

# ANÁLISIS DINÁMICO DE LA SUSPENSIÓN DE UN VEHÍCULO CON UN RECIPIENTE CON LÍQUIDO EN EL INTERIOR.

Mario Bustillo<sup>1</sup>, Francisco Cano<sup>1</sup>, Nahuel Pucciarelli<sup>1</sup>

*1-Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza, Argentina.*

**Resumen.** El propósito de este artículo es dimensionar el sistema de suspensión de un automóvil Peugeot 504 a través de un modelo matemático del sistema. El objetivo primordial es asegurar la estabilidad de recipientes con líquidos durante su transporte en diversos terrenos, minimizando el riesgo de derrames ocasionados por los movimientos del automóvil. Se propone desarrollar un modelo matemático, realizar simulaciones y el cálculo computacional de rangos de tolerancia óptimos para los amortiguadores y resortes. Se considera un modelo de medio vehículo con cuatro grados de libertad para un análisis más detallado.

**Palabras Clave.** Análisis Vibratorio, Sistema de Suspensión, Modelado Vehicular.

## Dynamic Suspension Analysis for Vehicles with Liquid Load

**Abstract.** The purpose of this article is to size the suspension system of a Peugeot 504 car through a mathematical model of the system. The primary objective is to ensure the stability of liquid containers during transportation on various terrains, minimizing the risk of spills caused by the car's movements. It is proposed to develop a mathematical model, conduct simulations, and computationally calculate optimal tolerance ranges for shock absorbers and springs. A half-vehicle model with four degrees of freedom is considered for a more detailed analysis.

**Key words.** Vibrational Analysis, Suspension System, Vehicle Modeling.

## 1 INTRODUCCIÓN

El sistema de suspensión de un vehículo proporciona las características de buen desempeño y confort en conducción. Esto se consigue aislando el cuerpo del vehículo de las irregularidades del camino y de las aceleraciones producidas durante la conducción. Tal como menciona Hurel et al. (2017), se debe controlar el movimiento vertical excesivo de la rueda para: eliminar las fallas de contacto entre el neumático y la carretera, mantener buenas características de conducción, y evitar daños a la suspensión o al camino.

Con el fin de desarrollar de manera óptima este proyecto, es necesario realizar una investigación en la cual se fundamente la selección de la solución a ejecutar. Dicho esto, se procede a recolectar información sobre los diferentes tipos de sistemas de suspensión tanto para el tren delantero como el tren trasero, teniendo en cuenta los requerimientos planteados para el sistema.

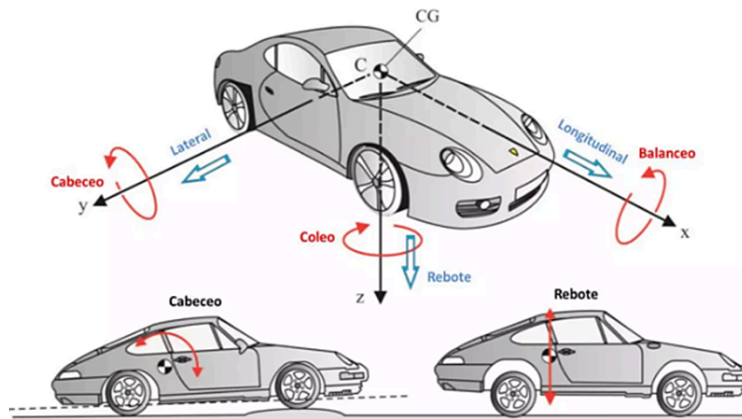
De acuerdo con Aparicio y Gómez (2022), se busca generar un diseño que cumpla con los requerimientos principales establecidos y, a su vez, brinde las comodidades necesarias para su uso cotidiano. Por lo tanto, es preciso plantear un proceso modular que divida el diseño del automóvil en distintas fases, encargándose de conceptualizar los diferentes componentes que definen al sistema.

Considerando el modelo de un automóvil como solo un tren delantero y un tren trasero, además del chasis, estudiamos su comportamiento bajo distintas excitaciones (en distintos terrenos, regulares o irregulares). La consigna en particular, es asumir que dentro del automóvil se encuentra una taza de café con líquido, y el mismo no debe volcarse con los movimientos del vehículo. Para ello, recordar conceptos de Mecánica de los Fluidos.

## 2 METODOLOGÍA

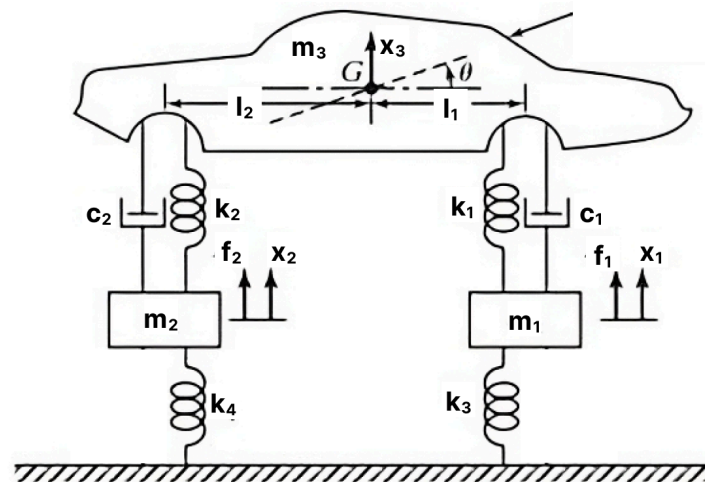
El estudio inicia con un modelo simplificado de un automóvil Peugeot 504, asumiendo simetría longitudinal, lo que permite considerar solo la mitad del vehículo para obtener un modelo aún más reducido como se representa en la figura 1. Este modelo reducido incluye

el chasis del vehículo, la suspensión y la amortiguación proporcionada por los neumáticos, tanto delanteros como traseros.



**Figura 1:** Esquemática del vehículo a estudiar.

Al analizar el sistema, se observa que el chasis está acoplado a la suspensión del vehículo, lo cual permite representarlo como un sistema masa-resorte-amortiguador. De manera similar, la suspensión proporcionada por los neumáticos también se puede modelar como un sistema masa-resorte-amortiguador. Durante el desplazamiento, el sistema es perturbado por fuerzas externas, que representan las irregularidades del terreno en relación con el movimiento del vehículo. Así, se logra simplificar el modelo real a uno más manejable para su análisis detallado.



**Figura 2:** Representación esquemática del sistema de suspensión del vehículo

La Figura 2 muestra el modelo a analizar en este artículo. Las variables introducidas representan:  $m_3$  es la masa del chasis,  $m_1$  y  $m_2$  son la masa del neumático trasero y delantero, respectivamente;  $k_1$  y  $k_2$  son la rigidez de la suspensión trasera y delantera, respectivamente;  $k_3$  y  $k_4$  son la rigidez del neumático trasero y delantero, respectivamente;  $c_1$  y  $c_2$  son el coeficiente de amortiguamiento de la suspensión trasera y delantera, respectivamente.

Por otro lado, los desplazamientos que puede realizar el automóvil corresponden a sus grados de libertad, los cuales son:  $y_1$  el desplazamiento del neumático trasero,  $y_2$  el desplazamiento del neumático delantero,  $y_3$  el desplazamiento del chasis y  $\theta$  el ángulo de cabeceo del chasis.

## 2.1 Formulación del Modelo Matemático del Automóvil

Se inicia determinando las ecuaciones de energía que describen el sistema, obteniendo las ecuaciones (1), (2) y (3).

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(\frac{dy_3}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}I_o\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

**Ecuación 1:** Energía Cinética del Sistema.

$$U = \frac{1}{2}k_3y_1^2 + \frac{1}{2}k_4y_2^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - y_3 + \theta l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_3 - \theta l_2)^2$$

**Ecuación 2:** Energía Potencial del Sistema.

$$D_v = \frac{1}{2}c_1\left(\left(\frac{dy_1}{dt}\right) - \left(\frac{dy_3}{dt}\right) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)l_1\right)^2 + \frac{1}{2}c_2\left(\left(\frac{dy_2}{dt}\right) - \left(\frac{dy_3}{dt}\right) - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)l_2\right)^2$$

**Ecuación 3:** Energía Disipativa del Sistema.

Donde  $I_o$  es el momento de inercia del chasis desplazado del centro de inercia.

Al aplicar las Ecuaciones de Movimiento de Lagrange y derivar parcialmente respecto a cada una de las variables independientes ( $y_1, y_2, y_3, \theta$ ) se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema, representadas por las ecuaciones (4), (5), (6) y (7). (Nassar, 2018)

$$f_1 = m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)c_1 - \left(\frac{dy_3}{dt}\right)c_1 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)c_1l_1 + y_1(k_1 + k_3) - y_3k_1 + \theta k_1l_1$$

**Ecuación 4:** Ecuación de Movimiento Traslacional del neumático trasero.

$$f_2 = m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)c_2 - \left(\frac{dy_3}{dt}\right)c_2 - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)c_2l_2 + y_2(k_2 + k_4) - y_3k_2 - \theta k_2l_2$$

**Ecuación 5:** Ecuación de Movimiento Traslacional del neumático delantero.

$$0 = m_3 \frac{d^2y_3}{dt^2} - \left(\frac{dy_1}{dt}\right)c_1 - \left(\frac{dy_2}{dt}\right)c_2 + \left(\frac{dy_3}{dt}\right)(c_1 + c_2) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)(c_2l_2 - c_1l_1) - y_1k_1 - y_2k_2 + y_3(k_1 + k_2) + \theta(k_2l_2 - k_1l_1)$$

**Ecuación 6:** Ecuación de Movimiento Traslacional del chasis.

$$0 = I_o \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)c_1l_1 - \left(\frac{dy_2}{dt}\right)c_2l_2 + \left(\frac{dy_3}{dt}\right)(c_2l_2 - c_1l_1) + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)(c_1l_1^2 + c_2l_2^2) + y_1k_1l_1 - y_2k_2l_2 + y_3(k_2l_2 - k_1l_1) + \theta(k_1l_1^2 + k_2l_2^2)$$

**Ecuación 7:** Ecuación de Movimiento Rotacional del chasis.

Al reordenar matricialmente, se obtiene el siguiente sistema

$$M \cdot \ddot{\bar{X}} + C \cdot \dot{\bar{X}} + K \cdot \bar{X} = F$$

**Ecuación 8:** Ecuación matricial del modelo matemático

Donde:

$M$ : Matriz de Masa del Sistema.

$C$ : Matriz de Amortiguamiento del Sistema.

$K$ : Matriz de Rigidez del Sistema.

$F$ : Vector de Fuerzas Externas aplicadas al Sistema.

$X$ : Vector posición en coordenadas geométricas.

$\vec{X}$ : Vector velocidad en coordenadas geométricas.

$\vec{\ddot{X}}$ : Vector aceleración en coordenadas geométricas.

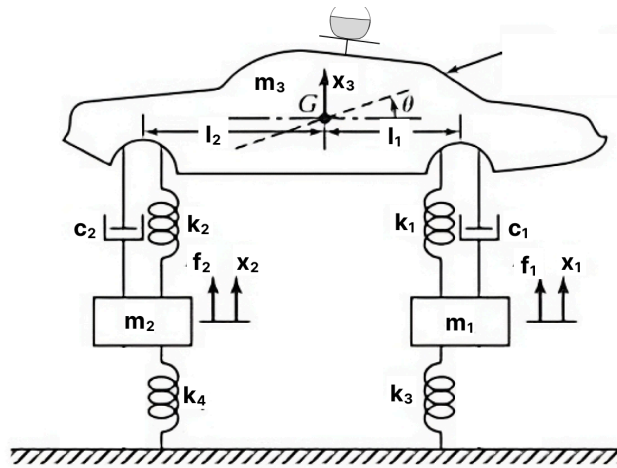
## 2.2 Formulación del Modelo Matemático de la Carga Líquida

En un recipiente abierto que contiene un líquido sometido a una aceleración horizontal uniforme, el líquido se dispone por sí mismo de tal manera que se mueve como un sólido sometido a la acción de una fuerza aceleradora (Fluidos En el Movimiento del Cuerpo Rígido, s. f.). Como consecuencia la superficie del líquido adquiere una pendiente distinta de cero (Barnfather, 2003). Mediante la ecuación (9), se describe el comportamiento del fluido bajo estas condiciones en un análisis bidimensional.

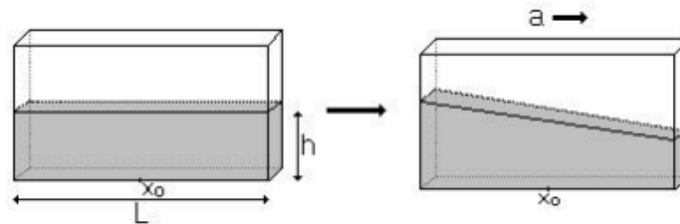
$$dP = -\rho a_x dx - \rho a_z (dz + g)$$

**Ecuación 9:** Ecuación para el comportamiento de fluidos acelerados.

A partir de la Figura 3, se asume que el ángulo de rotación del chasis ( $\theta$ ) por la altura del recipiente es igual a la aceleración del fluido y que este tiene densidad constante. Así, se puede determinar la altura que alcanzará el líquido en el recipiente cuando el automóvil se encuentra en movimiento.



**Figura 3:** Representación esquemática del sistema de suspensión del vehículo acoplado con una carga líquida en la parte superior.



**Figura 4:** Izquierda: Recipiente de largo L que contiene un fluido en reposo. Derecha: Al acelerar uniformemente el recipiente se observa el cambio en la pendiente de la superficie libre del fluido

Se somete el recipiente acoplado al vehículo a una aceleración horizontal constante. En este caso se tiene  $a_z = a_{chasis} + g$ . Luego al integrar la ecuación (9), de acuerdo con Modón (2017), se puede determinar la variación de altura ( $\Delta h$ ) que alcanza el líquido mediante la ecuación (10).

$$\Delta h = \frac{a_{taza} \cdot r}{g + a_{chasis}}$$

**Ecuación 10:** Ecuación de la variación de altura que alcanza un fluido acelerado

Donde  $r$  es el radio del recipiente.

Sin embargo, la aceleración de la taza ( $\alpha_{taza}$ ) se describe por un movimiento rotacional y en la ecuación se plantea mediante movimiento traslacional. Así que se considera la aceleración del cabeceo del chasis como la aceleración de la taza y se convierte a movimiento traslacional mediante la ecuación (11).

$$a_{taza} = \alpha_{taza} \cdot h_{taza}$$

**Ecuación 11:** Ecuación de la variación de altura que alcanza un fluido acelerado

Donde  $h_{taza}$  es la altura a la que se encuentra la taza respecto al terreno.

Para determinar si el líquido se derramará durante el traslado, se verifica si el nivel del líquido sobrepasa la altura total del recipiente utilizando la ecuación (12).

$$h_{L0} + \frac{a_{taza} \cdot r}{g + a_{chasis}} \leq h_r$$

**Ecuación 12:** Condición para que no se derrame el líquido del recipiente en movimiento.

Donde  $h_{L0}$  es la altura del líquido en reposo y  $h_r$  es la altura del recipiente.

### 2.3 Suposiciones y Simplificaciones

Para realizar los cálculos del modelo del automóvil, se utilizarán como referencia los parámetros presentados en la Tabla 1. (Desconocido, (2018)).

**Tabla 1.** Parámetros del Modelo del Automóvil

Denominación	Símbolo	Cantidad	Unidad
Distancia entre ejes	$l_1 + l_2$	2,74	m
Largo	$L$	4,49	m
Altura del automóvil	$h_a$	1,46	m
Distancia al centro de masa geométrico	$l_g$	0,50	m
Masa del chasis	$m_3$	985	kg
Masa de las ruedas	$m_1, m_2$	25	kg
Rigidez del neumático	$k_3, k_4$	154.850	N/m
Rigidez de los amortiguadores	$k_1, k_2$	25.530 35.350	N/m
Amortiguamiento de Neumáticos	$c_1, c_2$	1.100 1.200	N.s/m
Tiempo de análisis	$t$	10	s
Tiempo de aplicación de impulso externo	$t_{pulso}$	5	s

Asimismo, para realizar los cálculos del modelo de la carga líquida, se utilizarán como referencia los parámetros presentados en la Tabla 2.

**Tabla 2.** Parámetros del Modelo de la Carga Líquida

Denominación	Símbolo	Cantidad	Unidad
Altura del recipiente	$h_r$	0,1	m
Altura del líquido en reposo	$h_{L0}$	0,08	m
Altura del recipiente en el auto	$h_{taza}$	1,20	m
Diametro del recipiente	$d$	0,06	m
Densidad del líquido	$\rho$	1,00	g/mL

Por otro lado, para representar las excitaciones que recibe el sistema por el desplazamiento del camino, se representan por los parámetros de la Tabla 3.

**Tabla 3.** Parámetros de la excitación recibida por el desplazamiento del camino

Denominación	Símbolo	Cantidad	Unidad
Velocidad	$v$	20	m/s
Amplitud de onda	$Amp$	0,05	m
Longitud de onda	$\lambda$	5	m
Amplitud del reductor de velocidad	$h_{bache}$	0,2	m
Longitud del reductor de velocidad	$L_{bache}$	0.5	m
Frecuencia de aplicación de la Carga Externa	$\omega_p$	~25.13	rad/s
Gravedad	$g$	9,81	m/s <sup>2</sup>

## 2.4 Formulación del Espacio Modal

Una vez determinado el modelo del sistema de manera matricial, tal como la ecuación (8), se procede a calcular los autovectores y autovalores del sistema mediante la ecuación (13). Como resultado se obtienen N modos de vibración y N frecuencias naturales para un sistema no amortiguado.

$$[k] - \omega^2[m] X = 0$$

**Ecuación 13:** Problema de autovalores y autovectores del sistema con N grados de libertad.

Una vez determinado las frecuencias naturales y los modos de vibración es posible plantear la ecuación de movimiento del sistema de múltiples grados de libertad bajo cargas externas mediante el método de descomposición modal mediante la ecuación (14). Para este método, se expresan los desplazamientos asociados a los grados de libertad como una combinación lineal de los modos normales del sistema.

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

**Ecuación 14:** Sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales desacopladas en coordenadas modales.

Se arma una matriz de  $N \times N$  con los  $N$  modos de vibración, la cual se denomina matriz modal. Luego, se definen las coordenadas iniciales modales del sistema a partir de las coordenadas generalizadas geométricas mediante las ecuaciones (15) y (16). De la misma manera se calculan los equivalentes para la matriz de Masa, de Rigidez, de Amortiguamiento y de Fuerzas Externas aplicadas al sistema para un sistema en coordenadas modales.

$$q(0) = \text{Matriz Modal}^T * x(0)$$

**Ecuación 15:** Coordenadas iniciales modales de desplazamiento.

$$\overline{q}(0) = \text{Matriz Modal}^T * \overline{x}(0)$$

**Ecuación 16:** Coordenadas iniciales modales de velocidad.

La solución al sistema en coordenadas modales se obtiene mediante la ecuación (17) para el desplazamiento y con la ecuación (18) para la velocidad en el espacio modal  $q(i,t)$  para cada masa  $m_i$  en función del tiempo  $t_i$ .

$$q_i(t) = e^{-\xi_i w_{ni} t} \left\{ \cos(w_{di} t) + \frac{\xi_i}{\sqrt{1-\xi_i^2}} \text{sen}(w_{di} t) \right\} q_i(0) + \left\{ \frac{1}{w_{di}} e^{-\xi_i w_{ni} t} \text{sen}(w_{di} t) \right\} \overline{q}_i(0) + \frac{1}{w_{di}} \int_0^t Q_i(\tau) e^{-\xi_i w_{ni} (t-\tau)} \text{sen}(w_{di} (t-\tau)) d\tau, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

**Ecuación 17:** Respuesta del  $i$ -ésimo modo de vibración de un sistema forzado en coordenadas modales.

$$\overline{q}_i(t) = \frac{e^{-\xi_i w_{ni} t}}{w_{di}} * \left( q_i(0) * w_{di}^2 + q_i(0) * \frac{\xi_i^2}{\sqrt{1-\xi_i^2}} * w_{ni} * w_{di} + \overline{q}_i(0) * \xi_i w_{ni} \right) * \text{sen}(w_{di} t) + \frac{e^{-\xi_i w_{ni} t}}{w_{di}} * \left( \left( q_i(0) * \xi_i w_{ni} - \overline{q}_i(0) \right) * w_{di} - q_i(0) * \frac{\xi_i}{\sqrt{1-\xi_i^2}} * w_{di}^2 \right) * \cos(w_{di} t), i = 1, 2, 3, \dots, n$$

**Ecuación 18:** Velocidad del  $i$ -ésimo modo de vibración de un sistema forzado en coordenadas modales.

Sin embargo, para reducir el tiempo y recursos de costo computacional al realizar los experimentos, se considera una aproximación de los diferenciales de la velocidad y aceleración para cada coordenada geométrica.

### 3 ANÁLISIS EXPERIMENTAL

Para estudiar el comportamiento del sistema, se establecen parámetros fijos y parámetros variables. Los parámetros variables incluyen el sistema de suspensión del vehículo, las condiciones iniciales del sistema y las formas de excitación externas al sistema.

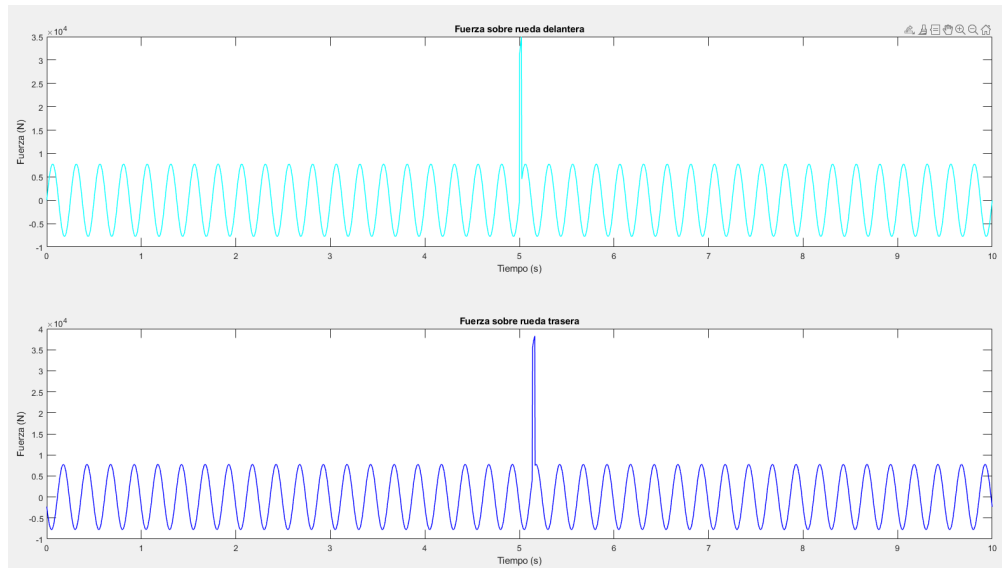
#### 3.1 Caso Base - Parámetros Estándar

Para obtener valores de referencia y realizar comparaciones ante distintos cambios, primero se calcula la respuesta del sistema utilizando parámetros estándar de referencia.

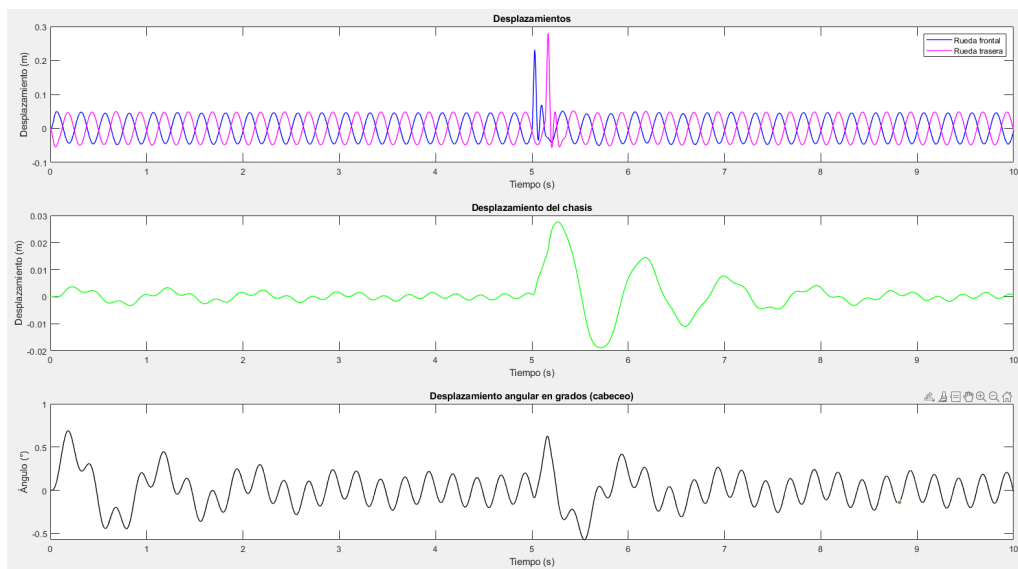
**Tabla 4.** Parámetros Estándar del Sistema

Condiciones Iniciales de desplazamiento	[ 0[m], 0[m], 0[m], 0[rad] ]
---	------------------------------

Condiciones Iniciales de velocidad	[ 0[m/s], 0[m/s], 0[m/s], 0[rad/s] ]
Altura del Líquido Inicial ( $h_{L0}$ )	0,08 [m]
Velocidad	20 [m/s]
Amortiguamiento [ $c_1$ , $c_2$ , 0, 0]	[ 1100, 1200, 0, 0 ] [Ns/m]
Rigidez [ $k_1$ , $k_2$ , $k_3$ , $k_4$ ]	[ 26530, 36350, 154850, 154850 ] [N/m]
Fuerza de Excitación	$F = Amp * \sin(w_p t) + \delta(t)$

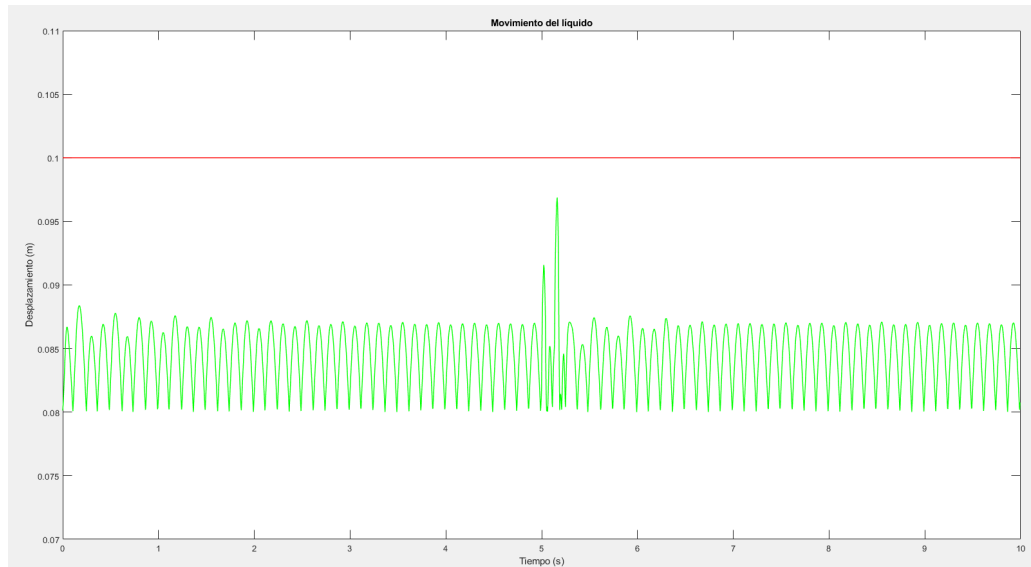


**Figura 5: Fuerzas Externas aplicadas al sistema bajo parámetros estándar.**



**Figura 6: Comportamiento del sistema sistema bajo parámetros estándar.**





**Figura 7:** Estado del fluido del sistema bajo parámetros estándar.

### 3.2 Situación 1: Modificar parámetros del Sistema

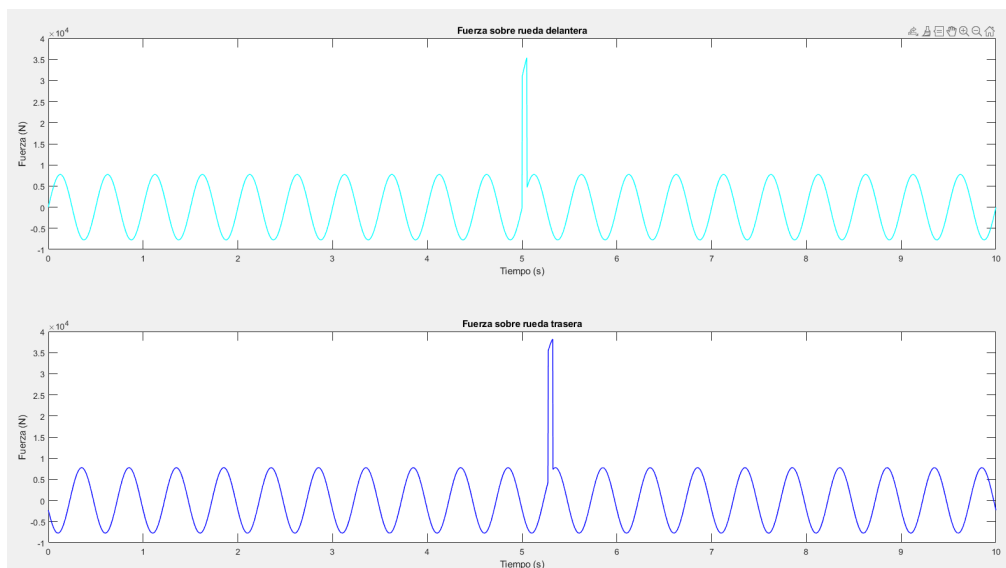
Se desea analizar la variación en la respuesta del sistema cuando se modifican los parámetros físicos, tales como la velocidad, la rigidez y el amortiguamiento. Para ello, se examina el sistema utilizando valores bajos y altos en relación con los parámetros estándar del sistema. Se analizan diferentes situaciones variando parámetros del sistema.

#### Caso 1.1: Modificación de valores del sistema a baja velocidad del vehículo.

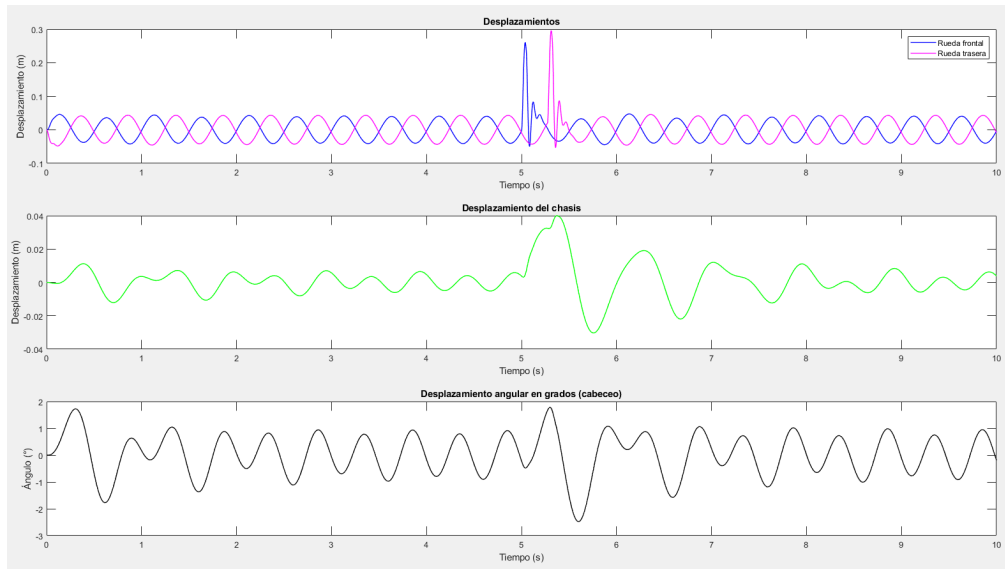
En este análisis, se examina el comportamiento del sistema y el fluido ante la respuesta del sistema con una baja velocidad del vehículo.

**Tabla 5.** Parámetro de baja velocidad del vehículo.

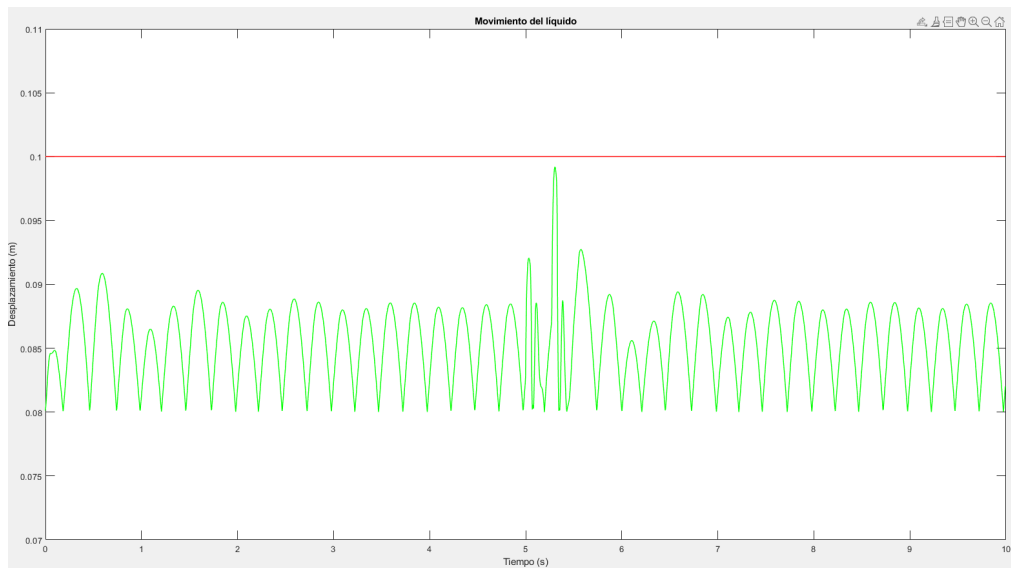
Velocidad	10 [m/s]
-----------	----------



**Figura 8:** Fuerzas Externas aplicada al sistema a baja velocidad.



**Figura 9:** Comportamiento del sistema a baja velocidad.



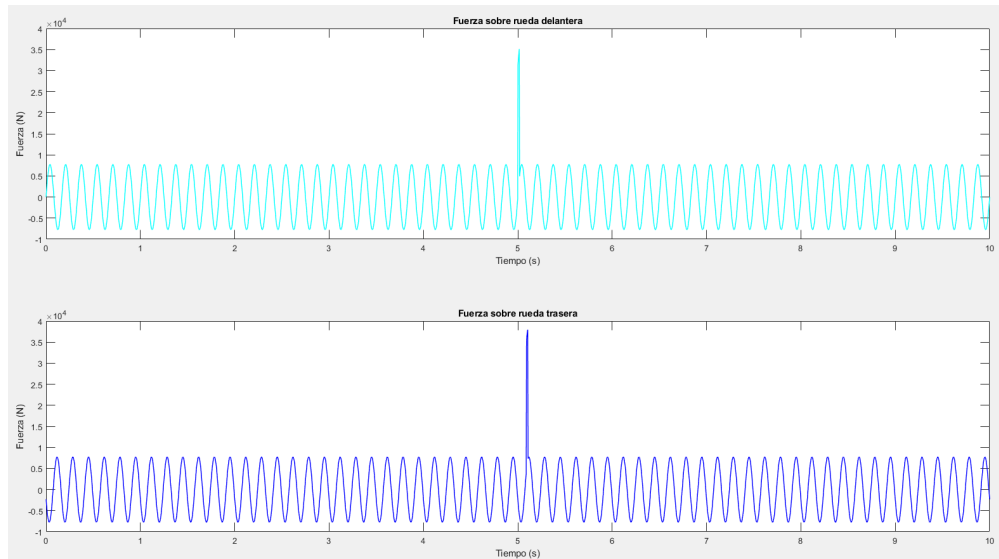
**Figura 10:** Estado del fluido del sistema a baja velocidad.

### Caso 1.2: Modificación de valores del sistema a alta velocidad del vehículo.

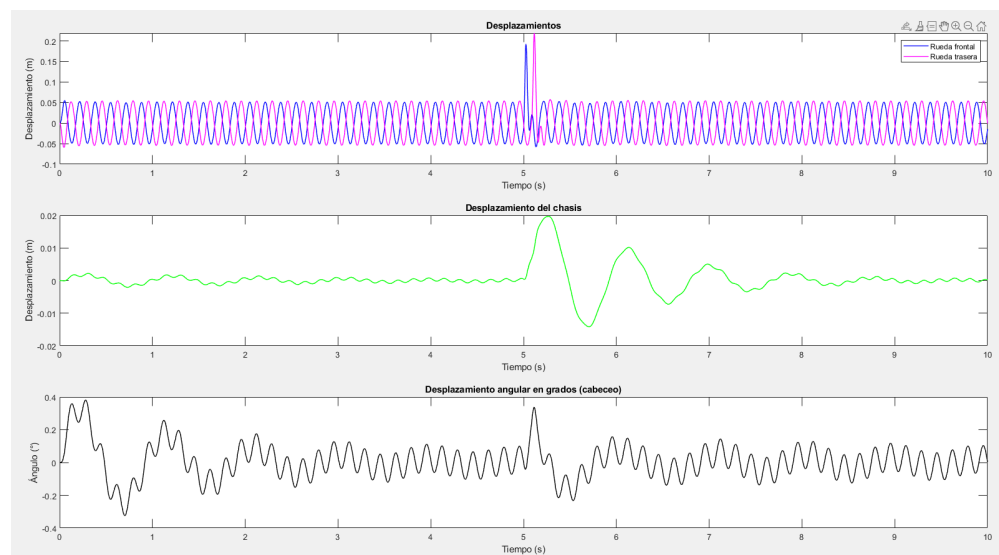
En este análisis, se examina el comportamiento del sistema y el fluido ante la respuesta del sistema con una alta velocidad del vehículo. Se mantiene el resto de parámetros estándar del sistema.

**Tabla 6.** Parámetro de alta velocidad del vehículo.

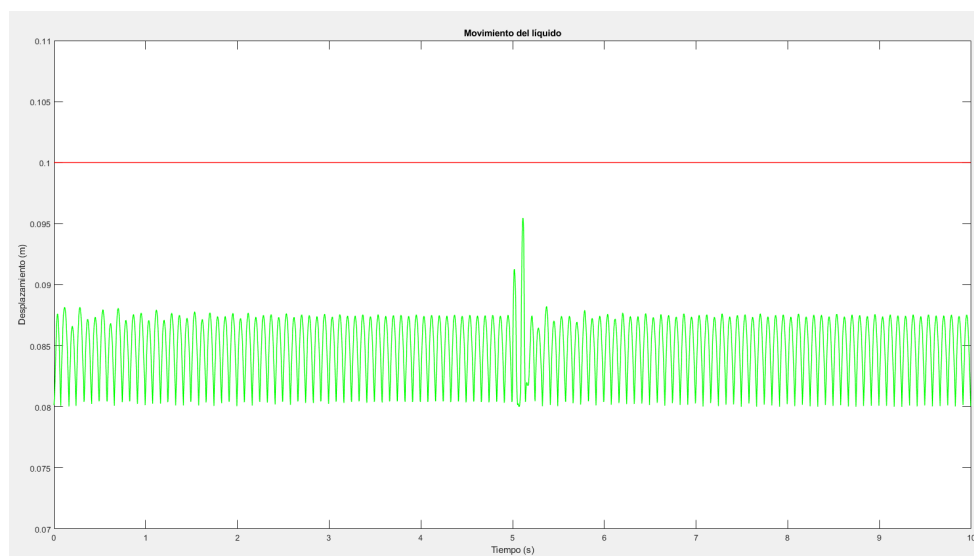
Velocidad	30 [m/s]
-----------	----------



**Figura 11:** Fuerzas Externas aplicada al sistema a alta velocidad.



**Figura 12:** Comportamiento del sistema a alta velocidad.

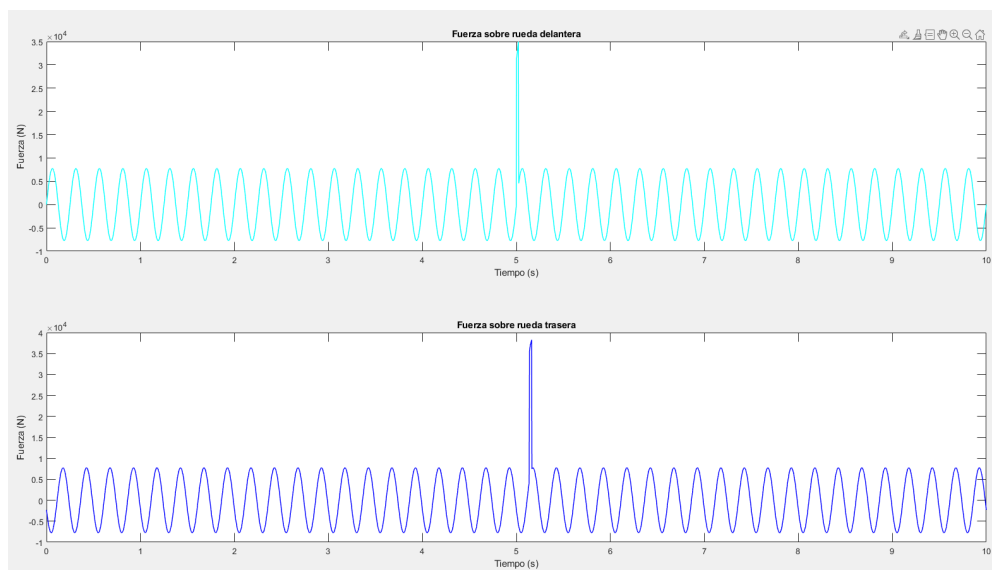
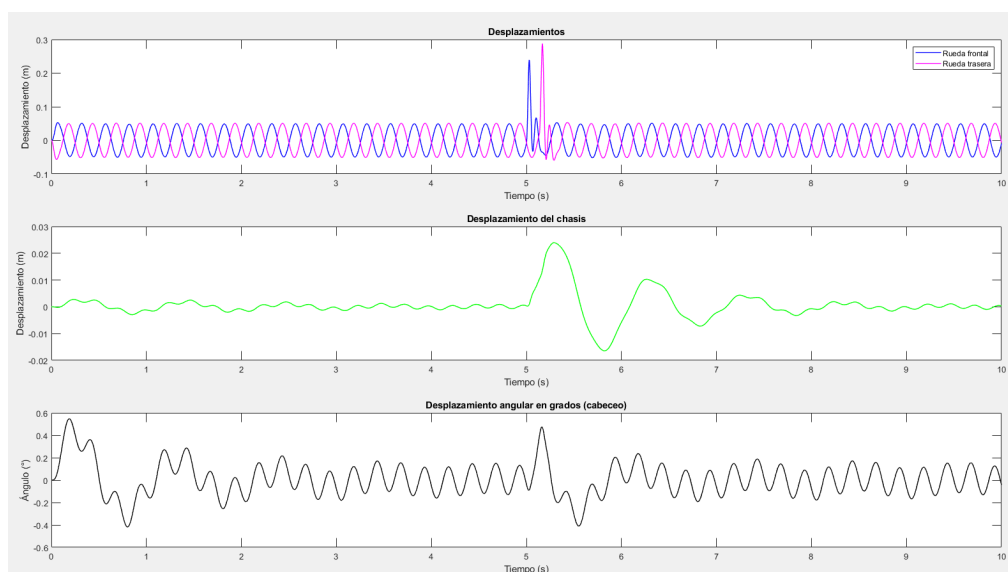


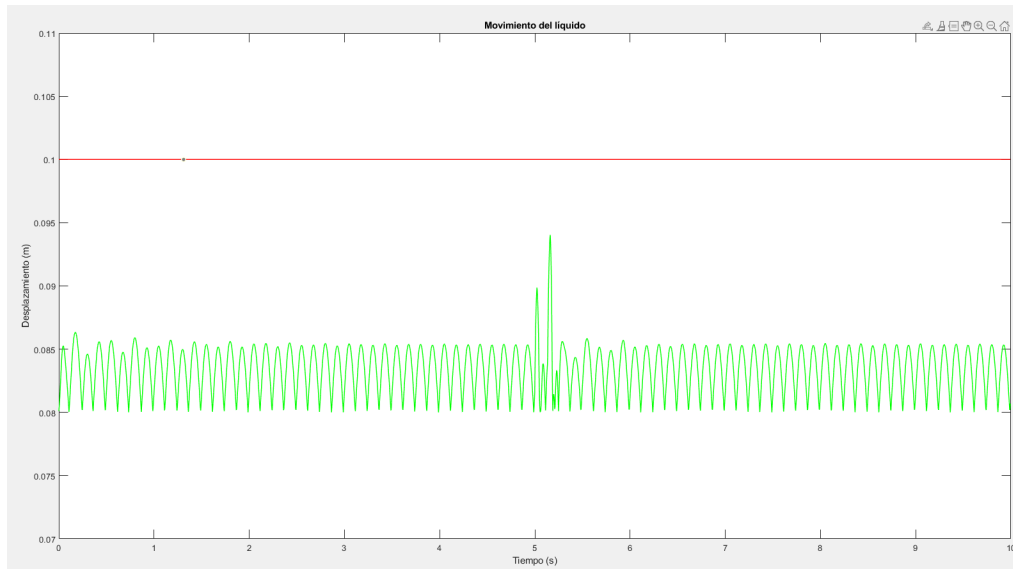
**Figura 13:** Estado del fluido del sistema a alta velocidad.

**Caso 1.3:** Modificación de valores del sistema con amortiguadores de baja rigidez

**Tabla 7.** Parámetro de baja rigidez del sistema de suspensión del vehículo.

Condiciones Iniciales de desplazamiento	[ 0[m], 0[m], 0[m], 0[rad] ]
Condiciones Iniciales de velocidad	[ 0[m/s], 0[m/s], 0[m/s], 0[rad/s] ]
Altura del Líquido Inicial ( $h_{L0}$ )	0,08 [m]
Velocidad	20 [m/s]
Amortiguamiento [ $c_1, c_2, 0, 0$ ]	[ 1100, 1200, 0, 0 ] [Ns/m]
Rigidez [ $k_1, k_2, k_3, k_4$ ]	[ 20000, 25820, 154850, 154850 ] [N/m]
Fuerza de Excitación	$F = Amp * \sin(w_p t) + \delta(t)$


**Figura 14:** Fuerzas Externas aplicada al sistema

**Figura 15:** Comportamiento del sistema con amortiguadores de baja rigidez.



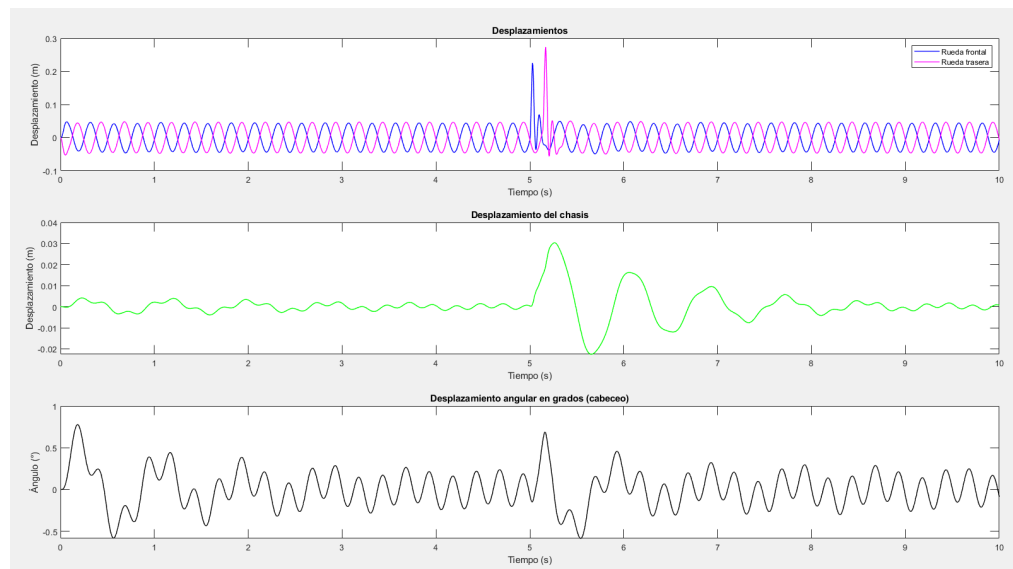
**Figura 16:** Estado del fluido del sistema con amortiguadores de baja rigidez.

#### Caso 1.4: Modificación de valores del sistema con amortiguadores de alta rigidez

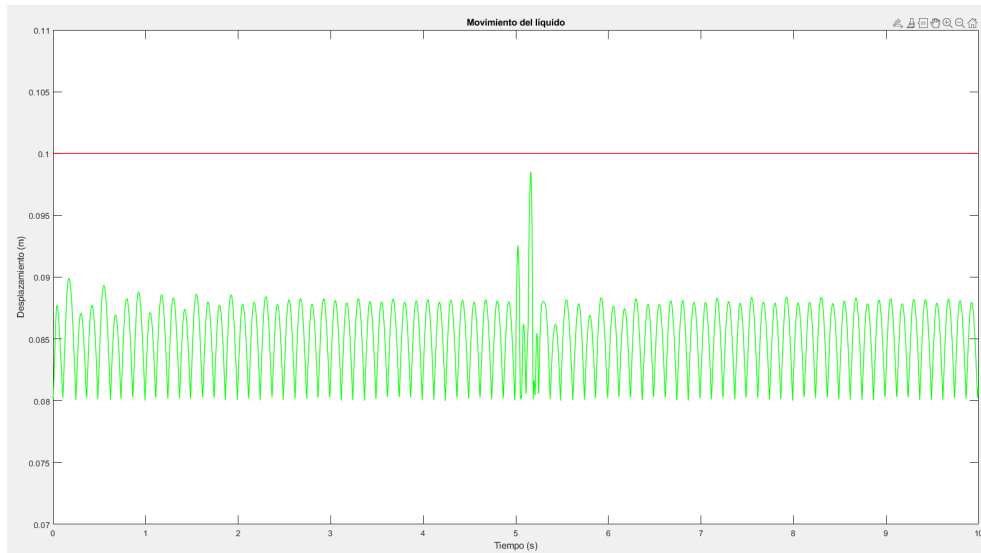
En este análisis, se examina el comportamiento del sistema y el fluido ante la respuesta del sistema cuando el sistema de suspensión del vehículo tiene alta rigidez. Se mantiene el resto de parámetros estándar del sistema.

**Tabla 8.** Parámetro de alta rigidez del sistema de suspensión del vehículo.

Rigidez $[k_1, k_2, k_3, k_4]$	[ 30000, 39820, 154850, 154850 ] [N/m]
--------------------------------	--



**Figura 17:** Comportamiento del sistema con amortiguadores de alta rigidez.

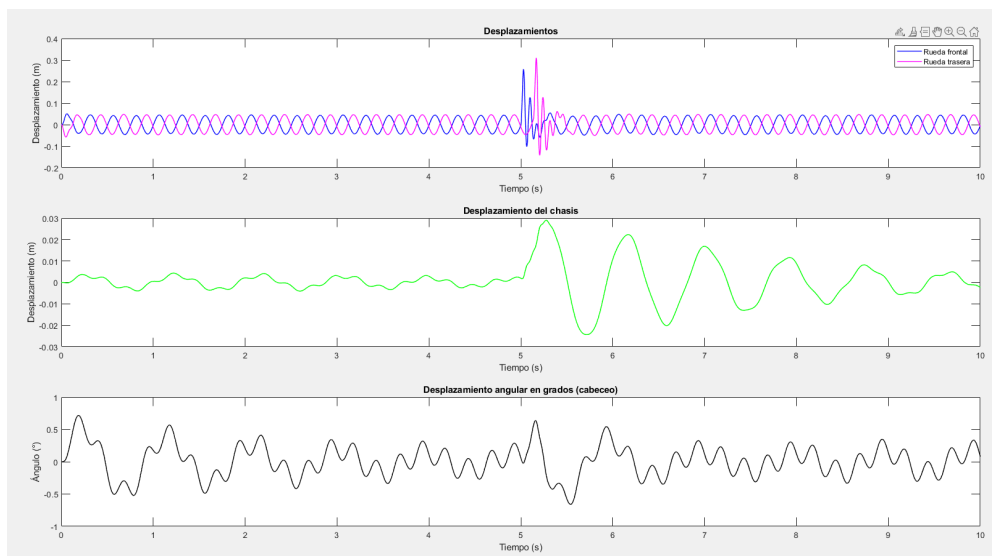


**Figura 18:** Estado del fluido del sistema con amortiguadores de alta rigidez

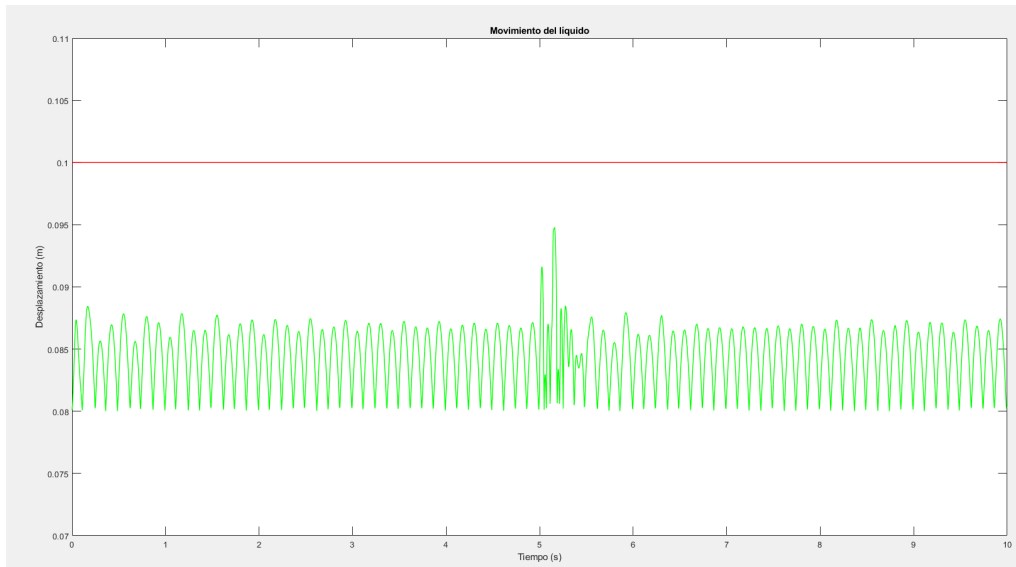
**Caso 1.5:** Modificación de valores del sistema con amortiguadores de bajo amortiguamiento

**Tabla 9.** Parámetro de bajo amortiguamiento del sistema de suspensión del vehículo.

Condiciones Iniciales de desplazamiento	[ 0[m], 0[m], 0[m], 0[rad] ]
Condiciones Iniciales de velocidad	[ 0[m/s], 0[m/s], 0[m/s], 0[rad/s] ]
Altura del Líquido Inicial ( $h_{L0}$ )	0,08 [m]
Velocidad	20 [m/s]
Amortiguamiento $[c_1, c_2, 0, 0]$	[ 500, 600, 0, 0 ] [Ns/m]
Rigidez $[k_1, k_2, k_3, k_4]$	[ 26530, 36350, 154850, 154850 ] [N/m]
Fuerza de Excitación	$F = Amp * \sin(w_p t) + \delta(t)$



**Figura 19:** Comportamiento del sistema con amortiguadores de bajo amortiguamiento.



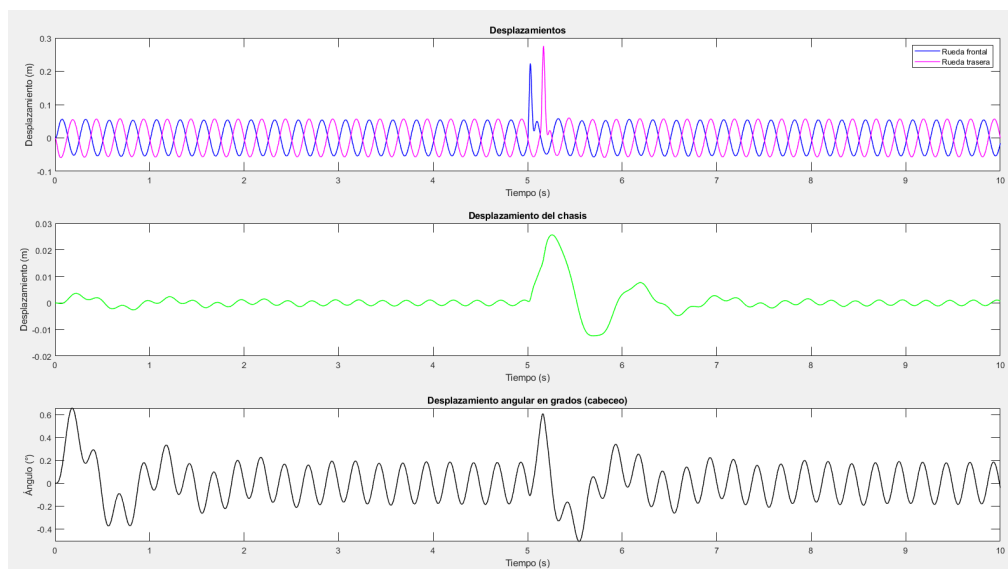
**Figura 20:** Estado del fluido del sistema con amortiguadores de bajo amortiguamiento.

**Caso 1.6:** Modificación de valores del sistema con amortiguadores de elevado amortiguamiento

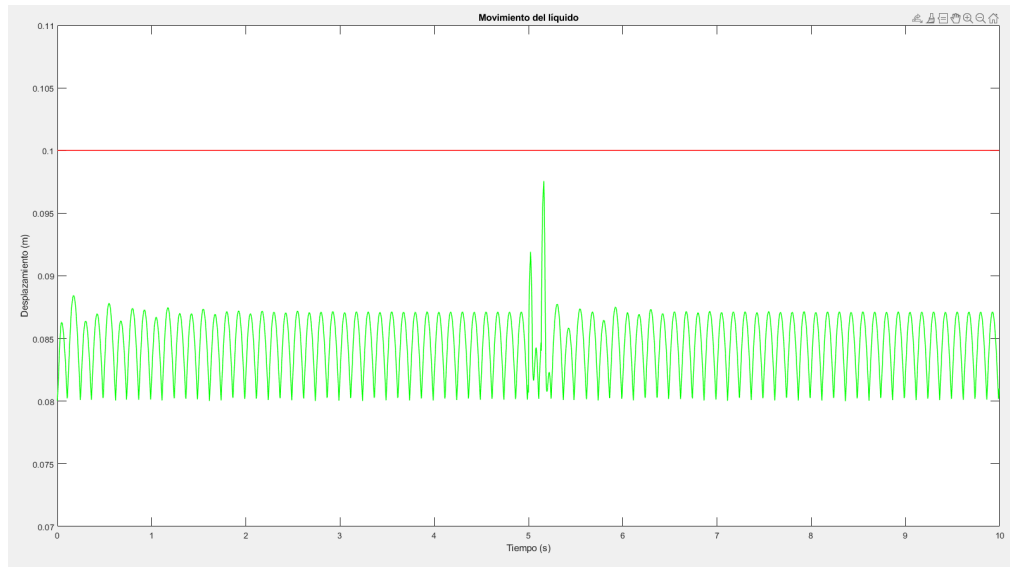
En este análisis, se examina el comportamiento del sistema y el fluido ante la respuesta del sistema cuando el sistema de suspensión del vehículo tiene alto amortiguamiento. Se mantiene el resto de parámetros estándar del sistema.

**Tabla 10.** Parámetro de alto amortiguamiento del sistema de suspensión del vehículo.

Amortiguamiento $[c_1, c_2, 0, 0]$	$[2000, 2100, 0, 0]$ [Ns/m]
------------------------------------	-----------------------------

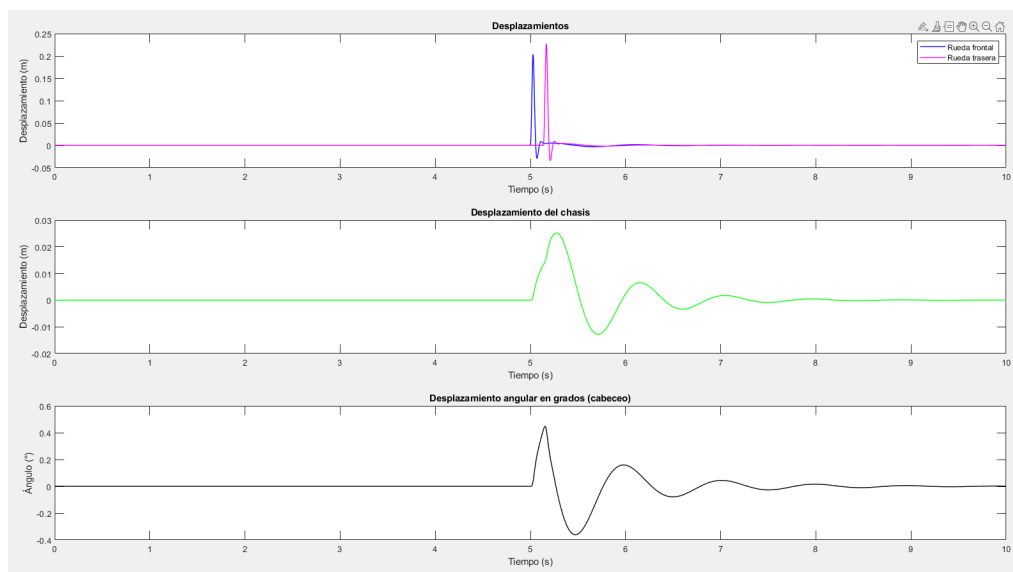


**Figura 21:** Comportamiento del sistema con amortiguadores de alto amortiguamiento.



**Figura 22:** Estado del fluido del sistema con amortiguadores de alto amortiguamiento.

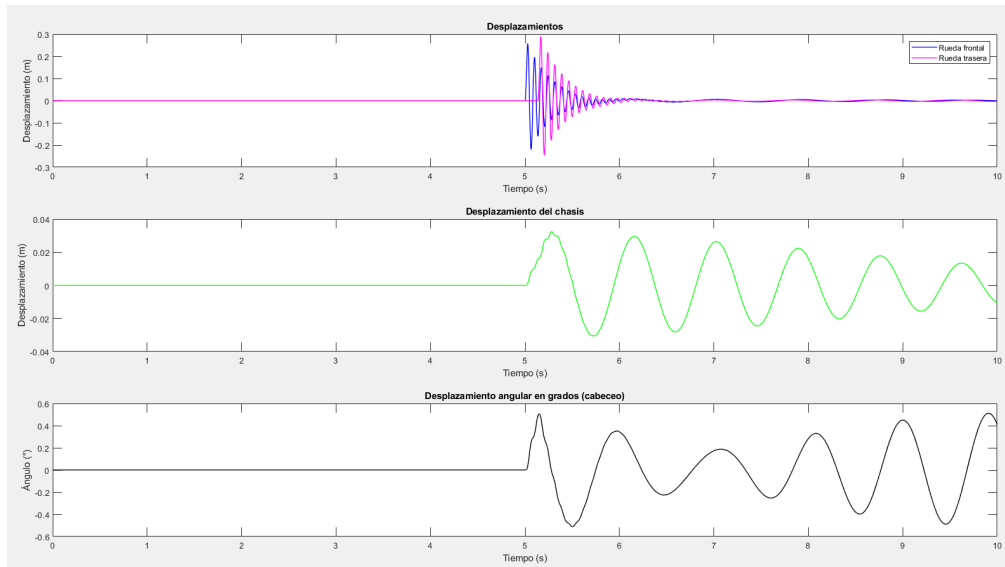
No parece notarse demasiado debido al ruido inducido por la fuerza senoidal. Al aumentar la constante de amortiguamiento, se observa que se absorben mucho más rápido las vibraciones, como se observa en la figura 23. El resto de los parámetros se mantienen estándar.



**Figura 23:** Respuesta frente a una fuerza externa impulso al sistema con amortiguadores de 2.200 N.s/m.

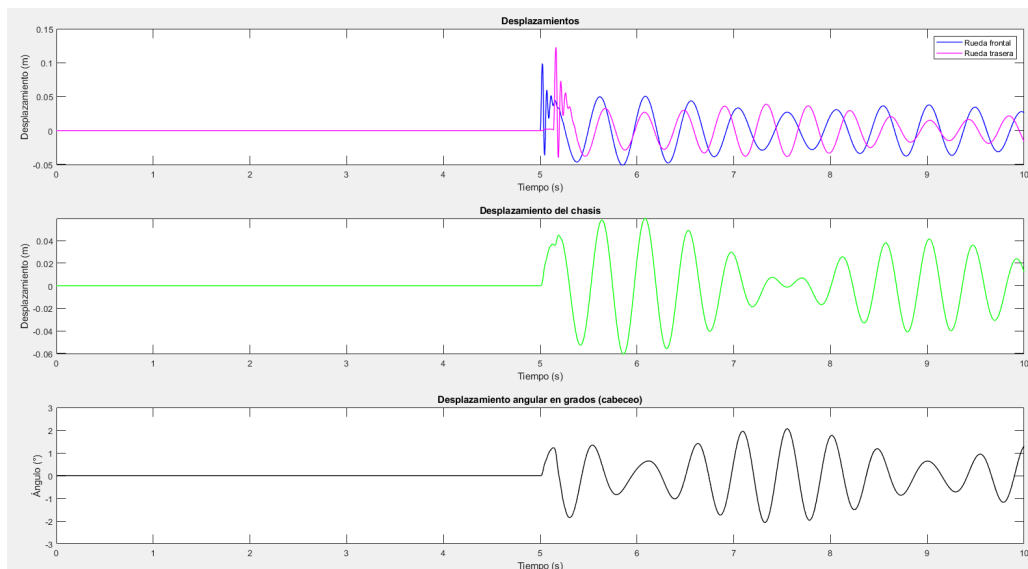
Luego se hace un experimento con una constante de amortiguamiento de 200 N.s/m. Se observa en la figura 24 que es mucho más notable el efecto que produce el amortiguador sobre la respuesta del sistema.





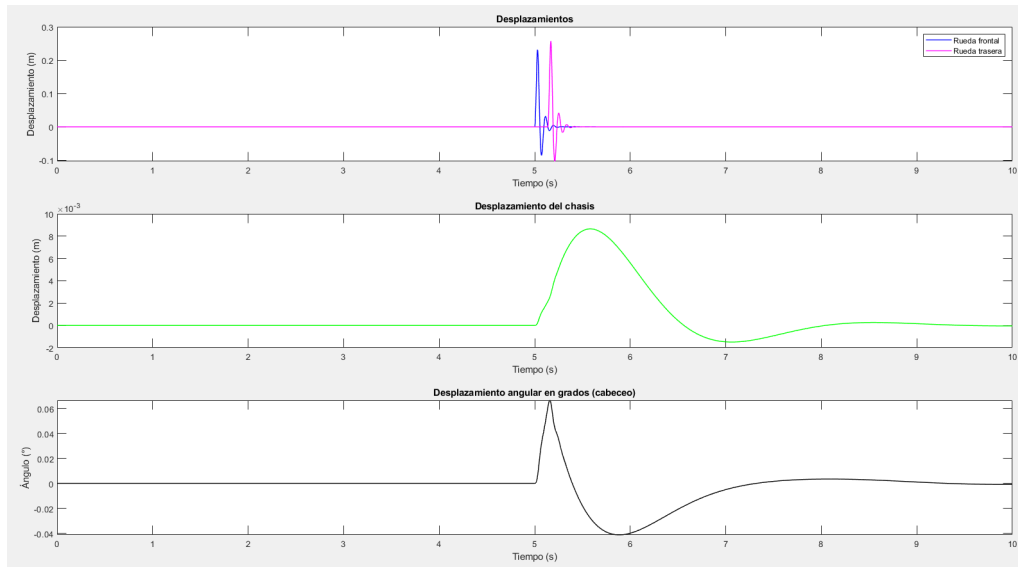
**Figura 24:** Respuesta frente a una fuerza externa impulso al sistema con amortiguadores de 200 N.s/m.

Se repiten los experimentos pero ahora variando los valores de la constante de rigidez del sistema de suspensión. En la figura 25 se analiza la respuesta a una fuerza externa de impulso cuando la constante de rigidez del sistema es 260.530 N/m. Se observa que el sistema es sensible a las vibraciones, ya que los resortes actúan similar a una barra rígida.



**Figura 25:** Respuesta frente a una fuerza externa impulso al sistema con rigidez de 260.530 N/m.

Posteriormente, se repite el experimento con un sistema de suspensión cuya constante de rigidez es 2.530 N/m. En la figura 26 se observa la respuesta del sistema ante una fuerza externa impulso. Se observa la gran velocidad con la que se disipan las vibraciones luego del impulso. Toda esta energía la disipan los amortiguadores.

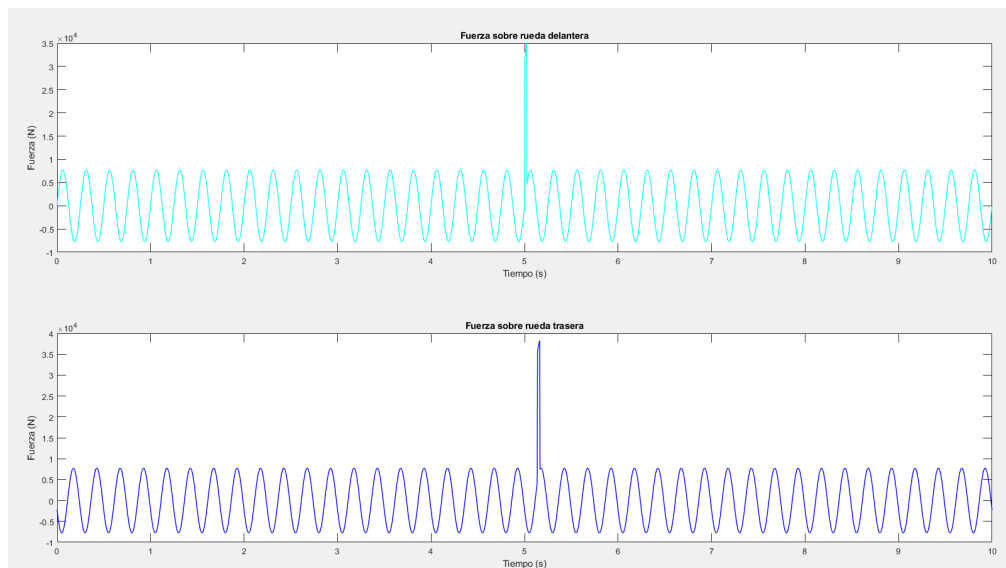


**Figura 26:** Respuesta frente a una fuerza externa impulso al sistema con rigidez de 2.530 N/m.

### 3.3 Situación 2: Modificar condiciones iniciales del estado del Sistema

Se desea analizar la variación en la respuesta del sistema cuando se modifican las condiciones iniciales del sistema. Para ello, se establecen distintas posiciones iniciales para las ruedas, la carrocería y el ángulo de inclinación.

**Caso 2.1:** Modificación de posición inicial de la rueda trasera del vehículo.

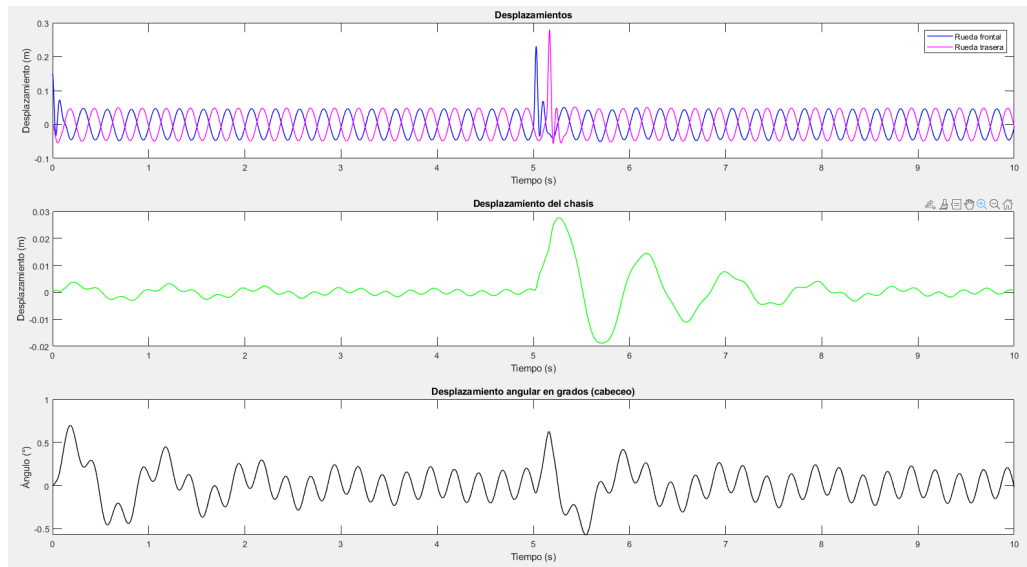


**Figura 27:** Fuerzas Externas aplicada al sistema.

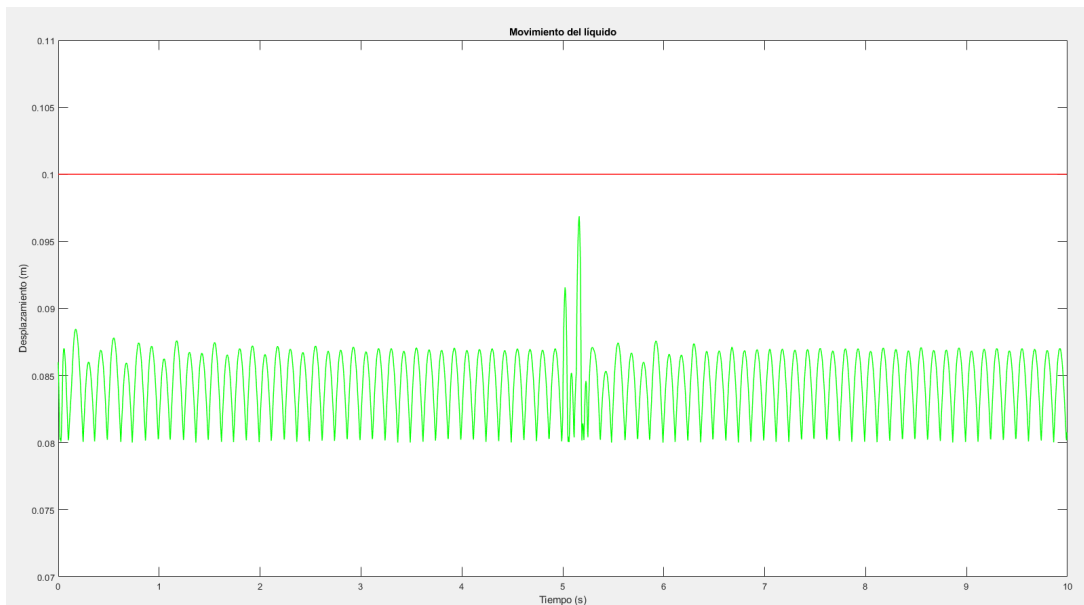
**Tabla 11.** Condición inicial de la rueda trasera del vehículo.

Condiciones Iniciales de desplazamiento	[ 0.15[m], 0[m], 0[m], 0[rad] ]
Condiciones Iniciales de velocidad	[ 0[m/s], 0[m/s], 0[m/s], 0[rad/s] ]
Altura del Líquido Inicial ( $h_{L0}$ )	0,08 [m]
Velocidad	20 [m/s]

Amortiguamiento $[c_1, c_2, 0, 0]$	$[1100, 1200, 0, 0]$ [Ns/m]
Rigidez $[k_1, k_2, k_3, k_4]$	$[26530, 36350, 154850, 154850]$ [N/m]
Fuerza de Excitación	$F = Amp * \sin(w_p t) + \delta(t)$



**Figura 28:** Comportamiento del sistema con condición inicial de la rueda trasera del vehículo no nula.

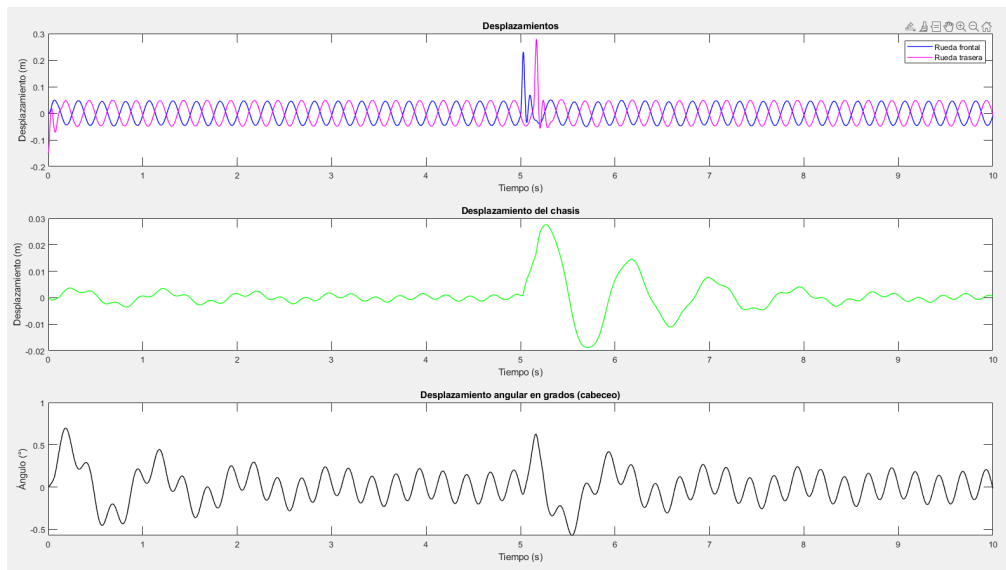


**Figura 29:** Estado del fluido del sistema con condición inicial de la rueda trasera del vehículo no nula.

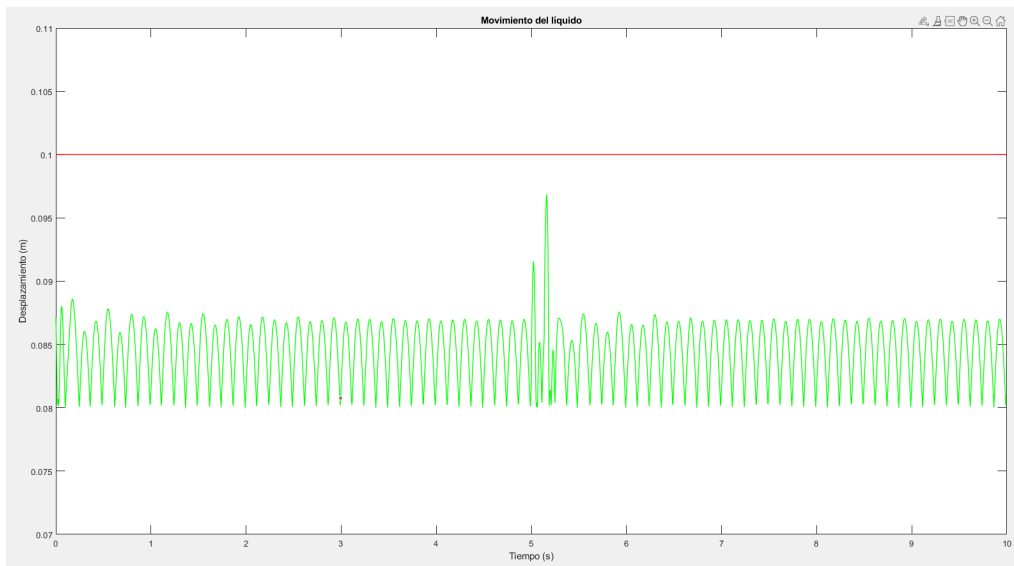
**Caso 2.2:** Modificación de posición inicial de la rueda delantera del vehículo.

**Tabla 12.** Condición inicial de la rueda delantera del vehículo.

Condiciones Iniciales de desplazamiento	$[0[m], -0.15[m], 0[m], 0[rad]]$
---	----------------------------------



**Figura 30:** Comportamiento del sistema con condición inicial de la rueda frontal del vehículo no nula.

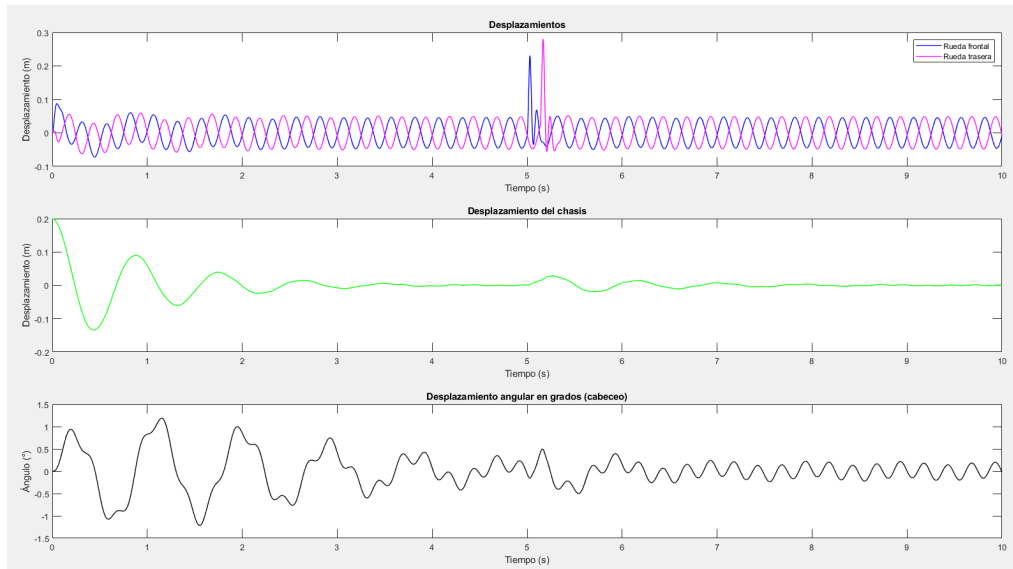


**Figura 31:** Estado del fluido del sistema con condición inicial de la rueda frontal del vehículo no nula.

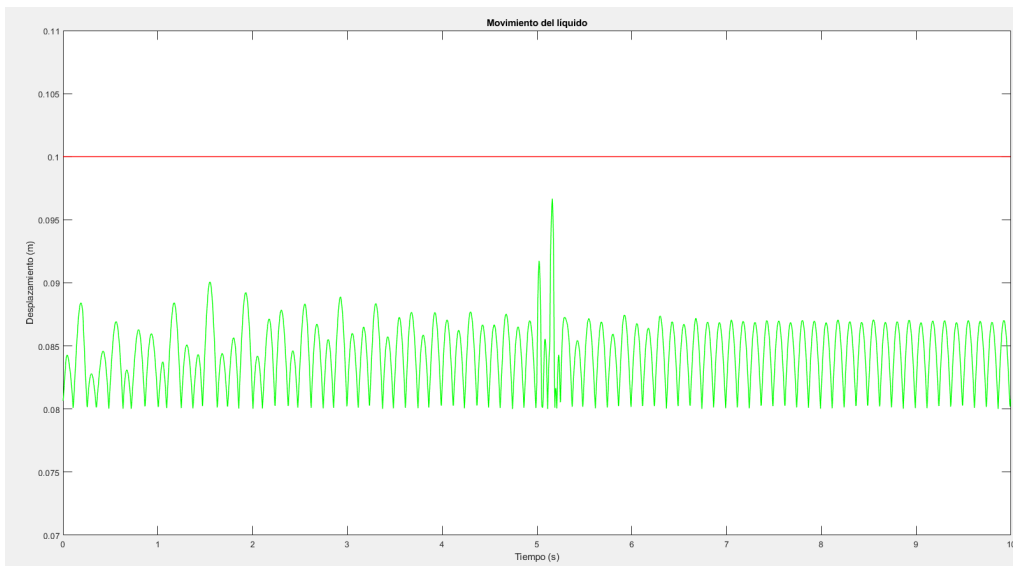
**Caso 2.3:** Modificación de posición inicial de la carrocería del vehículo.

**Tabla 13.** Condición inicial de la carrocería del vehículo.

Condiciones Iniciales de desplazamiento	[ 0[m], 0[m], 0.2[m], 0[rad] ]
---	--------------------------------



**Figura 32:** Comportamiento del sistema con condición inicial de la carrocería no nula.

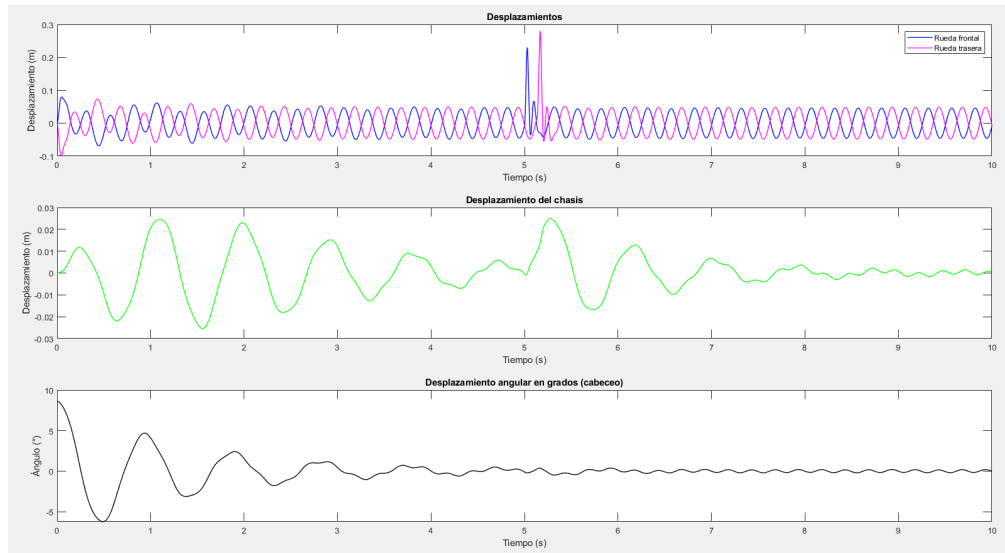


**Figura 33:** Estado del fluido del sistema con condición inicial de la carrocería no nula.

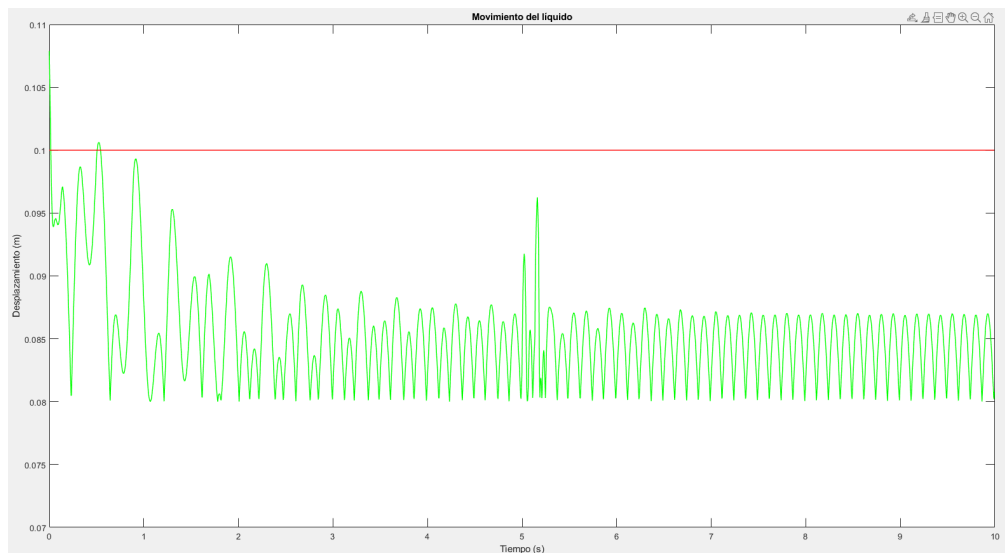
**Caso 2.4:** Modificación del ángulo inicial de inclinación de la carrocería del vehículo.

**Tabla 14.** Condición inicial del ángulo de inclinación de la carrocería del vehículo.

Condiciones Iniciales de desplazamiento	[ 0[m], 0[m], 0[m], 0.15[rad] ]
---	---------------------------------



**Figura 34:** Comportamiento del sistema con condición inicial de la inclinación de la carrocería no nula.



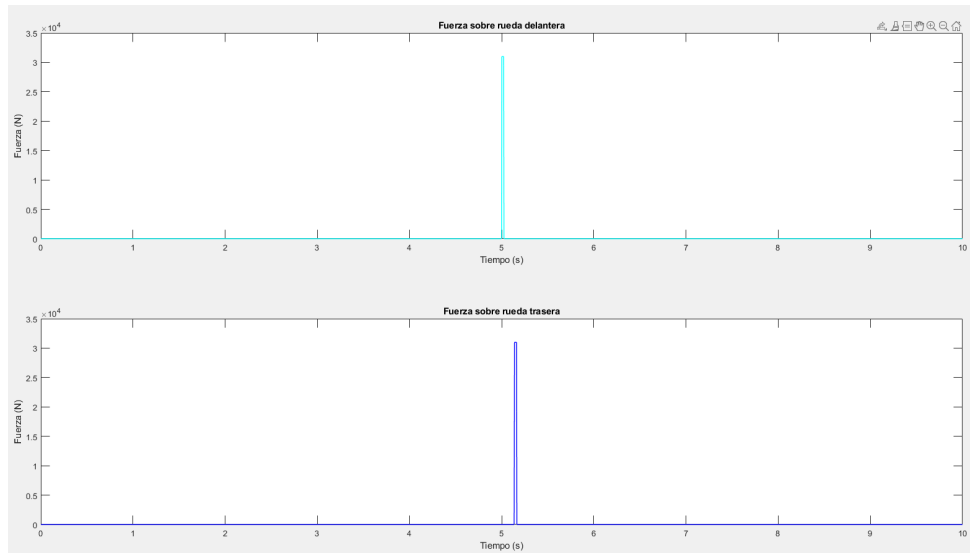
**Figura 35:** Estado del fluido del sistema con condición inicial de la inclinación de la carrocería no nula. Se vuelca inmediatamente, la inclinación del vehículo es excesiva.

### 3.4 Situación 3: Modificar las formas de excitación externas al sistema

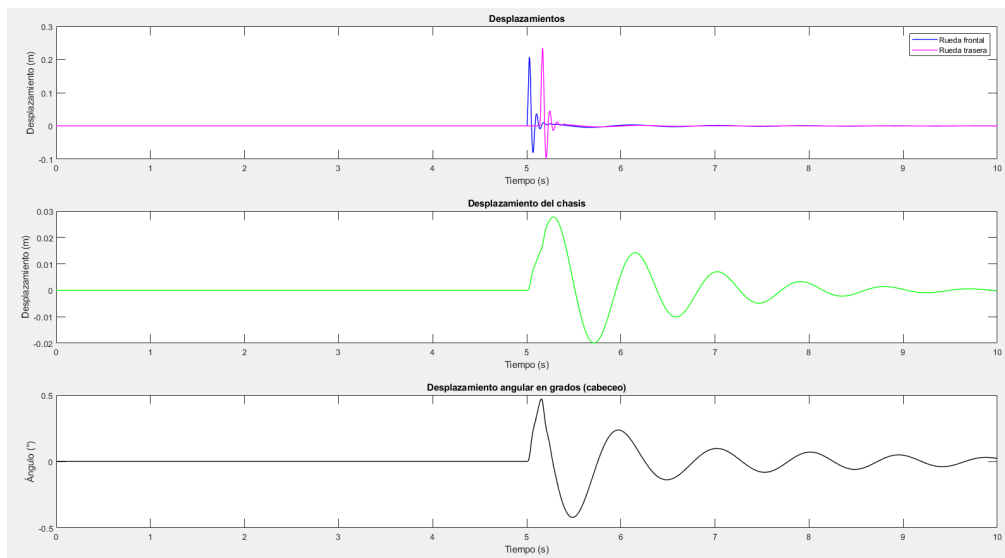
**Caso 3.1:** Modificación de la fuerza de excitación aplicada. Sólo función impulso.

**Tabla 15.** Parámetros ante la aplicación de una fuerza de excitación de impulso.

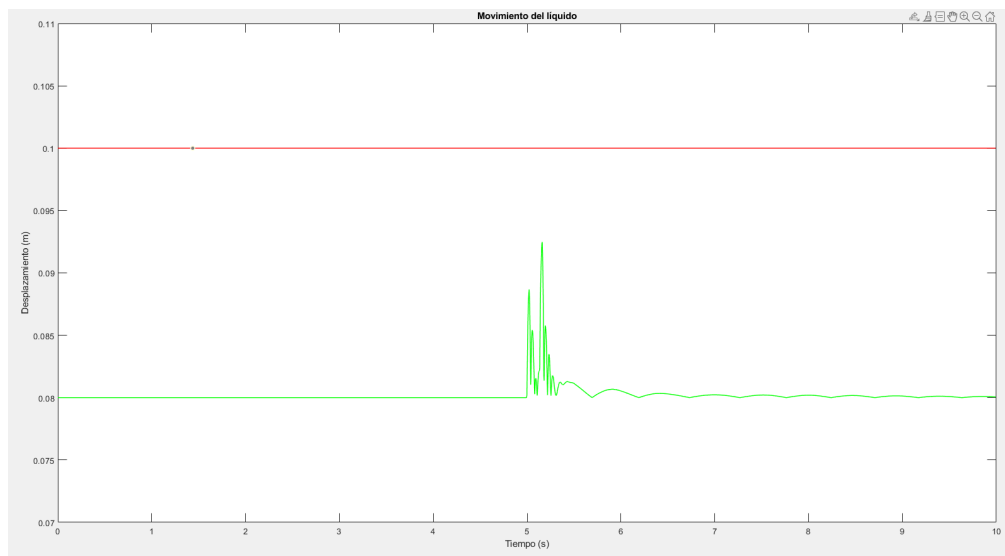
Condiciones Iniciales de desplazamiento	[ 0[m], 0[m], 0[m], 0[rad] ]
Condiciones Iniciales de velocidad	[ 0[m/s], 0[m/s], 0[m/s], 0[rad/s] ]
Altura del Líquido Inicial ( $h_{L0}$ )	0,08 [m]
Velocidad	20 [m/s]
Amortiguamiento [ $c_1, c_2, 0, 0$ ]	[ 1200, 1100, 0, 0 ] [Ns/m]
Rigidez [ $k_1, k_2, k_3, k_4$ ]	[ 26530, 36350, 154850, 154850 ] [N/m]
Fuerza de Excitación	$F = \delta(t)$



**Figura 36:** Fuerza Externa aplicada al sistema cuando se utiliza solo la función impulso ( $\delta(t)$ ).



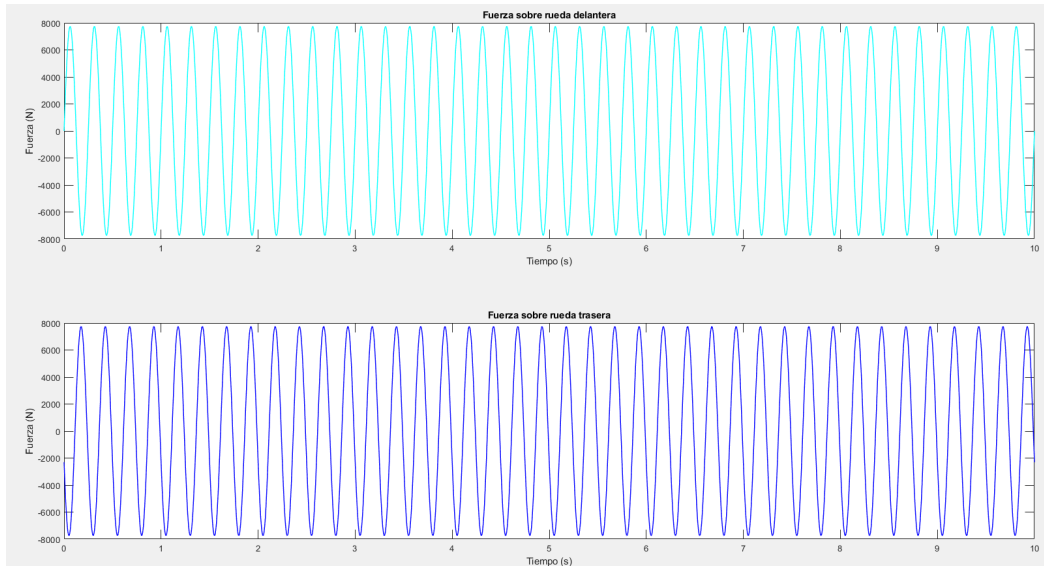
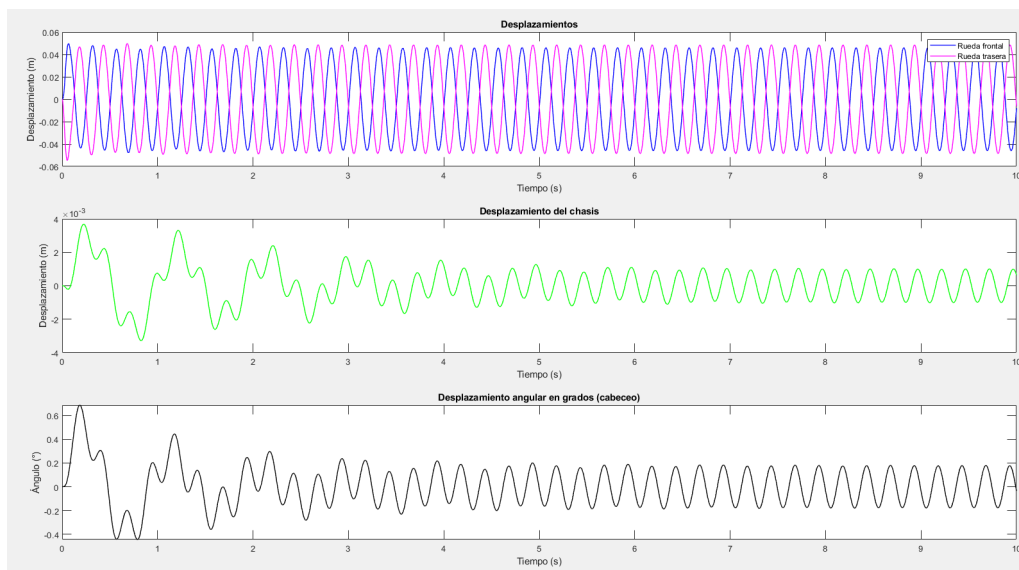
**Figura 37:** Comportamiento del sistema cuando solo se aplica la función impulso ( $\delta(t)$ ).



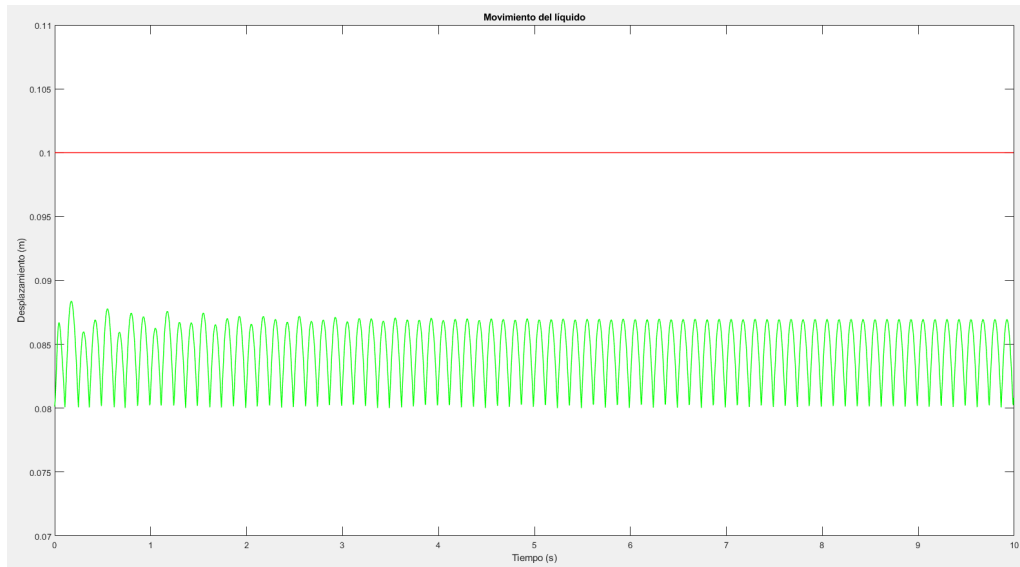
**Figura 38:** Estado del fluido del sistema cuando solo se aplica la función impulso ( $\delta(t)$ ).

**Caso 3.2:** Modificación de la fuerza de excitación aplicada. Sólo fuerza senoidal.**Tabla 16.** Parámetros ante la aplicación de una fuerza de excitación senoidal.

Fuerza de Excitación	$F = Amp * \sin(w_p t)$
----------------------	-------------------------

**Figura 39:** Fuerzas Externas aplicada al sistema cuando se utiliza solo una fuerza senoidal ( $\sin(w_p t)$ )**Figura 40:** Comportamiento del sistema cuando se aplica solo una fuerza senoidal ( $\sin(w_p t)$ )



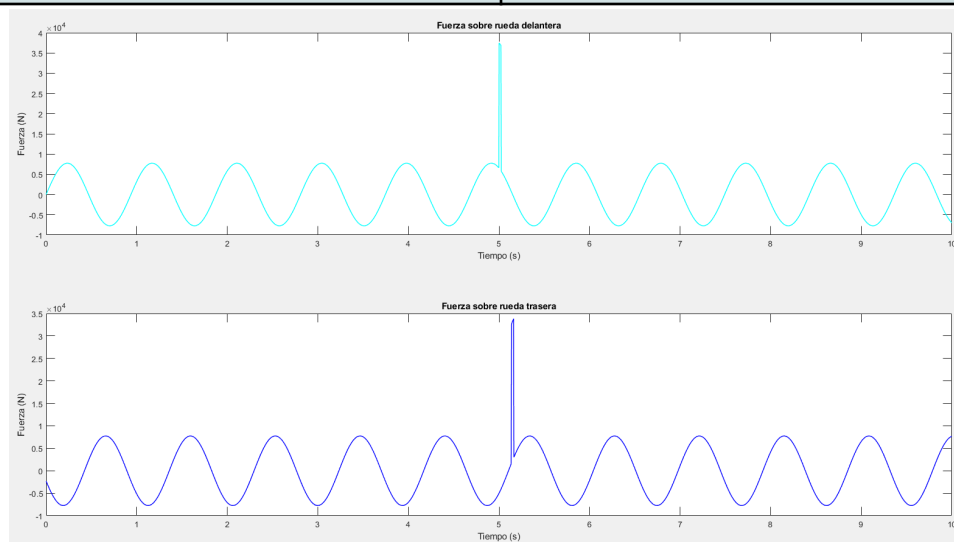


**Figura 41:** Estado del fluido del sistema cuando se aplica solo una fuerza senoidal ( $\sin(w_p t)$ ).

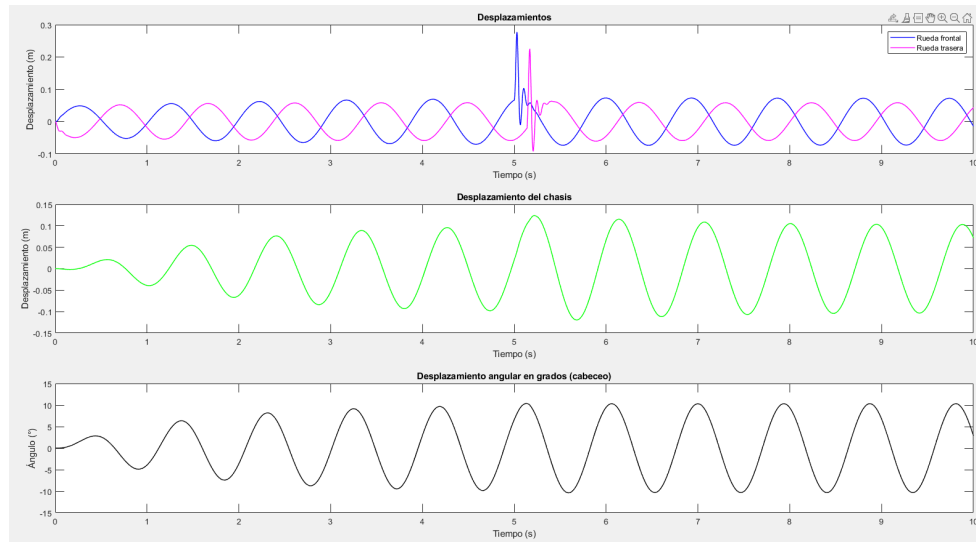
**Caso 3.3:** La frecuencia de aplicación de la fuerza de excitación coincide con el primer modo de frecuencia natural del sistema ( $w_p = w_1$ )

**Tabla 18.** Parámetros ante la aplicación de una fuerza de excitación con frecuencia  $w_1$

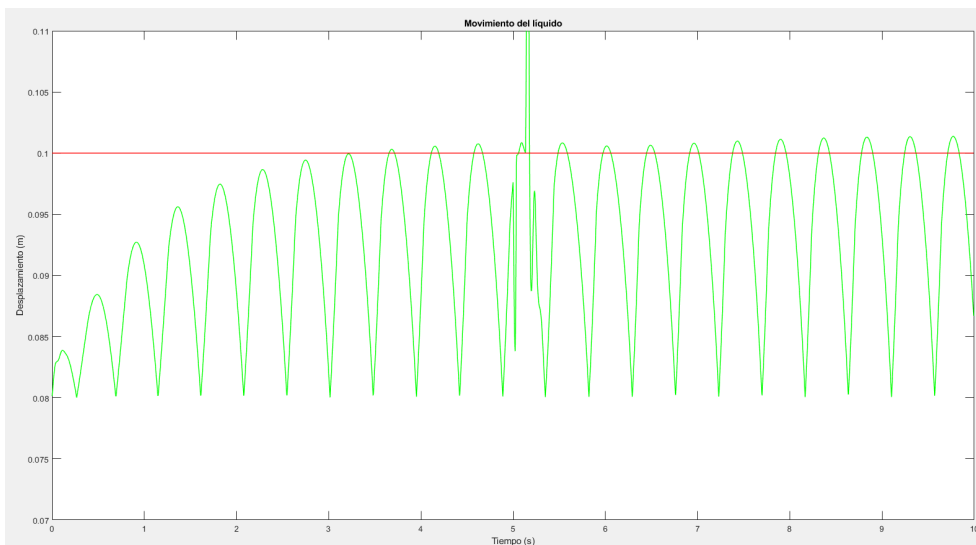
Fuerza de Excitación	$F = Amp * \sin(w_p t) + \delta(t)$
Frecuencia natural del primer modo ( $w_1$ )	$w_1 = 6.7098 \text{ [rad/s]}$



**Figura 42:** Fuerzas Externas aplicada al sistema cuando  $w_p = w_1$



**Figura 43:** Comportamiento del sistema cuando  $w_p = w_1$

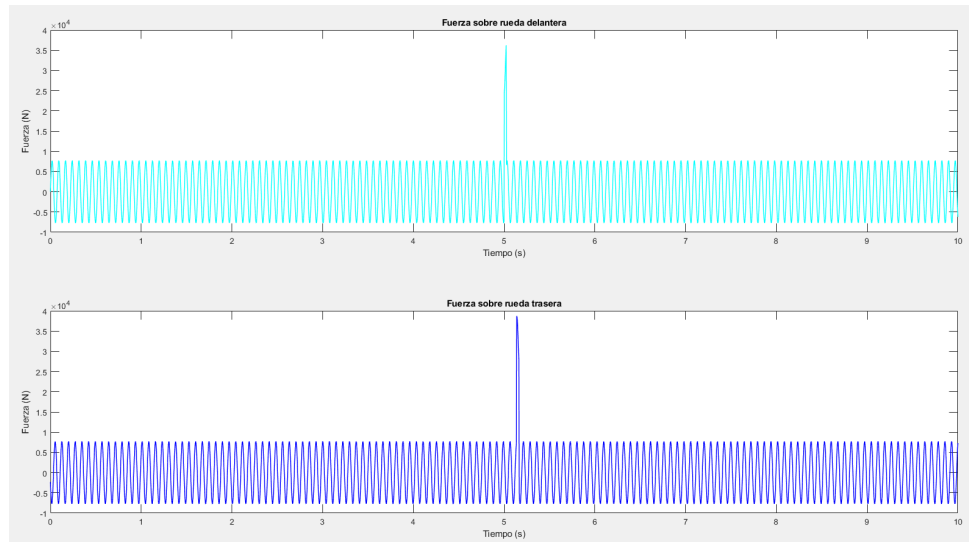


**Figura 44:** Estado del fluido del sistema cuando  $w_p = w_1$ . (Se vuelca).

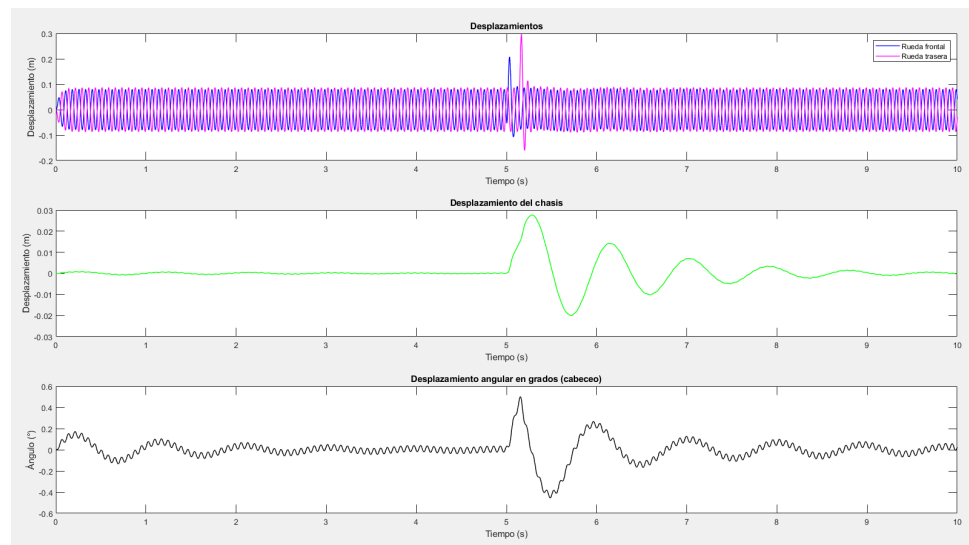
**Caso 3.4:** La frecuencia de aplicación de la fuerza de excitación coincide con el tercer modo de frecuencia natural del sistema ( $w_p = w_3$ )

**Tabla 18.** Parámetros ante la aplicación de una fuerza de excitación con frecuencia  $w_3$

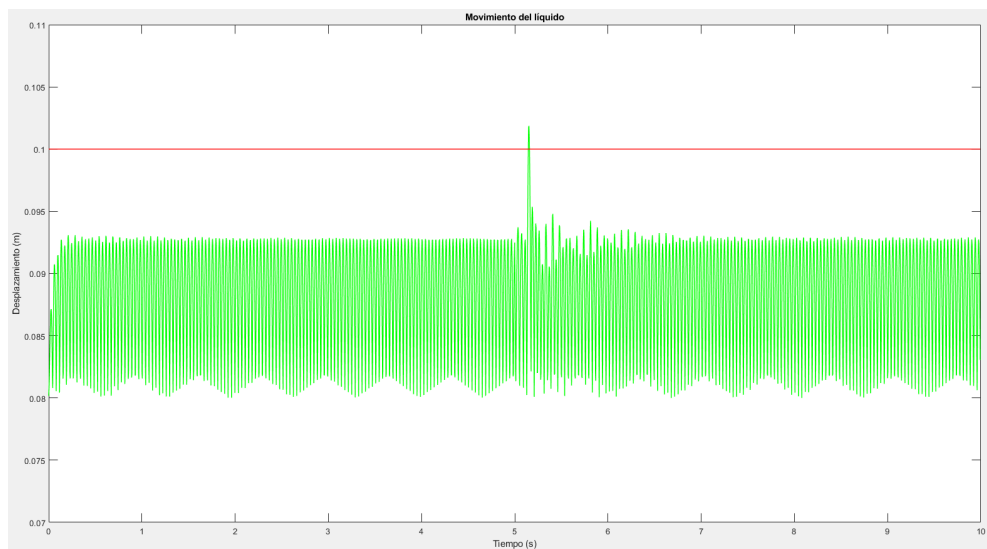
Fuerza de Excitación	$F = Amp * \sin(w_p t) + \delta(t)$
Frecuencia natural del tercer modo ( $w_3$ )	$w_3 = 85.5164 \text{ [rad/s]}$



**Figura 45:** Fuerzas Externas aplicada al sistema cuando  $w_p = w_3$



**Figura 46:** Comportamiento del sistema cuando  $w_p = w_3$

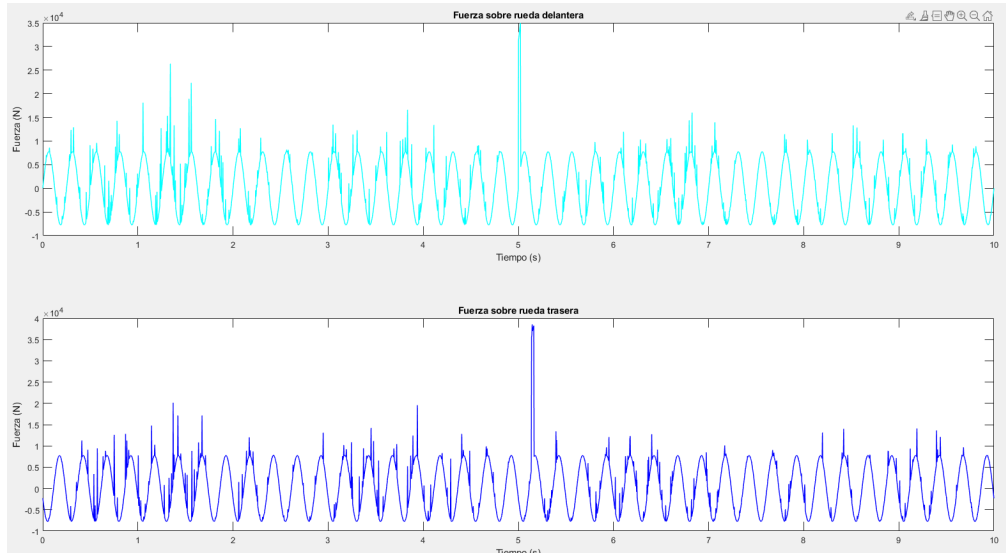


**Figura 47:** Estado del fluido del sistema cuando  $w_p = w_3$ . (Se vuelca).

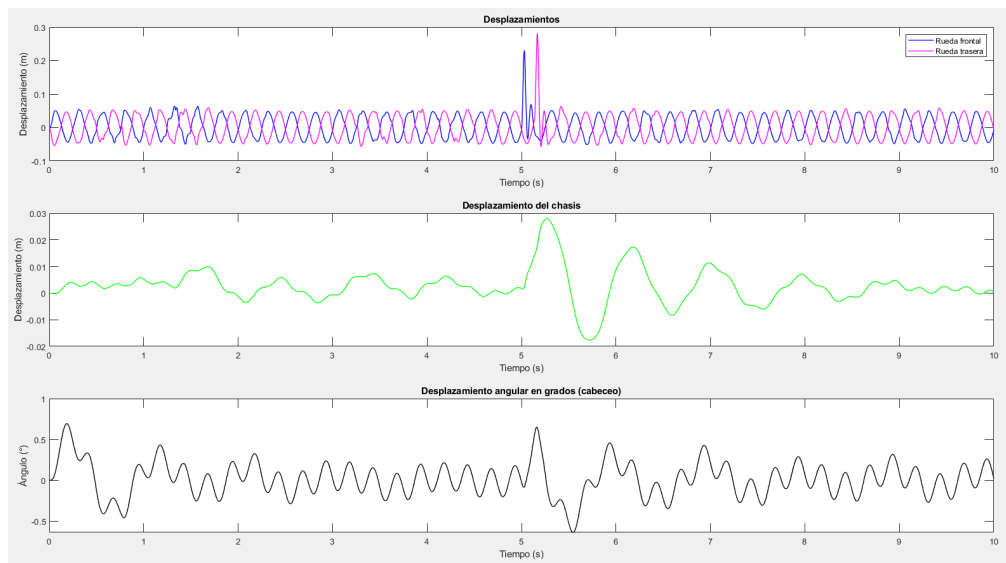
**Caso 3.5:** Un camino sinuoso aleatorio, representando pequeños baches y cambios en la superficie, lo que induce fuerzas sobre las ruedas de diversa magnitud.

Fuerza de Excitación

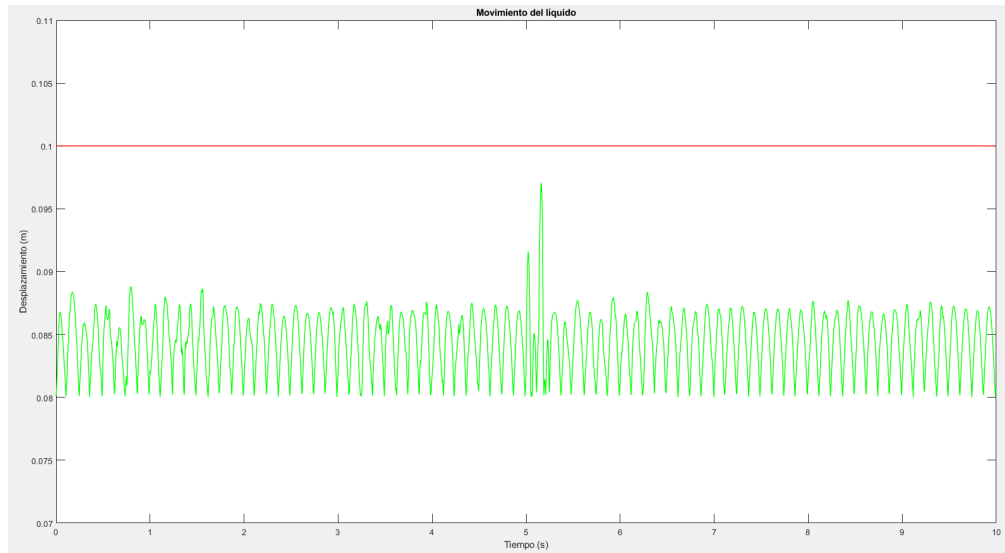
$$F = Amp * \sin(w_p t) + \delta(t) + F_3$$



**Figura 48:** Fuerzas Externas aplicada al sistema con condiciones estándar y camino aleatorio



**Figura 45:** Comportamiento del sistema con condiciones estándar y camino aleatorio



**Figura 46:** Estado del fluido del sistema con condiciones estándar y camino aleatorio

#### 4 CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Al variar los parámetros podemos observar que el comportamiento es el esperado, utilizando referencias bibliográficas podemos comprobar que el movimiento parece simular lo que uno espera que ocurra.

El único problema de este análisis es que el fluido al derramarse no poseerá el mismo volumen, por lo que los resultados luego del derrame no son exactos. Además no se tiene en cuenta la inercia del fluido en sí. Sin embargo estas simplificaciones permiten analizar el comportamiento del fluido y responder a la pregunta inicial, si se derrama o no el recipiente.

Se observa que cuando la frecuencia del camino es lo suficientemente cercana a los modos de vibración ( $\beta \approx 1$ ) el sistema no se desestabiliza del todo pero si extiende su amplitud considerablemente. Si se agrega un esfuerzo externo de tipo impulso, la taza se derrama con relativa facilidad o se derrama al poco tiempo.

Posterior a los experimentos, se observa que la rigidez de los resortes debe ser baja (aunque no demasiado), para que pueda regresar al equilibrio rápidamente con un amortiguador adecuado. Se propone trabajar para este modelo de automóvil en particular bajo estas condiciones, con sistemas de suspensión con una constante de rigidez de 15.000 y 25.000 [N/m] y una constante de amortiguamiento de 1.000 a 1.200 [N.s/m] para asegurar que no ocurra un derrame del líquido cuando el recipiente está lleno a un 80% de su capacidad. En base a los resultados y con la determinación de los parámetros para el sistema de suspensión, es posible transportar recipientes con hasta un volumen del 82,166% de su capacidad, lo que permite aprovechar hasta el 82,166% del volumen del recipiente bajo estas condiciones.

Una propuesta de mejora al modelo computacional es considerar el nuevo volumen contenido en el recipiente después de un derrame de líquido. Esto implica actualizar el valor de la altura inicial del líquido mediante el cálculo del gradiente de altura alcanzada ante una perturbación. Además se propone la reducción de costo de cálculo computacional optimizando las ecuaciones para el desarrollo del sistema en descomposición modal.

Se propone extender el análisis para variar los parámetros y condiciones del sistema a diversas alturas de la taza hasta un modelo en tres dimensiones.

## 5 BIBLIOGRAFÍA

Aparicio Rueda, J. H., & Gómez Velásquez, J. A. (2022). Diseño y simulación de un sistema de suspensión para un vehículo eléctrico biplaza de tres ruedas con tracción trasera. Facultad Físico Mecánicas, Universidad Industrial de Santander. <https://noesis.uis.edu.co/server/api/core/bitstreams/eb47ea54-4499-4322-8768-2a1980a73c2a/content>

Barnfather, A., Benitez, Matías., & Crawley, V. (2003). Comportamiento de fluidos acelerados, Estudio experimental y modelo teórico. Laboratorio de Física III, Facultad de Ingeniería y Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Favaloro. [http://users.df.uba.ar/sgil/web\\_fisicarecreativa/informes/infor\\_especial/liquidos\\_acelerados2k3.pdf](http://users.df.uba.ar/sgil/web_fisicarecreativa/informes/infor_especial/liquidos_acelerados2k3.pdf)

Desconocido (2018). Peugeot 504 1.8 L Ficha Técnica. Ultimatespecs.com. <https://www.ultimatespecs.com/es/car-specs/Peugeot/1986/Peugeot-504-18-L.html>

Fluidos en El Movimiento Del Cuerpo Rígido. (s. f.). <https://1library.co/document/zg6v666q-fluidos-en-el-movimiento-del-cuerpo-rigido.html>

Hurel, J., Terán, E., Flores, F., Peralta, J., & Flores, B. (2017). Modelado Físico y Matemático del Sistema de Suspensión de un Cuarto de Vehículo. Global Partnerships For Development And Engineering Education: Proceedings Of The 15th LACCEI International Multi-Conference For Engineering, Education And Technology. <https://doi.org/10.18687/laccei2017.1.1.295>

Mahmoodabadi, M. J. & Mortazavi Yazdi, S. M. (2017). Pareto Optimal Design of Passive and Active Vehicle Suspension Models. <https://www.researchgate.net/publication/313120271>

Modón, A. (2017). Material de consulta y apoyo a la base bibliográfica indicada por la cátedra de Mecánica de los fluidos, Facultad de Ingeniería, UNCuyo. <https://ingenieria.uncuyo.edu.ar/catedras/apuntes-teoricos-de-mecanica-de-los-fluidos-rev9-doc-prot2.pdf>

Nassar, A. A., & Al-Ghanim, A. (2018). Modeling, Simulation, and Control of Half Car Suspension System Using Matlab/Simulink. ResearchGate. <https://www.researchgate.net/publication/323834929>

## 6 RECURSOS ADICIONALES

A continuación se añade el repositorio libre y gratuito del modelo computacional del sistema utilizado en este artículo.

<https://github.com/mabustillo14/Analisis-Dinamico-de-Suspension-Carga-Liquida>