

## ÚVOD

Předmět, který se zabývá prouděním v elementech leteckých pohonných jednotek (ev. raketových motorů) se zpravidla nazývá vnitřní aerodynamika. Tímto označením se rozlišuje od vnější aerodynamiky, zabývající se vnějším obtékáním letadel, raket a jiných těles. Zatímco ve vnější aerodynamice je pracovní tekutinou též výhradně vzduch, ve vnitřní aerodynamice ji mohou být kromě vzduchu (nassávaného z okolní atmosféry) i např. spaliny, ev. jiné plyny. Vhodnějším označením představu našeho zájmu je proto vnitřní dynamika plynů.

Na rozdíl od vnější aerodynamiky, kde jsou při rychlostech přicházejících v úvahu v letechání, změny tlaku a teplot v mezech, v nichž se výrazněji nemění termofyzikální vlastnosti vzduchu a ani jeho molekulární struktura, ve vnitřní dynamice plynů se setkáváme s teplotami vyššími, se změnou molekulární struktury tekutiny (spalování, hoření), s výrazně větším rozmezím tlaků, s výrazně větším vlivem výměny tepla s okolím, apod.

Vzhledem k rozměrům a tvaru protékaných prvků se ve vnitřní dynamice plynů výrazněji (a často i odlišně) uplatní i vlivy omezujících stěn a především vaz - kost tekutiny, turbulence, sekundární proudění, a jiné.

S obecnými základy se posluchači seznámili již dříve, a to v hydrodynamice a v termomechanice. Zde jsou tyto poznatky uváděny v hlubších souvislostech z hlediska jejich aplikací při rozboru a řešení proudění v elementech leteckých pohonných jednotek. Důraz je přitom kladen na pochopení a osvojení základních pojmu a vztahů. Metody řešení prakticky vykládány nejsou, neboť by vzhledem k své náročnosti přesahly možnosti a rozsah přednášek. Přesto však právě zřete na moderní metody řešení ovlivnil celé pojetí výkladu, který sleduje 2 hlediska:

- získání dostatečného přehledu o náročných výchozích vztazích vnitřní aerodynamiky, potřebného jak pro jejich úpravu, tak i pro formulaci úloh pro počítače, popř. pro interpretaci získaných numerických ev. experimentálních výsledků.
- osvojení základních představ o procesech ve vnitřní aerodynamice na základě jednorozměrné teorie.

Tato skripta obsahují pouze přednášenou látku. Nejsou v ní zahrnutý otázky proudění se změnou molekulární struktury tekutiny (spalování), ani otázky, které rozšiřují probíranou látku, ovšem posluchač se s nimi setká až v dalším specializovaném studiu.

Příklady, které jsou probírány na cvičeních a které doplňují, rozšiřují a aplikují vykládané poznatky budou obsaženy ve zvláštním skriptu.

## I. ZÁKLADNÍ POJMY A VZTAHY Z TERMODYNAMIKY

### I.1 Tekutina

Moderní fyzika rozlišuje čtyři rozdílná skupenství hmoty: tuhé, kapalné, plynné a plazma. Vzhledem k některým typickým společným vlastnostem označujeme kapaliny i plyny společným pojmem tekutina.

Pracovní prostředí, s kterým se setkáváme v leteckých pohonných jednotkách je v termodynamickém slova smyslu tekutinou. V převážné většině případů se jedná o tekutinu stlačitelnou - plyn (vzduch, spaliny), vyjimečně o páry.

Na rozdíl od kapalin (které jsou zpravidla tekutinou nestlačitelnou), vyplňují plyny celý prostor, v němž se nacházejí. Rozložení hmotnosti v tomto prostoru je vyjádřeno hustotou plynu, danou množstvím hmoty v jednotkovém objemu. Hustota je lokální veličinou; závisí na čase i na prostorových souřadnicích místa, v němž ji uvažujeme. Definujeme ji proto výrazem

$$\rho(x_i, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \quad (I.1)$$

kde  $\Delta m$  je množství hmoty, nacházející se v čase  $t$  v objemu  $\Delta V$ , vymezeném nejbližším okolím bodu  $x_i$ . Tato definice je vhodná tehdy, je-li hmota v uvažovaném prostoru rozložena rovnoměrně a spojitě, tj. jedná-li se o kontinuum.

Hmota je ve skutečnosti soustředěna v jednotlivých molekulách plynu. V elementární kinetické teorii plynů předpokládáme, že molekuly jsou pružné koule (Boltzmann, 1896) jejichž vzdálenosti jsou natolik velké proti jejich vlastním rozměrům, že mezi nimi nedochází k žádnému silovému působení. Molekuly na sebe působí jen ve velmi krátkém časovém okamžiku vzájemné srážky.

Průměrná délka  $L$ , kterou molekula urazi mezi dvěma srážkami s jinými molekulami se nazývá střední volnou dráhou molekuly. Závisí jednak na hustotě plynu (počtu molekul  $n$  v objemové jednotce), jednak na velikosti molekul (efektivním, tzv. "účinném" průměru  $d$ ) tj.  $L \sim 1/nd^2$ .

Při normálních podmínkách (teplota  $0^\circ\text{C}$ , tlak  $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ) je v 1 molu libovolného ideálního plynu  $6,023 \cdot 10^{23}$  molekul (tzv. Avogadrovo číslo), přičemž 1 mol zaujímá za těchto podmínek  $22,414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ . Střední volná dráha molekuly je přitom  $L \sim 0,06 \mu\text{m}$  a mezi dvěma po sobě následujícími srážkami uplyne cca  $1,3 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ . Ve výšce zhruba 50 km, v niž tlak poklesne na cca  $66,6 \text{ Pa}$  je  $L \sim 90 \mu\text{m}$  a interval mezi srážkami je cca  $2 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ . Ve výšce cca 120 km je  $L$  řádu jednotek, ve výšce nad 150 km už řádu desítek metrů!

V prvých případech tedy můžeme považovat vzduch vzhledem k rozměrům obtékajích těles za kontinuum. Je-li však  $L$  srovnatelné s rozměry tělesa, jsou srážky mezi molekulami natolik řídké, že neovlivní obtékání tělesa. V takových případech mluvime o proudění volných molekul.

Mezi těmito extrémními případy obtékání existuje ještě přechodový režim - proudění se skluzem rychlosti. V tomto režimu se uplatní nejen odraz molekul od stěny, ale (vzhledem k vyšší hustotě) i srážky molekul mezi sebou. Odražené molekuly mají určitou složku tangenciální rychlosti, takže rychlosť plynu u stěny se jeví jako nenulová - plyn jakoby klouzal po stěně. Z fyzikálního i matematického

hlediska je tento režim nejsložitější.

Při řešení konkrétních úloh dynamiky plynů nevyšetřujeme chování jednotlivých molekul plynu, ale vycházíme z převážně fenomenologických zákonů termodynamiky. Znalost molekulární struktury plynu a chování molekul umožnuje ovšem tuto fenomenologii objasnit a pochopit.

## I.2 Termodynamický systém. Stavová rovnice

V termodynamických úvahách zavádime pojem termodynamického systému. Je jím prostorově omezená část tekutiny, oddělená pevnou nebo smluvní (smyšlenou) hranicí od okolního prostředí. Tato hranice musí být plně určená, tj. musí být uzavřená a v každém bodě musí mít definovány své vlastnosti.

Je-li systém izolovaný, nedochází podél jeho hranice k žádné interakci s okolím.

V uzavřeném systému nedochází k žádnému přenosu hmoty jeho hranici, tj. hmotnost uzavřeného systému je stále konstantní. Může však docházet k výměně tepla s okolím, ev. k přívodu (odvodu) mechanické práce. Studiem uzavřených systémů se zabývá klasická (fenomenologická) termodynamika.

Systém, v němž nedochází k výměně tepla s okolím nazýváme adiabatickým.

V otevřených systémech dochází na hranici k výměně hmoty i energie. Zabývá se jimi tzv. nerovnovážná termodynamika.

Soubor všech makroskopicky měřitelných vlastností termodynamického systému nazýváme jeho stavem. Veličiny, které tento stav charakterizují se nazývají stavovými veličinami, nebo též stavovými proměnnými.

Termodynamicky rovnovážný stav tekutiny je určen těmito základními stavovými veličinami: teplotou  $T$ , tlakem  $\rho$ , objemem  $V$  (ev. hustotou  $\varphi$ ) a ve vicesložkové tekutině ještě počtem molů jednotlivých složek. Tlak a teplota jsou intenzivními veličinami nezávislými na množství hmoty v systému. Objem je veličinou extenzivní, úměrnou množství hmoty. Z extenzivních veličin lze přejít na intenzivní jejich vztažením na množství hmoty – pak je označujeme jako měrné veličiny (např. měrný objem).

Vzájemnou závislost stavových veličin  $p, \varphi, T$  udává stavová rovnice, z hlediska mechaniky tekutin je stavová rovnice tzv. konstitučním (materiálovým) vztahem, charakterizujícím okamžitý stav termodynamického systému prostřednictvím základních stavových veličin. Kromě základního tvaru tzv. termické stavové rovnice  $p(\varphi, T)$  potřebujeme ještě tzv. kalorickou stavovou rovnici, vyjadřující vnitřní energii termodynamického systému jako funkci teploty a hustoty, tj.  $U = U(T, \varphi)$ .

V aplikované vnitřní dynamice plynů se setkáváme prakticky jen se směsi plynů. Vždyť i vzduch je směsi dusíku a kyslíku, s příměsi kysličníku uhličitého, vodíku a nepatrného množství vzácných plynů. Spaliny jsou např. směsi dusíku a produktů spalování. Všechny směsi plynů jsou směsi molekul jednotlivých plynů, přičemž při proudění může docházet i k chemickým, ev. fyzikálně - chemickým reakcím mezi jednotlivými složkami. Rozlišujeme proto směsi inertních (nereac-

gujících) a směsi reagujících plynů. Jednotlivé složky směsi nelze od sebe mechanicky oddělit.

V rozsahu těchto přednášek budeme uvažovat jen proudění jednoduchých plynů.

### I.3 Ideální a reálný plyn

Stavovou rovnici  $p(\rho, T)$  nelze odvodit pomocí klasické termodynamiky. Prakticky ji lze stanovit pouze z experimentálních dat, nebo metodami statistické fyziky. Pro zjednodušení úvah klasické (fenomenologické) termodynamiky zavádime pojmy ideálního a reálného plynu.<sup>x)</sup>

Ideální plyn je charakterizován souborem ideálních vlastností, kterým se reálné (skutečné) plynů jen s určitou přesností blíží, a to zejména:

- řidi se přesnou stavovou rovnici  $p = \rho RT$ , (I.2)
- jeho vnitřní energie závisí pouze na teplotě, tj.  $U = U(T)$ ,
- měrné tepelné kapacity  $c_p$  a  $c_v$  nezávisí ani na teplotě ani na tlaku,
- rozdíl měrných tepelných kapacit je konstantní a roven plynové konstantě  $R$ , tj.  $c_p - c_v = R$  (Mayerův vztah),
- podíl měrných tepelných kapacit je konstantní (tzv. Poissonova konstanta) a závisí na počtu a uspořádání atomů v molekule plynu, tj.  $c_p/c_v = \kappa$ .

V termodynamických úvahách se užívá univerzální plynové konstanty  $R_m$ , jejíž hodnota je  $R_m = 8,314 \text{ J/mol K}$ . V dynamice plynů se užívá plynové konstanty  $R = R_m/M$ , kterou dostaneme z univerzální plynové konstanty dělením molekulovou hmotností příslušného plynu.  $R$  tedy není univerzální konstantou, ale má pro každý plyn jinou hodnotu. Např. pro vzduch je  $M = 28,96 \text{ kg/mol}$ , takže  $R = 287,1 \text{ J/kgK}$ .

Plyny, které uvedené vlastnosti nemají označujeme jako reálné. Reálné plynů se neřidi stavovou rovnici (I.2), ideálním plynům se svým chováním přibližují jen tehdy, lze-li zanedbat vliv velikosti molekul vzhledem k objemu plynu a vliv vzájemného silového působení molekul. Z praktického hlediska se jedná o poměrně široký rozsah tlaku a teplot (pro  $\rho < 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$  a  $-60^\circ\text{C} < T < 600^\circ\text{C}$  nepřekročí pro vzduch chyba v určení hustoty  $\rho$  podle rov. (I.2) 1 %).

Nejznámější stavovou rovnici pro reálné plynů je tzv. van der Waalsova rovnice

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT, \quad (\text{I.3})$$

kde první závorka udává skutečný tlak plynu (který je větší než měřeny v důsledku vzájemného přitahování molekul ve vrstvě těsně u stěny, tzv. kohezní tlak), druhá závorka udává skutečný objem plynu, který je zase naopak menší než měřeny ze stejného důvodu. Konstanty  $a$  a  $b$  charakterizují určitý plyn a určuje se experimentálně,  $V$  je molekulový objem plynu.

x) na zavedení pojmu ideálního plynu není v literatuře jednotný názor. Klasická literatura pro něj často užívá termín dokonalý plyn. Je-li tento plyn navíc nevazký a tepelně nevedivý, považuje jej za ideální.

Většina stavových rovnic reálných plynů i par má zcela empirický charakter. Tvar rovnice závisí na způsobu matematického zpracování experimentálních dat, přičemž i pro stejný plyn může být tvar rovnice různý v různých rozmezích teplot a tlaků.

Kalorickou stavovou rovnici reálného plynu vyjadřujeme opět fenomenologickou závislostí jeho vnitřní energie  $U$  na teplotě a objemu, tj.  $U(T, V)$ .

Vnitřní energie plynu je dána kinetickou energií jeho molekul, závisí proto i na molekulární struktuře plynu (počtu aktivních stupňů volnosti molekuly). U reálného plynu je vlivem kohezních sil mezi molekulami vždy menší, než vnitřní energie ideálního plynu. Pro plyn, řídící se van der Waalsovou stavovou rovnicí (I.3) je  $U = c_V T - \frac{a}{V}$ .

#### I.4 Základní termodynamické veličiny a vztahy

Izolujeme-li dokonale určitý objem tekutiny od všech vnějších vlivů a ponecháme-li ji zcela v klidu, pak energie obsažená v této tekutině je určena pouze vnitřní energií  $U(T, V)$ . Jakýkoliv přívod nebo odvod jakékoliv energie musí být kompenzován změnou této vnitřní energie, má-li být vyhověno zákonu zachování energie. Tzn.

$$dU = \delta Q + \delta W, \quad (\text{I.4})$$

kde  $\delta Q$  je množství sdeleného (tj. přivedeného nebo odvedeného) tepla,  $\delta W$  je přivedená (odvedená) práce vnějších sil. Je-li vnější silou tlak, pak práce této síly na objemu  $dV$  je dána výrazem

$$-\delta W = p dV,$$

takže

$$dU = \delta Q - p dV. \quad (\text{I.5})$$

Vnitřní energie závisí pouze na okamžitém stavu tekutiny. Tzn., že při změně ze stavu 1 do stavu 2, závisí rozdíl vnitřních energií pouze na počátečním a konečném stavu a ne na způsobu, jakým byla změna stavu provedena. ( $dU$  v rov. (I.5) je tedy úplný diferenciál, jehož integrál mezi stavy 1 a 2 je roven  $(U_2 - U_1)$ ).

Vnitřní energie představuje energii, kterou je plyn nadán bez ohledu na to, jakým vnějším účinkům a změnám je v konkrétním procesu podroben.

Rovnice (I.5) představuje vlastně definiční vztah vnitřní energie. Je současně vyjádřením zákona o zachování energie a označuje se jako I. věta termodynamiky.

Jak  $\delta Q$ , tak  $\delta W$  jsou tzv. neúplné diferenciály, neboť jejich přírůstek závisí na způsobu změny stavu, který musí být definován zvláště, např. tím, že se během uvažovaného procesu nemění některá stavová veličina, apod..  $\delta Q$  v žádném případě není teplo v tekutině obsažené!

Abychom mohli jiným způsobem vyjádřit diferenciál vnitřní energie  $U(T, V)$  pomocí známých stavových veličin, zavedeme novou termodynamickou funkci - entropii  $S$ . Zavedeme ji formálně v analogii s tlakem  $p$ , který je určen výrazem

výrazem

$$-p = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S$$

takže pak

$$T = \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V , \quad dU = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S dV + \left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V dS = -p dV + T dS . \quad (I.6)$$

Porovnáním rovnic (I.I.5) a (I.6) dostaneme

$$T dS = \delta Q . \quad (I.7)$$

Uvažujeme-li libovolnou kvasistatickou změnu stavu (např. isobarickou, isothermickou, apod.) mezi určitým daným výchozím a konečným stavem zjistíme, že množství přivedeného nebo odvedeného tepla  $\delta Q$  závisí na způsobu, jakým tato změna probíhá (na integrační cestě). Proto jsme označili  $\delta Q$  jako neúplný diferenciál.

Pro kvasistatické (vratné) změny stavu dostaneme integraci rov. (I.7)

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} . \quad (I.8)$$

Jedná-li se o cyklický proces, při němž se soustava vraci do původního stavu, je celková změna vnitřní energie soustavy rovna nule, tj.  $\oint dU = 0$ , poněvadž  $U$  je stavovou veličinou. Odtud ovšem

$$0 = \oint \delta Q + \oint \delta W \quad Q = -W.$$

Kdybychom si položili podmítku  $Q > 0$ , tak by mohla soustava trvale vykonávat práci  $W$  pouze v důsledku jednostranného předávání tepla (např. odnímání tepla z termostatu), čímž bychom dospěli k Perpetuum mobile a tedy k závěru, který je v rozporu s I. větou termodynamiky. Proto při vratném cyklickém procesu musí být oba členy pravé strany předchozí rovnice současně rovny nule, tj.  $\oint \delta Q = \oint \delta W = 0$ , a tedy

$$\oint T dS = 0 . \quad (I.9)$$

Při nevratných procesech v izolovaných systémech platí

$$\oint T dS > 0 , \quad \text{resp.} \quad dS > 0 . \quad (I.10)$$

Tato podmínka se nazývá Clausiusovou nerovností a říká, že není možné získávat v cyklickém procesu mechanickou práci tím, že bychom trvale odebírali teplo z teplného zásobníku (termostatu) a měnili je úplně v mechanickou práci. Podmínka (I.10) je jedním z možných vyjádření II. věty termodynamiky.

V praktickém řešení termodynamických úloh je z různých důvodů výhodnější pracovat s entalpií  $H$ , než s vnitřní energií  $U$ . Zavádíme ji výrazem

$$H = U + pV , \quad (I.11)$$

$$\text{resp.} \quad dH = dU + p dV + V dp = \delta Q + V dp . \quad (I.12)$$

V definici entalpie je navíc zahrnuta i práce tlakových sil, takže entalpie představuje prakticky potenciální energii tekutiny.

Upravíme-li rov. (I.12) pomocí rov. (I.7) dostaneme

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{1}{\rho T} dP, \quad \text{popř.} \quad dS = \frac{dU}{T} + \frac{\rho}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (\text{I.13})$$

V ideálním plynu je  $U = U(T)$ ,  $P = \rho RT$ , takže  $H = H(T)$ .

### I.5 Měrné tepelné kapacity

Termodynamické vlastnosti tekutiny charakterizují především její měrné tepelné kapacity. Měrnou tepelnou kapacitou  $c$  označujeme množství tepla  $\delta Q$  potřebné ke zvýšení teploty hmotnostní jednotky tekutiny o 1 stupeň. Z rovnice (I.5) a (I.12)

$$c = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} + P \frac{dV}{dT} = \frac{dH}{dT} - V \frac{dP}{dT}.$$

Odtud dostaneme pro měrné tepelné kapacity při stálém tlaku a při stále objemu výrazy

$$c_p = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P, \quad c_v = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V. \quad (\text{I.14})$$

Pro ideální plyn, v němž  $H$  i  $U$  jsou pouze funkcemi  $T$  lze navíc parciální derivace nahradit totálními, takže

$$c_p = \frac{dH}{dT}, \quad c_v = \frac{dU}{dT}, \quad \begin{aligned} dH &= c_p dT \\ dU &= c_v dT \end{aligned}$$

odkud současně

$$dH = c_p dT, \quad dU = c_v dT. \quad (\text{I.15})$$

Lze ukázat, že vždy platí nerovnost  $c_p > c_v > 0$ . Z rovnice (I.15), (I.11) a (I.2) dostaneme pro ideální plyn tzv. Mayerův vztah

$$c_p - c_v = R \quad (\text{I.16})$$

Důležitou veličinou je poměr měrných tepelných kapacit

$$\alpha = \frac{c_p}{c_v}. \quad (\text{I.17})$$

V běžném rozsahu teplot je  $\alpha$  konstantní a nazývá se proto někdy Poissonovou konstantou.

Z kinetické teorie plynů je známo, že hodnoty  $c_p$ ,  $c_v$  i  $\alpha$  závisí u ideálního plynu jen na počtu a uspořádání atomů v molekule plynu, speciálně na počtu stupňů volnosti molekuly  $n$ . Platí

$$c_v = \frac{n}{2} R, \quad c_p = \frac{n+2}{2} R, \quad \alpha = \frac{n+2}{n},$$

takže  $\alpha$  je pro 1, 2 a 3-atomové plyny v pořadí rovno 1,66; 1,4; 1,33. Hodnoty měrných tepelných kapacit u plynu rostou s rostoucí teplotou. Závislost  $\rho = f(T)$  vyjadřujeme zpravidla vztahem

$$c_p = a + bT + cT^2 + dT^3,$$

kde součinitely  $a, b, c$  pro určité plyny lze najít v tabulkách,  $d$  bývá univerzální.

ni konstantou.

Pomoci měrnych tepelných kapacit lze vyjádřit i přírůstek entropie výrazem

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{\rho}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_p \frac{dT}{T} - (c_p - c_v) \frac{dp}{p} = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{d\rho}{\rho}. \quad (\text{I.18})$$

Pro konstantní hodnoty  $c_p$  a  $c_v$  (ideální plyn) lze integraci této rovnice získat vztah

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^x \exp\left(\frac{S - S_1}{c_v}\right), \quad (\text{I.19})$$

kde index  $1$  označuje výchozí stav. Pro izoentropickou změnu stavu je  $S = S_1$ , takže

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^x, \quad (\text{I.20})$$

což je tzv. Poissonova rovnice změny stavu.

### I.6 Základní transportní vlastnosti plynu

Do tzv. transportních jevů zahrnujeme procesy, které vznikají v tekutině (plynu) při nerovnoměrném rozložení hustoty, teploty, ev. rychlosti a směrují k vyrovnání místních rozdílů těchto veličin.

Nerovnoměrnost hustoty, ev. koncentrace, se vyrovnává difúzí, teplotní rozdíly vyvolávají tok tepla, nestejná postupná rychlosť dvou sousedních vrstev tekutiny se vyrovnává vnitřním třením. Z molekulárního hlediska (z hlediska kinetické teorie plynu) lze tyto jevy vykládat jako přenos (transport) určité molekulární veličiny - difúzí jako transport molekul, tok tepla jako transport molekulární energie a vnitřní tření (vazkost) jako transport hybnosti molekul.

Z hlediska vnitřní aerodynamiky jsou nejdůležitějšími transportními veličinami vazkost a tepelná vodivost.

V kinetické teorii plynu se pro tzv. dynamickou vazkost odvozuje vztah (Chapman, Enskog)

$$\eta = 0,461 \bar{C} L \rho \quad \frac{mv^2}{s} \cdot \frac{m}{m^2} = \frac{\rho}{s} \cdot \frac{m^2}{m^3}, \quad (\text{I.21})$$

a pro teplnou vodivost vztah

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \bar{C} L c_v \approx \eta c_v. \quad (\text{I.22})$$

V těchto vztazích je  $\bar{C}$  střední rychlosť molekul a  $L$  střední volná dráha molekul. Protože  $L \sim 1/\rho$  a  $\bar{C} \sim \sqrt{T}$  nezávisí dynamická vazkost plynu ani na tlaku, ani na hustotě, ale jen na odmocnině z absolutní teploty. (V kapalinách je tomu jinak, tam se vazkost s rostoucí teplotou zmenšuje!)

Zavádime ještě tzv. kinematickou vazkost

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (\text{I.23})$$

Jelikož  $\rho \sim p$ , je  $\nu \sim \sqrt{T}/p$ , čili kinematická vazkost klesá s rostoucím tlakem. Tyto úvahy platí s dostatečnou přesností pouze pro ideální plyn. Pro reálné plyny se často užívá tzv. Sutherlandův vztah

$$\eta = \frac{A \sqrt{T}}{1 + \frac{B}{T}}, \quad (\text{I.24})$$

kde  $A$  a  $B$  jsou konstanty, závislé na druhu plynu. Častěji jej užíváme v jiném tvaru, a to

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^\omega, \quad (I.25)$$

kde  $\eta_0$  je vazkost při  $T_0 = 273^{\circ}\text{K}$ . Exponent  $\omega$  je funkcií  $T/T_s$ , kde  $T_s$  je tzv. Sutherlandova konstanta (viz tabulka).

plyn	$T_s$	rozmězi teplot, v nichž platí vztah
vzduch	114	0 - 300 $^{\circ}\text{C}$
dusík	118	15 - 100 $^{\circ}\text{C}$
methan	198	17 - 100 $^{\circ}\text{C}$

$\frac{T}{T_s}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\omega$	1,0	0,92	0,84	0,80	0,76	0,73	0,70	0,68	0,65

V rozsahu  $90\text{ K} \leq T \leq 300\text{ K}$  lze s dostatečnou přesností užít vztahu

$$\eta = 1,15 T^{8/9}. \quad \text{Ná! (Prise!)}$$

Z definičních rovnic vaznosti a tepelné vodivosti plyně i jejich rozdílů, a to

$\eta$	$\dots$	$\text{N s m}^{-2}$	$\text{rozměr m}^{-1} \text{kg s}^{-1}$	$\text{Pas}$
$\nu = \eta/\rho$		$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{s}$
$\lambda$		$\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{m kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$	

### I.7 Stlačitelnost tekutiny a rychlosť zvuku

Na rozdíl od proudění nestlačitelných tekutin (kapalin) je nutno při prouďení stlačitelných tekutin (plynů, par) uvažovat změnu hustoty. Hustota  $\rho$  je vázána prostřednictvím stavové rovnice s tlakem  $p$ , ev. teplotou  $T$ , a proto jakékoli změny tlaku  $\delta p$  odpovídají i změna hustoty  $\delta \rho$ . Kvantitativně ji vyjadřuje tzv. součinitel stlačitelnosti tekutiny

$$\delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (I.26)$$

Obecně je tlak  $p = p(\rho, S, \xi_i)$ , kde  $S$  je entropie,  $\xi_i$  je soubor vnitřních parametrů charakterizujících např. průběh chemických reakcí, apod. I při zanedbání vnitřních změn v tekutině lze derivaci ve výrazu (I.26) uvažovat při  $T = \text{konst}$  ( $\delta = \delta_T$  je pak tzv. izotermická stlačitelnost), nebo při  $S = \text{konst}$  ( $\delta = \delta_S$  je pak tzv. izoentropická stlačitelnost).

V kapalínách je  $\delta$  nízké, např. pro vodu je  $\delta_T = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  při  $10^5 \text{ Pa}$ , zatímco pro plyny je při téžem tlaku  $\delta_T \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$ , tj. více než o 4 řady větší.

Stlačitelnost je základní termodynamickou vlastností tekutiny a proto

při vyšetřování proudění stlačitelné tekutiny je nutno uvažovat i změny hustoty, tj. termodynamické změny v proudici tekutině.

Derivace  $(\partial p/\partial \rho)_S$ , která rozhoduje o hodnotě součinitele  $\delta_S$  není nic jiného, než čtverec rychlosti zvuku  $c$ , neboť

$$c^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=\text{konst}} \quad (I.27)$$

Rychlosť zvuku, jako kinematická veličina, bude tedy současně i hlavní termodynamickou veličinou, charakterizující rozdíly mezi dynamikou stlačitelných a nestlačitelných tekutin.

V ideálním plynu je  $(\partial p/\partial \rho)_T = (1/\alpha)(\partial p/\partial \rho)_S$ , kde  $\alpha = c_p/c_v$ , t.j. i  $\delta_S = \alpha \delta_T$ .

Poznámka:

1. Hodnota  $(\partial p/\partial \rho)_S$  závisí na průběhu adiabaty v  $(p,V)$ -diagramu. Pouze pro tzv. barotropní tekutinu platí, že tlak je jednoznačnou funkcí hustoty, tj.  $p=p(\rho)$ . Obecně je  $p=p(\rho, S, f_i)$ , takže derivaci  $(\partial p/\partial \rho)_S$  provádime při různých vnitřních parametrech  $f_i = \text{konst}$ . Parametry  $f_i$  charakterizují molekulární strukturu plynu (např. koncentrace v chemicky reagující tekutině), a proto se v průběhu rychlosti zvuku odrazí i změny této molekulární struktury při prouďení.
2. Předpoklad  $\rho = \text{konst}$  znamená, že hustota elementu tekutiny se při jeho pohybu prakticky nemění. Přitom ale  $\rho$  může být na jednotlivých proudnicích od samého počátku různé (nerovnoměrnost pole hustoty)!

Význam rychlosti zvuku spočívá též v tom, že je současně rychlostí, kterou se v tekutině šíří malé (podélné) poruchy. Je rovněž rychlostí, určující maximální tok hmotnosti otvorem (dýzou, aj.).

Ve stlačitelné tekutině mohou vzniknout při nestacionárném šíření poruch konečné velikosti i diskontinuitní plochy, na nichž dochází skokem ke změně rychlosti, ev. stavových parametrů. Tyto plochy se nazývají rázovými vlnami. Při stacionárním proudění (obtíkání profilů) mohou rázové vlny vzniknout jen tehdy, je-li alespoň v určité části proudového pole dosaženo rychlosti větších rychlosti zvuku (supersonických rychlostí).

Způsob šíření malých poruch a vznik rázových vln jsou typickými jevy, v nichž se při proudění tekutiny uplatňují jak kvantitativně, tak i kvalitativně vlivy stlačitelnosti a molekulární struktury tekutin.

## II. VÝCHOZÍ ROVNICE DYNAMIKY PLYNŮ

### II.1 Zákony zachování. Bilanční rovnice

Výchozí rovnice, které popisují proudění stlačitelné tekutiny (plynu) jsou vyjádřením základních fyzikálních zákonů zachování hmotnosti, hybnosti a energie. Proto se často označují jako zákony zachování.

Fyzikálně vyjadřuje tyto zákony bilanci určité veličiny v určitém objemu. Podle této bilance je časová změna zachovávané veličiny ve vytčeném objemu  $V$  rovna toku této veličiny plochou  $S$ , která tento objem omezuje, a její produkci uvnitř objemu  $V$ . Označíme-li bilancovanou (zachovávanou) veličinu  $J$ , bude

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V J dV + \int_S F_i(J) n_i dS = \int_V P(J) dV, \quad (\text{II.1})$$

kde  $F_i(J)$  je vektor hustoty toku veličiny  $J$  plochou  $S$ ,  $P(J)$  je hustota produkce veličiny  $J$  (tj. produkce za jednotku času v jednotkovém objemu).

Plochu  $S$  označujeme jako kontrolní plochu. V prostoru  $(x_i, t)$  se tato plocha nepohybuje; může být ohrazena jen smluvními hranicemi bez konkrétního fyzikálního významu, musí však být uzavřená. Tekutina ji prochází, takže z termodynamického hlediska se jedná o otevřený systém.

Tok veličiny  $J$   $F_i(J)$  se obecně v proudící tekutině skládá z konvektivní složky a konduktivní složky, ale také např. z difuzní složky, apod. V dalším se nebudeme zabývat prouděním reagující tekutiny, popř. prouděním heterogenních směsi, aj., a proto se omezíme jen na první dvě složky.

Povrchový integrál v rov. (II.1) nyní převedeme pomocí Gaussovy věty na integrál objemový, tj. nahradíme

$$\int_S F_i(J) n_i dS = \int_V \frac{\partial F_k(J)}{\partial x_k} dV.$$

Jelikož objem  $V$  byl zvolen zcela libovolně, musí pak bilanční vztah (II.1) platit i pro výrazy pod integrály, takže

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial F_k(J)}{\partial x_k} = P(J), \quad (\text{II.2})$$

což je tzv. diferenciální zápis bilanční rovnice pro veličinu  $J$ . Vyjadřuje bilanci veličiny  $J$  v infinitesimálně malém objemu  $dV$ , tj. v bodě  $(x_i, t)$ .

Jednotlivé zákony zachování dostaneme nyní dosazením odpovídajících fyzikálních veličin (tj. hmotnosti, hybnosti a energie) do rov. (II.1), ev. (II.2).

Vzhledem k počtu proměnných netvoří tyto rovnice úplnou soustavu rovnic, potřebnou pro řešení proudového pole. Musíme je doplnit o tzv. konstituční vztahy, které mají zpravidla polosemperický charakter. Takovými vztahy jsou stavové rovnice plynu, vztah pro tenzor vazkých napětí, tepelný tok, apod.

### II.1.1 Zákon zachování hmotnosti. Rovnice kontinuity

Vytkněme v proudovém poli určitou nehybnou, uzavřenou kontrolní plochu  $S$  uzavírající objem  $V$  a předpokládejme, že uvnitř takto vymezené oblasti neexistuje žádný zdroj tekutiny. Nemá-li dojít ke hromadění tekutiny v objemu  $V$ , pak přivedená, příp. odvedená hmotnost tekutiny za jednotku času plochou  $S$  musí být kompenzována časovou změnou hmotnosti tekutiny v tomto objemu uzavřeném. Odtud

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_S \rho w_i n_i dS = \int_V \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial x_i} dV.$$

Jelikož jsme vycházeli ze zcela libovolně zvoleného objemu  $V$  musí mít oba integrandy v objemových integrálech stejnou hodnotu, takže

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (\text{II.3})$$

což je nejběžněji užívaný tvar tzv. rovnice kontinuity pro nestacionární proudění stlačitelné tekutiny. Pro proudění nestlačitelné tekutiny, v níž  $\rho = \text{konst.}$  se rovnice zjednoduší na

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0.$$

Rov. (II.3) představuje zákon zachování hmotnosti, který bychom z obecné bilanční rovnice (II.1), ev. (II.2) dostali dosazením hustoty  $\rho$  za zachovávanou veličinu  $J$ .

### II.1.2 Zákon zachování hybnosti

Formálně můžeme tento zákon obdržet z rov. (II.1) a (II.2) bude-li zachovávanou veličinou  $J$  hybnost  $(\rho w_i)$ . Tok hybnosti  $F_i(J)$  se obecně skládá z konvektivní složky, dané výrazem  $(\rho w_i) w_j$  a konduktivní složky, která je v našem případě určena napětimi na elementu tekutiny vyvolanými vnější působící silou. Ta nemusí být obecně kolmá k ploše  $S$ . Má složku kolmou (danou statickým tlakem  $p$ ) a složky tečné (způsobené vazkostí tekutiny).

Ke stejnemu závěru dospějeme, provedeme-li znova celou bilanci hybnosti.

Podle Newtonova zákona je časová změna hybnosti tekutiny v uvažovaném objemu  $V$  rovna součtu všech sil, působících na tento objem. Tyto sily mohou být jednak objemové, které působí na všechny částice v objemu  $V$  (např. gravitační, elektromagnetické), jednak povrchové, které působí pouze na ploše  $S$  uzavírající objem  $V$ . Objemové sily vztahujeme zpravidla na jednotku hmotnosti proudící tekutiny a vyjadřujeme je obecně vektorem  $f_i(x_i, t)$ . Výsledná objemová síla je dána objemovým integrálem

$$\int_V \rho f_i dV.$$

Napětí na elementu tekutiny ohrazeném plochou  $S$  je způsobeno vektorem povrchové sily  $P_i$ , takže výsledná povrchová síla je

$$\int_S P_i dS.$$

Vektor  $P_i$  nemusí být obecně kolmý k ploše  $S$  (resp. k elementární ploše  $dS$ ). Má kolmou složku danou statickým tlakem  $p$  a složky tečné, které jsou způsobeny vazkostí tekutiny. Vektor  $P_i$  tedy nevytváří v obvyklém slova smyslu vektorové pole, neboť kromě vektoru polohy  $x_i$  a času závisí i na tvaru zvoleného objemu (resp. na směru vnější normály  $n_i$ ) a je tedy funkci souřadnic vektoru  $n_i$ . Zapišujeme to výrazem  $P_i = \Pi_{ij} n_j$ .

Označme napětí na stěně elementu tekutiny dvěma indexy. Indexem  $x$  označíme plochu  $dS_x$  kolmou k ose  $x$  a rovnou ( $dy \cdot dz$ ). Všechna napětí na této ploše mají jako první index příslušnou osu  $x$ , jako druhý index osu, v jejímž směru působí, tj.  $P_{xx}$  je normálová složka k ploše  $dS_x$ ,  $P_{xy}$  a  $P_{xz}$  jsou tečné složky napěti. Výsledné napětí na celém elementu tekutiny  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  je tedy určeno devíti složkami  $P_{ij}$ , které vytvářejí tenzor druhého řádu - tzv. tenzor napěti. Lze snadno ukázat, že v homogenní tekutině je  $P_{ij} = P_{ji}$ , tj., že tenzor napěti je symetrický.

Pro kvantitativní vyjádření účinku vaznosti v pohybující se tekutině musíme ještě vyjádřit závislost tenzoru napěti na rozložení rychlosti v proudovém poli. Je zřejmé, že v homogenním rychlostním poli nemohou vzniknout vazká napěti, protože zde ani nedochází k výměně hybnosti mezi sousedními částicemi tekutiny.

Budeme předpokládat, že  $P_{ij}$  závisí pro každý bod prostoru a každý časový okamžik jen na rozložení rychlosti. Přitom vazká napěti se uplatní jen tehdy, dochází-li ke vzájemnému posunutí dvou sousedních vrstev tekutiny, tj. ke smykové deformaci elementu tekutiny.  $P_{ij}$  proto závisí na derivaci rychlosti podle souřadnic, tj. na  $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ . Přitom předpokládáme, že změny rychlostního pole jsou tak malé, že k jejich popisu stačí jen první derivace rychlosti podle souřadnic, tj.  $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ , a že i jejich součiny a čtverce lze zanedbat.

Pro vyjádření lineární závislosti symetrického tenzoru  $P_{ij}$  na  $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$  je nutno vytvořit symetrické kombinace ze složek  $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ . Ty jsou pouze dvě a jsou dány následujícím výrazem

$$P_{ij} = \eta \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) + \xi' \delta_{ij} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \quad (\text{II.5})$$

Zde je  $\delta_{ij}$  jednotkový tenzor, pro  $i=j$  je  $\delta_{ij}=1$ , pro  $i \neq j$  je  $\delta_{ij}=0$ .  $\eta$  a  $\xi'$  jsou v běžné tekutině na rychlosti nezávislé skalárni konstanty, tzv. součinitele vaznosti. Předchozí výraz zpravidla pišeme ve tvaru

$$P_{ij} = \eta \left[ \left( \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \right] + \xi \delta_{ij} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \quad (\text{II.6})$$

kde  $\xi = \xi' + \frac{2}{3}\eta$ . Součinitel  $\eta$  je již dříve zavedenou dynamickou vazkostí. Součinitel  $\xi$  označujeme jako tzv. druhou vazkost.

Dynamická vazkost  $\eta$  vyjadřuje vazká napěti, vznikající při smykové deformaci elementu tekutiny. Druhá vazkost  $\xi$  vyjadřuje vazká napěti, vznikající při změně objemu. Uplatňuje se též při rychlých změnách objemu v reagující tekutině. Při běžném proudění plynu a par je  $\xi$  velmi malé a není třeba je uvažovat.

Celkový tenzor napěti lze tedy zapsat ve tvaru

$$\Pi_{ij} = -p \delta_{ij} + P_{ij} \quad (\text{II.7})$$

kde  $p$  je normálová složka napěti ( $P_{kk}$ , tj. statický tlak v tekutině),  $P_{ij}$  je tzv. tenzor vazkých napěti, zavedený vztahem (II.6). V nevazké tekutině je  $P_{ij}=0$ , a tedy  $\Pi_{ij} = -p \delta_{ij}$ .

Rovnováhu sil působících na objem  $V$  a hybnosti tekutiny procházející tímto objemem lze nyní zapsat rovnici

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho w_i) dV + \int_S (\rho w_i) w_j \eta_{ij} dS - \int_S P_i dS = \int_V \rho f_i dV \quad (\text{II.8})$$

kde

$$\int_S P_i dS = - \int_S p n_i dS + \int_S P_{ij} n_j dS . \quad (\text{II.9})$$

Tato rovnice jasně ukazuje, že jak tlak, tak vazké tření se uplatňují v bilanci hybnosti pouze na stěnách (částečch plochy  $S$ ), omezujících objem  $V$ .

Povrchové integrály v předchozích výrazech převedeme pomocí Gaussovy věty na integrály objemové, takže

$$\int_S P_i dS = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV + \int_V \frac{\partial (P_{ij})}{\partial x_j} dV . \quad (\text{II.10})$$

Jelikož jsme opět vycházeli ze zcela libovolného objemu lze vynechat operátor integrálu a přepsat zákon zachování hybnosti v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho w_i w_j) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (P_{ij})}{\partial x_j} + \rho f_i . \quad (\text{II.11})$$

Rozepíšeme-li druhý člen levé strany pomocí rovnice kontinuity dostaneme po úpravě rovnici

$$\rho \left[ \frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial (P_{ij})}{\partial x_j} + \rho f_i . \quad (\text{II.12})$$

Druhý člen pravé strany nyní upravíme dosazením z rov. (II.6), v níž již přímo zanedbáme z dříve uvedených důvodů členy s tzv. druhou vazkostí. Dostaneme

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \eta \left( \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2\eta \delta_{ij}}{3} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) \right]$$

a pro konstantní hodnoty  $\eta$  bude

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} = \eta \Delta w_i + \frac{1}{3} \eta \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) .$$

Po dosazení do rov. (II.12) dostaneme

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta w_i + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) + f_i , \quad (\text{II.13})$$

což je tzv. Navierova-Stokesova rovnice (Navier, 1822).

Pro proudění nestlačitelné tekutiny, v níž  $\partial w_i / \partial x_j = 0$  se rovnice zjednoduší na tvar

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta w_i + f_i . \quad (\text{II.14})$$

V nevazké tekutině odpadne i druhý člen na pravé straně. Zákon zachování hybnosti ve tvaru

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \quad (\text{II.15})$$

pak nazýváme Eulerovou rovnici (Euler, 1755).

Celou levou stranu rov. (II.5) často zapisujeme pomocí operátoru

$$\frac{\partial}{\partial t} + w_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{d}{dt},$$

který nazýváme Eulerovou (někdy také totální, substacionální) derivaci. Zavedení této derivace je spojeno s pojmem pole, a to bez ohledu na to, jedná-li se o pole vektorové veličiny (např. rychlosť), nebo skalárni veličiny (např. teplota). Pojem zde rozumíme to, že každou veličinu lze definovat v libovolném bodě prostoru  $x_i$  a libovolném čase  $t$ , např.  $w_i(x_i, t)$ .

Pozorovatel, který je pevně svázán se souřadnou soustavou  $x_i$ , sleduje pohyb tekutiny v určité pevně vymezené oblasti pole (tzv. kontrolní ploše). Touto plochou postupně procházejí nové a nové částice tekutiny, přičemž časová změna příslušné jejich vlastnosti daná změnou místa (přemístěním tekutiny) je rovna

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} w_i. \quad (\text{II.16})$$

Toto je tzv. konvektivní derivace a její hodnota závisí na tom, jak rychle se částice přemisťují. Současně se ale mění příslušná vlastnost s časem (tj. bez ohledu na přemístování tekutiny). Tato změna,  $\partial/\partial t$ , se označuje jako lokální (místní) derivace, poněvadž vyjadřuje časovou změnu vlastnosti tekutiny v příslušném místě.

Uvedený způsob vyšetřování pohybu tekutiny se označuje jako Eulerův způsob. Jen vyjimečně se v mechanice tekutin užívá i tzv. Lagrangeův způsob, kdy se pozorovatel ztotožní s pohybující se částicí tekutiny, a tudíž vnímá pouze její časovou změnu

#### II.1.3 Zákon zachování momentu hybnosti

Kromě bilance hybnosti platí v mechanice i bilance momentu hybnosti, z níž se odvozuje zákon zachování momentu hybnosti. Dle tohoto zákona je časová změna momentu hybnosti určitého objemu tekutiny vůči libovolné ose rovna momentu všech objemových i povrchových sil působících na tento objem k téže ose.

Moment hybnosti  $M_i$  je vyjádřen vektorovým součinem vektoru hybnosti  $J_k$  (sily) a průvodiče (radiusvektoru)  $r_j$ . Ve složkovém zápisu je  $M_i = \epsilon_{ijk} r_j J_k$ .

Součinitel  $\epsilon_{ijk}$  je tzv. permutační symbol, definovaný takto

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{dosadíme-li za } ijk \text{ jakoukoli permutaci čísel 123 ve směru ručiček hodinových, např. 231, atd.} \\ -1 & \text{dtto pro permutace v opačném směru,} \\ 0 & \text{pro jakoukoliv další kombinaci, v níž se jedna číslice opakuje nejméně dvakrát, tj. např. } \epsilon_{122} = \epsilon_{333} = 0, \text{ atd.} \end{cases}$$

Pro libovolný objem  $V$  pohybující se s tekutinou dostaneme

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon_{ijk} r_j (\varrho w_k) dV = \int_V \epsilon_{ijk} r_j P(V) dV + \oint_S \epsilon_{ijk} r_j P(S) dS \quad (\text{II.17})$$

Časová změna momentu hybnosti elementu tekutiny o hmotnosti  $\tilde{m}$ , např. vzhledem k ose  $y$ , bude tedy rovna momentu  $M_y$  všech vnějších sil k ose  $y$ , tj.

$$\frac{d}{dt} [\tilde{m} (w_x z - w_z x)] = M_y. \quad (\text{II.18})$$

Procházi-li element tekutiny proudovou trubici mimoběžnou s osou, k níž moment určujeme, musíme uvažovat jeho výslednou hybnost (resp. výsledný moment hybnosti) v řezech 1 a 2 trubice, které element proběhne v čase  $dt$ . Označíme-li tok hmotnosti za sekundu  $m$ , bude

$$M_y = m [(w_x z - w_z x)_2 - (w_x z - w_z x)_1]. \quad (\text{II.19})$$

Obzvlášť jednoduché vyjádření má tento zákon v polárních souřadnicích, kde  $M = m(u_2 r_2 - u_1 r_1)$ . Zde  $u_j$  jsou obvodové složky rychlosti na poloměru  $r_j$ .

Jelikož součin momentu sil a úhlové rychlosti  $\omega$  je roven práci, bude pro jednotkovou hmotnost tekutiny platit

$$L = \omega(u_2 r_2 - u_1 r_1). \quad (\text{II.20})$$

V tomto zápisu se bilance momentu hybnosti označuje jako Eulerova (turbínová) věta.

#### II.1.4 Zákon zachování energie

Tento zákon lze opět formálně odvodit z bilanční rovnice (II.1), dosadime-li za  $f, F$  a  $P$  postupně energii tekutiny uzavřenou v objemu  $V$ , tok energie hranici  $S$  a produkci energie v objemu  $V$ .

Na rozdíl od předchozích dvou zákonů používáme zákon zachování energie v různém vyjádření. Vzhledem k tomu, že není vždy jasné v jakém tvaru máme tento zákon užit, sestavíme nejdříve úplnou bilanční rovnici pro energii.

Celková změna energie tekutiny v určitém objemu  $V$  je dána změnou vnitřní energie  $u$  a kinetické energie  $\frac{1}{2} w^2$  (obě veličiny jsou zde vztaženy na jednotku hmotnosti) a tokem obou těchto energií plochou  $S$ , omezující objem  $V$ , tj.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(u + \frac{1}{2} w^2) dV + \int_S \rho(u + \frac{1}{2} w^2) n_i n_i dS. \quad (\text{II.21})$$

Potenciální energie tekutiny zde explicitně nevystupuje, poněvadž je zahrnuta v práci objemových sil. Uvedená změna celkové energie musí být v bilanci energie kompenzována

- prací vnějších objemových sil (zahrnujících i přived, ev. odvod mechanické energie)

$$\int_V \rho n_i f_i dV, \quad (\text{II.22})$$

- prací povrchových sil, působících na hranici  $S$  veškerými mechanickými a termodynamickými změnami v objemu  $V$ . Je to především práce tlakových sil a vazkých napětí, kterou lze za jednotku času vyjádřit výrazem

$$-\int_S P n_i n_i dS + \int_S P_{ij} n_j n_i dS = -\int_V \frac{\partial P n_i}{\partial x_i} dV + \int_V \frac{\partial P_{ij} n_i}{\partial x_j} dV, \quad (\text{II.23})$$

- tokem tepla hranici  $S$  do objemu  $V$

$$-\int_S q_i n_i dS = -\int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV. \quad (\text{II.24})$$

Bilance energie v integrálním tvaru tedy zní

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(u + \frac{1}{2} w^2) dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho n_i (u + \frac{1}{2} w^2)] dV = \\ & = \int_V \rho n_i f_i dV - \int_V \frac{\partial P n_i}{\partial x_i} dV + \int_V \frac{\partial P_{ij} n_i}{\partial x_j} dV - \int_V \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV, \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

kde jsme v druhém členu levé strany opět užili Gaussovy věty k převedení plošného integrálu na objemový. Za předpokladu, že objem  $V$  může být zcela libovolný, dostaneme podobně jako u předchozích rovnic zákon zachování energie v diferenciálním tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( u + \frac{1}{2} w^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho w_i \left( u + \frac{1}{2} w^2 \right) = \\ = \rho w_i f_i - \frac{\partial p w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ij} w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} . \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

V každém členu této rovnice se objevují pouze sčítací indexy, tj. jedná se o jednu jedinou skalárni rovnici. V rov. (II.26) vyjadřuje druhý člen pravé strany termodynamický vratný tok energie do objemu  $V$  jeho změnou vlivem tlakových sil. Může být proto kladný i záporný, podle toho, jedná-li se o expanzi nebo o komprese. Třetí člen naproti tomu představuje nevratný přírůstek energie v objemu  $V$  vlivem disipace energie účinkem vaznosti. Tento člen je v důsledku své nevratnosti vždy kladný. Zpravidla jej vyjadřujeme pomocí tzv. disipační funkce  $\Phi$ , definované výrazem

$$\Phi = p_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \gamma \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right)^2 - \left( \frac{2}{3} \gamma + \xi \right) \left( \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right)^2 .$$

V nestlačitelné tekutině je druhý člen nulový, neboť  $\partial w_i / \partial x_i = 0$ .

Vektor tepelného toku  $q_i$  je určen Fourierovým zákonem  $q_i = -\lambda \partial T / \partial x_i$ , kde  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti plynu [ $W m^{-2} K^{-1}$ ]. Tepelný tok může vzniknout i sáláním (např. ve spalovacích komorách, apod.), nebo v důsledku kondensace, odparování, chemických reakcí (hoření), apod.

Lze se snadno přesvědčit, že dříve zavedená I. věta termodynamiky (rov. I.23) je zjednodušenou verzí zákona zachování energie (II.26).

Zákon zachování energie vyjadřujeme nejčastěji pomocí klidové entalpie, odpovídající entalpii izentropicky zabrzděného proudu,

$$h_0 = h + \frac{1}{2} w^2 = u + \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} w^2 . \quad (\text{II.27})$$

Tato veličina je vlastně skutečnou celkovou energií tekutiny v objemu  $V$ .

Rovnici (II.26) upravíme tak, že k oběma stranám přičteme  $\partial p / \partial t$ , užijeme rovnice kontinuity (II.3) a druhý člen pravé strany zahrneme do konvektivní derivace na levé straně. Pak

$$\frac{dh_0}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + w_i f_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij} w_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) , \quad (\text{II.28})$$

což je jiná forma bilance energie, vyjádřená prostřednictvím entalpie.

Bilanci energie lze vyjádřit jako bilanci entropie, kterou užíváme při termodynamických výpočtech k charakterizování energetických ztrát. Vynásobíme-li Navierovu - Stokesovu rovnici (II.13)  $w_i$ , dostaneme skalárni rovnici, vyjadřující rovnováhu mechanické energie. Dosadíme-li dále výraz (II.27) do rov. (II.28) a obě takto vzniklé rovnice sloučíme, dostaneme rovnici

$$\frac{dh}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho} p_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) , \quad (\text{II.29})$$

z níž po dosazení do levé strany z rov. (I.28)

$$T \frac{dS}{dt} = \frac{1}{\rho} p_{ij} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) . \quad (\text{II.30})$$

Je-li proudění adiabatické, tj. bez výměny tepla s okolím, je druhý člen pravé strany nulový. Při stacionárnímu proudění bez účinku vnějších sil zůstane pak pouze

$$\frac{dh_e}{dt} = \dot{\Phi}. \quad (\text{II.31})$$

Uplatňuje-li se při proudění vazká disipace energie, je  $\dot{\Phi} \neq 0$  i v adiabatickém proudění. Jelikož vazká disipace není vnějším zdrojem tepla, který jedině může ovlivnit celkovou energii tekutiny  $h_e$ , můžeme ji zahrnout do výrazu na levé straně rovnice (II.31). Jelikož neovlivní ani vnitřní energii tekutiny, projeví se v rov. (II.31) pouze v druhých dvou členech, které představují tzv. klidový tlak tekutiny  $p_0 = p + \frac{1}{2} \rho w^2$ , a to jako ztráta klidového tlaku.

Poznámka:

Často se setkáváme s tzv. mechanickým tvarom rovnice energie. Dostaneme jej např. tak, že rovnici vyjadřující bilanci hybnosti vynásobíme rychlostí. Tím nabudou jednotlivé členy této rovnice rozdílu energie. Jelikož se ale v bilanci hybnosti neuplatní např. přiváděné teplo, je tato bilance energie jen částečná a týká se jen mechanické energie!

V bilanci hybnosti se ovšem objeví vazké tření, které se uvedeným postupem proto dostane i do bilance energie. Znovu si proto připomeňme výše uvedený závěr – teplo vznikající v tekutině účinkem tření není teplem z vnějšího zdroje. Neovlivní ani vnitřní energii tekutiny a projeví se nám tedy v bilanci mechanické energie (dané součtem  $p + \frac{1}{2} \rho w^2$ ), tj. klidovým tlakem  $p_0$ , přídavným členem, který má význam ztráty klidového tlaku.

Na druhé straně lze ale tuto rovnici použít i pro případy proudění s přívodem, ev. odvodem tepla z okolí, protože toto teplo neovlivní bilanci hybnosti. Rozdílné teploty vstupující a vystupující tekutiny se projeví ve stavových veličinách na vstupu a na výstupu a jejich prostřednictvím se přivedené teplo promítne do bilance hybnosti.

## II.2 Okrajové podmínky a uzavřenosť základní soustavy rovnic

Základní zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie tvoří soustavu ne-lineárních parciálních diferenciálních rovnic pro proměnné  $\rho$ ,  $w_i$  a  $E$ . V podstatě každá z těchto proměnných je spojena s jednou z výchozích rovnic (hustota  $\rho$  s rovnici kontinuity, čili se zákonem zachování hmotnosti,  $w_i$  s hybností,  $E$  s energií). Tyto rovnice jsou použitelné pro řešení konkrétních úloh vnitřní aerodynamiky (a mechaniky tekutin obecně!) teprve po jejich doplnění o okrajové podmínky.

Správná a vhodná volba okrajových podmínek a jejich počtu není ovšem jen záležitostí konkrétní úlohy (tj. např. technického návrhu, ev. provedení stroje), ale závisí i na struktuře a charakteru výchozích rovnic. Charakter rovnic závisí především na členech s nejvyššími derivacemi.

Rovnice kontinuity je rovnici 1. řádu, jejimiž charakteristikami jsou ve skutečnosti trajektorie částic tekutiny. Z matematického hlediska je to navíc rovnice hyperbolického typu, a to jak pro stacionární, tak i pro nestacionární proudění.

Hybnostní rovnice, ať až ve tvaru Navierovy-Stokesovy rovnice nebo jakémkoliv jiném (např. Eulerovy rovnice), je rovnici vektorovou – tj., např. při řešení rovinného proudění představuje dvě skalární rovnice pro složky  $w_x$  a  $w_y$ . Z matematického hlediska určuje charakter rovnice členy s nejvyššími derivacemi – tj. členy s vazkostí. Pro stacionární subsonické proudění má rovnice eliptický charakter, pro nestacionární proudění má vzhledem k času parabolický charakter.

Prakticky totéž lze říci o rovnici energie.

Celý systém výchozích rovnic si zachovává charakter jednotlivých rovnic, je tedy pro stacionární proudění elipticko-hyperbolického typu, pro nestacionární proudění parabolicko-hyperbolického typu.

Parabolický, ev. eliptický charakter je přitom dán vazkými, tj. disipativními členy. To znamená, že tam, kde lze tyto členy zanedbat (Navierovy-Stokesovy rovnice se redukují na rovnice Eulerovy) se ztrácí i parabolický, ev. eliptický charakter soustavy.

Z matematické teorie parciálních diferenciálních rovnic (rovnic matematické fyziky) je známo, že volba okrajových podmínek závisí na typu rovnice, který zase závisí pouze na členech s nejvyššími derivacemi vzhledem k  $x_i$ , ev.  $t$ , a to bez ohledu na velikost těchto členů ve srovnání s ostatními členy rovnice.

Rovnice eliptického typu (např. Laplaceova rovnice, jak v dalším uvidíme je to rovnice popisující subsonické proudění) musí mít zadány okrajové podmínky po celé hranici vyšetřované oblasti. Její řešení může nabýt maximální hodnoty (tzv. věta o maximu) pouze na okraji, a proto nesmí být hodnoty předepsané na okraji všude rovny nule. Řešení by pak bylo i všude uvnitř oblasti rovno nule.

U rovnic hyperbolického typu (např. vlnová rovnice) je tomu naopak - nelze pro ně zadat okrajové podmínky podél celé hranice, tj. řešená oblast musí zůstat otevřená.

Poznámka:

K řešení výchozích rovnic se dnes stále více užívají numerické metody. Řešenou oblast vesměs rozdělujeme na menší prvky (např. metoda konečných prvků), přičemž na každém prvku musí být splněny všechny výchozí zákony zachování. Stejně jako pro celou řešenou oblast, tak i pro každý prvek musíme formulovat okrajové podmínky v uvedeném smyslu.

### II.3 Několik poznámk k řešení Navierových - Stokesových rovnic

Existuje jen několik málo jednoduchých případů, kdy lze N.S. rovnice řešit exaktně. Je to např. Poiseuillovo proudění kruhovým potrubím, nebo tzv. Couettovo proudění v mezeře mezi pevnou a pohybující se stěnou. V obou případech se jedná o takový případ proudění, v němž z nějakého důvodu vymizí nelineární člen na levé straně rovnice (konvektivní derivace). Proto většina analytických metod řešení Navierových - Stokesových rovnic jsou metody approximativní.

Uveďme si zde základní myšlenkový přístup k těmto metodám. Pro jednoduchost budeme předpokládat proudění nestlačitelné tekutiny, tj.  $\rho = \text{konst}$ . Jak se uplatní při proudění vazkost tekutiny lze odhadnout podle vzájemného poměru setrvačných a vazkých sil. Tento poměr je bezrozměrnou veličinou, tzv. Reynoldsovým číslem  $Re = Lw/\nu$ . Právě setrvačné síly vnášejí do problému nelinearitu, tzn., tam, kde převládnou třecí síly - a to je při velmi malých  $Re$  - se problém výrazně zjednoduší. Navierovu - Stokesovu rovnici pro stacionární proudění nestlačitelné tekutiny přepíšeme nyní pomocí bezrozměrových souřadnic

$$V_i = w_i/U, X_i = x_i/L, P = \rho/\frac{\epsilon}{2} \mu U^2. \quad (\text{II.32})$$

Po dosazení do zjednodušené rov. (II.13) dostaneme

$$\rho \frac{U^2}{L} V_k \frac{\partial V_i}{\partial X_k} = - \frac{1}{2} \rho \frac{U^2}{L} \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\eta U}{\rho L^2} \Delta V_i ,$$

t.j.

$$V_k \frac{\partial V_i}{\partial X_k} = - \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{Re} \Delta V_i , \quad (\text{III.33})$$

kde  $Re = LU/\nu$ . Toto je bezrozměrový tvar Navierovy - Stokesovy rovnice. Je zřejmé, že význam a uplatnění jednotlivých členů v této rovnici závisí na velikosti Reynoldsova čísla.

Uvažujme nyní dva extrémní případy

1) Velmi malá  $Re$  ( $Re \rightarrow 0$ )

Je to případ, kdy setrvačné síly (vyjádřené levou stranou Navierovy-Stokesovy rovnice) jsou velmi malé vůči silám vazkým. Takovým případem je např. Stokesovo proudění (obtékání).

Zanedbáme-li celou levou stranu Navierovy-Stokesovy rovnice, dostaneme

$$\frac{\partial P}{\partial X_i} = \frac{1}{Re} \Delta V_i ,$$

přip.

$$\frac{\partial P}{\partial X_i} = \eta \Delta u_i . \quad (\text{III.34})$$

Tato rovnice dává ve vazké tekutině velmi dobré přibližení v blízkosti tělesa a byla užita Stokesem pro řešení obtékání koule vazkou tekutinou. Ve větších vzdálenostech od obtékávaného tělesa je již tato aproximace nepřesná. Uvážime-li, že ve větších vzdálenostech od tělesa se složka rychlosti  $u_x$  blíží rychlosti nerozrušeného paralelního proudu  $U_\infty$ , zatímco  $u_y \rightarrow 0$ , můžeme nahradit konvektivní derivaci na levé straně Navierovy-Stokesovy rovnice výrazem

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx U_\infty \frac{\partial u_i}{\partial x} ,$$

takže dostaneme

$$U_\infty \frac{\partial u_i}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_i} + \eta \Delta u_i . \quad (\text{III.35})$$

Toto je tzv. Oseenovo proudění (obtékání).

Do této kategorie proudění patří i tzv. Poiseuillovo proudění vazké tekutiny kruhovou kapilárou a Couettovo proudění v mezeře mezi dvěma navzájem se pohybujícími paralelními stěnami (teorie mazání!).

2. Velmi velká  $Re$  ( $Re \rightarrow \infty$ )

V aerodynamice je toto častější případ. Při odvozování výchozí rovnice je zde nutná jistá opatrnost. V zásadě není možné přímo škrtnout poslední člen Navierovy - Stokesovy rovnice, protože by se tím snížil říd výchozí parciální diferenciální rovnice a nemohli bychom splnit úplné okrajové podmínky.

Používáme zde proto Prandtlovu myšlenku (cca z r. 1904), rozdělující proudové pole na dvě části - jednu, tzv. mezni vrstvu v blízkosti stěny, kde ubrzdění proudu až na nulovou rychlosť na stěně vede ke vzniku velkých gradientů rychlosti a tudiž i k významnému působení vazkých sil, a na vnější proud v dostatečné vzdálenosti od stěny, kde lze již zcela zanedbat vliv vaznosti, tj. položit  $Re \rightarrow \infty$  a škrtnout vazké členy.

Prandtlova úprava Navierových-Stokesových rovnic pak spočívá v následujícím. Předpokládejme, že vliv vaznosti je soustředěn do blízkosti stěny, přičemž příčný gradient rychlosti se vyrovná na hodnotu rychlosti vnějšího proudu na vzdálenosti  $y = \delta$ , která je výrazně menší než charakteristický rozměr  $L$  ve směru proudu, tj.  $\delta \ll L$ . Tento předpoklad lze užít i pro odhad velikosti  $\delta$ . V mezní vrstvě je  $y \sim O[\delta]$ ,  $x \sim O[L]$ , vazké členy jsou zde stejného řádu jako členy setrváčné. Odtud řádově

$$\frac{U}{\delta^2} = \frac{U^2}{L} \quad \text{resp.} \quad \frac{UL}{U\delta^2} = 1. \quad (\text{II.36})$$

Úpravou

$$\frac{U}{UL} \cdot \frac{L^2}{\delta^2} = \frac{1}{Re} \left( \frac{L}{\delta} \right)^2 = 1,$$

takže

$$\delta \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}. \quad (\text{II.37})$$

Předpokládejme pro názornost, že  $L \sim O[1]$ , takže

$$x \sim O[1], w_x = O[1], y = O[\delta]. \text{ pak } \frac{\partial w_x}{\partial y} = O\left[\frac{1}{\delta}\right], \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = O\left[\frac{1}{\delta^2}\right]. \quad (\text{II.38})$$

Z rovnice kontinuity je pak  $w_y \sim O[\delta]$ . Analogicky k předchozímu je

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = O\left[\frac{U}{L^2}\right] = O[1], \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} = O[\delta], \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = O[\delta], \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = O\left[\frac{1}{\delta}\right]. \quad (\text{II.39})$$

Dosadíme-li tyto odhady do Navierových-Stokesových rovnic a ponecháme-li v nich pouze členy řádu jednotek, dostaneme např. pro nejjednodušší případ stacionárního dvourozměrného proudění nestlačitelné tekutiny

$$\begin{aligned} \frac{w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y}}{1 \cdot \frac{1}{1}} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}}{1 \cdot \frac{\delta}{1}} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

Naznačeným řádovým odhadem tedy z Navierových-Stokesových rovnic dostaneme

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \quad 0 = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (\text{II.40})$$

což jsou tzv. Prandtlov rovnice mezní vrstvy. Z druhé rovnice vyplývá, že statický tlak se na normále ke stěně nemění. Je tedy v mezní vrstvě stejný jako ve vnějším proudu, kde je s rychlostí proudu vázán Bernoulliho rovnici

$$U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0,$$

což umožňuje první rovnici dále upravit do tvaru

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = U \frac{dU}{dx} + \eta \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}.$$

Poznámka:

V tomto odvození jsme užili původní způsob Prandtlova odvození. Formálně však můžeme postupovat i jinak. Vyjdeme z předpokladu  $\delta/L \sim 1/\sqrt{Re}$  a zavedeme bezrozměrné souřadnice

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \sqrt{Re} \frac{y}{L}, \quad \bar{w}_x = \frac{w_x}{U_\infty}, \quad \bar{U} = \frac{U}{U_\infty}, \quad \bar{w}_y = \sqrt{Re} \frac{w_y}{U_\infty}.$$

Po dosazení do Navierových -Stokesových rovnic a vynechání — u bezrozměrových souřadnic bude

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = - \frac{1}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}, \quad (\text{II.41})$$

$$\frac{1}{\sqrt{Re}} \left( w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) = - \frac{1}{\rho U_\infty^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2}, \quad (\text{II.42})$$

odkud v limitě  $Re \rightarrow \infty$  dostaneme výše uvedené Prandtlovy rovnice mezni vrstvy.

### III. TURBULENTNÍ PROUDĚNÍ

#### III.1 Pojem turbulentního proudění

Až dosud jsme při odvozování výchozích bilančních rovnic nečinili žádné předpoklady o vlastnostech proudění. Pouze o tekutině jsme mlčky předpokládali, že je kontinuem. Předpoklad kontinua znamená, že se nezabýváme molekulární strukturou tekutiny. Zajímají nás pouze makroskopické pohyby tekutiny, měřitelné a charakterizovatelné základními stavovými veličinami a rychlostmi makroskopických částic tekutiny. Pro tyto pohyby platí všechny v předchozím odvozené rovnice, v nichž všechny rychlosti  $w_i(x_i, t)$  jsou okamžitými (tj. ne časově středními) rychlostmi částic tekutiny v prostoru  $(x_i, t)$ .

Právě charakter okamžitých pohybů částic tekutiny určuje charakter celého proudění. Převládají-li např. vazké sily, pak se malé a rychlé pohyby velmi rychle utlumí. Proudové pole bude určeno základní časově střední rychlostí tekutiny a zanedbatelným přenosem hmotnosti, hybnosti a energie mezi sousedními vrstvami tekutiny. Takový pohyb se nazývá laminárním. Ve vnitřní aerodynamice je ale častější tzv. turbulentní proudění, v němž vektor okamžité rychlosti mění v určitých mezích svůj směr i velikost, tj. fluktuuje kolem určité časově střední hodnoty. Je-li frekvence i velikost těchto změn výrazně větší než frekvence a velikost molekulárního pohybu, lze pro takové proudění použít zákony zachování, odvozené v předchozí kapitole.

Fluktuační pohyb částic tekutiny, který má náhodný (stochastický) charakter nazýváme zpravidla turbulentní. Je-li tekutina v klidu, bez vnějších vlivů (včetně přívodu tepla, popř. energie), turbulence nevznikne. Turbulence tedy není vlastností tekutiny, ale jejího pohybu, tj. proudění tekutiny.

Přes zdánlivou analogii mezi turbulentním pohybem tekutiny a pohybem molekul je mezi oběma druhy pohybu zásadní rozdíl:

- turbulentní pohyb je pohybem kontinua, zatímco u molekul se jedná o pohyb diskrétních částic,
- střední volná dráha molekul je nesrovnatelně menší proti měřítku středního turbulentního pohybu.

Proto např. vazkost (tj. molekulární přenos hybnosti) závisí pouze na místní hodnotě gradientu střední rychlosti, zatímco turbulence závisí i na hodnotách (popř. gradientech) střední rychlosti přicházejícího proudu (mluvíme o závislosti na "historii" proudu)

#### III.2 Výchozí rovnice turbulentního proudění

Rychlostní pole okamžitých rychlostí při turbulentním proudění lze popsát Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Jejich řešení (jak analytické, tak i numerické) není dnešními prostředky možné. Navíc jsme charakterizovali turbulenci jako náhodný (stochastický) pohyb. Přitom počáteční i okrajové podmínky jsou vysloveně

deterministické. Řešení takových případů prostřednictvím tzv. atraktorů je jednou z nejmódnějších záležitosti současné mechaniky tekutin, zatím však bez možnosti praktického využití.

Z praktického hlediska se proto soustředovala pozornost na časově střední hodnoty rychlosti, příp. ostatních parametrů proudu.

Předpokládáme, že okamžitá rychlosť tekutiny v turbulentním proudění je nepravidelně měnící se funkcí času a souřadnic, a že ji lze vyjádřit jako vektorový součet střední hodnoty  $\bar{w}_i$  a tzv. fluktuační hodnoty rychlosti  $w'_i$ , tj.

$w_i = \bar{w}_i + w'_i$ . Dále předpokládáme, že fluktuační hodnota rychlosti  $w'_i$  vyvolá v proudovém poli odpovídající fluktuační hodnoty hustoty  $\bar{\rho}'$  a tlaku  $\bar{p}'$ , takže  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ ,  $p = \bar{p} + p'$ , popř.  $T = \bar{T} + T'$ . Tyto předpoklady postupně dosadíme do výchozích rovnic a provedeme jejich časově ustředění podle těchto pravidel:

Časově střední hodnotu  $\bar{A}$  libovolné veličiny  $A$  v časovém intervalu  $(0, T)$  vypočteme takto

$$\bar{A} = \frac{1}{T} \int_0^T A(t+\tau) d\tau \quad \text{kde} \quad t \ll T. \quad (\text{III.1})$$

Pro počítání se středními hodnotami platí tato pravidla:

Nechť  $A = \bar{A} + a$ ,  $B = \bar{B} + b$ , v libovolném dalším ustředování můžeme již považovat  $\bar{A}$  a  $\bar{B}$  za konstanty, takže  $\bar{A} = \bar{A} + a = \bar{A} + \bar{a} = \bar{A} + \bar{a}$ , tj.  $\bar{a} = 0$ . Podobně lze odvodit  $\bar{AB} = \bar{A}\bar{B} = \bar{A}\bar{B}$ ,  $\bar{Ab} = \bar{A}\bar{b} = \bar{A}\bar{b} = 0$ , jelikož  $\bar{b} = 0$ .

Jelikož  $\bar{AB} = (\bar{A} + a)(\bar{B} + b) = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{b} + \bar{B}\bar{a} + ab = \bar{A}\bar{B} + ab$ , je zřejmé, že střední hodnota součinu  $ab$  není rovna nule, přestože  $\bar{a} = \bar{b} = 0$ .

Jako předpoklad zavádime  $\lim A_n = \lim \bar{A}_n$ , odkud např. plyne pravidlo, že střední hodnotu parciální derivace lze nahradit parciální derivací střední hodnoty, tj. např.  $\overline{\partial A / \partial x} = \partial \bar{A} / \partial x$ .

Pro rovnici kontinuity (zákon zachování hmotnosti) ve tvaru (II.3)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho w_i) = 0$$

dostaneme uvedeným způsobem

$$\frac{\partial(\bar{\rho} + \rho')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} + \rho') (\bar{w}_i + w'_i) = 0$$

a podle výše uvedených pravidel

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{w}_i + \bar{\rho}' \bar{w}'_i) = 0. \quad (\text{III.2})$$

V nestlačitelné tekutině je  $\rho' = 0$ , takže rovnice kontinuity pro časově střední hodnoty zde má stejný tvar jako rov. (II.3). Ve stlačitelné tekutině ji nelze použít přímo pro časově střední hodnoty, vzhledem k členu  $\partial(\rho' w'_i) / \partial x_i$ .

Podobně upravíme Navierovu-Stokesovu rovnici (II.14) (zákon zachování hybnosti), v níž pro jednoduchost nebude uvažovat vnější sily  $f_i$  a vazký člen zapíšeme ve tvaru  $\eta \Delta w_i$ .

Levá strana rovnice bude mít po ustřednění tvar

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{w}_j \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \bar{\rho} \bar{w}_j' \frac{\partial \bar{w}_i'}{\partial x_j} + \\ + \bar{\rho}' \frac{\partial \bar{w}_i'}{\partial t} + \bar{\rho}' \bar{w}_j \frac{\partial \bar{w}_i'}{\partial x_j} + \bar{w}_j \bar{\rho}' \frac{\partial \bar{w}_i'}{\partial x_j} + \bar{\rho}' \bar{w}_j' \frac{\partial \bar{w}_i'}{\partial x_j}$$

Posledních pět členů lze upravit pomocí rovnice kontinuity do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \bar{w}_i' \bar{w}_j' + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}' \bar{w}_i' + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho}' \bar{w}_j' \bar{w}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho}' \bar{w}_i' \bar{w}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho}' \bar{w}_i' \bar{w}_j'$$

Pravá strana rovnice má po ustřednění jednoduchý tvar

$$-\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

Převedeme-li k ní celý předchozí výraz dostaneme

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \bar{w}_j \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{w}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \\ - \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho} \bar{w}_i' \bar{w}_j' + \frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho}' \bar{w}_i' + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho}' \bar{w}_j' \bar{w}_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho}' \bar{w}_i' \bar{w}_j + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho}' \bar{w}_i' \bar{w}_j' \right). \quad (\text{III.3})$$

Pro nestlačitelnou tekutinu, kde  $\bar{\rho}' = 0$  se pravá strana výrazně zjednoduší, neboť poslední čtyři členy budou rovny nule. Pak

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial t} + \bar{w}_j \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} - \bar{\rho} \bar{w}_i' \bar{w}_j' \right). \quad (\text{III.4})$$

Toto jsou tzv. Reynoldsovy rovnice turbulentního proudění (Reynolds O., 1895). Srovnáme-li je s Navierovými-Stokesovými rovnicemi ve tvaru (II.14) vidíme, že je lze upravit do stejného tvaru pro časově střední hodnoty, zavedeme-li tenzor napětí pro turbulentní proudění ve tvaru

$$\bar{\tau}_{ij} = - \bar{\rho} \delta_{ij} + \eta \bar{\epsilon}_{ij} - \bar{\rho} \bar{w}_i' \bar{w}_j'. \quad (\text{III.5})$$

Poslední člen označujeme jako turbulentní Reynoldsovo napětí. Označení napěti je zde ovšem čistě formální, ve skutečnosti se jedná o časově střední tok hybnosti ve směru  $j$ , přenášený turbulentními fluktuacemi rychlosti ve směru  $i$  do sousedních vrstev tekutiny.

Výraz  $\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{w}_i' \bar{w}_j'$  vyjadřuje výměnu (přenos) hybnosti mezi turbulencí a časově středním prouděním, přestože časově střední hodnota hybnosti turbulentních fluktuací je rovna nule  $\bar{g} \bar{w}_i' = 0$ !

Je nasnadě, že malé fluktuace rychlosti vyvolají i jen malé fluktuace tlaku, a tedy i jen malé změny hustoty. Proto ve většině případů adiabatického proudění lze i do poměrně velkých supersonických rychlostí ( $M < 5$ ) zanedbat vliv stlačitelnosti na základní mechanismus turbulentního proudění (pochopitelně ne na změny, závislé na střední rychlosti proudící tekutiny!). Můžeme proto ve většině našich aplikací ve všech předchozích rovnicích předpokládat  $\bar{\rho}' = 0$ .

Z rov. (III.4) je již vidět, v čem spočívá nesrovnatelně větší složitost řešení turbulentního proudění proti proudění laminárnímu. Poslední člen rov. (III.4) má např. pro  $i=1$  a  $\eta = \text{konst}$  tvar

$$\eta \Delta \bar{w}_i = \bar{\rho} \left( \frac{\partial \bar{w}_i'^2}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{w}_i' \bar{w}_j'}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_i' \bar{w}_k'}{\partial x_k} \right).$$

Zde  $\bar{w}_i'^2, \bar{w}_i' \bar{w}_j', \bar{w}_i' \bar{w}_k'$  představují další proměnné, pro něž je nutno získat odpovídající počet dalších rovnic, aby byl výchozí systém rovnic uzavřený a tudiž řešitelný:

Podobně jak jsme dospěli k zákonu zachování hybnosti pro turbulentní proudění, můžeme odvodit i zákon zachování energie. Z hlediska proudění nás především zajímá rovnice pro kinetickou energii turbulence, definovanou výrazem  $\frac{1}{2}(\bar{w}_i' \bar{w}_i')$ .

Rovnici pro kinetickou (tj. mechanickou!) energii časově středního (ustředěného) průběhu dostaneme vynásobením Navierovy-Stokesovy rovnice vektorem  $\bar{w}_i$ . Pro stacionární proudění nestlačitelné tekutiny dostaneme

$$\bar{\rho} w_i (\bar{w}_j \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j}) = - \bar{w}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \bar{w}_i \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j},$$

což lze upravit do tvaru

$$\bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \bar{w}_i \left( \frac{p}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2} \bar{w}^2 \right) \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{w}_j p_{ij}) - p_{ij} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j}, \quad (\text{III.6})$$

kde  $\bar{w}^2 = \bar{w}_i \bar{w}_i$ ,  $p_{ij}$  je tensor vazkých napětí.

Levá strana této rovnice vyjadřuje tok energie v důsledku konvektivního přenosu hmoty tekutiny při proudění, resp. práci sil celkového tlaku na jednotku hmotnosti (před vynásobením  $\bar{\rho}$ ) a za jednotku času.

První člen na pravé straně představuje transport energie středního (základního) proudu vlivem vazkých sil, resp. deformační práci vazkých napětí na jednotku hmotnosti a času. Při integraci podél kontrolní plochy, na jejímž povrchu je buď  $w_j$ , nebo  $p_{ij}$  nulové, je celý tento člen nulový. Platí

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{w}_i p_{ij}) dV = \int_S \bar{w}_j p_{ij} \bar{w}_i dS. \quad (\text{III.7})$$

Poslední člen představuje disipaci energie v důsledku vaznosti (vnitřního tření). Protože  $p_{ij}$  je symetrický tensor, součin  $p_{ij} \cdot \partial \bar{w}_i / \partial x_j$  je roven součinu  $p_{ij}$  a symetrické části  $S_{ij}$  rychlosti deformace  $\partial \bar{w}_i / \partial x_j$ , tj.  $S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right)$ .

Je tedy

$$p_{ij} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} p_{ij} \left( \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial x_i} \right). \quad (\text{III.8})$$

Tento výraz se označuje jako deformační práce. Dosazením turbulentního tenzoru napětí dostaneme

$$p_{ij} S_{ij} = 2 \eta S_{ij} S_{ij} - \bar{\rho} \bar{w}_i' \bar{w}_j' S_{ij}. \quad (\text{III.9})$$

První člen představuje vazkovou disipaci (srovnej s úvahou o disipační funkci  $\Phi$ ), druhý člen je označován jako produkce turbulentní energie.

### III.3 Poznámky ke struktuře turbulence

Turbulence je vždy spojena se značnou disipací energie. To znamená, že k tomu, aby se udržela potřebuje trvalý přísun energie, kterou odnímá základnímu proudovému poli. Ve vnitřní aerodynamice je nejčastějším zdrojem této energie smykový proud. Ve vyrovnaném proudovém poli turbulence rychle zaniká.

Novější práce ukazují, že dívat se na turbulenci jenom jako na stochastickou záležitost není správné. Stupeň náhodnosti (stochastičnosti) závisí na charakteristickém měřítku vyšetřovaného pohybu. Malé pohyby tekutiny způsobené turbulentními fluktuacemi lze považovat za stochastické. Způsobují zvýšenou disipaci energie, ale z hlediska dynamiky celého proudového pole nejsou rozhodující. Pohyby s větším měřítkem mají už v určitém smyslu deterministický charakter. Jejich prostorový a časový průběh je určen geometrií a parametry proudového pole; v určitém bodě se mění prakticky jen fáze fluktuací, ne charakter jejich stochastických vlastností. Tyto pohyby označujeme jako koherentní struktury.

Rozborem experimentů se ukazuje, že v řadě případů lze vznik typických struktur (pohybů velkých měřítek) vystopovat již v nestabilitě nabíhajícího proudu. Např. ve smykových vrstvách, nebo při vývoji tzv. pseudorázové vlny v úzkých kanálech mají tyto koherentní struktury určité charakteristické rysy, které lze nalézt už v přechodové oblasti z laminárního proudění do turbulentního. Tzn., že jsou vlastně určeny nestabilitou výchozího laminárního proudění. Tento poznatek má značný praktický význam. Nestabilita laminárního pohybu je dnes již poměrně dobře objasněna a lze ji i početně určit, známe-li frekvenci a amplitudu výchozích malých poruch.

Lze-li v delším vyšetřovaném časovém intervalu zavést určité integrální měřítko poruchových fluktuacích pohybů, znamená to zpravidla, že časově střední hodnota fluktuací konverguje k určité střední hodnotě (vlastnost ergodičnosti).

#### IV. JEDNOROZMĚRNÉ STACIONÁRNÍ PROUDĚNÍ

##### IV.1 Jednorozměrné proudění. Místní a referenční hodnoty

Pokud nás nezajímá, jak se mění stavové veličiny a parametry proudu od proudnice k proudnici, lze v mnoha technických aplikacích vycházet ze zjednodušené představy jednorozměrného proudění (např. proudění v proudové trubici, dýze, potrubí, apod.), v němž jsou všechny stavové veličiny a parametry proudu nahrazeny určitými středními hodnotami v příslušném průřezu. Od těchto hodnot se mohou místní hodnoty v jednotlivých místech tohoto průřezu výrazně lišit.

Nerovnoměrnost je vnesena do proudového pole zpravidla rychlostním profilem, který se musí v reálné tekutině měnit od nulové hodnoty na stěně až po maximální hodnotu někde uvnitř kanálu. Nerovnoměrnost stavových veličin je už jen důsledkem této výchozí nerovnoměrnosti. Přesto právě u těchto veličin musíme dbát na to, aby jednak jejich střední hodnoty splňovaly základní zákony zachování i příslušné konstituční rovnice, jednak aby neztratily středováním svůj původní fyzikální význam a souvislosti. Podrobnější úvahy o způsobu zavedení a výpočtu středních hodnot budou uvedeny na konci této kapitoly. V dalším výkladu budeme mlčky předpokládat, že se jedná o známým způsobem vypočtené střední hodnoty jednotlivých veličin.

Nedochází-li k výměně tepla s okolím, je proudění adiabatické. Lze-li současně zanedbat vliv tření a jiných pasivních odporek a ztrát, je proudění současně izentropické. Izentropické proudění odpovídá ideálním podmínkám a slouží proto současně pro porovnání velikosti energetických ztrát všech ostatních případů a pro definici tzv. referenčních hodnot.

V adiabatickém stacionárním proudění ( $\delta Q=0$ ) bez disipace energie vaznosti je (viz rov. (II.29))

$$dh = du + pdV + Vdp = \delta Q + Vdp = \dot{E} + \frac{\dot{F}}{\rho} dp. \quad (\text{IV.1})$$

Pohybová rovnice má pro tento případ tvar Eulerovy rovnice (II.15)

$$\rho_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

z níž pro pohyb po proudnicí (např. ve směru osy x)

$$\frac{1}{2} dw^2 = - \frac{1}{\rho} dp. \quad (\text{IV.2})$$

Sloučením rovnic (IV.1) a (IV.2) dostaneme Bernoulliho rovnici pro jednorozměrné stacionární a adiabatické proudění bez disipace energie (tj. izentropické)

$$dh + \frac{1}{2} dw^2 = 0.$$

Integrál si zachovává podél proudnice svou hodnotu, takže

$$h + \frac{1}{2} w^2 = \text{konst} \quad (\text{IV.3})$$

### XIII. ŘEŠENÍ PROUDĚNÍ VAZKÉ STLAČITELNÉ TEKUTINY

#### XIII.1 Výchozí rovnice mezní vrstvy

Výchozími rovnicemi popisujícími proudění vazké stlačitelné tekutiny jsou Navierovy-Stokesovy rovnice, doplněné o empirické konstituční vztahy a vztahy pro transportní veličiny (viz kap. II). Dnešními prostředky nedokážeme tyto rovnice řešit ani analyticky, ani numericky.

V mnoha případech lze vliv vaznosti soustředit do úzké oblasti při obtékaném povrchu - do tzv. mezní vrstvy. Vně této oblasti lze proudové pole považovat za nevazké a pro jeho řešení užít jednodušších rovnic Eulerových a vhodnými podmínkami navázat řešení obou oblastí. Tento způsob je obvyklý zejména ve vnější aerodynamice a nazýváme jej slabou interakcí.

Ve vnitřní aerodynamice však častěji nelze od sebe oddělit vnější nevazký proud a vazkou oblast u stěny, nehledě na to, že vývoj a chování obou oblastí je navzájem podmíněno. Tato podmíněnost je zejména výrazná při vyšších rychlostech, kdy se v proudu objevují rázové vlny, a je typická pro tzv. silnou interakci.

Budeme se nejdříve zabývat postupy vycházejícími z Prandtlovy teorie mezní vrstvy, přičemž budeme předpokládat, že konečné řešení bude prováděno numericky (tj. ne analyticky).

Omezíme-li se pro jednoduchost jen na stacionární, dvourozměrné, adiabatické proudění mají výchozí rovnice tvar

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (\text{XIII.1})$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} [(\eta + \eta_T) \frac{\partial u}{\partial y}] \quad (\text{XIII.2})$$

(kde  $\eta_T$  je tzv. turbulentní vazkost, zavedená vztahem  $\eta_T \frac{\partial u}{\partial y} = - \rho u' v'$ ),

$$\frac{T}{T_e} = 1 + r \frac{1}{2} (\alpha - 1) M_e^2 \left( 1 - \frac{u^2}{u_e^2} \right), \quad (\text{XIII.3})$$

což je tzv. Croccův vztah, v němž indexy e přísluší vnějšímu (externímu) proudu.

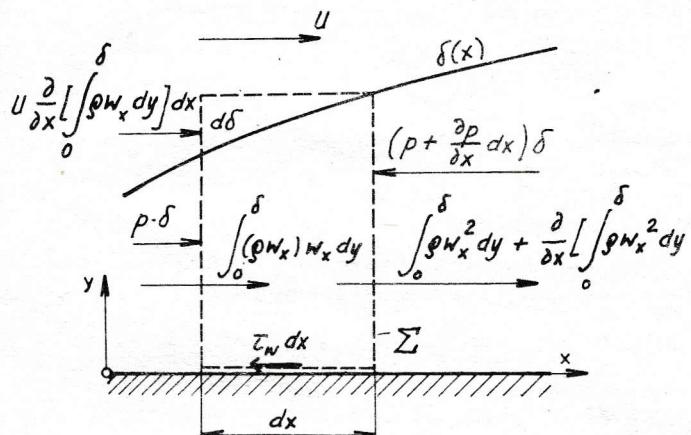
Tyto rovnice lze řešit buď konečnými diferencemi nebo tzv. integrálními metodami.

Ve II. kapitole jsme se již seznámili s pojmem mezní vrstvy a s odvozením základních diferenciálních rovnic Prandtlovy mezní vrstvy.

Pro kvantitativní představu o vzájemném vlivu mezní vrstvy a okolního proudění je výhodnější vyjít z tzv. integrálních rovnic mezní vrstvy (Kármán). Lze je odvodit užitím věty o změně hybnosti.

Hybnost tekutiny, ztracená za jednotku času v nějakém ohrazeném oboru mezní vrstvy se rovná součtu působících sil třecích a tlakových. Z rovnováhy sil na kontrolní ploše  $\Sigma$  (obr. XIII.1) plyne

$$-\tau_w - \delta \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho w_x^2 dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho w_x dy. \quad (\text{XIII.4})$$



obr. XIII.1

Z Eulerovy věty dostaneme vztah mezi tlakem a rychlosí  $U(x)$  ve vnějším proudu

$$-\delta \frac{dp}{dx} = -\delta \rho_0 U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho_0 U dy .$$

Druhý člen na pravé straně je roven

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[ U \int_0^\delta \rho w_x dy \right] dx + \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta \rho w_x dy ,$$

neboť  $U$  není funkcií  $y$ . Odtud po dosazení

$$\begin{aligned} \tau_w &= \frac{\partial U}{\partial x} \int_0^\delta (\rho_0 U - \rho w_x) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (\rho w_x U - \rho w_x^2) dy = \\ &= \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x} \rho_0 U \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho w_x}{\rho_0 U}\right) dy}_{\delta^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \rho_0 U^2 \int_0^\delta \frac{\rho w_x}{\rho_0 U} \left(1 - \frac{w_x}{U}\right) dy}_{\delta^{**}} . \end{aligned} \quad (\text{XIII.5})$$

Označíme-li v předchozí rovnici integrály pravé strany  $\delta^*$  a  $\delta^{**}$  dostaneme po jednoduché úpravě rovnici

$$\frac{\tau_w}{\rho_0 U^2} = \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x} \delta^* + \frac{1}{U^2} \frac{\partial}{\partial x} (U^2 \delta^{**}) ,$$

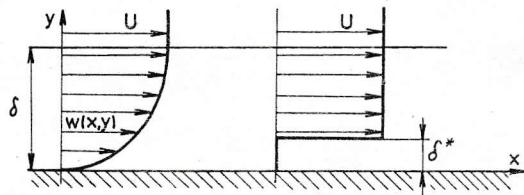
popř.

$$\frac{\tau_w}{\rho_0 U^2} = \frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + (\delta^* + 2\delta^{**}) \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x} . \quad (\text{Kármán, 1921}) \quad (\text{XIII.6})$$

Zavedené veličiny  $\delta^*$  a  $\delta^{**}$  jsou tzv. pošinovací a hybnostní tloušťka mezní vrstvy, charakterizující rychlostní profil a vývoj mezní vrstvy. Samotná tloušťka mezní vrstvy  $\delta$  je daná jen úmluvou, neboť rychlostní profil mezní vrstvy přechází asymptoticky do rychlostního profilu vnějšího proudu. Zpravidla definujeme tloušťku mezní vrstvy jako místo, v němž se rychlosť v mezní vrstvě začíná lišit od rychlosťi vnějšího proudu o méně než 1%.

Poznámka: Vzhledem k tomu, že existuje jen málo exaktních metod řešení mezní vrstvy, je taková definice tloušťky mezní vrstvy funkcií zvolené approximativní metody.

Skutečný, tzv. efektivní tvar tělesa určuje tzv. pošinovací tloušťka mezní vrstvy  $\delta^*$ . Je to taková vzdálenost od stěny, na niž by bylo nutno posunout hranici proudu, kdyby měl mit všeude rychlosť  $U$  (obr. XIII.2)



obr. XIII.2

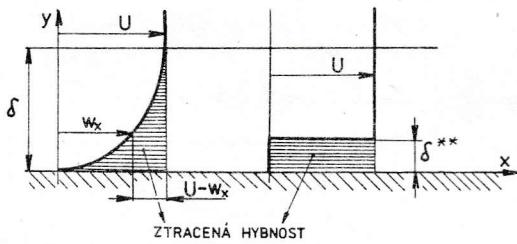
Z této definice plyne

$$\rho_0 U (\delta - \delta^*) = \int_0^\delta \rho w_x dy ,$$

odtud

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho w_x}{\rho_0 U}\right) dy . \quad (\text{XIII.7})$$

Velikost ztrát v mezní vrstvě charakterizuje tzv. hybnostní tloušťka mezní vrstvy  $\delta^{**}$ . Je to taková vzdálenost od stěny, na niž je nutno posunout hranici proudu, aby se neměnila jeho hybnost při potenciálním obtékání rychlostí  $U$ .



obr. XIII.3

Z uvedené definice opět

$$\rho_0 U^2 \delta^{**} = \int_0^\delta \rho w_x (U - w_x) dy ,$$

$$\delta^{**} = \int_0^\delta \frac{\rho w_x}{\rho_0 U} \left(1 - \frac{w_x}{U}\right) dy . \quad (\text{XIII.8})$$

Obě veličiny jsou zřetelně závislé na tvaru rychlostního profilu  $w_x(y)$ . Vývoj mezní vrstvy a jejího rychlostního profilu charakterizuje tzv. tvarový parametr  $H = \delta^*/\delta^{**}$ .

Energetické poměry ve stlačitelné mezní vrstvě charakterizujeme analogicky zavedenými "tloušťkami", a to

$$\delta^{(e)} = \int_0^\delta \frac{\rho w_x}{\rho_0 U} \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) dy , \quad (\text{XIII.9})$$

popř.

**tzv. energetická tloušťka mezní vrstvy**

$$\delta^{(h)} = \int_0^\delta \frac{\rho w_x}{\rho_0 U} \left(\frac{h}{h_0} - 1\right) dy , \quad (\text{XIII.10})$$

**tzv. entalpická tloušťka mezní vrstvy**

Kármánovu rovnici (XIII.6) lze přepsat pomocí tvarového parametru  $H$  do tvaru

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + (H+2)\delta^{**} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} c_f . \quad (\text{XIII.11})$$

Tato rovnice obsahuje při zadaném gradientu rychlosti vnějšího proudu ( $\partial U / \partial x$ ) tři neznámé, a to  $\delta^{**}$ ,  $H$  a  $c_f$ .

Pokud bychom znali rychlostní profil mezní vrstvy, můžeme je snadno z výše uvedených definičních vztahů vypočítat. Starší práce (např. Kármán, Pohlhausen) předpokládají rychlostní profil ve tvaru polynomu čtvrtého stupně

$$\frac{w}{U} = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 ,$$

kde  $\eta = y/\delta$ . Konstanty  $a, b, c, d$  se určují z okrajových podmínek:

$$\text{pro } y=0 \dots w=0 ; \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx} = - \rho U \frac{du}{dx} ; \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 ,$$

$$y=\delta \dots w=U ; \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 .$$

Podmínka  $\eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx} = - \rho U \frac{du}{dx}$  vyjadřuje křivost rychlostního profilu mezní vrstvy u stěny. Pro  $dp/dx < 0$  (zrychlující se proudění) je rychlostní profil vždy vypuklý, při  $dp/dx > 0$  (zpomalující se proudění) umožňuje vyjádřit zpětné proudění. S těmito podmínkami je

$$a = 2 + \frac{1}{6}\lambda , \quad b = -\frac{1}{2}\lambda , \quad c = -2 + \frac{1}{2}\lambda , \quad d = 1 - \frac{1}{6}\lambda ,$$

$$\text{kde } \lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{du}{dx} \quad (\text{je tzv. Pohlhausenův parametr})$$

Po dosazení do rychlostního profilu

$$\frac{w}{U} = F(\eta) + \lambda G(\eta) = (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) + \frac{1}{6}(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4) ,$$

$$\text{tj. } F(\eta) = 1 - (1-\eta)^3(1+\eta) , \quad G(\eta) = \frac{1}{6}\eta(1-\eta)^3 ,$$

a po dosazení do hledaných tří neznámých

$$\frac{1}{2}c_f = \frac{\nu}{\delta U^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_{\text{stěna}} = \frac{\nu}{\delta U} \left( 2 + \frac{\lambda}{6} \right) ,$$

$$\delta^{**} = \delta \int_0^1 [F(\eta) + \lambda G(\eta)] [1 - F(\eta) - \lambda G(\eta)] d\eta = \frac{\delta}{315} (37 - \frac{\lambda}{3} - \frac{5\lambda^2}{144}) ,$$

$$\delta^* = \delta \int_0^1 [1 - F(\eta) + \lambda G(\eta)] d\eta = \frac{\delta}{120} (36 - \lambda) .$$

Dosadíme-li tyto výrazy do Kármánovy rovnice dostaneme

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{g(\lambda)}{U} + Z^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} h(\lambda) ,$$

kde

$$Z = \frac{\delta^2}{\nu} + \frac{\lambda}{\partial U / \partial x} ,$$

$$h(\lambda) = \frac{\delta + \frac{5}{3}\lambda}{(12-\lambda)(37 + 25\lambda/12)} , \quad g(\lambda) = \frac{15120 - 2784\lambda + 79\lambda^2 + 5\lambda^3/3}{(12-\lambda)(37 + 25\lambda/12)} .$$

Tato rovnice udává vazbu mezi  $\lambda$  a  $x$ , ev.  $\delta$  a  $x$ . Numerickou integraci lze dospět ke vztahu

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -5,39 \frac{\partial^2 U / \partial x^2}{(\partial U / \partial x)^2}$$

Tato metoda má nesčitelné množství variant. Volbou jednoduššího vyjádření výchozího rychlostního profilu ji lze výrazně zjednodušit. V praxi se užívá např.

mocninový profil  $\frac{H}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^m$ ,  $(\frac{1}{5} < m < \frac{1}{9}$ , podle Re).

Pro tento profil je

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{m}{m+1}, \quad \frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{m}{(m+1)(2m+1)}, \quad H = 2m+1,$$

takže lze též psát

$$\frac{H}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}(H-1)};$$

sinový profil (Illingworth)

$$\frac{H}{U} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}\right);$$

a jiné.

V poslední době se užívá nejčastěji metod, které nevolí předem tvar rychlostního profilu, ale hledají doplňující rovnice pro neznámé  $\delta^{**}$ ,  $H$  a  $c_f$ . Nejuzívanější je Headova metoda "strhávání" (entrainment) a její různé modifikace.

Mezní vrstva strhává určité množství tekutiny. Připomeneme-li si odvození integrální rovnice mezní vrstvy, snadno pochopíme vztah

$$\int_0^\delta g_o V_e dy = \frac{d}{dx} \int_0^\delta g_o U (\delta - \delta^*) dy = F(H_1), \quad (\text{XIII.12})$$

kde  $V_e$  je rychlosť strhávání, kolmá na  $\delta(x)$ . Head předpokládá, že tato rychlosť je funkci  $F$  tvarového parametru  $H_1$ , definovaného výrazem  $H_1 = (\delta - \delta^*) / \delta^{**}$ , o něž dálé předpokládá, že je funkci  $H = \delta^* / \delta^{**}$ , a to  $H_1 = G(H)$ . Po dosazení do předchozího výrazu je

$$\frac{d}{dx} (U \delta^{**} H_1) = UF. \quad (\text{XIII.13})$$

Funkce  $F$  a  $G$  jsou určeny z experimentů. Udávají se pro ně výrazy

$$F = 0,0306 (H_1 - 3,0)^{-0,6169},$$

$$G = \begin{cases} 0,8234 (H - 1,1)^{-1,287} + 3,3 & \text{pro } H \leq 1,6, \\ 0,5501 (H - 0,6778)^{-3,064} + 3,3 & \text{pro } H \geq 1,6. \end{cases}$$

Po dosazení do Headovy rovnice

$$\frac{d}{dx} (U \delta^{**} G(H)) = UF$$

$$\frac{dU}{dx} (\delta^{**} G) + \frac{d\delta^{**}}{dx} (U G) + \frac{dG}{dx} (\delta^{**} U) = UF$$

$$\delta^{**} \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} G + \frac{d\delta^{**}}{dx} G + \frac{dG}{dH} \frac{dH}{dx} \delta^{**} = F$$

$$\delta^{**} \frac{dG}{dH} \frac{dH}{dx} + G \left( \frac{\delta^{**}}{U} \frac{dU}{dx} + \frac{d\delta^{**}}{dx} \right) = F.$$

Za  $d\delta^{**}/dx$  dosadíme z Kármánovy rovnice, takže

$$\delta^{**} \frac{dG}{dH} \frac{dH}{dx} + G \left( \frac{c_f}{2} - (H+1) \frac{\delta^{**}}{U} \frac{dU}{dx} \right) = F ,$$

což je lineární vztah mezi  $dH/dx$  a  $dU/dx$ , jsou-li  $F$  a  $G$  známými funkcemi  $H$ . Pro  $c_f$  lze užít vztahu

$$c_f = 0,246 \cdot 10^{-0,678 H} \cdot R_{\text{ex}} = 9268 \quad (\text{Ludwig, Tillmann})$$

Rozdíly mezi vnější a vnitřní aerodynamikou při řešení proudění vazké tekutiny spočívají v mře vzájemného působení vnějšího proudu a mezni vrstvy.

Zatímco ve vnější aerodynamice vycházíme jen z Kármánovy rovnice (XIII.11) ve vnitřní aerodynamice musíme simultánně s touto rovnicí řešit i rovnicí kontinuity

$$m = U(h - 2\delta^*), \text{ kde } m \text{ je přičný rozměr kanálu.}$$

Po jejím dosazení do rov. (XIII.11) dostaneme

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{\tau_w (\rho m)^2 (h - 2H\delta^{**})^3 + \delta^{**}(H+2) \left[ \frac{dh}{dx} - 2\delta^{**} \frac{dH}{dx} \right]}{h + 2H\delta^{**}(H+1)} . \quad (\text{XIII.14})$$

Pro řešení musíme znát doplňující vztahy pro tvarový parametr  $H$  a povrchové tření  $\tau_w$ , a navíc i celkový tok hmotnosti kanálem  $m$ .

### XIII.2 Interakce vnějšího proudu a mezni vrstvy

Vztah, který váže parametry vnějšího proudu a mezni vrstvy při silné interakci odvodíme pro rovinné proudění takto:

Z rovnice kontinuity ve tvaru

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

dostaneme integraci uvnitř mezni vrstvy (tj. v mezích  $0, \delta$ )

$$\int_0^\delta \frac{d(\rho u)}{dx} dy + \int_0^\delta \frac{d(\rho v)}{dy} dy = 0 .$$

Jelikož druhý člen je roven  $(\rho v)_\delta$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta (\rho u) dy - \frac{d\delta}{dx} (\rho_\infty U_\infty) + (\rho v)_\delta = 0 .$$

Pozn.: Užili jsme přitom věty o derivaci integrantu, závisí-li i horní mez na parametru, podle něhož se derivuje. Platí

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy + \beta'(x) f[x, \beta(x)] - \alpha'(x) f[x, \alpha(x)] .$$

Úpravou prvního člena předchozí rovnice dostaneme (užitím definice pošinovací tloušťky  $\delta^*$ )

$$\delta^* = \frac{\int_0^\delta (\rho_\infty U_\infty - \rho u) dy}{\rho_\infty U_\infty} = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_\infty U_\infty}\right) dy = \delta - \frac{1}{\rho_\infty U_\infty} \int_0^\delta (\rho u) dy ,$$

resp.

$$\int_0^\delta (\rho u) dy = \rho_\infty U_\infty (\delta - \delta^*) ,$$

takže

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\rho_\infty U_\infty (\delta - \delta^*)] - \frac{d\delta}{dx} (\rho_\infty U_\infty) + (\rho v)_\delta &= 0 , \\ \frac{d(\rho_\infty U_\infty)}{dx} (\delta - \delta^*) + \rho_\infty U_\infty \frac{d(\delta - \delta^*)}{dx} - \rho_\infty U_\infty \frac{d\delta}{dx} + (\rho v)_\delta &= 0 , \\ \frac{1}{\rho u} \frac{d(\rho_\infty U_\infty)}{dx} (\delta - \delta^*) + \frac{d(\delta - \delta^*)}{dx} - \frac{d\delta}{dx} + \frac{(\rho v)_\delta}{\rho u U_\infty} &= 0 , \\ \left[ \frac{1}{\rho u} \frac{d(\rho u)}{dx} \right]_{x, \delta} (\delta - \delta^*) - \frac{d\delta^*}{dx} + \left( \frac{v}{u} \right)_{x, \delta} &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{XIII.15})$$

Tuto podmíinku jsme mohli odvodit pro libovolnou hranici  $y = f(x)$ , kterou nemusí být hranice mezní vrstvy  $\delta(x)$ . V takovém případě má předchozí rovnice obecný tvar

$$\left[ \frac{1}{\rho u} \frac{d(\rho u)}{dx} \right]_{x, f(x)} (y - \delta^*) - \frac{d\delta^*}{dx} + \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x, f(x)} = 0 .$$

V praktických řešených se volí jedna ze tří vzájemně rovnocenných možností:

$$1. \quad f(x) = \delta, \quad 2. \quad f(x) = \delta^*, \quad 3. \quad f(x) = 0 .$$

V prvním případě tvoří přechodovou (vazební) podmíinku rov. (XIII.15), ve druhém případě  $y = f(x) = \delta^*$  je

$$\left( \frac{v}{u} \right)_{\delta^*} = \frac{d\delta^*}{dx} , \quad (\text{XIII.16})$$

což je podmínka hladkého obtékání efektivního povrchu, ve třetím případě  $y = 0$  je

$$\left( \frac{v}{u} \right)_{y=0} = \frac{1}{\rho_e U_e} \frac{d}{dx} [\rho_e U_e \delta^*] , \quad (\text{XIII.17})$$

což je podmínka "přifukování" stěnu (nahrazení pevné stěny propustnou stěnou).

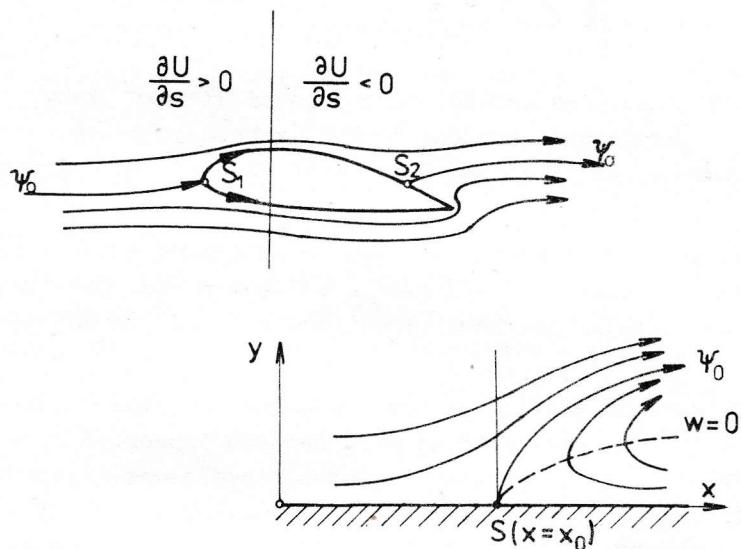
Přestože jsou uvedené vazebné podmínky zcela rovnocenné, při jejich praktické aplikaci – zejména ve vnitřní aerodynamice při  $M \leq 1$  – se ukázala jako nejhodnější podmínka třetí, která nemění svůj charakter s  $M$ .

Klasická (Prandtlova) teorie mezní vrstvy užívala podmíinku (XIII.16), tj. řešila obtékání tzv. efektivního obrysu, "vzniklého superposicí  $\delta^*$  na obtékáný povrch".

Moderní numerické metody dávají z řady důvodů přednost podmínce (XIII.17). (Podmínka (XIII.16) se např. mění v každém iteračním kroku.)

### XIII.3 Odtržení proudu

Tekutina ulpívá na stěně působením vazkých sil. Ty se uplatní jen tehdy, je-li rychlosť, ev. gradient rychlosti nenulový. Při obtékání mohou nastat případy, kdy  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ , tj. i  $\tau = 0$ . Pak dochází k odklonu nulové proudnice od stěny, které se projeví tzv. odtržením proudu (obr. XIII.4)



obr. XIII.4

Budeme nyní vyšetřovat charakter rychlostního profilu dvourozměrné mezni vrstvy v okoli místa odtržení:

V bodě odtržení na stěně ( $y = 0$ ) je tedy

$$c_f = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

a z okrajových podmínek (nepropustnost stěny) i  $u = v = 0$ . Z Prandtlovy rovnice mezni vrstvy

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

pak zbude pouze

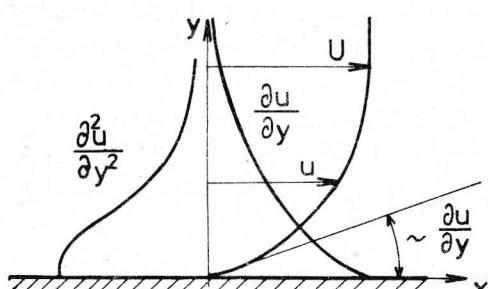
$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

V mezni vrstvě s rostoucím  $y$  (od 0 do  $\infty$ )  $u \rightarrow U$ , a jak zřejmo  $(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{y=0} < 0$

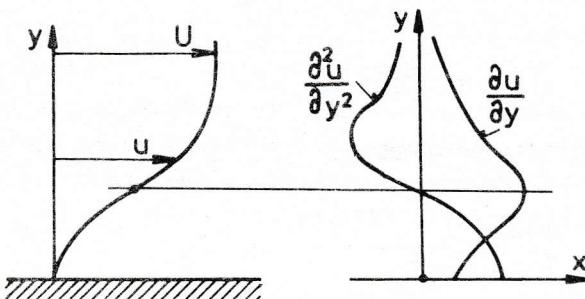
(obr. XIII.5). Odtud rovněž  $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$ , ježto obě hodnoty mají stejně znaménko.

Je-li  $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$  je z uvedené rovnice  $(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{y=0} > 0$ . Jelikož ale ve větších vzdálenostech od stěny musí být  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0$ , musí průběh  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  měnit znaménko a rychlostní profil musí mít inflexní bod (obr. XIII.6).

V mistě odtržení je  $\left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \sim 0$ .



obr. XIII.5



obr. XIII.6

Tzn., že k bodu odtržení se blížíme přes průběh, odpovídající vzhledu tlaku, tj.  $\partial p/\partial x > 0$  (difuzory). Naopak, konfuzorové proudění  $\partial p/\partial x < 0$  zabraňuje odtržení! Jelikož  $\tau_w \sim \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y \rightarrow 0}$  plyne odtud, že  $\tau_w$  směrem k odtržení klesá, v bodě odtržení je  $\tau_w = 0$ .

Velikost  $\tau_w$  je dána směrnici rychlostního profilu mezní vrstvy těsně u stěny ( $y=0$ ). Proto i odtržení proudu závisí na tvaru rychlostního profilu. Čím "plnější" je rychlostní profil, tím později odtržení (konfuzor, ale také turbulentní mezní vrstva).

Sledujeme-li vývoj rychlostního profilu za bodem odtržení najdeme v něm ve většině případů zpětné proudění (viz obr. XIII.4). Mezi nulovou proudnicí  $u_0$  a stěnou vzniká tzv. recirkulační oblast. Rychlosť zpětného proudění je relativně malá ve srovnání s rychlosťí vnějšího proudu a závisí na tom, kdy se nulová proudnice znova přimknutí ke stěně. Je-li úhel, který svírá nulová proudnice se stěnou malý, pak zpětné proudění ani nedosáhne k bodu odtržení  $S$ . Vytvoří se zde mrtvá oblast prakticky bez pohybu tekutiny, projevující se v rozložení tlaku jako oblast konstantního tlaku.

Vývoj a rozsah oblasti odtržení závisí na tvaru kanálu za bodem odtržení, popř. na průběhu rychlostního gradientu ve vnějším proudu. V konfuzorovém proudění se odtržený proud zpravidla znova přimknutí ke stěně. Mluvíme pak o "lokálním odtržení", na rozdíl od "totálního odtržení", kdy ke zpětnému přimknutí nedojde.

Kromě rychlostního, ev. tlakového gradientu závisí vznik odtržení proudu i na křivosti obtékaného povrchu, zejména však na změně křivosti. Odstředivá síla působící na částečky tekutiny při obtékání silně zakřiveného povrchu napomáhá odtržení proudu, stejně tak jako náhlé zmenšení poloměru křivosti povrchu.

#### XIII.4 Struktura turbulentní mezní vrstvy

Výsledky velkého množství měření v turbulentní mezní vrstvě ukazují, že na profilu střední rychlosti lze rozlišit několik typických oblastí. Schematicky jsou znázorněny na obr. XIII.7 v diagramu  $u^+ = f(y^+)$ , kde  $u^+$  je bezrozměrová rychlosť,  $y^+$  je bezrozměrová vzdálenost od stěny. Obě veličiny jsou zavedeny takto:

$$u^+ = \frac{\bar{U}(y)}{u_\tau}, \quad \text{kde } \bar{U}(y) \text{ je střední rychlosť proudění v mezní vrstvě,}$$

$$u_\tau \text{ je tzv. třecí rychlosť } u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}},$$

$$\tau_w \text{ je střední smykové napětí na stěně, } (\text{N/m}^2),$$

$$\rho \text{ je hustota}$$

$$y^+ = u_\tau y / \nu, \quad \text{kde } \nu \text{ je kinematická vazkost } (\text{m}^2/\text{s})$$

$y$  je skutečná vzdálenost od stěny.

Hranice mezi jednotlivými oblastmi závisí do určité míry na podmínkách v mezní vrstvě, ev. vně mezní vrstvy (např. podélný tlakový gradient ve vnějším proudu, intenzita turbulence, apod.).

Turbulentní mezní vrstvu zpravidla rozdělujeme na dvě hlavní oblasti - vnitřní a vnější (viz obr. XIII.7 a obr. XIII.8)

- a) vnitřní oblast (zhruba 0,1 až 0,2  $\delta$ ) zahrnuje oblasti s převládajícím vlivem vaznosti, a to
  - vazkou podvrstvu ( $y \leq 0,01 \delta$ ), v níž je  $\bar{U} \sim y$ , resp.  $u^+ = y^+$ , a v níž je proudění ovlivňováno převážně molekulovými pohyby.
  - přechodovou oblast,
  - logaritmickou oblast, označovanou v literatuře též jako oblast zákona stěny, představující vnitřní část turbulentního jádra turbulentní mezní vrstvy ( $y \leq 0,1$  až  $0,2 \delta$ ). V této oblasti je

$$\bar{U} \sim \log y, \text{ např. } u^+ = \frac{1}{k} \log y^+ + C \quad (\text{tzv. univerzální zákon stěny, Prandtl, 1932, a jiní})$$

Struktura proudění v celé vnitřní oblasti závisí velmi málo na vlastnostech vnějšího proudu. Vlastnosti turbulence jsou zde ve všech případech stejné (v kánamech, při vnějším obtékání v neomezeném proudu, apod.).

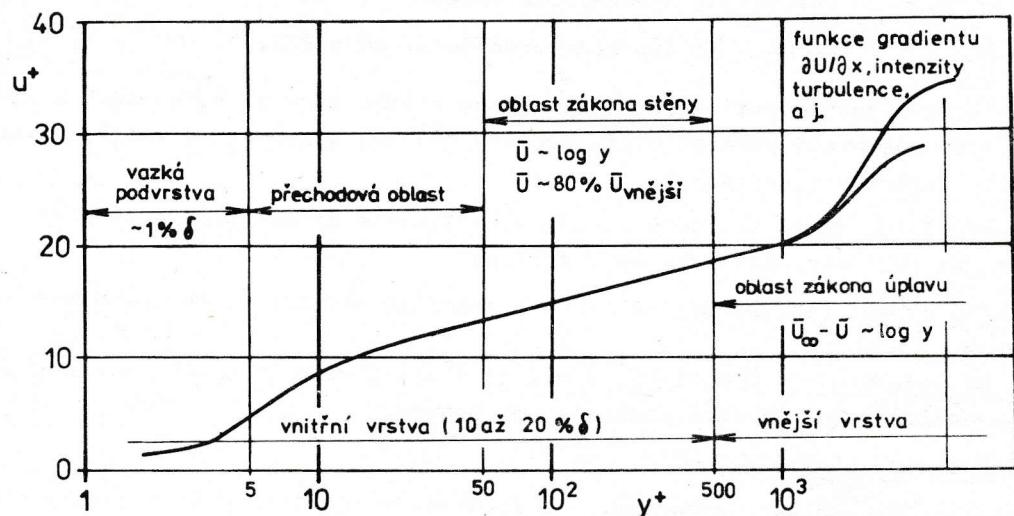
- b) vnější oblast vyplňuje zbytek mezní vrstvy, tj.  $y > 0,1$  až  $0,2 \delta$ . Bezprostředně na logaritmickou oblast navazuje oblast zákona úplavu (Coles, 1954), kde

$$\bar{U}_\infty - \bar{U} \sim \log y + \text{konst}$$

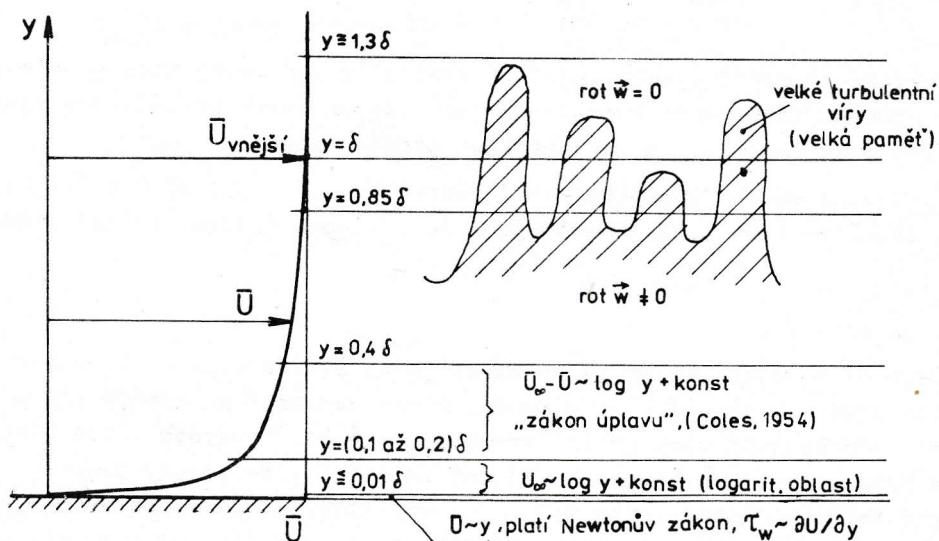
dosažuje zhruba do  $y \sim 0,4\delta$ .

Struktura proudění ve vnější oblasti je ovlivněna velkými turbulentními víry. Kromě těchto vírů existují i víry menší, které vznikají postupným rozpadem velkých vírů, neovlivňují však příliš strukturu proudu. Přestože velké víry unášeji jen málo hybnosti středního proudu (plyne to z toho, že příčný gradient podélné složky střední rychlosti je zde malý, viz obr. XIII.8), je na ně vázána převážná část kinetické energie turbulence a nesou většinu turbulentního snykového napětí. Tyto víry disipují velmi pomalu a proto vytvářejí téměř homogenní strukturu turbulence v této oblasti. Současně si dlouho uchovávají informace o proudění v oblastech, z nichž proudění přichází (dlouhá paměť proudění). Velké víry způsobují nepravidelnost hranice mezi vířivým, turbulentním proudem uvnitř mezní vrstvy a vnějším proudem, kde  $\vec{\omega} = 0$ . Vybihají i z hranice mezní vrstvy  $\delta$ , a to až do cca  $y = 1,3\delta$ . Poměr doby, po níž je v pozorovaném místě poblíž  $y \geq \delta$  turbulentní proud, k celkové době pozorování, se označuje jako intermittenční faktor  $\gamma$ .

Proměnlivost hranice turbulentní mezní vrstvy v důsledku velkých vírů umožňuje strhávání nevířivé tekutiny do mezní vrstvy, což je provázeno přenosem (strháváním) hybnosti i kinetické energie ze středního proudu do turbulentní mezní vrstvy. Současně je časová proměnlivost hranice i zdrojem poruch vysílaných do vnějšího proudu.



obr. XIII.7



obr. XIII.8

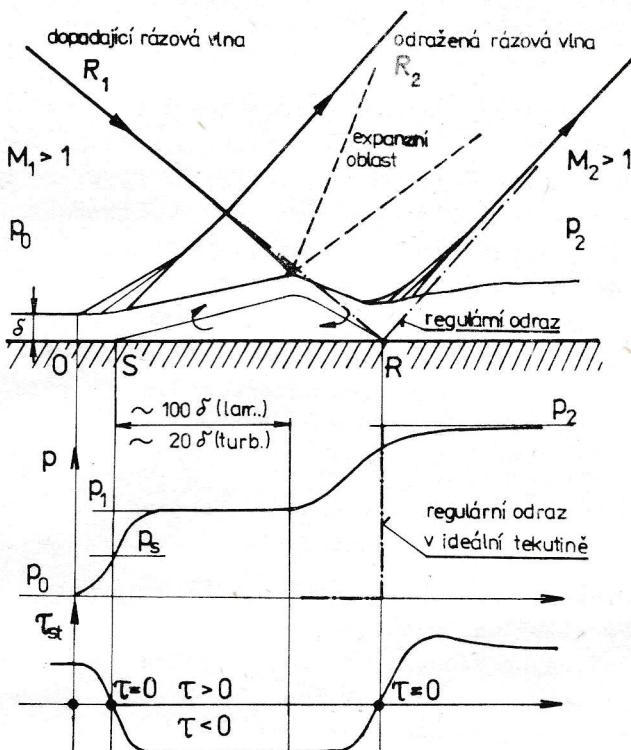
### XIII.5 Interakce rázové vlny a mezní vrstvy

Prudký tlakový vztur v rázové vlně ovlivňuje i mezní vrstvu na obtékaném povrchu. Podzvukovou částí mezní vrstvy se šíří i proti proudu a to do vzdálosti, která závisí na její tloušťce a na jejím charakteru. U laminární mezní vrstvy je vzdálenost, na niž se projeví tlakový vztur v rázové vlně rovna cca  $100 \delta^*$ , u turbulentní mezní vrstvy je to méně než  $10 \delta^*$ .

Vzhledem ke značné kladné hodnotě  $\partial U / \partial x$  v místě rázové vlny, dochází v místě interakce téměř vždy alespoň k lokálnímu odtržení proudu, v laminární mezní

vrstvě navíc vždy k přechodu na turbulentní mezni vrstvu.

Schema interakce rázové vlny dopadající na mezni vrstvu je uvedeno na obr. XIII.9.



Obr. XIII.9

Silnější rázová vlna  $R_1$ , dopadající na mezni vrstvu způsobí místní odtržení proudu. To se projevuje v průběhu tlakového vzrůstu sedlem, charakterizujícím tu část oblasti místního odtržení, v níž je tekutina v klidu, a kterou lze tudiž považovat za oblast konstantního tlaku. Velikost této oblasti závisí na tom, jak daleko proti proudu se uplatní tlaková porucha v rázové vlně. Vzniklé klinovité zvětšení tloušťky mezni vrstvy vyvolá v bodě odtržení, nebo nad celou oblastí odtrženého proudu soustavu slabých kompresních vln, které pak splynou v jedinou rázovou vlnu  $R_2$ . Experimentálně bylo zjištěno, že u interakce s rázovou vlnou, dopadající na rovinou desku roste poměr délky oblasti interakce a pošinovací tloušťky mezni vrstvy přibližně s  $Re^{3/4}$ , přičemž vzdálenost, na niž poruchy pronikají, je řádově stěnásobek tloušťky mezni vrstvy.

Velikost tlakového vzrůstu, při němž dojde k odtržení supersonické mezni vrstvy závisí na vlastnostech mezni vrstvy před oblastí interakce, zejména na velikosti součinitele povrchového tření.

V dopadající rázové vlně se proud odchyluje směrem ke stěně. Tomu pomáhá i expanzení oblasti, která vzniká odrazem dopadající rázové vlny na oblasti odtržení, kde  $p = \text{konst.}$  Proto se oblast místního odtržení proudu za bodem dopadu rázové vlny rychle zmenšuje a dochází často až k úplnému přimknutí proudu ke stěně. Charakteristickým rysem rozložení tlaku při interakci s laminární mezni vrstvou je to, že tlakové gradienty před i za sedlem jsou přibližně stejné, tj. rozložení tlaku je vzhledem k bodu dopadu rázové vlny téměř symetrické. V případě

konvexního zakřivení povrchu se snižuje tlakový vznět, při němž dochází k plně vyvinutému odtržení.

Při interakci zpravidla dochází k přechodu laminární mezni vrstvy v turbulentní. Poloha bodu přechodu závisí téměř výhradně na intenzitě dopadající rázové vlny, vzniká-li rázová vlna na mezni vrstvě (transonické proudění), pak i na předchozím vývoji mezni vrstvy.

Silnější rázové vlny vyvolávají přechod v poměrně značné vzdálenosti před bodem svého dopadu. Tyto případy se v rozložení tlaku vyznačují pěti inflexními body. První sedlo v rozložení tlaku je ještě v laminární části za bodem odtržení. Jakmile dojde k přechodu, pak je i odtržená mezni vrstva schopna snáze překonat nepříznivé tlakové gradienty a tlak roste prudčeji. Tím však vzroste silně i tloušťka oblasti odtrženého proudu, takže ani poměrně velké sily turbulentního tření nejsou schopny překonat nepříznivý tlakový gradient a dojde znova k jeho poklesu (druhé sedlo). Teprve v bodě dopadu rázové vlny se odtržený proud znova vraci ke stěně. Vzhledem k turbulentnímu charakteru proudu je příslušný tlakový vznět již značně strmý.

Při interakci slabší rázové vlny je tlakový vznět mezi bodem přechodu a zpětným přimknutím proudu plynulý, neboť tloušťka odtržené oblasti neroste tak značně, aby to mohlo ovlivnit průběh rozložení tlaku.

Charakteristickým rysem interakce s turbulentní mezni vrstvou v celém rozsahu interakce (speciálně u slabších rázových vln), je její značná podobnost s řádným odrazem rázové vlny od pevné stěny v ideální tekutině (zakresleno čárkovaně v obr. XIII.9). Slabá rázová vlna nezpůsobí odtržení proudu. Tlakový vznět je strmý, podobný průběhu tlaku při řádném odrazu.

Účinek slabé rázové vlny není tak výrazný jako v laminárním případě. Subsonická oblast u stěny, v níž pronikají tlakové poruchy proti proudu, je zde značně menší a v důsledku intenzivní turbulentní výměny hybnosti a energie mezi vnějším proudem a pomalými vrstvami u stěny, turbulentní mezni vrstva snáze vyrovnává a překonává nepříznivý tlakový gradient v rázové vlně. Nicméně, i zde dochází k lokálnímu odtržení proudu, charakterizovanému v průběhu tlakového vznětu (který je zhruba pětkrát větší než u laminární mezni vrstvy) malým sedlem na začátku oblasti odtržení.

Pro interakci jsou charakteristické dva tlakové poměry -  $\rho_s/\rho_0$  a  $\rho_1/\rho_0$ , resp.  $c_{\rho_s}$  a  $c_{\rho_1}$ , a podélní rozsah jednotlivých oblastí. Přibližné metody řešení laminární interakce uvádějí pro  $M_\infty \geq 1/2$

$$c_{\rho_s} \sim \sqrt{c_f}, \quad c_{\rho_s} = \sqrt{2} c_f (M_\infty^2 - 1)^{-1/4}, \quad c_{\rho_1} \approx 1,65 c_{\rho_s}.$$

Závislost  $c_{\rho_s}$  na  $c_f$  a  $M_\infty$  je obecná. Jelikož  $c_f \sim f(Re)$ , je i  $c_{\rho_s}$  funkci  $Re$  a  $M_\infty$ . Experimentálně bylo určeno pro  $1/2 < M_\infty < 3$ , že

$$c_{\rho_s} \sim 4,5 Re^{-1/5} \quad \text{pro turbulentní mezni vrstvu}$$

$$c_{\rho_s} \sim 1,4 Re^{-1/2} \quad \text{pro laminární mezni vrstvu.}$$

Je tedy k odtržení snáze náchylná laminární mezni vrstva a mezni vrstva o větší tloušťce.

Pro turbulentní mezni vrstvu se též udává empirický vztah

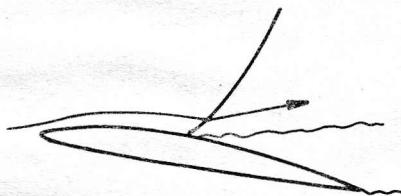
$$\rho_s = \rho_0 [1 + K \cdot M_\infty^2 (M_\infty^2 - 1)^{-1/4}], \quad \text{kde} \quad K = 0,15.$$

Stejný vztah lze užít i pro stanovení  $p_1$ , dosadime-li  $K=0,2$ .

Rozsah oblasti odtržení, k němuž dochází při interakci, je dán intensitou rázové vlny a její polohou, zakřivením obtékáního povrchu a charakterem a vývojem mezní vrstvy, zejména

- a) vzdáleností, na niž pronikají mezní vrstvou proti proudu tlakové poruchy z místa interakce,
- b) vzdáleností, na niž tlak v proudovém poli nabude znova hodnoty odpovídající tlaku v daném místě obtékání bez odtržení.

Rázová vlna, která vzniká na profilu v místě  $\theta$  (viz obr. XIII.9) vyvolá tlakové poruchy, které pronikají podle své intenzity a charakteru mezní vrstvy proti proudu a způsobují v bodě  $S$  odtržení proudu. Tím však dochází současně i k deformaci efektivního povrchu a ke vzniku kompresních vln ve vnějším proudu, které uskutečňují (izentropicky) část komprese a zmenšují tak intenzitu uzavírací rázové vlny. Na této intenzitě závisí i vývoj obtékání za rázovou vlnou. Není-li tak velká aby převedla supersonické proudění před rázovou vlnou na proudění subsonické, dochází za rázovou vlnou ke kontrakci proudnic a k jejich odchylkování od povrchu do supersonického proudu. Protože stěna se zakřívuje v opačném smyslu, tloušťka oblasti odtržení neustále roste (obr. XIII.10)



obr. XIII.10

### XIII.6 Poznámky k praktickému výpočtu mezní vrstvy

Kármánova rovnice pro stlačitelnou mezní vrstvu

$$\frac{d\delta^{**}}{ds} + (2 + H - M_\infty^2) \frac{\delta^{**} dU}{U} \frac{dU}{ds} = \frac{\tau}{\rho_\infty U^2} .$$

Pro  $M < 1,5$  lze použít jednodušší rovnice pro nestlačitelnou tekutinu.

Podle Howartha

$$\delta^{**} = \delta^{**}_{nestlác} (1 + 0,18 M^2)^{-0,35}$$

Udává se též pro:

laminární mezní vrstvu

$$\frac{\delta}{\delta_{nestlác}} \approx 1 + 0,08 M_\infty^2 , \quad \frac{\delta^*}{\delta_{nestlác}} = 1 + 0,277 M_\infty^2 , \quad \frac{c_f}{c_{f,nestlác}} = [1 + 0,1 M_\infty^2]^{-1/8} ,$$

turbulentní mezní vrstvu

$$\frac{\delta}{\delta_{nestlác}} \approx 1 + 0,0667 M_\infty^2 , \quad \frac{c_f}{c_{f,nestlác}} = [1 + 0,0667 M_\infty^2]^{-2/3} .$$

Pro praktický a orientační výpočet turbulentní mezní vrstvy kombinujeme teoretické řešení s empirickými poznatkami. Pro mezní vrstvu bez tlakového gradientu ( $dU/dx = 0$ ) se např. udává

$$c_f \cong 2A Re_{\delta^{**}}^{-1/m},$$

kde

$$Re_{\delta^{**}} = \delta^{**} U / \nu, \quad m = 4, \quad A = 0,01256, \quad \text{ev. } m = 6, \quad A = 0,00655.$$

S tímto vztahem lze integrovat Kármánovu rovnici ve směru proudu a za předpokladu, že výpočet začínáme na náběžné hraně, kde  $s = s_1 = 0$ ,  $\delta_1^* = 0$ , rychlostní profil lze vyjádřit mocninnou závislostí

$$\frac{U}{U} = \left( \frac{y}{\delta} \right)^{1/n}, \quad \text{kde} \quad n = 2m - 1, \quad \text{tj. pro } m = 4 \dots n = 7 \\ H = \delta^*/\delta^{**} = \frac{n+2}{n} = 1,285.$$

Dostaneme

$$\delta^{**}_{(s=s_1)} = 0,0361 \cdot Re^{-0,20} \cdot U^{-3,28} \left( \int_0^s U^{3,86} ds \right)^{0,80}.$$

Kriterium odtržení se uvádí ve tvaru

$$-\frac{\delta^{**}}{U} \frac{dU}{ds} \leq B Re_{\delta^{**}}^{-1/m},$$

kde např. podle Lojcanského  $m = 6, B = 0,013$  až  $0,020$ ;

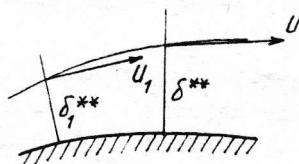
podle Bam-Zelikoviče  $m = \infty, B = 0,005$ .

V bodě odtržení podle této teorie  $n \rightarrow 1$ , tj.  $H \rightarrow 3$ , až  $H = 3,34$ .

Mezní vrstvu před bodem odtržení lze řešit podle vztahu Rosse & Robertsona (viz obr. XIII.11)

$$\delta^{**} = \left( \frac{U_1}{U} \right)^{4,8} \delta_1^{**},$$

$$\delta^* = \left( \frac{U_1}{U} \right)^{5,2} \delta_1^*,$$



obr.XIII.11

Tento vztah se často užívá pro difuzory a difuzorové lopatkové mříže. Podobný přibližný vztah byl odvozen i pro konfuzorové proudění, kde se místo hodnoty 4,8 v exponentu užívá hodnota 3,1.

### XIII.7 Teplotní mezní vrstva

Disipací energie vlivem vazkých napětí v mezní vrstvě a zbrzděním tekutiny na nulovou rychlosť na stěně dochází směrem k obtékanému povrchu ke vzrůstu teploty. To je současně oslabováno odvodem tepla vedením v opačném směru, tj. k okraji mezní vrstvy. To znamená, že i při úplném zbrzdění tekutiny na stěně se nepřemění celá kinetická energie v teplo (pak by teplota stěny odpovídala klidové teplotě  $T_0$ ).

Neuvažujeme-li odvod tepla stěnou (adiabatické proudění), je teplota stěny

$$T_{stěny ad} = T_\infty \left[ 1 + r \frac{1}{2} (\alpha - 1) M^2 \right], \quad (\text{XIII.18})$$

kde  $r$  je tzv. restituční faktor, udávající poměr rozdílu adiabatické teploty stěny a statické teploty vnějšího proudu a rozdílu skutečné klidové teploty a statické teploty vnějšího proudu, tj.

$$r = \frac{T_{st ad} - T_\infty}{T_{0\infty} - T_\infty}. \quad (\text{XIII.19})$$

Hodnota  $r$  je funkcí Prandtlova čísla  $\Pr = \gamma c_p / \lambda$ , vyjadřujícího poměr množství tepla, které se v mezní vrstvě vyvine vazkým třením k množství tepla, odvedenému molekulárním transportem. Pro vzduch je střední hodnota  $\Pr = 0,72$ .

V laminární mezní vrstvě je  $r \approx 1/\Pr$ , v turbulentní mezní vrstvě je  $r$  jen přibližně  $r \approx \sqrt[3]{\Pr}$ . Přesnější vztah ukazuje, že  $r$  zde závisí na rychlostním profilu a Reynoldsově čísle, např. dle vztahu

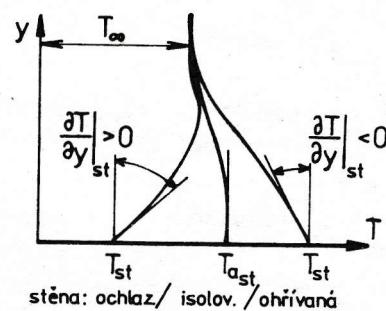
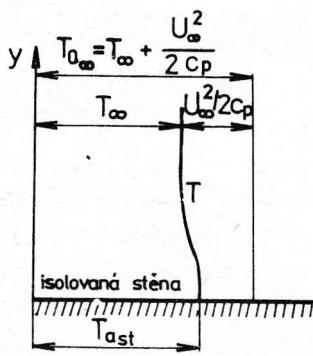
$$r = 1 - 4,55(1 - \Pr) Re^{-1/5}.$$

Pro vzduch je  $0,88 < r < 0,91$ , a to v závislosti na tvaru obtékaného povrchu. Pro rovinou deskou se blíží horní hranici, pro cylindrické tělesa spodní hranici.

Není-li stěna tepelně izolována, závisí teplota stěny a gradient  $(\partial T / \partial y)_{st}$  na velikosti a smyslu tepelného toku stěnou, daného Fourierovým vztahem

$$q = -\lambda (\partial T / \partial y).$$

Při proudění vysokými rychlostmi musíme vzít při řešení mezní vrstvy v úvahu i změny hustoty  $\rho$ . Ohřevem tekutiny u stěny klesá hustota a současně s tím roste dynamická vazkost. Průběh teploty je pak dle obr. XIII.12.



obr. XIII.12

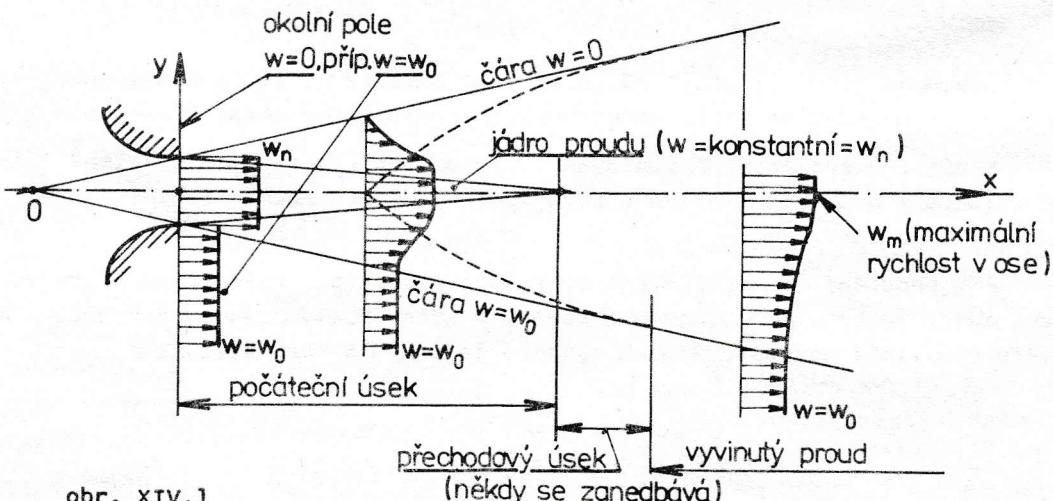
## XIV. VOLNÝ PROUD. ÚPLAV. EJEKTOR

## XIV.1 Volný turbulentní subsonický proud

Proudové pole v kanálech, lopatkových mřížích, apod. je ohrazeno pevnými stěnami, které mohou být i částečně propustné. Kromě toho existuje v tekutině proudová pole, jejichž hranici tvoří stojící, popř. proudící tekutina, a to buď stejného druhu, nebo i zcela rozdílná. Jsou to

- a) volné proudy, v nichž má tekutina zpravidla vyšší hybnost než tekutina okolní. V ideální tekutině je volný proud ohrazen tzv. tangenciální nespojitostí (vírovou vrstvou), v reálné (vazké) tekutině mezni (smykovou) vrstvou.
- b) úplavy za tělesy (profily), v nichž má vždy tekutina výrazně nižší hybnost, než tekutina okolní.

V aplikacích, s nimiž se setkáváme v letecké vnitřní aerodynamice je mezni vrstva, ohraňující proud, prakticky vždy turbulentní (jsou jiné obory, kde má naopak význam jen laminární proud - paprsek - např. textilní strojírenství). Budeme se proto nejdříve zabývat volným turbulentním proudem, vytékajícím subsonickou rychlosťí z nerozšířené dýzy. (Obr. XIV.1)



obr. XIV.1

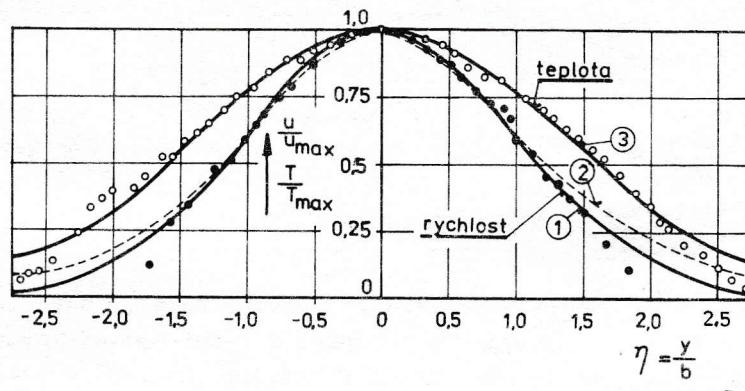
V ústí dýzy je proud homogenní ( $w(y) = w_n = \text{konst}$ ), přičemž jeho rychlosť  $w_n$  je větší než rychlosť okolí ( $w_n > w_0$ ). Na hranici proudu vzniká postupně narůstající mezni vrstva (viz obr. XIV.1), v niž dochází k turbulentnímu mišení proudu s okolní tekutinou. Tato vrstva postupně narůstá tak, že na počátku tzv. přechodového úseku zcela vymizí původní proud (jádro proudu o rychlosti  $w_n$ ). Za timto místem dochází v oblasti tzv. vyvinutého proudění k postupnému vyhlazování rychlostního profilu.

Experimenty i teoretické úvahy (srovnej s Prandtlovou teorií mezni vrstvy) ukazují, že

- statický tlak napříč proudem je všude konstantní a roven statickému tlaku na hranici proudu (odpovídajícímu buď  $w = 0$ , nebo  $w = w_0$ ),
- v jádře proudu je rychlosť konstantní a rovna  $w = w_n$ ,
- příčné složky rychlosťi jsou vzhledem k podélným zanedbatelné. (Přesně vzato, podélné složky rychlosťi mají směr radiál, vycházejících z bodu O, příčné složky mají směr tečen ke kružnicím se středem v bodě O.)
- profily bezrozměrových rychlosťí ve vyvinutém proudu jsou si podobné (automodelní), tj. lze je vyjádřit universální závislostí typu

$$\frac{w - w_0}{w_m - w_0} = f\left(\frac{y}{y_c}\right), \text{ resp. pro } w_0 = 0 \quad \frac{w}{w_m} = f\left(\frac{y}{y_c}\right), \quad (\text{XIV.1})$$

kde  $w$  je rychlosť na vzdálenosti  $y$  od osy proudu,  $w_m$  je maximální rychlosť v ose,  $y_c$  je vzdálenost od osy do místa, kde má rychlosť poloviční hodnotu maximální rychlosťi, tj.  $w_c - w_0 = \frac{1}{2}(w_m - w_0)$ .



obr. XIV.2

Změnu rychlosťi podél osy proudu vypočteme ze zákona zachování hybnosti. Je-li  $A(x)$  plocha proudu v řezu  $x$ , je

$$\int_A \rho w^2 dA = \text{konst}. \quad (\text{XIV.2})$$

Pro osově souměrný proud jehož hranice má poloměr  $R$  je

$$w_m^2 x^2 \int_0^{R/x} \left(\frac{w}{w_m}\right)^2 \frac{y}{x} \frac{dy}{x} = \text{konst}. \quad (\text{XIV.3})$$

Vzhledem k předpokladu o podobnosti rychlosťních profilů je integrál v předchozím výrazu roven konstantě, takže

$$w_m = \frac{\text{konst}}{x}, \quad (\text{XIV.4})$$

tj. rychlosťi v ose osově symetrického proudu ubývá nepřímo úměrně se vzdáleností od bodu O. Jelikož polohu bodu O neznáme, a vzdálenost měříme od ústí dýzy, používáme vztahu (Abramovič)

$$\frac{w_m}{w_n} = \frac{0,96}{(0,7 \div 0,8) \frac{x_s}{R} + 0,29}, \quad (\text{XIV.5})$$

kde  $x_s$  je vzdálenost od ústí dýzy.

Tok hmotnosti proudem je

$$V = \int_0^R w d(\pi r^2) = 2\pi \int_0^R w r dr , \quad (\text{XIV.6})$$

ev. pro stejnou úpravu jako u předchozího vztahu

$$\frac{V}{V_n} = 2,18(0,7 \div 0,8) \frac{x_s}{R} + 0,29 . \quad (\text{XIV.7})$$

Zcela analogicky lze vyjádřit i teplotní profil, pokud se jedná o ohřátý proud. Zavedeme

$$\frac{T - T_o}{T_m - T_o} = F\left(\frac{y}{x}\right) . \quad (\text{XIV.8})$$

Pokles teploty v ose proudu vyplývá ze zachování entalpie proudu, tj.

$$\int_A c_p (T - T_o) \rho w dA = \text{konst} .$$

Tato podmínka vede na vztah

$$(T_m - T_o) = \frac{\text{konst}}{x} . \quad (\text{XIV.9})$$

## XIV.2 Úplav

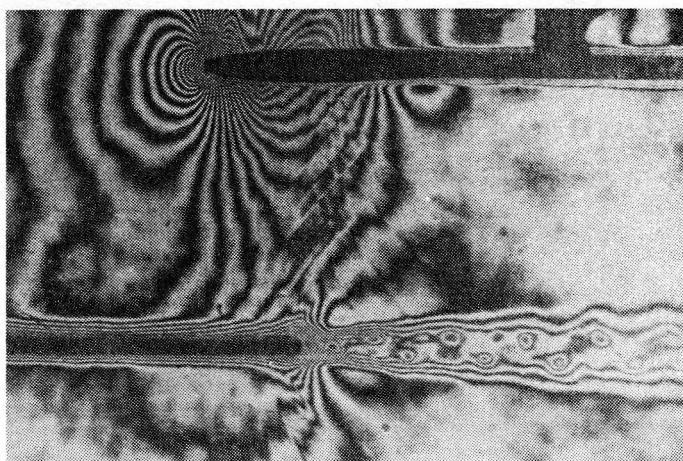
Úplav za tělesem (profilem) je částí proudového pole, v němž je tekutina zbrzděna obtékaným tělesem. S vyjimkou proudění s velmi malými Reynoldsovými čísly se úplav vyvíjí z mezních vrstev na tělese (profilu). Je tedy ve svém počátku určen vývojem a stavem mezních vrstev na odtokové hraně. Čím je tloušťka mezní vrstvy větší, tím větší je i příčný rozměr úplavu a jemu úměrné ztráty hybnosti. K výraznějšímu zvýšení ztrát dochází při odtržení mezní vrstvy, a to především na tělese (profilu), popř. na odtokové hraně konečné tloušťky.

Jelikož rychlosť tekutiny mimo úplav je vyšší než tekutiny v úplavu, vzniká na hranici úplavu smyková vrstva s rotací částic tekutiny směřující do úplavu.

Proudění v úplavu je v převážné většině připadů, s nimiž se v aerodynamice setkáme, turbulentní a nestacionární. V úplavu se vyvíjí systém šachovitě rozmištěných výrů - tzv. Kármánova výrová řada. Na interferogramu na obr. XIV.3 je zviditelněna tato výrová řada za profilem lopatkové mříže. Z obrázku jsou rovněž patrný poruchy, které tato výrová řada vysílá přibližně z místa jejího vzniku do proudového pole. Zejména poruchy vysílané proti proudu mohou nepříznivě ovlivnit kmitání profilu, resp. celé aeroelastické řešení (vznik tzv. buffetingu).

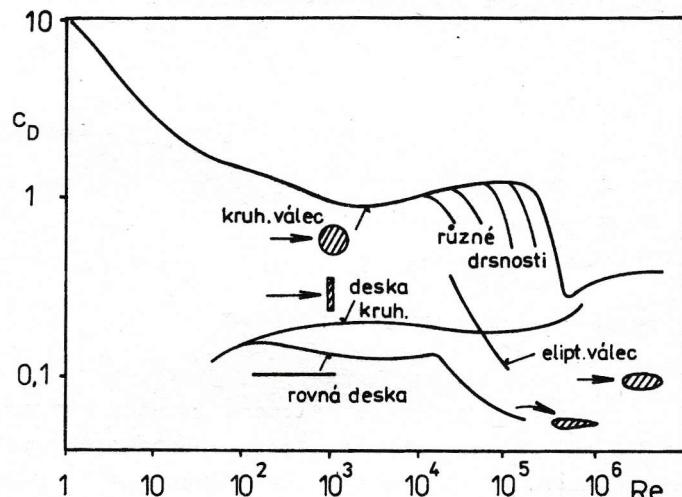
Z diagramu na obr. XIV.4 je zřejmé, že v oblasti vyšších Reynoldsových čísel závisí odporový součinitel  $C_d$  výrazně především na tloušťce odtokové hrany, popř. na odtržení proudu (např. válec, nebo deska postavená kolmo k proudu).

Řešení proudění v úplavu se vymyká rozsahu těchto přednášek. V zásadě však lze říci, že statický tlak napříč úplavu je prakticky konstantní. Rychlostní profil od určité vzdálenosti za tělesem prakticky nezávisí na tvaru obtékaného tělesa a vyvíjí se podobně, jako volný proud. Šířka úplavu narůstá přímo úměrně s odmocninou vzdálenosti od odtokové hrany (tj. s  $\sqrt{x}$ ), nerovnoměrnost rychlosti v úplavu ( $1 - w_{min}/w_{max}$ ) klesá přibližně opět s  $\sqrt{x}$ .

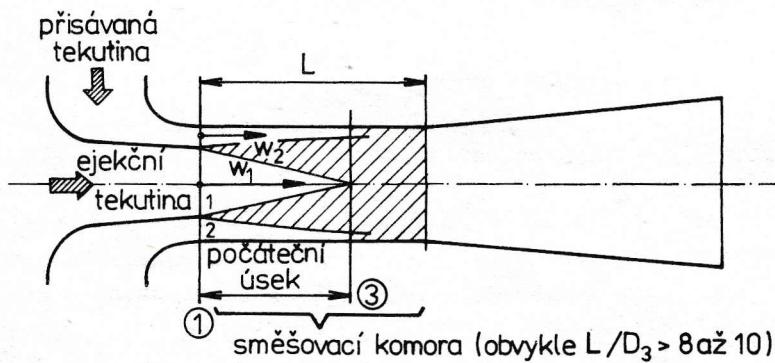


obr. XIV.3

obr. XIV.4

XIV.3 Ejektor

Ejektor je proudové přístroje, využívající proudu tekutiny o vyšším tlaku k nasávání, ev. stlačování tekutiny o nižším tlaku.



obr. XIV.5

Pro jednoduchost budeme v dalším předpokládat, že lze zanedbat vliv tření že se u obou proudů jedná o plyn se stejným  $\gamma$ , proudění je adiabatické a osově symetrické.

Při ustáleném provozu ejektoru se vytvoří za řezem 1 nad hranicí vytékajícího proudu podtlak, který přisává tekutinu určitou rychlostí  $w_2$ . Schopnost přisávání závisí na rozdílu rychlosti proudů 1 a 2, na absolutní hodnotě rychlosti proudu 1, na velikosti plochy hranice proudu 1, aj. Zpravidla zavádime tyto dynamické a geometrické parametry, charakterizující práci ejektoru

- ejekční součinitel  $n = \frac{m_2}{m_1}$  (tj. poměr toků hmotnosti obou proudů),

- tlakový poměr  $\pi = \frac{P_{01}}{P_{02}}$  (tj. poměr klidových tlaků obou proudů),

- součinitel nerovnoměrnosti proudu ve směšovací komoře

$$\tau = A \int w^2 dA / \left( \int w dA \right)^2,$$

- poměr ploch na vstupu do směšovací komory

$$\alpha = \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1}{A_3 - A_1},$$

- poměr ploch v difuzoru

$$f = \frac{A_4}{A_3},$$

- poměrnou délku směšovací komory

$$L/D_3.$$

Směšovací proces v ejektoru je vždy provázen ztrátami. Ejekční účinek je možný jen za cenu těchto ztrát, způsobených výměnou hybnosti částic obou proudů podél jejich společné hranice. Navíc zde existují ztráty třením na stěnách a ztráta kinetické energie v důsledku mišení.

Předpokládáme-li, že k mišení dochází při konstantním tlaku, pak ze zákona o zachování hybnosti plyne

$$(m_1 + m_2) w_3 = m_1 w_1 + m_2 w_2$$

$$w_3 = \frac{m_1 w_1 + m_2 w_2}{m_1 + m_2}.$$

Kinetická energie směsi obou proudů je rovna

$$E_3 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) w_3^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 w_1 + m_2 w_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Ztráta kinetické energie je rovna rozdílu součtu kinetických energií obou proudů a kinetické energie směsi, tj.

$$\Delta E = E_1 + E_2 - E_3 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 - \frac{1}{2} \frac{(m_1 w_1 + m_2 w_2)^2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{tj. } \Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (w_1 - w_2)^2 = \frac{1}{2} \frac{n}{1+n} (w_1 - w_2)^2. \quad (\text{XIV.10})$$

Tyto ztráty zjevně rostou s rostoucím rozdílem rychlostí  $w_1$  a  $w_2$ . Pro daný ejekční součinitel  $n$  by se mělo  $w_2 \rightarrow w_1$ .

Změna statického tlaku ve směšovací komoře závisí na postupném vyrovnávání středního rychlostního profilu, závislého ovšem na průběhu směšování obou proudů.

Ukažme tento proces pro  $\rho = \text{konst}$ . V libovolném řezu směšovací komory pak bude platit

$$\rho \int_A w dA = \rho \bar{w} A, \quad \text{tj.} \quad \bar{w} = \frac{1}{A} \int_A w dA = \frac{m}{\rho A}. \quad (\text{XIV.11})$$

Z porovnání hybnosti "středního" proudu a nerovnoměrného proudu plyne (opět pro  $\rho = \text{konst}$ )

$$J = \rho \int_A w^2 dA, \quad \bar{J} = \rho \bar{w}^2 A = \rho \left( \int_A w dA \right)^2 A. \quad (\text{XIV.12})$$

Jejich poměr určuje v předchozím zavedený součinitel  $\tau$ .

Jelikož ve směšovací komoře dochází postupně k vyrovnávání proudu, součinitel  $\tau$  se postupně zmenšuje z hodnoty  $\tau > 1$  na  $\tau \rightarrow 1$ . Je tedy

$$\int_{(1)} w^2 dA > \int_{(2)} w^2 dA,$$

takže v hybnostní rovnici bude

$$\rho \int_{(1)} w^2 dA - \rho \int_{(2)} w^2 dA = (p_2 - p_1) A > 0,$$

tzv., že statický tlak ve směšovací komoře postupně narůstá.

Praktický výpočet ejektoru se provádí pomocí funkci dynamiky plynů, zavedených v IX. kapitole.

S označením dle obr. XIV.5 a dříve zavedenou funkcí  $z(M_*)$  napišeme zákon zachování hybnosti takto

$$m_1 w_1 + p_1 A_1 + m_2 w_2 + p_2 A_2 = m_3 w_3 + p_3 A_3,$$

t.j.

$$m_1 c_{*1} z(M_{*1}) + m_2 c_{*2} z(M_{*2}) = m_3 c_{*3} z(M_{*3}),$$

popř., zavedeme-li

$$n = \frac{m_2}{m_1}; \quad \theta = \frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{c_{*2}^2}{c_{*1}^2}; \quad m_3 = m_1 + m_2, \quad \text{ev.} \quad \frac{m_3}{m_1} = n + 1, \quad (\text{XIV.13})$$

bude

$$z(M_{*1}) + n \sqrt{\theta} \cdot z(M_{*2}) = \sqrt{(n+1)(n\theta+1)} z(M_{*3}). \quad (\text{XIV.14})$$

Dále

$$\frac{T_{03}}{T_{01}} = \frac{c_{*3}^2}{c_{*1}^2} = \frac{n\theta+1}{n+1}. \quad (\text{XIV.15})$$

Každé hodnotě  $z(M_*)$  odpovídají dvě hodnoty  $M_*$ . To znamená, že pro dané parametry proudu na vstupu dostáváme dvě možné rychlosti na výstupu ze směšovací komory.

Rovnice (XIV.14) a (XIV.15) určují  $M_{*3}$  a  $T_{03}$ . Klidový tlak  $p_{03}$  vypočteme z rov. (XIV.13), dosadíme-li za  $m$  z rov. (IV.66)  $m = K(p_0 / \sqrt{T_0}) A q(M_*)$ .

Je-li  $A_3 = A_1 + A_2$  a  $\alpha = A_1/A_2$ , takže  $A_3/A_1 = 1 + (1/\alpha)$ , bude

$$\frac{p_{03}}{p_{01}} = \frac{\sqrt{(n+1)(n\theta+1)}}{1 + \frac{1}{\alpha}} \frac{q(M_{*1})}{q(M_{*3})}. \quad (\text{XIV.16})$$

Ejekční součinitel  $n = m_2/m_1$ , je vázán poměrem ploch  $\alpha$  a s parametry proudu na vstupu do směšovací komory vztahem

$$n = \frac{m_2}{m_1} = \frac{\rho_{02} A_2 q(M_{*2}) \sqrt{T_{01}}}{\rho_{01} A_1 q(M_{*1}) \sqrt{T_{02}}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{01}} \frac{q(M_{*2})}{q(M_{*1})} \frac{1}{\alpha \sqrt{\theta}} \quad (\text{XIV.17})$$

Rov. (XIV.13) až (XIV.17) už tvoří úplný systém rovnic potřebný pro řešení ejektoru. Zatím nebyly uvažovány ztráty třením ve směšovací komoře. Silový účinek tření vyjádříme vztahem

$$\xi = \xi \frac{L}{D} \frac{M_{*3}^2}{2} g_3 A_3 = \xi m c_{*3} M_{*3}, \quad \text{kde} \quad \xi = \frac{1}{2} \xi \frac{L}{D}.$$

Doplníme-li bilanci hybnosti o tuto sílu, dostaneme po úpravě

$$z(M_{*1}) + n \sqrt{\theta} z(M_{*2}) = \sqrt{(n+1)(n\theta+1)} \left[ z(M_{*3}) + \frac{2x}{x+1} \xi M_{*3} \right],$$

odkud vypočteme  $M_{*3}$  s uvažováním tření ve směšovací komoře délky  $L$ . Tím jsou určeny všechny parametry proudu na výstupu ze směšovací komory, a tedy i na vstupu do následujícího difuzoru.

Při adiabatickém proudění v difuzoru je  $T_{03} = T_{04}$ ,  $c_{*3} = c_{*4}$ . Známe-li účinnost  $\eta_d$  difuzoru zvoleného typu, vypočteme snadno parametry proudu na jeho výstupu ze směšovací komory. Z rovnice kontinuity

$$q(M_{*4}) = q(M_{*3}) \frac{1}{\eta_d f}, \quad \text{kde} \quad f = \frac{A_4}{A_3}$$

vypočteme  $M_{*4}$ . Je-li však dán statický tlak  $p_4$  na výstupu z difuzoru (např. atmosférický tlak, vytéká-li tekutina z ejektoru do atmosféry), pak je lepší vyjádřit tok hmotnosti pomocí funkce  $y(M_{*4})$  a  $M_{*4}$  vypočítat ze vztahu

$$y(M_{*4}) = q(M_{*3}) \frac{\rho_{03}}{p_4} \frac{1}{f}.$$

Dále

$$w_4 = M_{*4} c_{*4}, \quad P_4 = \rho_{04} \pi(M_{*4}), \quad \beta_4 = \frac{\rho_{04}}{R T_{04}} \left[ 1 - \frac{x-1}{x+1} M_{*4}^2 \right]^{\frac{1}{x-1}}.$$

Na vstupu do ejektoru můžeme zvolit jednak rychlosti v obou proudech, jednak ejekční tlak, poměr ploch, popř. poměr toků hmotnosti. Zvolíme-li však libovolně  $M_{*2}$  není ještě zaručeno, že tento režim skutečně nastane. Hlavním důvodem je aerodynamické upcpání (zahlcení) ve směšovací komoře, k němuž může dojít ejekčním proudem. Ten buď plně zahltí průtočný průřez směšovací komory, takže přisávané množství je nulové ( $m_2 = 0$ ), nebo seškrtí průtočný průřez tak, že zde vznikne kritický průřez (zvukové hrdlo). Pak sice není  $m_2$  nulové, ale nastaví se úměrně poměru plochy hrdla a plochy průřezu v přisávaném proudu.

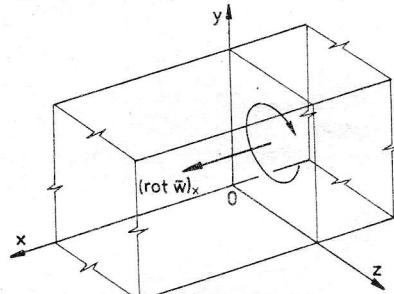
V popisovaném uspořádání se užívají ejektoru jako prostředek ke zvýšení tahu proudových motorů (viz např. Abramovič).

Existuje ještě druhá možnost uspořádání ejektoru, kde ejekční proud vystupuje štěrbinou po obvodu a nassává se střední dýzou. V tomto uspořádání se užívá např. k pohonu aerodynamických tunelů (viz např. Howarth, Ed.). Rozdíly obou koncepcí jsou tak výrazné, že stojí za povšimnutí.

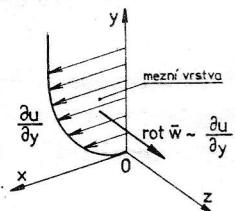
Zatímco ejektor dle obr. XIV.5 má ejekční součinitel  $n = 0,25$  až  $0,1$ , v druhém případě je  $n = 5$  až  $20$ . Štěrbinová dýza po obvodě je tedy značně účinnější než dýza v ose ejektoru, a to zejména díky větší ploše, na niž dochází k mišení obou proudění.

## XV. SEKUNDÁRNÍ PROUDĚNÍ

Sekundárním prouděním označujeme ve vnitřní aerodynamice proudění v rovině  $(y, z)$  kolmé na směr základního proudění (obr. XV.1).



Obr.XV. 1



V uzavřených kanálech mohou vznikat při proudění reálné (tj. vazké) tekutiny 2 druhy sekundárního proudění, označované jako sekundární proudění 1.druhu a sekundární proudění 2.druhu.

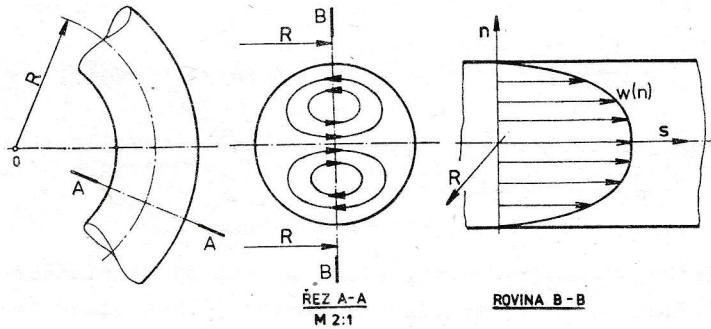
Sekundární proudění 1.druhu má čistě kinematické příčiny. Je nezávislé na charakteru proudění (laminární, ev. turbulentní) a vzniká vždy, prochází-li nerovnoměrný (smykový) proud oblastí s nerovnoměrným rychlostním polem v rovině kolmé na rovinu nerovnoměrnosti základního proudu.

Např. u mezní vrstvy s nerovnoměrností v rovině  $(x, y)$  se jedná o nerovnoměrnost v rovině  $(x, z)$ . Tato druhá nerovnoměrnost může být způsobena např. zakřivením kanálu v rovině  $(x, z)$ , (pak vzniká i v ideální tekutině), nebo vazkostí (např. mezní vrstvou na bočních stěnách).

Uvažujme např. řez B-B v potrubí konstantního kruhového průřezu, který má všude poloměr  $R$  (obr. XV.2). Odstředivá síla působící na částici tekutiny je

$$\rho R \omega^2 = \rho \frac{w^2}{R},$$

kde  $w$  je rychlosť v rovině B-B na poloměru  $R$ ,  $\omega$  je úhlová rychlosť  $\omega = w/R$ .



Obr.XV. 2

ROVINA B-B

Vzhledem k platnosti Prandtlova vztahu  $\partial p / \partial n = 0$  je tlak na všech proudnicích v rovině B-B stejný. Odstředivá síla částic s menší rychlosťí je ale menší, než částic s větší rychlosťí u osy kanálu a proto dochází k pohybu částic v rovině A-A, jak naznačeno na obrázku.

Intenzitu tohoto vírového pohybu v rovině A-A (např. rovina  $y, z$ ) udává složka vektoru vířivosti  $\vec{\omega}$  kolmá na tuto rovinu, tj. složka ve směru s rychlosťí základního proudu

$$\omega_s = \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}$$

Výsledkem nejjednoduššího matematického řešení je toto zjištění:

V proudu obsahujícím počáteční vířivost  $\vec{\omega}$  kolmou na rychlosť proudu a rovnoběžnou s rovinou, v níž se proud zakřivuje, vznikne po zakřivení o úhel  $\theta$  složka vířivosti ve směru proudu rovná přibližně

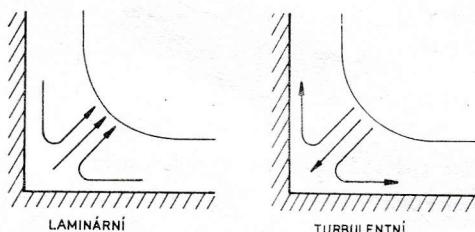
$$\omega_s \doteq 2\theta \vec{\omega}$$

Teoretické řešení ukazuje, že ve vazecké tekutině vzniká v zakřiveném kanále složka  $\omega_s$  vždy, tj. bez ohledu na kinematické podmínky.

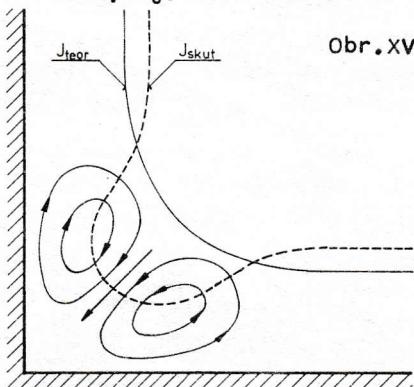
Sekundární proudění 2.druhu je vyvoláno gradientem Reynoldsových napětí  $\partial(-\rho w_i' w_j') / \partial x_i$ . Tzn., že vzniká pouze v turbulentním proudu, aniž by bylo vázáno na zakřivení proudu (tj. může vzniknout i v přímém kanále). Zpravidla je sekundární proudění 2.druhu o řád méně intenzivní než předchozí.

Poznámka:

Měření Zamira a Younga (1970) ukázala, že v blízkosti bodu odtržení laminární mezni vrstvy na stěnách kanálu obdélníkového průřezu se může rovněž vyskytnout sekundární proudění 2.druhu. Má však opačný směr než v turbulentním proudu (obr. XV.3). V turbulentní mezni vrstvě je charakter tohoto sekundárního proudění dle obrázku. Čárkovaně je zde zakreslena i deformace izovel, tj. čar konstantní rychlosti. (obr. XV.4)



obr.XV. 3



Obr.XV. 4

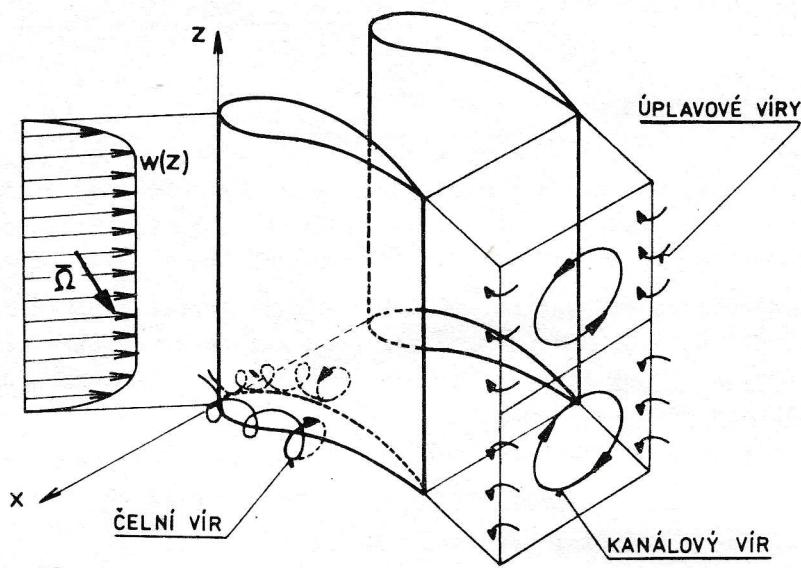
#### Sekundární proudění v lopatkových mřížích.

Lopatkové mříže jsou typickým příkladem zakřiveného kanálu, v němž se vyskytuje sekundární proudění.

K virům, které zde vznikají v důsledku sekundárního proudění 1. i 2.druhu navíc přistupuje

- vliv rozdílného rozložení tlaku na protějších stěnách mezi lopatkovým kanálu, které vede k přetékání tekutiny v příčném řezu od předtlakové strany jedné lopatky k podtlakové straně sousední lopatky,
- čelní podkovovitý vir, který vzniká u paty lopatek.

V mezi lopatkovém kanálu se tyto viry různě proplétají a mísí, takže výsledný vir na výstupu z mříže je už zpravidla výsledník všech těchto virů (obr. XV.5)



Obr. XV. 5