EP3 de Programação Linear

Gustavo Chicato Wandeur - 7557797
Vinícius Bitencourt Matos - 8536221

15 de junho de 2015

1 Definições

Definição 1. Um **poliedro** é um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado por um número finito de restrições lineares de igualdade ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$) ou desigualdade ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i$ ou $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_i$).

Definição 2. Um **problema de programação linear** consiste em minimizar, sobre todos os vetores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem dado conjunto de restrições lineares, uma função linear $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, sendo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ dado. Cada restrição linear é da forma $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i$, $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_i$ ou $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$.

O vetor c é chamado *vetor de custos*, e a função $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ é chamada *função objetivo* ou *função de custos*.

Dizemos que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto viável* ou *solução viável* se $\boldsymbol{x}$ satisfaz a todas as restrições do problema de programação linear. O conjunto de todos os pontos viáveis é chamado *conjunto viável*. Segue das definições que o conjunto viável de um problema de programação linear é um poliedro. Um problema é *inviável* se seu conjunto viável é vazio.

Uma solução viável $\boldsymbol{x}^*$ que minimiza a função objetivo é chamada *solução ótima*, e o custo correspondente $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ é chamado *custo ótimo*.

Definição 3. Uma restrição é dita *ativa em $\boldsymbol{x}^*$* se é satisfeita no ponto $\boldsymbol{x}^*$ por igualdade.

Definição 4. Um conjunto de restrições $\{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i\}_{i\in I_1} \cup \{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geq b_i\}_{i\in I_2} \cup \{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i\}_{i\in I_3}$ (onde I_1, I_2, I_3 são conjuntos de índices disjuntos) é **linearmente independente** se $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I_1\cup I_2\cup I_3}$ for um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, isto é, se $\sum_{k=1}^n \lambda_k \boldsymbol{a}_{ik} = \boldsymbol{0}$ apenas se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Definição 5. Um ponto $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ é uma *solução básica* se todas as restrições de igualdade são ativas em $\boldsymbol{x}^*$ e, além disso, dentre todas as restrições ativas em $\boldsymbol{x}^*$, há no mínimo n linearmente independentes.

Definição 6. Diz-se que um problema de programação linear está no **formato padrão** se todas as variáveis são obrigatoriamente não negativas (ou seja, há uma restrição $x_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$) e todas as demais restrições são de igualdade (isto é, da forma $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$).

De modo compacto, podemos descrever um problema de programação linear no formato padrão como segue:

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array},$$

onde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é uma matriz cujas linhas são os vetores $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \ldots, m$, e $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ é interpretado componente a componente.

Qualquer problema de programação linear pode ser reescrito no formato padrão por meio do seguinte procedimento:

- Cada variável *livre* (cujo sinal não é restrito originalmente) x_j é substituída por $x_j^+ - x_j^-$, em que x_j^+ e x_j^- são variáveis novas e com restrição de serem ambas não negativas.
- Cada restrição da forma $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i$ é substituída por $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + s_i = b_i$, em que a nova variável s_i (variável de *folga*) é não negativa. Analogamente, cada restrição da forma $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_i$ é trocada por $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - s_i = b_i$, em que a nova variável s_i (variável de *sobra*) é não negativa.

Uma vez que todo problema de programação linear pode ser expresso no formato padrão e com a matriz $\boldsymbol{A}$ com linhas linearmente independentes, é suficiente ter um método que resolve problemas desse tipo.

Consideremos o poliedro definido pelas restrições $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, em que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem posto completo. Então, existem índices $B(1), \ldots, B(m)$ tais que as colunas $\boldsymbol{A}_{B(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{B(m)}$ são linearmente independentes e $x_i = 0$ para todo $i \notin B(1), \ldots, B(m)$.

Se $\boldsymbol{x}$ é uma solução básica, então as variáveis $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ são chamadas *variáveis básicas*, as demais são chamadas *variáveis não básicas*.

2 O programa

2.1 Núcleo do simplex revisado

1. Em cada iteração, começamos com uma base correspondente às colunas $\boldsymbol{A}_{B(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{B(m)}$, uma solução viável básica $\boldsymbol{x}$ e a inversa $\boldsymbol{B}^{-1}$ da matriz básica.

2. Calculamos primeiramente o vetor $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}$. Em seguida, obtemos os custos reduzidos $\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_j$. Se todos forem positivos, então a solução viável básica $\boldsymbol{x}$ é ótima, e o algoritmo é encerrado. Caso contrário, escolhemos o menor valor de j que satisfaça $\bar{c}_j < 0$.

3. Calculamos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j$. Se nenhum componente de $\boldsymbol{u}$ for positivo, então a direção de redução de custos $-\boldsymbol{u}$ é viável para todo θ positivo. Logo o custo ótimo é $-\infty$ e o algoritmo termina.

4. Caso contrário, se temos ao menos uma componente positiva de $\boldsymbol{u}$, então
$$\theta^* = \min_{\{i=1,\dots,m \mid u_i>0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}.$$

5. Seja l tal que $\theta^* = \dfrac{x_{B(l)}}{u_l}$. Formamos uma nova base trocando[1] a coluna $\boldsymbol{A}_{B(l)}$ por $\boldsymbol{A}_j$. Teremos então uma nova solução viável básica $\boldsymbol{y}$ com componentes $y_j = \theta^*$ e $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i$, $i \neq l$.

6. Montamos uma matriz na forma $\left[\boldsymbol{B}^{-1} \mid \boldsymbol{u}\right]$. São realizadas então operações elementares de linha, adicionando a cada uma um múltiplo da l-ésima, a fim de que a última coluna termine como o vetor canônico $\boldsymbol{e}_l$. As m primeiras colunas resultantes correspondem à matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ atualizada. Retornamos ao passo 1 e continuamos até encontrar uma condição de parada (2 ou 3).

2.2 Método simplex de duas fases

- Fase 1:

  1. Primeiramente, verificamos se existem restrições tais que $b_i < 0$ e, caso existam, multiplicamo-las por -1. Assim, teremos um problema onde $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$.
  2. Introduzimos variáveis artificiais $y_1, \dots, y_m$, uma a cada restrição, e aplicamos o método simplex ao problema auxiliar: $\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$. O ponto de partida é a solução viável básica trivial $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$, que está associada à base $\{n+1, \dots, n+m\}$, com $\boldsymbol{B} = I$.
  3. Caso o custo ótimo do problema auxiliar seja positivo, isto significa que o problema original é inviável[2]; o algoritmo é então encerrado.
  4. Caso o custo seja zero. então de fato existe uma solução viável para o problema original. Se não houver variáveis artificiais na base, estas podem ser simplesmente eliminadas[3]; como resultado, obtemos uma base viável para o problema original.
  5. Por outro lado, se a l-ésima variável da base for artificial, examinemos a l-ésima linha da matriz $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$. Se todas as entradas forem zero, então esta linha corresponde a uma restrição redundante e pode ser eliminada. Caso contrário, se a j-ésima componente for não nula, tomamo-la como pivô e aplicamos uma mudança de base: a l-ésima variável básica sai e x_j entra. Esse procedimento é repetido até que todas as artificiais sejam eliminadas da base.

- Fase 2:

  1. Voltamos ao problema original. Tomamos a base e a matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ obtidas ao final da Fase 1.
  2. Calculamos os custos reduzidos das variáveis desta base inicial, utilizando a função de custos do problema original.
  3. Por fim, já tendo uma solução viável básica, basta agora aplicar o método simplex revisado ao problema original.

[1] O algoritmo descrito no livro para a atualização de B^{-1} depende de que a nova coluna da matriz básica fique no lugar da anterior, consequentemente os índices $B(1), \dots, B(m)$ podem ficar desordenados. Optamos por manter o algoritmo dessa forma, evitando gasto desnecessário de tempo para reordenar os índices e as filas da matriz. Contudo, conforme pede o enunciado, a impressão final da solução ótima (ou da direção que leva o custo a $-\infty$) respeita a ordem inicial das variáveis.

[2] Se o custo ótimo do problema auxiliar for positivo, então o problema original é inviável porque, caso contrário, se $\boldsymbol{x}^*$ fosse uma solução viável do original, então $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^* \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ seria uma solução viável do auxiliar com custo $\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^* \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, o que contradiz a hipótese.

[3] Estamos removendo a restrição redundante $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$, o que corresponde a eliminar a l-ésima componente de $\boldsymbol{b}$ e a l-ésima linha de $\boldsymbol{A}$. Uma vez que a matriz $\boldsymbol{B}$ é formada por colunas de $\boldsymbol{A}$ nas posições $B(1), \dots, B(m)$, isso implica que a matriz $\boldsymbol{B}$ perderá a l-ésima linha e a l-ésima coluna, pois x_l evidentemente é retirada da base. Queremos um meio de obter a nova matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ a partir da anterior. Da definição de matriz inversa e produto de matrizes, originalmente tínhamos $\sum_{k=1}^{m} [B]_{ik}[B^{-1}]_{kj} = [I]_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$, para todos $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, m\}$. Os casos $i = l$ ou $j = l$ não existirão mais, então basta considerar os demais. Separando um termo da soma, isso é equivalente a $[B]_{il}[B^{-1}]_{lj} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m} [B]_{ik}[B^{-1}]_{kj} = [I]_{ij}$ para todos $\{i, j\} \subseteq \{1, \dots, m\} \setminus \{l\}$. Mas essa parcela separada é nula, uma vez que $[B]_{il} = [A]_{i,B(l)} = 0$, já que está no bloco identidade que adicionamos à matriz $\boldsymbol{A}$ para a primeira fase, e fora da diagonal do bloco (isso é garantido porque uma variável artificial nunca volta à base após ter saído, já que utilizamos a regra do menor índice). Do exposto, conclui-se que basta remover de $\boldsymbol{B}^{-1}$ a l-ésima linha e a l-ésima coluna, sendo dispensável recalcular a matriz inversa.

2.3 Formato da entrada

O programa em Octave recebe um argumento na linha de comando, que corresponde ao nome de um arquivo de texto descrevendo o problema na seguinte ordem:

```
m n
A
b
c
```

O programa supõe que m e n são inteiros positivos, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, e resolve o seguinte problema (encontrando uma solução viável básica ótima, se existir, ou uma direção que mostra que o custo ótimo é $-\infty$, ou detectando que o problema não possui solução).

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

3 Exemplos de execução

Observação: conforme solicitado no enunciado, a **implementação** do EP foi feita utilizando o *método simplex revisado*, e **não** o *tableau*. Porém, **no relatório** colocaremos os tableaus correspondentes apenas para facilitar a exposição dos passos.

Em uma iteração, sendo $\boldsymbol{B}$ a matriz básica, o tableau é uma tabela com os valores que seguem:

$-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$
$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$

Uma vez que $\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$, esses valores significam:

oposto da função de custos no ponto atual	custos reduzidos de todas as variáveis
valores das variáveis básicas	valor de $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$, inclusive vetores canônicos (nas colunas correspondentes às variáveis básicas)

O pivô, em cada iteração, é indicado por um asterisco.

3.1 Um problema com custo ótimo finito

(Exemplo 3.8 do livro.)

$$\begin{array}{rrl} \text{minimizar} & x_1 + x_2 + x_3 & \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 \\ & -x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = 2 \\ & 4x_2 + 9x_3 & = 5 \\ & 3x_3 + x_4 & = 1 \\ & x_1, \ldots, x_4 & \geq 0 \end{array}$$

Fase 1

Começamos introduzindo as variáveis artificiais $x_5, \ldots, x_8$ ao problema original.

O tableau seguinte representa o novo problema auxiliar.

```
                         x1       x2       x3       x4       x5       x6       x7       x8
       ---------------------------------------------------------------------------------
       |   -11   |         0       -8      -21       -1        0        0        0        0  |
       ---------------------------------------------------------------------------------
x5  =  |     3   |         1        2        3        0        1        0        0        0  |
x6  =  |     2   |        -1       *2        6        0        0        1        0        0  |
x7  =  |     5   |         0        4        9        0        0        0        1        0  |
x8  =  |     1   |         0        0        3        1        0        0        0        1  |
       ---------------------------------------------------------------------------------
```

6 sai da base, 2 entra.

```
                         x1       x2       x3       x4       x5       x6       x7       x8
       ---------------------------------------------------------------------------------
       |    -3   |        -4        0        3       -1        0        4        0        0  |
       ---------------------------------------------------------------------------------
x5  =  |     1   |        *2        0       -3        0        1       -1        0        0  |
```

x_2 =	1	-0.5	1	3	0	0	0.5	0	0
x_7 =	1	2	0	-3	0	0	-2	1	0
x_8 =	1	0	0	3	1	0	0	0	1

5 sai da base, 1 entra.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	-1	0	0	-3	-1	2	2	0	0
x_1 =	0.5	1	0	-1.5	0	0.5	-0.5	0	0
x_2 =	1.25	0	1	2.25	0	0.25	0.25	0	0
x_7 =	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
x_8 =	1	0	0	*3	1	0	0	0	1

8 sai da base, 3 entra.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	0	0	0	0	0	2	2	0	1
x_1 =	1	1	0	0	0.5	0.5	-0.5	0	0.5
x_2 =	0.5	0	1	0	-0.75	0.25	0.25	0	-0.75
x_7 =	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
x_3 =	0.333	0	0	1	0.333	0	0	0	0.333

Chegamos a uma solução com custo 0. Logo, o problema original é viável. Como $x_1 = \cdots = x_4 = 0$, a terceira restrição é redundante, logo pode ser eliminada.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
	0	0	0	0	0	1	1	1	1
x_1 =	1	1	0	0	0.5	0.5	-0.5	0	0.5
x_2 =	0.5	0	1	0	-0.75	0.25	0.25	0	-0.75
x_3 =	0.333	0	0	1	0.333	0	0	0	0.333

Fase 2

Sem variáveis artificiais, começamos com o tableau obtido na Fase 1.

		x_1	x_2	x_3	x_4
	-1.83	0	0	0	-0.0833
x_1 =	1	1	0	0	0.5
x_2 =	0.5	0	1	0	-0.75
x_3 =	0.333	0	0	1	*0.333

3 sai da base, 4 entra.

		x_1	x_2	x_3	x_4
	-1.75	0	0	0.25	0
x_1 =	0.5	1	0	-1.5	0
x_2 =	1.25	0	1	2.25	0
x_4 =	1	0	0	3	1

Como todos os custos reduzidos são positivos, a solução é ótima, e o algoritmo é então encerrado.
Solução final encontrada: $(0.5, 1.25, 0, 1)^T$

3.2 Um problema inviável

$$
\begin{array}{rrl}
\text{minimizar} & x_1 + x_2 + x_3 & \\
\text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = 3 \\
& -x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = 2 \\
& x_1 + 6x_2 + 12x_3 & = 8.1 \\
& 4x_2 + 9x_3 & = 5 \\
& 3x_3 + x_4 & = 1 \\
& x_1, \ldots, x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Fase 1

(Este exemplo é uma modificação de 3.8 para demonstrar um caso de problema inviável.) Começamos introduzindo as varíaveis artificiais $x_5, \ldots, x_9$ ao problema original.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
	-19.1	-1	-14	-33	-1	0	0	0	0	0
x_5 =	3	*1	2	3	0	1	0	0	0	0
x_6 =	2	-1	2	6	0	0	1	0	0	0
x_7 =	8.1	1	6	12	0	0	0	1	0	0
x_8 =	5	0	4	9	0	0	0	0	1	0
x_9 =	1	0	0	3	1	0	0	0	0	1

5 sai da base, 1 entra.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
	-16.1	0	-12	-30	-1	1	0	0	0	0
x_1 =	3	1	2	3	0	1	0	0	0	0
x_6 =	5	0	*4	9	0	1	1	0	0	0
x_7 =	5.1	0	4	9	0	-1	0	1	0	0
x_8 =	5	0	4	9	0	0	0	0	1	0
x_9 =	1	0	0	3	1	0	0	0	0	1

6 sai da base, 2 entra.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
	-1.1	0	0	-3	-1	4	3	0	0	0
x_1 =	0.5	1	0	-1.5	0	0.5	-0.5	0	0	0
x_2 =	1.25	0	1	2.25	0	0.25	0.25	0	0	0
x_7 =	0.1	0	0	0	0	-2	-1	1	0	0
x_8 =	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0
x_9 =	1	0	0	*83	1	0	0	0	0	1

9 sai da base, 3 entra.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
	-0.1	0	0	0	0	4	3	0	0	1
x_1 =	1	1	0	0	0.5	0.5	-0.5	0	0	0.5
x_2 =	0.5	0	1	0	-0.75	0.25	0.25	0	0	-0.75
x_7 =	0.1	0	0	0	0	-2	-1	1	0	0
x_8 =	0	0	0	0	0	-1	-1	0	1	0
x_3 =	0.333	0	0	1	0.333	0	0	0	0	0.333

Todos os custos reduzidos são não-negativos, logo a solução encontrada para o problema auxiliar é ótima. Porém, a função de custos não é zero. Isso significa que o problema auxiliar não admite todas as variáveis artificiais nulas, donde decorre que o problema original não possui solução, isto é, é inviável.

3.3 Um problema com função de custos ilimitada inferiormente

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar} & -x_1 - x_2 \\ \text{sujeito a} & -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Fase 1

(Exemplo 1.8d da página 23 do livro, adaptado para o formato padrão.)
Introduz-se a variável artificial x_4 ao problema original.

		x_1	x_2	x_3	x_4
	-1	1	-1	-1	0
x_4 =	1	-1	*1	1	1

4 sai da base, 2 entra.

		x_1	x_2	x_3	x_4
	0	0	0	0	1
x_2 =	1	-1	1	1	1

Como a função de custos vale zero, o problema é viável. Ademais, como não há variáveis artificais na base, já temos a s.v.b. $(0, 1, 0, 0)^T$.

Fase 2

Continuamos com o tableau encontrado aplicado ao problema original.

		x_1	x_2	x_3
	1	-2	0	1
x_2 =	1	-1	1	1

Como x_1 tem custo reduzido negativo e a primeira coluna possui apenas elementos não-positivos, temos que a função de custos continuará sendo reduzida indefinidamente sem que x_1 se torne não-básica.
Assim, o problema é ilimitado inferiormente e seu custo ótimo é $-\infty$.