Relatório do EP2 de Programação Linear

Gustavo Chicato Wandeur - 7557797
Vinícius Bitencourt Matos - 8536221

17 de maio de 2015

1 Definições

Definição 1. Um **poliedro** é um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ limitado por um número finito de restrições lineares de igualdade ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$) ou desigualdade ($\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i$ ou $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_i$).

Definição 2. Um **problema de programação linear** consiste em minimizar, sobre todos os vetores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem dado conjunto de restrições lineares, uma função linear $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$, sendo $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ dado. Cada restrição linear é da forma $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i$, $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_i$ ou $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$.

O vetor c é chamado *vetor de custos*, e a função $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ é chamada *função objetivo* ou *função de custos*.

Dizemos que $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ é um *ponto viável* ou *solução viável* se $\boldsymbol{x}$ satisfaz a todas as restrições do problema de programação linear. O conjunto de todos os pontos viáveis é chamado *conjunto viável*. Segue das definições que o conjunto viável de um problema de programação linear é um poliedro. Um problema é *inviável* se seu conjunto viável é vazio.

Uma solução viável $\boldsymbol{x}^*$ que minimiza a função objetivo é chamada *solução ótima*, e o custo correspondente $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ é chamado *custo ótimo*.

Definição 3. Uma restrição é dita *ativa em $\boldsymbol{x}^*$* se é satisfeita no ponto $\boldsymbol{x}^*$ por igualdade.

Definição 4. Um conjunto de restrições $\{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \leq b_i\}_{i\in I_1} \cup \{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} \geq b_i\}_{i\in I_2} \cup \{\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{x} = b_i\}_{i\in I_3}$ (onde I_1, I_2, I_3 são conjuntos de índices disjuntos) é **linearmente independente** se $\{\boldsymbol{a}_i\}_{i\in I_1\cup I_2\cup I_3}$ for um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, isto é, se $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \boldsymbol{a}_{ik} = \boldsymbol{0}$ apenas se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Definição 5. Um ponto $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ é uma *solução básica* se todas as restrições de igualdade são ativas em $\boldsymbol{x}^*$ e, além disso, dentre todas as restrições ativas em $\boldsymbol{x}^*$, há no mínimo n linearmente independentes.

Definição 6. Diz-se que um problema de programação linear está no **formato padrão** se todas as variáveis são obrigatoriamente não negativas (ou seja, há uma restrição $x_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$) e todas as demais restrições são de igualdade (isto é, da forma $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = b_i$).

De modo compacto, podemos descrever um problema de programação linear no formato padrão como segue:

$$\begin{array}{rc} \text{minimizar} & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = b \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} ,$$

onde $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é uma matriz cujas linhas são os vetores $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1,\dots,m$, e $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ é interpretado componente a componente.

Qualquer problema de programação linear pode ser reescrito no formato padrão por meio do seguinte procedimento:

- Cada variável *livre* (cujo sinal não é restrito originalmente) x_j é substituída por $x_j^+ - x_j^-$, em que x_j^+ e x_j^- são variáveis novas e com restrição de serem ambas não negativas.

- Cada restrição da forma $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leq b_i$ é substituída por $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + s_i = b_i$, em que a nova variável s_i (variável de *folga*) é não negativa. Analogamente, cada restrição da forma $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \geq b_i$ é trocada por $\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} - s_i = b_i$, em que a nova variável s_i (variável de *sobra*) é não negativa.

Ademais, não há perda em impor que as linhas de $\boldsymbol{A}$ sejam linearmente independentes, uma vez que a dependência linear entre restrições nesse formato sempre leva a um dos seguintes casos:

- Há restrições redundantes, que podem ser simplesmente removidas sem alteração do problema;

- Há restrições incompatíveis, que tornam o problema inviável.

Uma vez que todo problema de programação linear pode ser expresso no formato padrão e com a matriz $\boldsymbol{A}$ com linhas linearmente independentes, é suficiente ter um método que resolve problemas desse tipo.

2 Resultados importantes

- Consideremos o poliedro definido pelas restrições $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, em que $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem posto completo. Então, existem índices $B(1),\dots,B(m)$ tais que as colunas $\boldsymbol{A}_{B(1)},\dots,\boldsymbol{A}_{B(m)}$ são linearmente independentes e $x_i = 0$ para todo $i \notin B(1),\dots,B(m)$.

- Se $\boldsymbol{x}$ é uma solução básica, então as variáveis $x_{B(1)},\dots,x_{B(m)}$ são chamadas *variáveis básicas*, as demais são chamadas *variáveis não básicas*.

3 Método simplex revisado

- Em cada iteração, começamos com uma base correspondente às colunas $\boldsymbol{A}_{B(1)},\dots,\boldsymbol{A}_{B(m)}$, uma solução viável básica $\boldsymbol{x}$ e a inversa $\boldsymbol{B}^{-1}$ da matriz básica.

- Calculamos primeiramente o vetor $\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}$. Em seguida, calculamos os custos reduzidos $\bar{c}_j = c_j - \boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_j$. Se todos forem positivos, então a solução viável básica $\boldsymbol{x}$ é ótima, e o algoritmo é encerrado. Caso contrário, escolhemos o menor valor de j que satisfaça $\bar{c}_j < 0$.

- Calculamos $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}_j$. Se nenhum componente de $\boldsymbol{u}$ for positivo, então a direção de redução de custos $-\boldsymbol{u}$ é viável para todo θ positivo. Logo o custo ótimo é $-\infty$ e o algoritmo termina.

- Caso contrário, se temos ao menos uma componente positiva de $\boldsymbol{u}$, então

$$\theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m \mid u_i>0\}} \frac{x_{B(i)}}{u_i}.$$

- Seja l tal que $\theta^* = \dfrac{x_{B(l)}}{u_l}$. Formamos uma nova base trocando a coluna $\boldsymbol{A}_{B(l)}$ por $\boldsymbol{A}_j$. Teremos então uma nova solução viável básica $\boldsymbol{y}$ com componentes $y_j = \theta^*$ e $y_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i$, $i \neq l$.

- Montamos uma matriz na forma $\left[\boldsymbol{B}^{-1} \mid u\right]$. São realizadas então operações elementares de linha, adicionando a cada uma um múltiplo da l-ésima linha, a fim de que a última coluna termine como o vetor canônico $\boldsymbol{e}_l$. Por fim, retira-se esta última coluna, resultando na matriz $\boldsymbol{B}^{-1}$ atualizada. Retorna-se ao passo 1 e continuamos até encontrar uma condição de parada (2 ou 3).

4 O programa

4.1 Formato da entrada

O programa recebe um argumento na linha de comando, que corresponde ao nome de um arquivo de texto descrevendo o problema na seguinte ordem:

```
m n
A
b
c
x
```

4.2