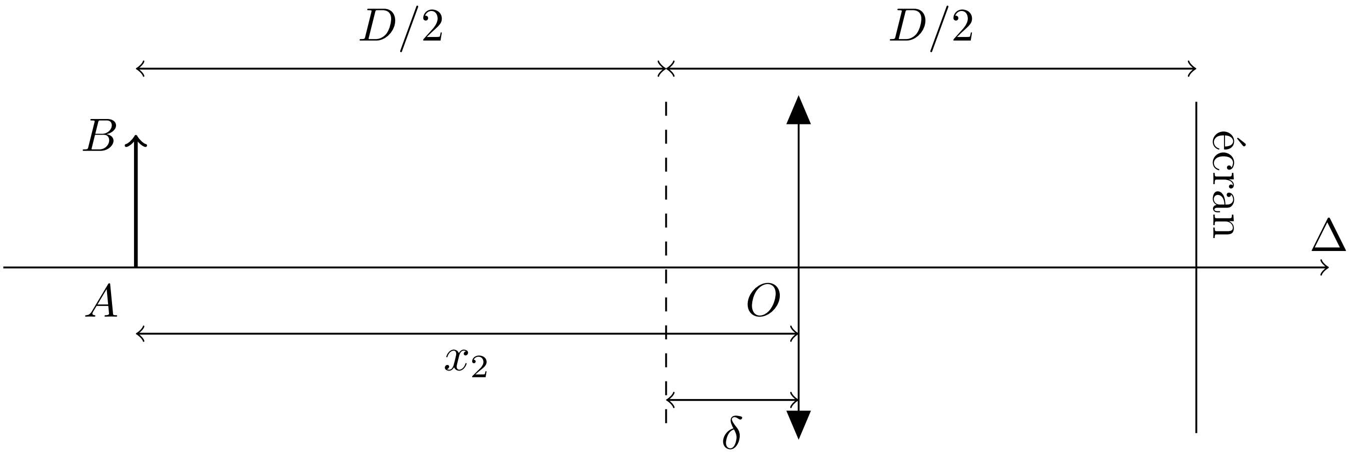
On suppose dans la suite que la condition $\Delta > 0$, c'est-à-dire $D > 4f'$ est vérifiée. Le trinôme possède donc deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$$

On peut vérifier relativement aisément que ces solutions sont bien toutes les deux positives. De plus, elles sont à égales distances du milieu du segment AA' (correspondant à $x = D/2$). En effet, si on pose $\delta = \dfrac{\sqrt{D^2 - 4Df'}}{2}$, on obtient :

$$x_1 = \frac{D}{2} - \delta \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{D}{2} + \delta$$





On peut alors relier simplement l'écart entre les deux positions de la lentille donnant une image nette et la distance focale :

$$x_2 - x_1 = 2\delta \quad \Leftrightarrow \quad x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4Df'}$$

Il ne reste plus qu'à isoler f'. Pour cela, on commence par passer le tout au carré pour se débarrasser de la racine :

$$(x_2 - x_1)^2 = D^2 - 4Df' \quad \Leftrightarrow \quad 4Df' = D^2 - (x_2 - x_1)^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{f' = \frac{D^2 - (x_2 - x_1)^2}{4D}}$$

On rappelle que x est la distance entre l'objet et le centre optique de la lentille. Comme on l'a souligné, ce n'est pas la distance mesurée en pratique. On explique maintenant que ça ne pose pas de problème.

On a mesuré les distances d_1 et d_2 entre l'objet et la monture de la lentille. Si on suppose que le centre optique de la lentille se situe à la distance a du bord de la monture (distance qui ne varie pas quand on déplace la lentille), on a alors :

$$x_1 = d_1 + a \quad \text{et} \quad x_2 = d_2 + a$$

Or c'est la différence entre les distances que l'on a relié à la distance focale et cette différence ne dépend pas de a :

$$x_2 - x_1 = d_2 + a - (d_1 + a) = d_2 - d_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f' = \frac{D^2 - (d_2 - d_1)^2}{4D}}$$