



UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO



FACULTAD DE
INGENIERÍA

Trabajo Práctico N°2:

Razonamiento

Inteligencia Artificial II

Profesor:

Dr. Ing. Martin Marchetta

Grupo N°1

Estudiantes:

Juan Ignacio Luna

Mario Fernando Bustillo

Rodrigo Aleo

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Cuyo
Ciclo Lectivo 2023

Tabla de contenidos

CONSIGNA.....	3
RESOLUCIÓN.....	4
Propiedades del sistema.....	4
Variables difusas.....	4
Valores de entrada.....	6
Reglas de inferencia.....	7
Inferencias Borrosas de Mamdani.....	8
Desborrosificación. Cálculo de F.....	9
Simulación del modelo y resultados.....	10
Variando reglas.....	10
Variando fuerza máxima.....	12

CONSIGNA

Implementar un sistema de inferencia difusa para controlar un péndulo invertido. Se debe definir variables lingüísticas de entrada y salida, particiones borrosas, operaciones borrosas para la conjunción, disyunción e implicación, reglas de inferencia (cubrir todas las posibles combinaciones de valores borrosos de entrada en la base de reglas).

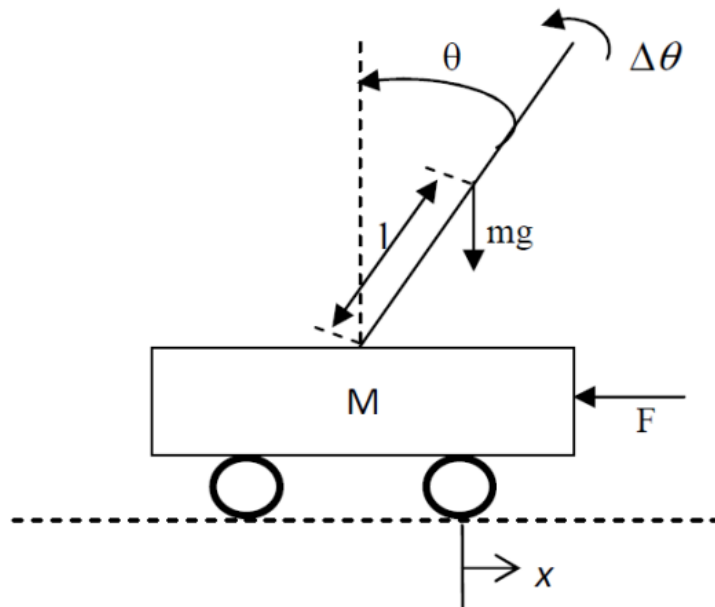
Se debe suponer que el carro no tiene espacio restringido para moverse.

Se debe utilizar el siguiente modelo del sistema carro péndulo:

$$\theta = \theta + \theta' * \Delta t + \theta'' * \Delta t^2 / 2$$

$$\theta' = \theta' + \theta'' * \Delta t$$

$$\theta'' = \frac{g * \sin(\theta) + \cos(\theta) * \left(\frac{-F - m * l * \theta'^2 * \sin(\theta)}{M + m} \right)}{l * \left(\frac{4}{3} - \frac{m * \cos^2(\theta)}{M + m} \right)}$$



RESOLUCIÓN

Propiedades del sistema

Se establecieron de forma arbitraria las siguientes propiedades del sistema:

- Masa carro = 2 kg
- Masa pértiga = 1 kg
- Longitud pértiga = 1 m

Variables difusas

Se presenta a continuación una tabla comparativa entre las diferentes variables lingüísticas:

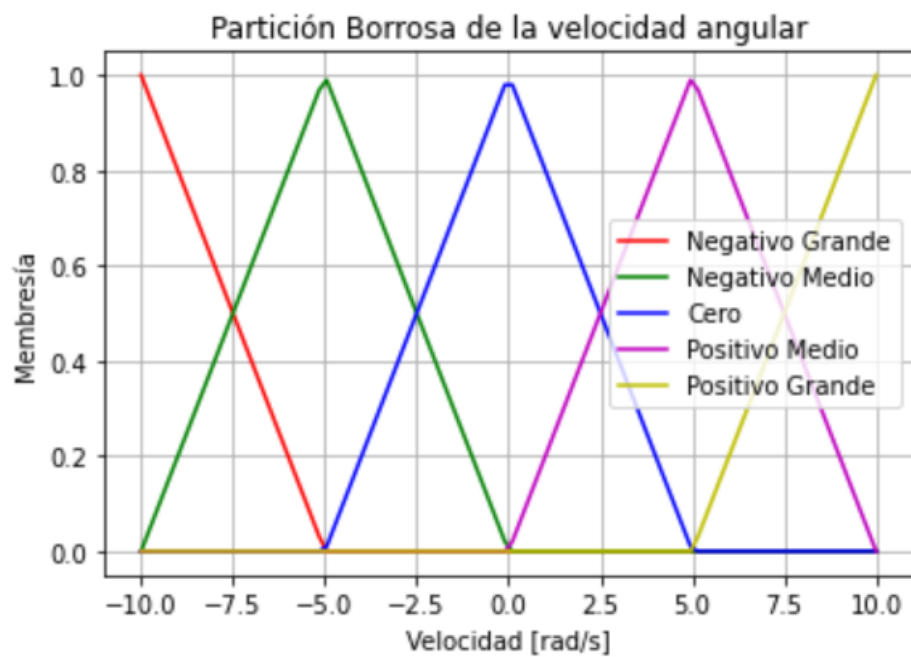
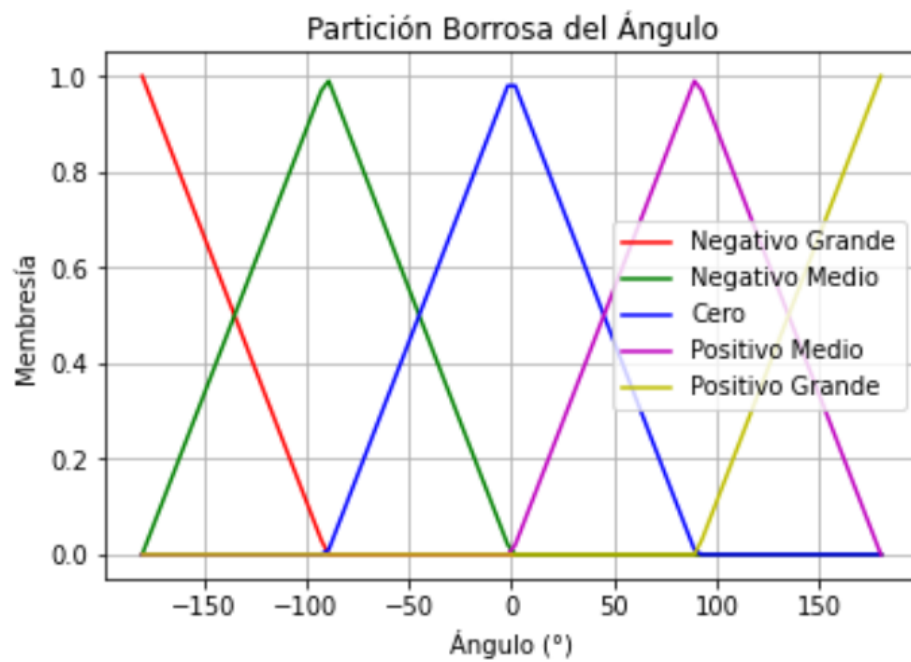
Variable	Conjuntos borrosos	Dominio
Angulo (°)	<ul style="list-style-type: none">• NG (Negativo Grande)• NM (Negativo Medio)• C (Cero)• PM (Positivo Medio)• PG (Positivo Grande)	De -180° hasta 180°
Velocidad angular (rad/s)	<ul style="list-style-type: none">• NG (Negativo Grande)• NM (Negativo Medio)• C (Cero)• PM (Positivo Medio)• PG (Positivo Grande)	De -10 a 10 [rad/s]
Fuerza (N)	<ul style="list-style-type: none">• NG (Negativo Grande)• NM (Negativo Medio)• C (Cero)• PM (Positivo Medio)• PG (Positivo Grande)	De -10000 a 10000 [N]

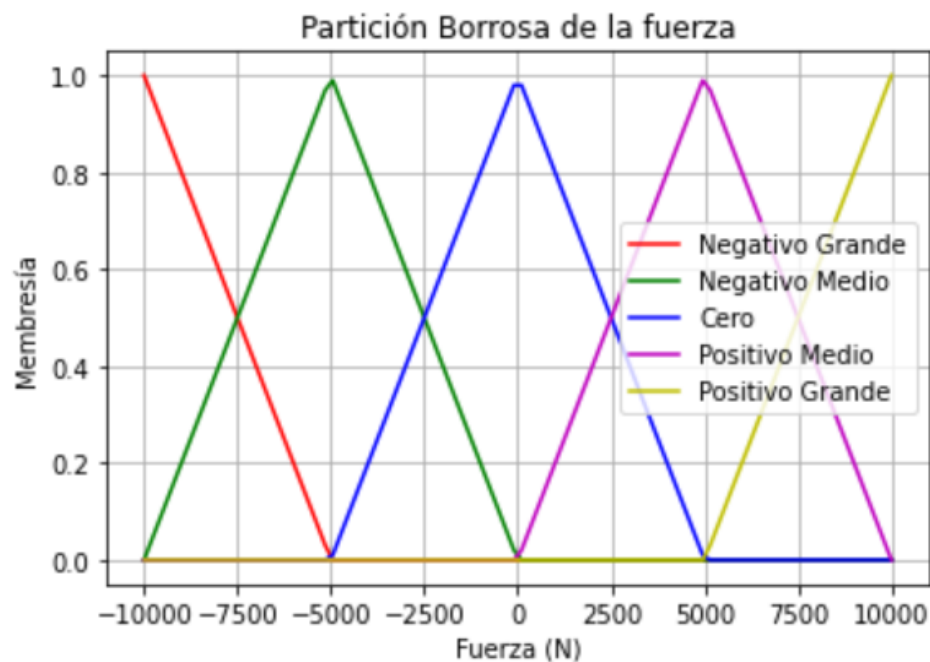
El 0° para el ángulo se considera la posición en la que la pértiga está en posición vertical por encima del carro. Cualquier ángulo fuera de dicho rango, se lo transforma para que pertenezca al mismo. Por ejemplo, 190° es transformado en -170°.

Para determinar el dominio de la velocidad angular, se dejó oscilar de forma libre al péndulo y se observó que la velocidad máxima, dado las propiedades del sistema establecidas, era de 6,25 rad/s; por lo tanto, dando un margen de soltura, se estableció que el valor máximo será de 10 rad/s.

El valor máximo de fuerza se estableció mediante prueba y error una vez terminado todo el modelo. Más adelante se ampliará sobre este aspecto.

Finalmente, usando funciones de pertenencia triangulares con un 50% de solapamiento, se obtuvieron las siguientes particiones borrosas:





Valores de entrada

En primer lugar, se transforma el ángulo de entrada al rango entre -180° y 180° como se ejemplificó anteriormente. Esto se debe a que un ángulo de 200° , por ejemplo, sería clasificado como Positivo Grande, cuando en realidad se trata de un ángulo de -160° que corresponde a las particiones Negativo Grande y Negativo Medio. Esto no ocurre con la velocidad de entrada, ya que si ésta excediera el valor máximo del dominio, es correcto clasificarla como Positivo Grande.

Los dominios están discretizados en 100 puntos donde cada uno posee una lista que indica los cuánto pertenece un valor a cada una de las 5 particiones establecidas.

A continuación se presentan unos ejemplos:

```
Ángulo entrada: 45
Ángulo ajustado al rango: 45
Ángulo entrada índice: 62 (62 de 99)
Membresía ángulo entrada: [0, 0, 0.49494949494949514, 0.5050505050505049, 0]
```

Pertenece aproximadamente un 50% a Cero y 50% a Positivo Medio

```
Ángulo entrada: 200
Ángulo ajustado al rango: -160
Ángulo entrada índice: 6 (6 de 99)
Membresía ángulo entrada: [0.7575757575757577, 0.24242424242424238, 0, 0, 0]
```

Un ángulo de 200° se interpreta como uno de -160° , el cual pertenece un 75% a Negativo Grande y un 25% a Negativo Medio.



```
Velocidad entrada: 7
Velocidad entrada indice: 84 (84 de 99)
Velocidad entrada membresía: [0, 0, 0, 0.6060606060606062, 0.393939393939376]
```

Con la velocidad ocurre similar, una de 7 rad/s pertenece 60% a Positivo Medio y un 40% a Positivo Grande.

Si una velocidad supera el límite establecido (de 10 rad/s), se tomará que pertenece 100% a Positivo Grande como se puede ver a continuación:

```
Velocidad entrada: 15
Velocidad entrada indice: 99 (99 de 99)
Velocidad entrada membresía: [0, 0, 0, 0, 1.0]
```

Reglas de inferencia

Teniendo en cuenta que hay dos variables de entrada cada una con 5 conjuntos difusos, se establecieron $5 \times 5 = 25$ reglas de inferencia de forma arbitraria, pero teniendo en cuenta un poco de lógica. Las reglas son las siguientes:

```
reglas = {
  1: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Negativo Grande"},
  2: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Negativo Grande"},
  3: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Cero", "fuerza": "Negativo Grande"},
  4: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Negativo Grande"},
  5: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Cero"},
  6: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Negativo Medio"},
  7: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Negativo Medio"},
  8: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Cero", "fuerza": "Negativo Medio"},
  9: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Cero"},
  10: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Cero"},
  11: {"angulo": "Cero", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Cero"},
  12: {"angulo": "Cero", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Cero"},
  13: {"angulo": "Cero", "v": "Cero", "fuerza": "Cero"},
  14: {"angulo": "Cero", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Cero"},
  15: {"angulo": "Cero", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Cero"},
  16: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Cero"},
  17: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Cero"},
  18: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Cero", "fuerza": "Positivo Medio"},
  19: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Positivo Medio"},
  20: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Positivo Medio"},
  21: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Cero"},
  22: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Positivo Grande"},
  23: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Cero", "fuerza": "Positivo Grande"},
  24: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Positivo Grande"},
  25: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Positivo Grande"}
}
```

Inferencias Borrosas de Mamdani

Para facilitar la explicación del procedimiento realizado, se utilizará un ejemplo. Suponiendo que se tiene un ángulo de entrada de 45° y una velocidad de entrada de 7 rad/s, cada uno tiene los siguientes valores de pertenencia:

```
Ángulo de entrada:  $45^\circ$   
Angulo ajustado:  $45^\circ$   
Membresias ángulo entrada: [0, 0, 0.49494949494949514, 0.50505050505049, 0]  
  
Velocidad de entrada: 7 rad/s  
Membresias velocidad entrada: [0, 0, 0, 0.6060606060606062, 0.393939393939376]
```

Vemos que cada una de ellas, pertenece a dos conjuntos borrosos. Se procedió a realizar la combinatoria entre los posibles conjuntos del ángulo y los de la velocidad, por lo que se tienen las siguientes combinaciones:

```
Conjunto Angulo - Velocidad: ('Cero', 'Positivo Medio')  
Valores Angulo - Velocidad: (0.49494949494949514, 0.6060606060606062)  
  
Conjunto Angulo - Velocidad: ('Cero', 'Positivo Grande')  
Valores Angulo - Velocidad: (0.49494949494949514, 0.393939393939376)  
  
Conjunto Angulo - Velocidad: ('Positivo Medio', 'Positivo Medio')  
Valores Angulo - Velocidad: (0.50505050505049, 0.6060606060606062)  
  
Conjunto Angulo - Velocidad: ('Positivo Medio', 'Positivo Grande')  
Valores Angulo - Velocidad: (0.50505050505049, 0.393939393939376)
```

Cada una de estas combinaciones son usadas para, por medio de las reglas de inferencia, establecer a qué conjunto borroso pertenecerá la variable de salida, que es la fuerza a generar sobre el carrito. Además, entre los pares de conjuntos, se toma el valor de pertenencia menor ya que es el que representa a la intersección de conjuntos:

Regla 14: La fuerza es 'Positivo Medio'
Valor de pertenencia: 0.495

Regla 15: La fuerza es 'Positivo Grande'
Valor de pertenencia: 0.394

Regla 19: La fuerza es 'Positivo Grande'
Valor de pertenencia: 0.505

Regla 20: La fuerza es 'Positivo Grande'
Valor de pertenencia: 0.394

Sin embargo, en este caso vemos que las reglas 15, 19 y 20 tienen un consecuente que hace referencia al mismo conjunto borroso de la variable de salida. Estos 3 se pueden unificar tomando el máximo valor de pertenencia ya que este hace referencia a la unión de conjuntos (o disyunción difusa). Luego, se obtienen los siguientes conjuntos borrosos de salida con sus respectivos valores:

La fuerza es Positivo Medio
El pico de dicho conjunto está en $F=5000$ N
El valor de pertenencia es 0.495

La fuerza es Positivo Grande
El pico de dicho conjunto está en $F=10000$ N
El valor de pertenencia es 0.505

Desborrosificación. Cálculo de F

Teniendo en cuenta los conjuntos borrosos de salida, los valores de F para los que se encuentra el máximo de estos conjuntos y los valores de pertenencia obtenidos para cada uno de ellos, podemos calcular el valor de la fuerza de salida usando media de centros:

$$F = \frac{\sum p_i * v_i}{\sum v_i}$$

Donde p, son los valores de F donde hay picos para los conjuntos borrosos seleccionados y v es el valor de pertenencia de cada uno de esos conjuntos.

Para este caso en concreto la ecuación sería:

$$F = \frac{5000 \text{ N} * 0.495 + 10000 \text{ N} * 0.505}{0.495 + 0.505}$$

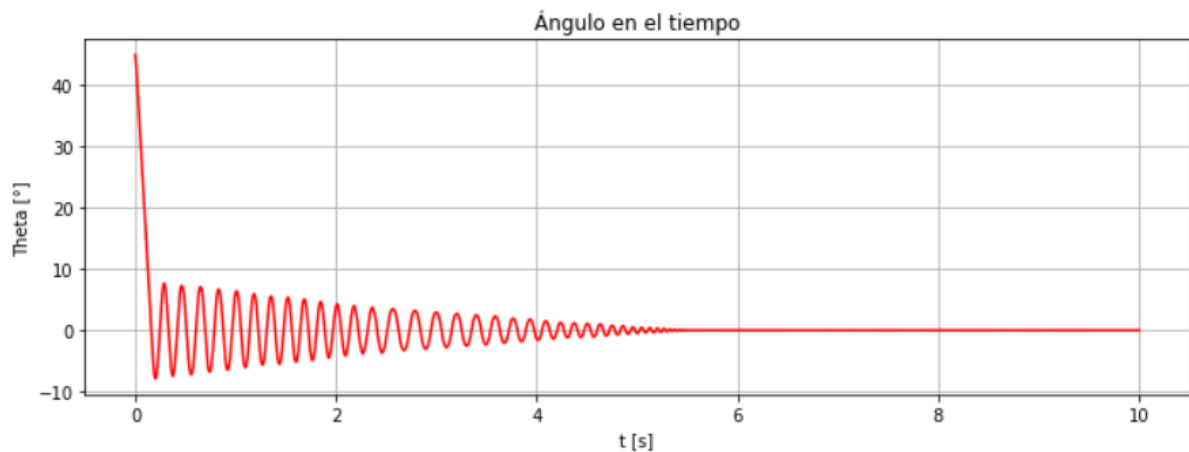
Por lo tanto:

La fuerza desborrosificada tiene un valor de 7525.25 N

Simulación del modelo y resultados

Una vez explicado cómo se obtiene F mediante las variables de entrada utilizando lógica difusa, se procede a utilizarlo en el modelo matemático expresado en la consigna, partiendo de un ángulo, velocidad y aceleración angular iniciales. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Para $\theta_0=45^\circ$, $V_0=0$ rad/s y $A_0=0$ rad/s²:



Efectivamente el sistema logra estabilizarse al rededor de 0° , lo cual dejaría a la pértiga en perfecto equilibrio vertical sobre el carro. Vemos que hay bastante oscilación alrededor de 0 y que demora aproximadamente 5,5 s en estabilizarse.

Variando reglas

Este último resultado podría mejorarse usando un conjunto de reglas más “agresivas”:

Antes:



```
reglas = {
  1: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Negativo Grande"},
  2: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Negativo Grande"},
  3: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Cero", "fuerza": "Negativo Grande"},
  4: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Negativo Grande"},
  5: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Cero"},

  6: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Negativo Medio"},
  7: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Negativo Medio"},
  8: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Cero", "fuerza": "Negativo Medio"},
  9: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Cero"},
  10: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Cero"},

  11: {"angulo": "Cero", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Cero"},
  12: {"angulo": "Cero", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Cero"},
  13: {"angulo": "Cero", "v": "Cero", "fuerza": "Cero"},
  14: {"angulo": "Cero", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Cero"},
  15: {"angulo": "Cero", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Cero"},

  16: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Cero"},
  17: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Cero"},
  18: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Cero", "fuerza": "Positivo Medio"},
  19: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Positivo Medio"},
  20: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Positivo Medio"},

  21: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Cero"},
  22: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Positivo Grande"},
  23: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Cero", "fuerza": "Positivo Grande"},
  24: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Positivo Grande"},
  25: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Positivo Grande"}
}
```

Después:

```
reglas = {
  1: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Negativo Grande"},
  2: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Negativo Grande"},
  3: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Cero", "fuerza": "Negativo Medio"},
  4: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Negativo Medio"},
  5: {"angulo": "Negativo Grande", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Cero"},

  6: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Negativo Grande"},
  7: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Negativo Grande"},
  8: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Cero", "fuerza": "Negativo Medio"},
  9: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Cero"},
  10: {"angulo": "Negativo Medio", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Cero"},

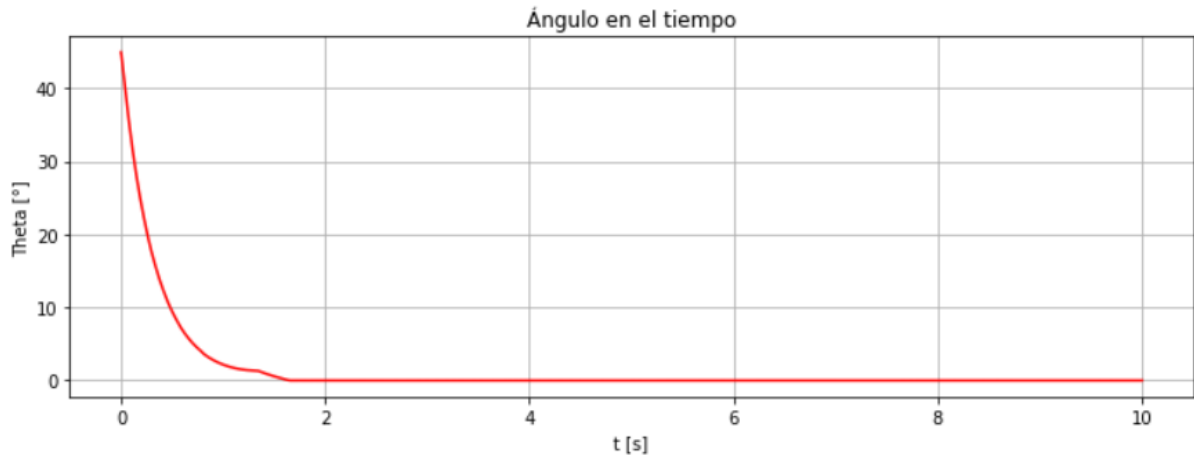
  11: {"angulo": "Cero", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Negativo Grande"},
  12: {"angulo": "Cero", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Negativo Medio"},
  13: {"angulo": "Cero", "v": "Cero", "fuerza": "Cero"},
  14: {"angulo": "Cero", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Positivo Medio"},
  15: {"angulo": "Cero", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Positivo Grande"},

  16: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Cero"},
  17: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Cero"},
  18: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Cero", "fuerza": "Positivo Medio"},
  19: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Positivo Grande"},
  20: {"angulo": "Positivo Medio", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Positivo Grande"},

  21: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Negativo Grande", "fuerza": "Cero"},
  22: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Negativo Medio", "fuerza": "Positivo Medio"},
  23: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Cero", "fuerza": "Positivo Medio"},
  24: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Positivo Medio", "fuerza": "Positivo Grande"},
  25: {"angulo": "Positivo Grande", "v": "Positivo Grande", "fuerza": "Positivo Grande"}
}
```

Ahora se infiere fuerzas Grande o Medio incluso cuando el ángulo es Cero pero la velocidad es Medio o Grande.

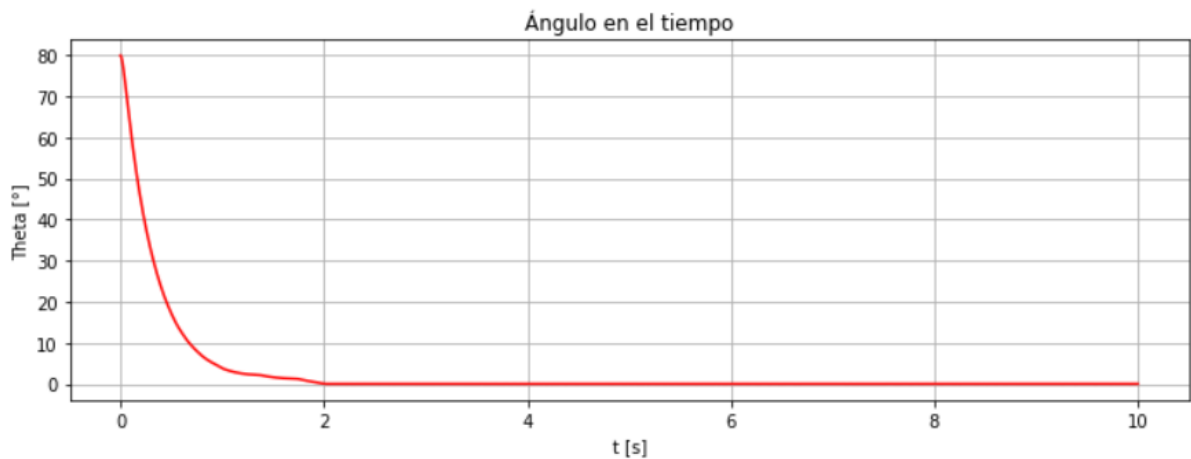
Al correr nuevamente la simulación, se obtiene esta respuesta:



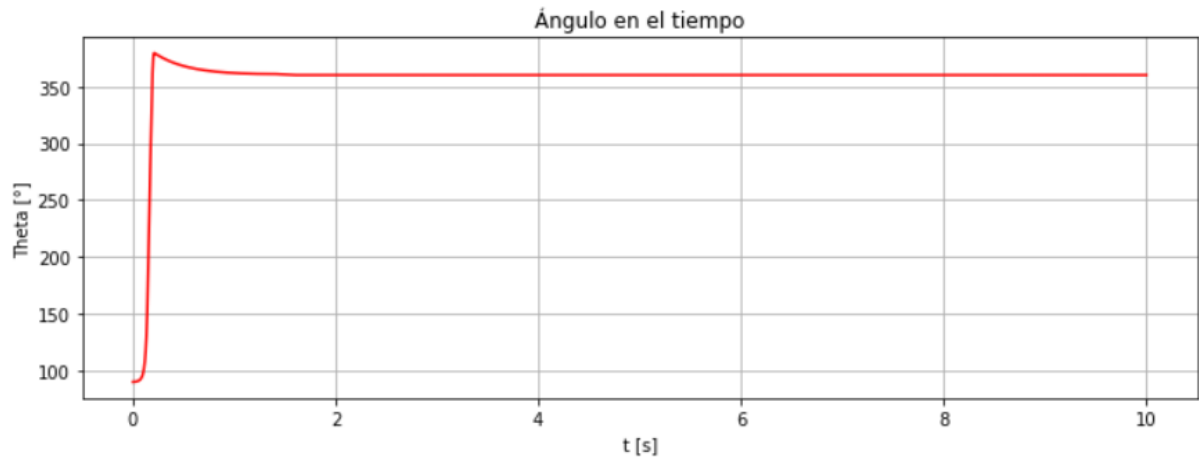
Comparando con la respuesta anterior, esta no presenta oscilación y además logra la estabilidad antes de los 2 segundos, lo cual es más del doble de rápido. Este es un claro ejemplo de cómo la selección de reglas puede incidir en el resultado obtenido, por lo que es recomendable probar con distintas combinaciones para ver con cuáles se obtiene mejor resultado.

Resultados para otras condiciones iniciales

Para $\theta_0=80^\circ$, $V_0=0$ rad/s y $A_0=0$ rad/s²:

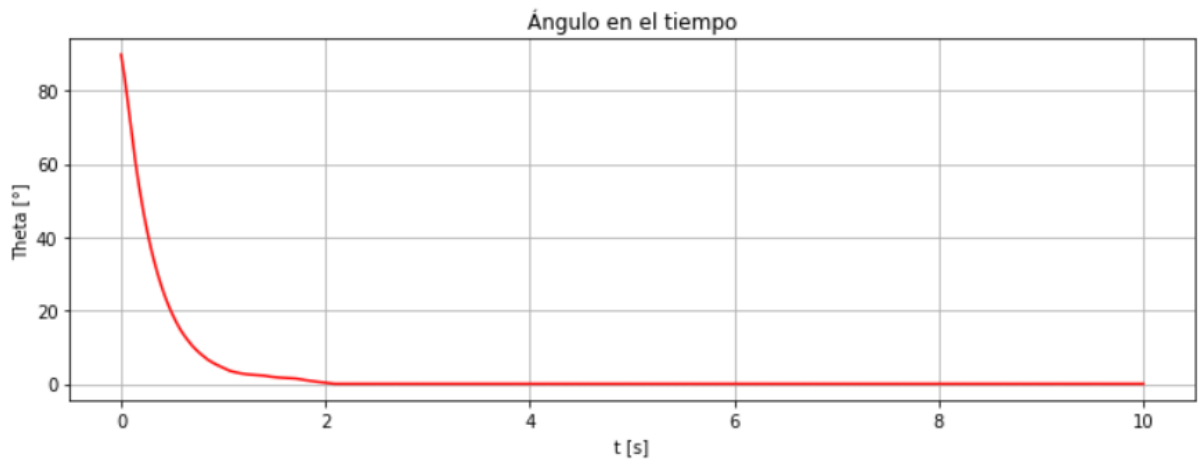


Para $\theta_0=90^\circ$, $V_0=0$ rad/s y $A_0=0$ rad/s²:

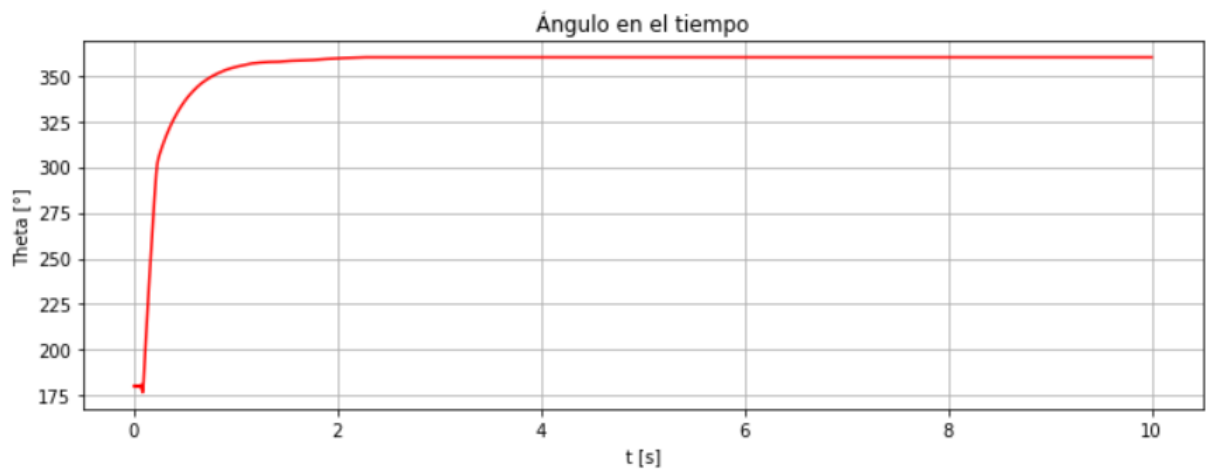


Vemos que si el sistema comienza desde los 90° con velocidad 0, la pértiga da primero una vuelta y luego es estabilizada a los 360° (equivalente a los 0°). Si además de comenzar desde los 90° , lo hace con una velocidad negativa (o sea, volviendo hasta los 0°), ahora el sistema sí es capaz de recuperar la pértiga sin la necesidad de hacer que dé una vuelta:

Para $\theta_0 = 90^\circ$, $V_0 = -3 \text{ rad/s}$ y $A_0 = 0 \text{ rad/s}^2$:



Para $\theta_0 = 180^\circ$, $V_0 = 0 \text{ rad/s}$ y $A_0 = 0 \text{ rad/s}^2$:



Vemos que a pesar de que la pértiga comienza en la peor situación posible (hacia abajo y sin velocidad), el sistema logra rápidamente hacer dar una vuelta para llevarla hasta el equilibrio en los 360° .