Phénomène de battements

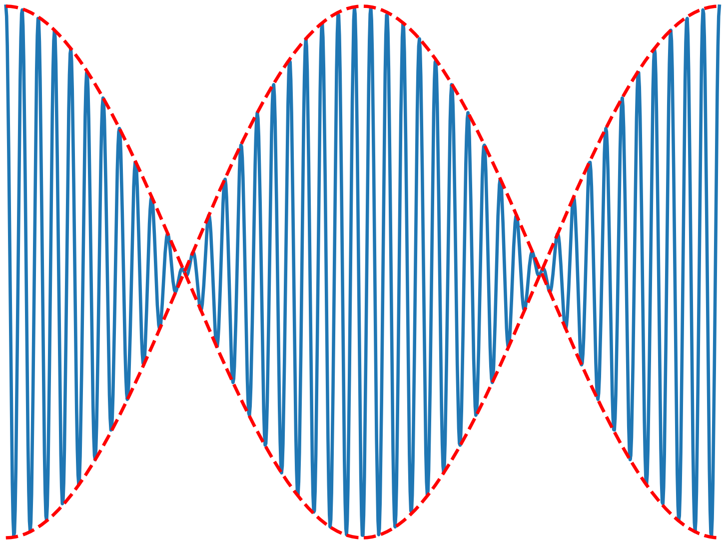


Table des matières

Les scripts python utilisés sont disponibles à l'adresse :

https://github.com/mabuchet/cours_terminale

I Rappels sur les sinusoïdes

1) Définition d'un signal sinusoïdal

Une sinusoïde est la représentation graphique de la fonction cosinus (ou de la fonction sinus). En physique, un signal sinusoïdal est un signal dont la représentation en fonction du temps est une sinusoïde. On définit les paramètres physiques permettant de décrire ce type de signal à l'aide d'un vocabulaire précis : amplitude, période, pulsation, fréquence, phase, phase à l'origine.

Définition : Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal s'écrit, sous sa forme la plus générale de la manière suivante :

$$\boxed{s(t) = a\cos(\omega t + \varphi)}$$

Avec :

- a l'**amplitude** ;
- ω la **pulsation** ;
- φ la **phase à $\mathbf{t = 0}$** ou **phase à l'origine** ;
- $\omega t + \varphi$ est simplement appelée la **phase**.

On aurait pu définir un signal sinsoïdal à partir de la fonction sinus : $s(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$. Ces deux expressions peuvent représenter le même signal à condition de ne pas choisir la même phase à l'origine. Le fait d'utiliser la fonction cosinus est un choix arbitraire, autrement dit une convention.

Il faut savoir tracer une sinusoïde « à la main ». Mais il est aussi utile de savoir la tracer avec un ordinateur, par exemple à l'aide du langage python.

Cette fonction est périodique de période T. On peut relier T à la pulsation en utilisant la 2π-périodicité du cosinus :

- 2π-périodicité du cosinus : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- T-périodicité du signal sinusoïdal : $\forall t \in \mathbb{R}, s(t + T) = s(t)$.

Or :

$$\begin{aligned} s(t+T) = s(t) \quad &\Leftrightarrow \quad a\cos\Big(\omega\,(t+T) + \varphi\Big) = a\cos\Big(\omega t + \varphi\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\Big(\omega t + \varphi + \omega T\Big) = \cos\Big(\omega t + \varphi\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \cos\left(x + 2\pi\right) = \cos\left(x\right) \end{aligned}$$

On identifie alors x à $\omega t + \varphi$ et ωT à 2π dans la définition de la 2π périodicité du cosinus. D'où :

$$\boxed{\omega T = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Par ailleurs on connait le lien entre la fréquence et la période (on peut voir ça comme la définition de la fréquence) : $\boxed{f = \frac{1}{T}}$.

On peut donc faire le lien entre la fréquence et la pulsation : $\boxed{\omega = 2\pi f}$

ω et f représentent la même information : la vitesse à laquelle la sinusoïde évolue. Plus précisément :

- f représente le nombre de périodes par unité de temps et s'exprime en $\boxed{\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}}$ dans le système international d'unité ;
- ω représente le nombre de radians que parcourt la phase sur le cercle trigonométrique par unité de temps et s'exprime en $\boxed{\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$ dans le système international d'unités.

2) Rôle des différents paramètres

$\rightarrow$ Voir script python intitulé 'sinusoide_effet_des_parametres.py'

3) Importance des signaux sinusoïdaux pour la physique

Les ondes générées par beaucoup de système prennent naturellement la forme de sinusoïdes :

— ondes lumineuses, par exemple dans le cas d'un laser ($f = 6{,}00 \times 10^{15}$ Hz pour une longueur d'onde $\lambda = 500$ nm) ;

— ondes sonores ;

— ondes de température ;

— onde de déformation d'une corde de guitare ;

— ...

De plus, les signaux physiques peuvent s'écrire comme des sommes de sinusoïdes :

— somme discrète pour les signaux périodiques, on parle alors de **série de Fourier** ;

— somme continue (intégrale) pour les signaux non périodiques, on parle alors de **transformée de Fourier**.

C'est en particulier pour cette raison que l'étude des signaux sinusoïdaux est omniprésente en physique et en traitement du signal.

Expérience : Acquisition du signal émis par un diapason

On excite un diapason. D'une part, on peut écouter le signal obtenu et d'autre part, on peut l'enregistrer à l'aide d'un micro pour en faire l'analyse.

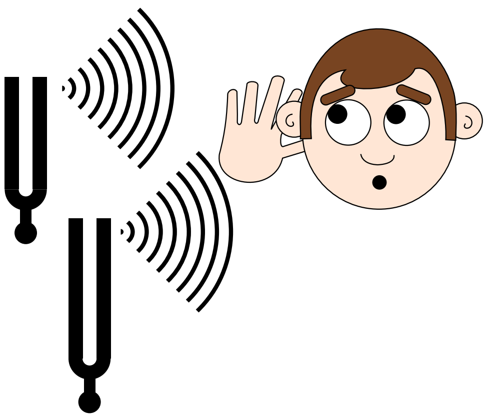
II Phénomène de battements

1) Battements sonores entre deux diapasons

Expérience

On excite deux diapasons quasi-identiques. D'une part, on peut écouter le signal obtenu et d'autre part, on peut l'enregistrer à l'aide d'un micro pour en faire l'analyse.

Protocole (montage expérimental) :



Observations expérimentales (résultats des mesures) :

Analyse :

On cherche à expliquer le signal obtenu. Pour cela on va faire une **hypothèse** :

Superposition linéaire (hypothèse fondamentale de la superposition de signaux)

Lorsque deux ondes se superposent on fera l'hypothèse qu'elles se superposent **linéairement**. Autrement dit : le signal $s(t)$ résultant de la superposition de deux ondes s_1 et s_2 est simplement la somme des deux signaux :

$$\boxed{s(t) = s_1(t) + s_2(t)}$$

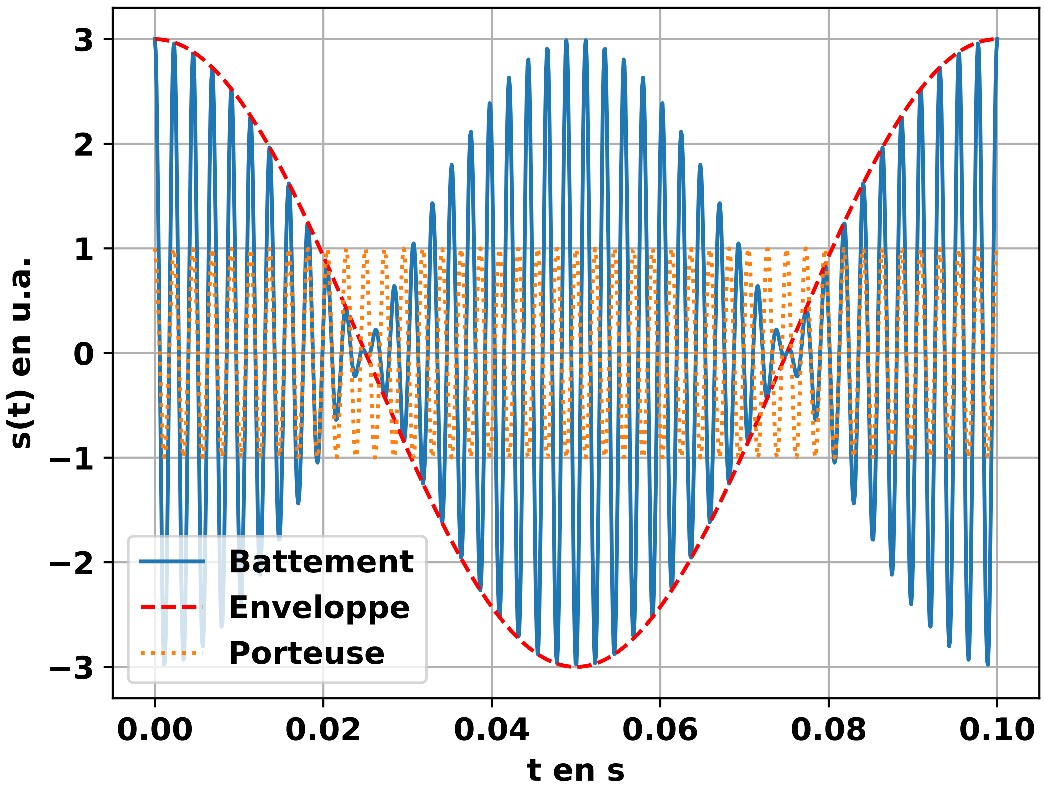
s est appelée « **superposition linéaire** de s_1 et s_2 ».

Rien ne prouve que c'est bien le cas, les signaux pourraient se multiplier entre eux, ou le résultat pourrait n'être ni une multiplication, ni une somme mais autre chose. D'ailleurs, il existe des situations où cette hypothèse n'est pas vérifiée. L'étude de tels phénomènes est rangée sous l'appellation « physique non linéaire ».

2) Un peu de trigonométrie : somme de deux sinusoïdes

Pour simplifier, on va faire une seconde hypothèse : on supposera que les deux diapasons ont été excités de la même manière et que les amplitudes des deux ondes sont identiques au niveau du micro ou de l'oreille.

Le cas où $f_1 \ll f_2$ (ou l'inverse), n'est pas très intéressant en pratique car alors $\overline{f} \sim \delta f$ et le résultat n'est pas facilement interprétable. En revanche, lorsque les deux fréquences sont proches ($f_1 \sim f_2$), la différence des deux fréquences est beaucoup plus faible que la somme : $|\delta f| \ll \overline{f}$ et « l'enveloppe » a une fréquence beaucoup plus faible que « la porteuse », comme représenté sur la figure suivante :



Battement entre deux ondes, l'une de fréquence $f_1 = 430\,\text{Hz}$ et l'autre de fréquence $f_2 = 450\,\text{Hz}$. On a dans ce cas : $\overline{f} = \dfrac{f_1 + f_2}{2} = 440\,\text{Hz}$ et $\delta f = \dfrac{f_1 - f_2}{2} = 10\,\text{Hz}$.

3) Conclusion de l'expérience et applications

Le fait que les données expérimentales soient compatibles avec le résultat obtenu en faisant la somme des deux signaux confirme que le son perçu lorsqu'il y a plusieurs sources et la somme des sons perçus lorsqu'il n'y a qu'une source qui émet à chaque fois.

Par ailleurs, ce phénomène à deux nombreuses applications :

- C'est ce qui est utilisé par les musiciens qui accordent leurs instruments à l'oreille. Un guitariste entraîné, par exemple accorde la première corde de la guitarre sur un mi et excite la corde suivante tout en choisissant la même note sur la première corde. Il peut alors entendre les battements et cherche à augmenter leur période.
- C'est utile pour mesurer la fréquence d'un laser par exemple. Le signal issu d'un laser peut être décrit avec une grande fidélité par une sinusoïde. Cependant un laser émet une onde lumineuse de fréquence $f \sim 6 \times 10^{14}$ Hz. Aucun système électronique n'est capable d'aller suffisamment rapidement pour mesurer un tel signal et encore moins l'enregistrer. On ne peut donc pas directement faire une mesure de fréquence comme on vient de le faire pour les ondes sonores. Un des moyens de mesurer la fréquence d'un laser (il y en a d'autres) est alors de générer un battement avec un laser de fréquence très bien connue (grâce à une des autres méthodes). En mesurant la fréquence du battement, on peut mesurer la fréquence du second laser.
- En mécanique quantique, un « état propre » du système d'énergie E oscille à la pulsation $\omega = \dfrac{E}{\hbar}$. On peut dans certaines situations préparer un système dans une superposition de deux états d'énergies E_1 et E_2 et observer le battement entre ces deux états. Dans ce contexte, le battement est appelé « oscillations de Rabi » (du nom du physicien américain Isidor Isaac Rabi, prix Nobel de physique en 1944). Le fonctionnement des horloges atomiques au césium ou au rubidium repose sur la mesure de ce battement.

Enfin, pour conclure, ajoutons que le phénomène de battement est intimement lié au phénomène d'interférence. Les calculs permettant de décrire les interférences observées avec un laser par exemple sont très similaires à ce qui a été fait ici.

Pour aller plus loin :

- Estimation rapide à l'oreille de l'écart de fréquence entre les deux diapasons.
- Calcul dans le cas où les ondes qui se superposent n'ont pas la même amplitude.