Phénomène de battement

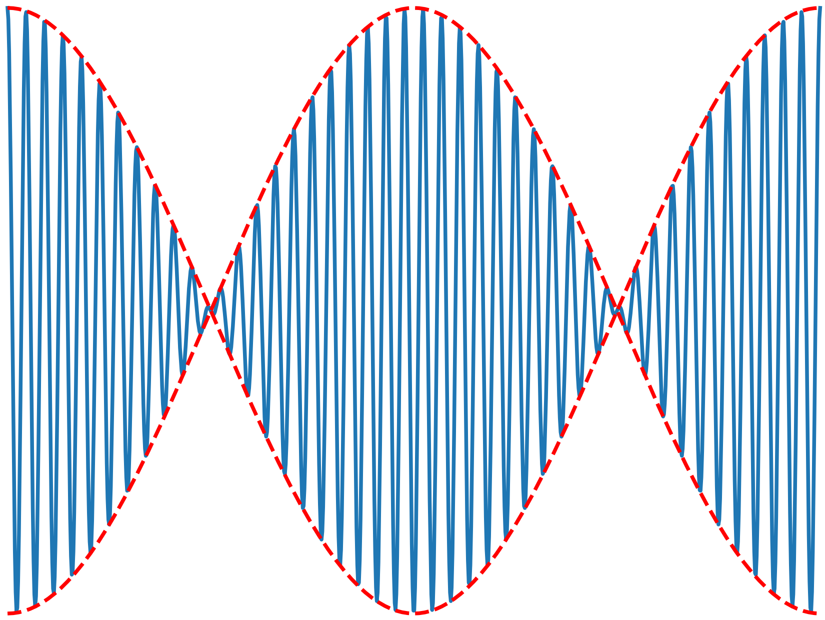


Table des matières

La version numérique du présent document et les scripts python utilisés sont disponibles à l'adresse :

https://github.com/mabuchet/cours_terminale

Mon adresse mail : marc-antoine.buchet@ac-orleans-tours.fr

I Rappels sur les sinusoïdes

1) Définition d'un signal sinusoïdal

Une sinusoïde est la représentation graphique de la fonction cosinus (ou de la fonction sinus). En physique, un signal sinusoïdal est un signal dont la représentation en fonction du temps est une sinusoïde. On définit les paramètres physiques permettant de décrire ce type de signal à l'aide d'un vocabulaire précis.

Définition : Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal qui s'écrit mathématiquement sous la forme :

$$\boxed{s(t) = a\cos(\omega t + \varphi)}$$

Où :

- a est l'**amplitude** ;
- $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{T}}$ est la **pulsation** ;
- T est la **période**
- $\omega t + \varphi$ est la **phase** à l'instant t ;
- φ est la **phase à $\mathbf{t = 0}$** ou **phase à l'origine**.

On aurait pu définir un signal sinusoïdal à partir de la fonction sinus : $s(t) = a\sin(\omega t + \varphi)$. Ces deux expressions peuvent représenter le même signal à condition de ne pas choisir la même phase à l'origine. Le fait d'utiliser la fonction cosinus est un choix arbitraire, autrement dit une convention.

Il faut savoir tracer une sinusoïde « à la main ». Mais il est aussi utile de savoir la tracer avec un ordinateur, par exemple à l'aide du langage python.

Par définition, une sinusoïde est périodique de période T. On peut relier T à la pulsation en utilisant la 2π-périodicité du cosinus. On part de la T-périodicité du signal sinusoïdal :

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t+T) = s(t)$$

Par hypothèse, la fonction s est une sinusoïde ce qui donne :

$$a\cos\Big(\omega\,(t+T)+\varphi\Big) = a\cos\Big(\omega t+\varphi\Big)$$

On divise par $a \neq 0$ et on développe l'argument du cosinus de gauche :

$$\cos\Big(\omega t+\varphi+\omega T\Big) = \cos\Big(\omega t+\varphi\Big)$$

En posant $x = \omega t + \varphi$, cette expression se réécrit :

$$\cos(x+\omega T) = \cos(x)$$

On reconnaît la définition de la 2π-périodicité du cosinus. On identifie donc ωT à 2π. D'où :

$$\boxed{\omega T = 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Par ailleurs on connait le lien entre la fréquence et la période (on peut voir ça comme la définition de la fréquence) : $\boxed{f = \frac{1}{T}}$.

On peut donc faire le lien entre la fréquence et la pulsation : $\boxed{\omega = 2\pi f}$

ω et f représentent la même information : la vitesse à laquelle la sinusoïde évolue. Plus précisément :

- f représente le nombre de périodes par unité de temps et s'exprime en $\boxed{\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}}$ dans le système international d'unité ;
- ω représente le nombre de radians que parcourt la phase sur le cercle trigonométrique par unité de temps et s'exprime en $\boxed{\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$ dans le système international d'unités.

2) Rôle des différents paramètres

→ Voir script python intitulé 'sinusoide_effet_des_parametres.py'

On retiendra que :

- modifier l'amplitude dilate ou contracte verticalement la courbe ;
- modifier la phase translate horizontalement la courbe ;
- modifier la pulsation (donc la période ou la fréquence) dilate ou contracte horizontalement la courbe.

3) Importance des signaux sinusoïdaux pour la physique

Expérience : Acquisition du signal émis par un diapason

- **Protocole :**

On excite un diapason en le frappant à l'aide d'un marteau. Le diapason est monté sur une caisse de résonance. D'une part, on peut écouter le signal obtenu et d'autre part, on peut l'enregistrer à l'aide d'un micro.

- **Observations expérimentales :**

- **Analyse des résultats :**

Sur une échelle de temps de l'ordre de la dizaine de secondes, le signal est amorti. Mais sur une échelle de temps courte devant cette durée, on peut négliger l'amortissement et le signal ressemble alors à une sinusoïde. Pour s'en convaincre, il faudrait faire un ajustement de données à l'aide du modèle sinusoïdal présenté ci-dessus.

On peut généraliser cette observation, réalisée sur un cas particulier. Les ondes générées par beaucoup de systèmes prennent naturellement la forme de sinusoïdes :

- ondes lumineuses, par exemple dans le cas d'un laser ($f = 6{,}00 \times 10^{15}$ Hz pour une longueur d'onde $\lambda = 500$ nm) ;
- ondes sonores ;
- ondes de température ;
- onde de déformation d'une corde de guitare ;
- ...

On peut même aller plus loin que ça. Depuis les travaux de Joseph Fourier au 18e siècle, on sait écrire tout signal périodique comme une somme, éventuellement infinie, de signaux sinusoïdaux.

C'est en particulier pour cette raison que l'étude des signaux sinusoïdaux est omniprésente en physique et en traitement du signal.

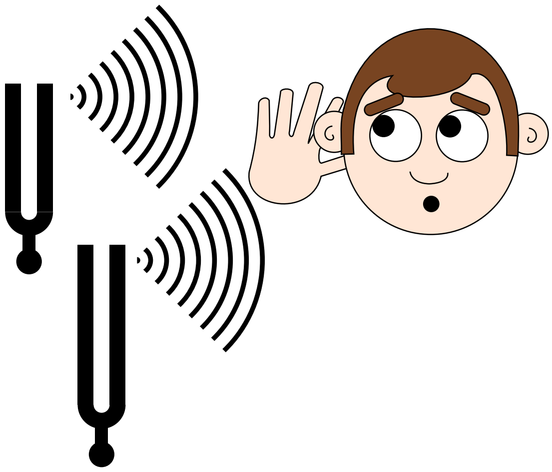
II Phénomène de battements

1) Battements sonores entre deux diapasons

Expérience

On excite deux diapasons quasi-identiques. D'une part, on peut écouter le signal obtenu et d'autre part, on peut l'enregistrer à l'aide d'un micro pour en faire l'analyse.

Protocole (montage expérimental) :



Observations expérimentales (résultats des mesures) :

Analyse :

On cherche à expliquer le signal obtenu. Pour cela on va faire une **hypothèse** :

Superposition linéaire (hypothèse fondamentale de la superposition de signaux)

Lorsque deux ondes se superposent on fera l'hypothèse qu'elles se superposent **linéairement**. Autrement dit : le signal $s(t)$ résultant de la superposition de deux ondes s_1 et s_2 est simplement la somme des deux signaux :

$$\boxed{s(t) = s_1(t) + s_2(t)}$$

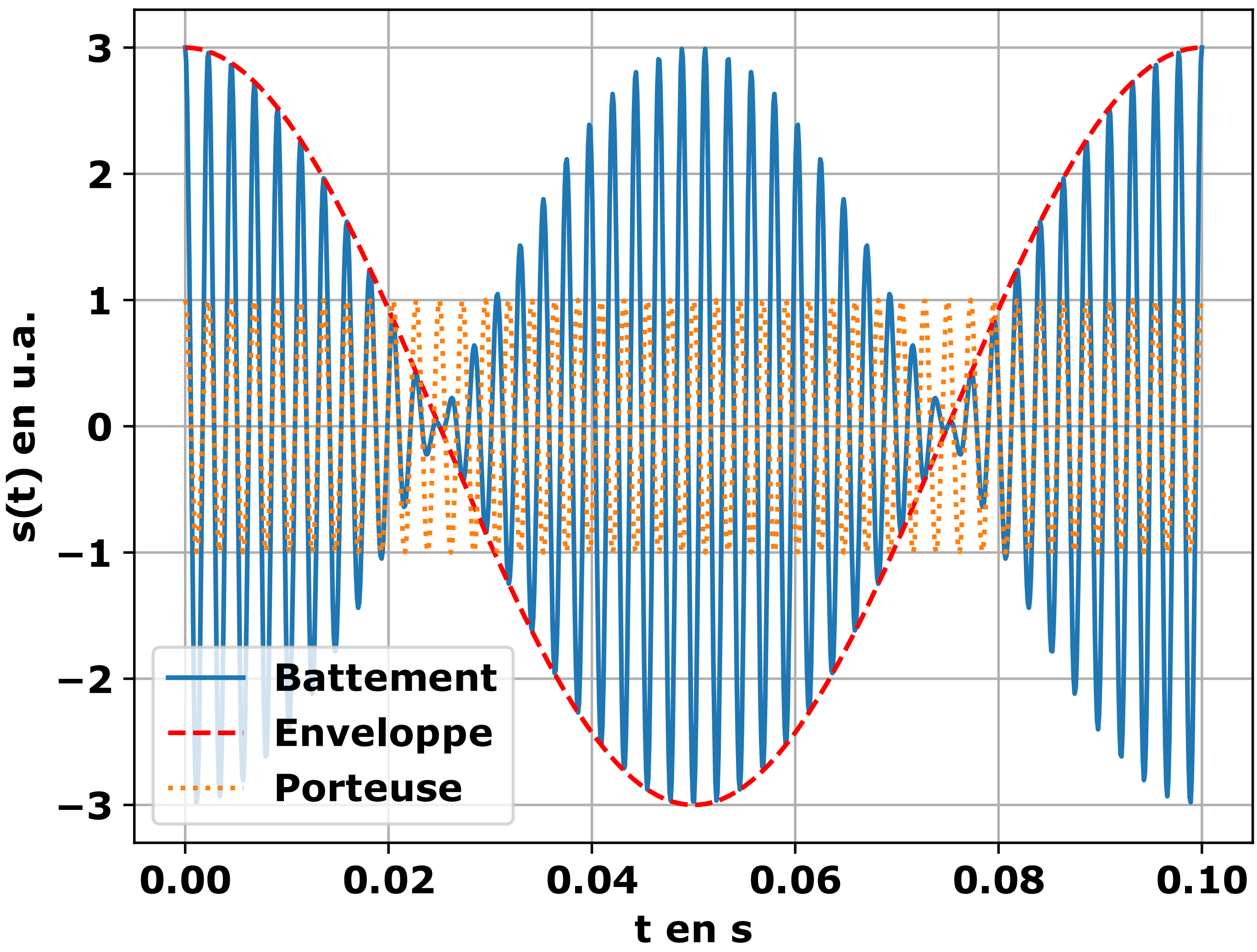
s est appelée « **superposition linéaire** de s_1 et s_2 ».

Rien ne prouve que c'est bien le cas, les signaux pourraient se multiplier entre eux, ou le résultat pourrait n'être ni une multiplication, ni une somme mais autre chose. D'ailleurs, il existe des situations où cette hypothèse n'est pas vérifiée. L'étude de tels phénomènes est rangée sous l'appellation « physique non linéaire ».

2) Un peu de trigonométrie : somme de deux sinusoïdes

Pour simplifier, on va faire une seconde hypothèse : on supposera que les deux diapasons ont été excités de la même manière et que les amplitudes des deux ondes sont identiques au niveau du micro ou de l'oreille.

Le cas où $f_1 \ll f_2$ (ou l'inverse), n'est pas très intéressant en pratique car alors $\overline{f} \sim \delta f$ et le résultat n'est pas facilement interprétable. En revanche, lorsque les deux fréquences sont proches ($f_1 \sim f_2$), la différence des deux fréquences est beaucoup plus faible que la somme : $|\delta f| \ll \overline{f}$ et « l'enveloppe » a une fréquence beaucoup plus faible que « la porteuse », comme représenté sur la figure suivante :



Battement entre deux ondes, l'une de fréquence $f_1 = 430\,\text{Hz}$ et l'autre de fréquence $f_2 = 450\,\text{Hz}$. On a dans ce cas : $\overline{f} = \dfrac{f_1 + f_2}{2} = 440\,\text{Hz}$ et $\delta f = \dfrac{f_2 - f_1}{2} = 10\,\text{Hz}$.

3) Conclusion de l'expérience et applications

Le fait que les données expérimentales soient compatibles avec le résultat obtenu en faisant la somme des deux signaux confirme que le son perçu lorsqu'il y a plusieurs sources est la somme des sons perçus lorsqu'il n'y a qu'une source qui émet à chaque fois.

Par ailleurs, ce phénomène a deux nombreuses applications :

- C'est ce qui est utilisé par les musiciens qui accordent leurs instruments à l'oreille. Un guitariste entraîné, par exemple accorde la première corde de la guitarre sur un mi et excite la corde suivante tout en choisissant la même note sur la première corde. Il peut alors entendre les battements et cherche à augmenter leur période.
- C'est utile pour mesurer la fréquence d'un laser par exemple. Le signal issu d'un laser peut être décrit avec une grande fidélité par une sinusoïde. Cependant un laser émet une onde lumineuse de fréquence $f \sim 6 \times 10^{14}$ Hz. Aucun système électronique n'est capable d'aller suffisamment rapidement pour mesurer un tel signal et encore moins l'enregistrer. On ne peut donc pas directement faire une mesure de fréquence comme on vient de le faire pour les ondes sonores. Un des moyens de mesurer la fréquence d'un laser (il y en a d'autres) est alors de générer un battement avec un laser de fréquence très bien connue (grâce à une des autres méthodes). En mesurant la fréquence du battement, on peut mesurer la fréquence du second laser.
- En mécanique quantique, un « état propre » du système d'énergie E oscille à la pulsation $\omega = E/\hbar$. On peut dans certaines situations préparer un système dans une superposition de deux états d'énergies E_1 et E_2 et observer le battement entre ces deux états. Dans ce contexte, le battement est appelé « oscillations de Rabi » (du nom du physicien américain Isidor Isaac Rabi, prix Nobel de physique en 1944). Le fonctionnement des horloges atomiques au césium ou au rubidium repose sur la mesure de ce battement.

Enfin, pour conclure, ajoutons que le phénomène de battement est intimement lié au phénomène d'interférence. Les calculs permettant de décrire les interférences observées avec un laser par exemple sont très similaires à ce qui a été fait ici.

Pour aller plus loin :

- Estimation rapide à l'oreille de l'écart de fréquence entre les deux diapasons.
- Calcul dans le cas où les ondes qui se superposent n'ont pas la même amplitude.
- Calcul à l'aide de la notation complexe.