Diplomová práce

České
vysoké
učení technické
v Praze

F2

Fakulta strojní
Ústav technické matematiky

Tvarová optimalizace lopatkové mříže sdruženou metodou

Bc. Pavel Mačák

Vedoucí: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.
Obor: Matematické modelování v technice
Studijní program: Aplikované vědy ve strojním inženýrství
Leden 2022

*

ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příjmení: **Mačák** Jméno: **Pavel** Osobní číslo: **465509**

Fakulta/ústav: **Fakulta strojní**

Zadávající katedra/ústav: **Ústav technické matematiky**

Studijní program: **Aplikované vědy ve strojním inženýrství**

Specializace: **Matematické modelování v technice**

II. ÚDAJE K DIPLOMOVÉ PRÁCI

Název diplomové práce:

Tvarová optimalizace lopatkové mříže sdruženou metodou

Název diplomové práce anglicky:

Shape optimization of blade cascade with adjoint method

Pokyny pro vypracování:

Student se seznámí s principy sdružené metody pro tvarovou optimalizaci.
V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizační cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence.

Seznam doporučené literatury:

[1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007.
[2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009.
[3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th World Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics,
[4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620

Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:

doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS

Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:

Datum zadání diplomové práce: **21.10.2021** Termín odevzdání diplomové práce: **16.01.2022**

Platnost zadání diplomové práce: ______________

doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce	doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry	prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. podpis děkana(ky)

III. PŘEVZETÍ ZADÁNÍ

Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.
Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.

.

Datum převzetí zadání Podpis studenta

v

*

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu práce doc. Ing. Jiřímu Fürstovi, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce. Zároveň děkuji své rodině a přátelům za jejich podporu při studiu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze, 1. ledna 2022

Abstrakt

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Klíčová slova: Optimalizace, CFD, OpenFOAM, Lopatková mříž

Vedoucí: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.
Ústav technické matematiky
Resslova 307/9
Praha 6

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Keywords: Optimization, CFD, OpenFOAM, Compressor cascade

Title translation: Shape optimization of blade cascade with adjoint method

Obsah

Obrázky

Tabulky

*

Kapitola 1

Úvod

This is uvod

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Část I

Teoretická část

Kapitola 2

Základy numerického řešení nestlačitelných NS rovnic

Problém proudění či mechanika tekutiny je v rámci této práce chápán jako zkoumání pohybu velkého množství částic a jejich interakce. Velké množství ve smyslu, že zkoumané fluidum má takovou hustotu, že lze použít aproximaci reality pomocí matematického kontinua. To nám říká, že i v nekonečně malá (infinitesimální) část tekutiny obsahuje dostatečný počet částic, pro které lze specifikovat střední rychlost a střední kinetickou energii. Jsme tak schopni definovat pojmy rychlost, tlak, teplota, hustota a další důležité veličiny jako spojité funkce v rámci celého kontinua. Tato kapitola vychází různou měrou z publikací [1, 2, 5, 10, 3]

2.1 Základy matematického popisu proudění

Odvození základních rovnic mechaniky tekutin se opírá tzv. zákony zachování. Pro případ obecné tekutiny to jsou

1. zachování hmoty
2. zachování hybnosti a
3. zachování energie.

Pro případ nestlačitelné tekutiny si pak vystačíme pouze s prvními dvěma zmíněnými zákony zachování.

Zachování určité veličiny znamená, že její časovou změnu uvnitř libovolného objemu lze vyjádřit jako množství veličiny proudící přes hranici zvoleného objemu a produkci veličiny uvnitř objemu. Často se také mluví o bilanci veličiny v určitém objemu. Množství veličiny, které proudí přes hranici objemu se nazývá tok. Obecně se tok dá rozdělit na dvě složky. Konvekci, způsobenou konvektivním přenosem veličiny, a difuzi, způsobenou pohybem molekul tekutiny v klidovém stavu. Difuzivní přenos závisí na gradientu dané veličiny a pro případ homogenní distribuce tedy vymizí.

2.1.1 Kontrolní objem a zákon zachování

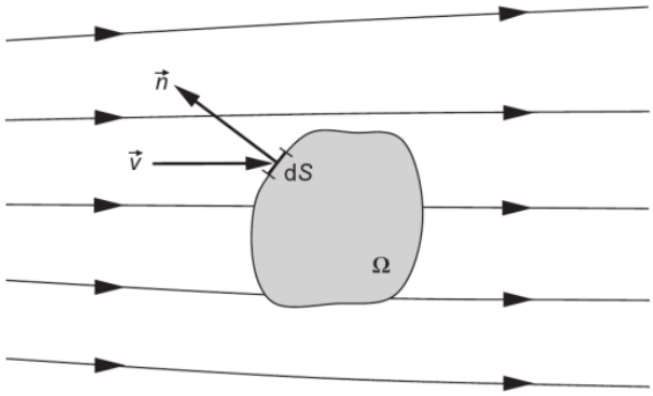
V předchozí kapitole se o zákonech zachování mluvilo v kontextu jistého objemu. Takovémuto libovolně zvolitelnému objemu se často říká kontrolní objem, nebo - pro účely numerické matematiky vhodněji - konečný kontrolní objem.

Mějme obecný kontrolní objem Ω s uzavřenou hranicí Γ, který je pevný v prostoru s daným proudovým polem jak naznačuje obrázek 2.1. Zároveň lze definovat element hranice $\mathrm{d}S$ a jeho vnější normálu $\mathbf{n}$.

Pro obecnou zachovávanou veličinu W lze zákon zachování psát jako

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega W \,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \mathbf{F}(W)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega Q_\Omega(W)\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Gamma}}(W)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \quad (2.1)$$

kde $Q_\Omega(W)$ jsou objemové a $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\Gamma}}(W)$ povrchové zdroje a $\mathbf{F}(W)$ je vektor hustoty toku veličiny W plochou Γ. Zákon v této formě je formálně platný



Obrázek 2.1: Pevný kontrolní objem v obecném proudovém poli. [1] PREDELAT PODLE ZNACENI V TEXTU

jak pro skalární veličinu W tak vektorovou $\mathbf{W}$. Speciálně pak pro skalární veličinu lze člen s tokem přes hranici rozdělit, podle dříve zmíněného dělení, na konvektivní tok

$$\mathbf{F_K}(W) = W\mathbf{u} \tag{2.2}$$

a difuzivní tok vyjádřený pomocí zobecněného Fickova gradientního zákona

$$\mathbf{F_D}(W) = \kappa\rho\nabla(W/\rho), \tag{2.3}$$

kde κ je koeficient difuzivity a dohromady tedy

$$\int_\Gamma \mathbf{F}(W)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_\Gamma W\,[\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}] - \kappa\rho\,[\nabla(W/\rho)\cdot\mathbf{n}]\,\mathrm{d}S. \tag{2.4}$$

Rovnici 2.1 tak můžeme rozepsat do podoby

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega W\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma W\,[\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}] - \kappa\rho\,[\nabla(W/\rho)\cdot\mathbf{n}]\,\mathrm{d}S = \int_\Omega Q_\Omega(W)\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \mathbf{Q_\Gamma}(W)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{2.5}$$

Pro vektorovou veličinu lze udělat velmi podobné rozdělení, pouze s tím rozdílem, že všechny tři funkce W ($\mathbf{F}, Q_\Omega, \mathbf{Q_\Gamma}$) budou o jeden tenzorový řád vyšší. Rovnice 2.1 s rozdělením na tenzory konvektivního a difuzivního toku tak dostane podobu

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \mathbf{W}\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma (\mathbb{F}_K(\mathbf{W}) - \mathbb{F}_D(\mathbf{W}))\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \mathbf{Q_\Omega}(\mathbf{W})\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \mathbb{Q}_\Gamma(\mathbf{W})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S. \tag{2.6}$$

Takto odvozený obecný zákon zachování (někdy taky bilanční rovnici) lze využít pro odvození základních rovnic proudění.

2.1.2 Zákon zachování hmoty, Rovnice kontinuity

Pro jednosložkové tekutiny vyjadřuje zákon zachování hmoty, tedy že hmotu v systému nelze vytvořit, ani ztratit, i.e. zdroj hmoty se uvnitř kontrolního nepředpokládá. Musí tedy platit, že změna hmotnosti uvnitř kontrolního objemu musí být rovna toku hmoty přes hranice kontrolního objemu, tedy

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho\,\mathrm{d}V = \int_\Gamma \rho\,u_i\,n_i \mathrm{d}S = \int_\Omega \frac{\partial\,(\rho u_i)}{\partial x_i}\mathrm{d}V. \tag{2.7}$$

Po převedení obou integrálů na jednu stranu, záměně operací integrace a derivace a vyžití distributivity integrálu vzhledem k operaci součet, dostáváme obecný tvar rovnice kontinuity pro nestacionární proudění stlačitelné tekutiny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial\,(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \tag{2.8}$$

Ke stejné rovnici dojdeme, pokud do rovnice zachovaní 2.5 dosadíme za obecnou skalární veličinu W hustotu ρ, uplatníme předpoklad nulových zdrojů na pravé straně a uvědomíme si, že difuzivní tok z rovnice 2.3 bude nulový, neboť

$$\nabla(W/\rho) = \nabla(\rho/\rho) = \nabla(1) = 0. \tag{2.9}$$

Za předpokladu nestlačitelnosti tekutiny, tedy že $\rho = konst.$ lze navíc rovnici 2.8 zjednodušit na

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2.10}$$

což se běžně označuje jako rovnice kontinuity pro proudění nestlačitelné tekutiny (v indexovém a vektorovém zápisu).

2.1.3 Zákon zachování hybnosti, Rovnice hybnosti

Odvození rovnice hybnosti vychází z druhého Newtonova zákona, který říká, že změna hybnosti je způsobena součtem sil účinkujících na element hmotnosti. Hybnost nekonečně malé části kontrolního objemu je

$$\rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \tag{2.11}$$

a tedy změna hybnosti uvnitř kontrolního objemu je

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho\mathbf{u}\,\mathrm{d}V. \tag{2.12}$$

Sledovanou zachovávanou veličinou vektorovou veličinou $\mathbf{W}$ z analogie předchozího vztahu s prvním členem rovnice 2.6 je hybnost $\rho\mathbf{u}$. Formálním použitím rovnice 2.2 dostáváme vztah pro tenzor konvektivního toku

$$\mathbb{F}_K(\rho\mathbf{u})\cdot\mathbf{n} = \rho\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) \tag{2.13}$$

Difuzivní tok zůstává nulový neboť hybnost nemůže difundovat v tekutině za klidového stavu.

Nejdůležitější částí odvození rovnice hybnosti je interpretace zdrojových členů. Zdroj hybnosti je z hlediska fyziky vždy síla.

1. Objemové síly působí na hmotu v celém kontrolním objemu e.g. síla gravitační, inerciální, Coriolisova či elektromagnetická etc.
2. Povrchové síly působí přímo na povrchu Γ kontrolního objemu. Jedná se o deformační působení vnějších sil. Tenzor napětí, kterým se často toto působení vyjadřuje lze rozdělit na sférickou a deviátorovou složku, které v případě tekutin lze interpretovat jako působení tlaku okolí a smykové a normálové napětí vznikající mezi okolím a kontrolním objemem.

Objemové zdroje lze vyjádřit jednoduše. Pokud příslušnou vnější sílu vztáhneme na jednotku objemu $\rho\mathbf{f_e}$ lze psát

$$\int_\Omega \mathbf{Q_\Omega}\mathrm{d}V = \int_\Omega \rho\mathbf{f_e}\,\mathrm{d}V. \tag{2.14}$$

Povrchové zdroje jsou rozdělené na sférické působení okolního tlaku p a tenzor viskózního napětí τ, tedy

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}_\Gamma &= -p\mathbb{I} + \tau,\\ Q_{\Gamma ij} &= -p\delta_{ij} + \tau_{ij},\end{aligned}$$

kde $\mathbb{I}$ je jednotkový tensor, případně δ_{ij} Kronekerovo delta. Pro Newtonskou tekutinu lze tenzor viskózního smykového napětí vyjádřit podle [5] jako

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right], \tag{2.15}$$

za předpokladu konstantní dynamické viskozity μ jak poukazuje [2].

Nyní lze již psát soustavu pohybových Navier-Stokesových (NS) rovnic v integrálním tvaru, tedy rovnice hybnosti pro stlačitelnou Newtonskou tekutinu, jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \rho \mathbf{u} \, \mathrm{d}V + \int_\Gamma \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + p\mathbf{n} - \tau \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \int_\Omega \mathbf{Q}_\mathbf{\Omega} \, \mathrm{d}V. \tag{2.16}$$

Často lze rovnici hybnosti nalézt i v diferenciálním tvaru, například v [5]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \mu \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = \rho \mathbf{f}_\mathbf{e} \tag{2.17}$$

2.1.4 NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu

Obecný systém NS rovnic lze pro speciální případy zjednodušit zanedbáním některých fyzikálních vlivů. V této práci budeme později využívat zjednodušený tvar NS rovnic pro nestlačitelnou tekutinu. Tedy $\rho = konst.$ čímž dostáváme rovnici kontinuity ve zjednodušeném tvaru 2.10, tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.18}$$

a NS rovnice hybnosti v diferenciálním tvaru podle [5] má podobu

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}_\mathbf{e}. \tag{2.19}$$

Rovnici hybnosti jde dále vydělit konstantou hustoty, čímž dostaneme jakýsi měrný tlak $\widehat{p} = \dfrac{p}{\rho}$ a rovnice 2.19 přejde do tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla \widehat{p} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_\mathbf{e}. \tag{2.20}$$

2.2 Základ metody konečných objemů

Metoda konečných objemů (MKO, anglicky Finite volume method - FVM) je jednou z nejpoužívanějších metod pro řešení PDR proudění - společně s konečnými diferencemi a metodou konečných prvků. Popularita MKO pro numerické řešení problému proudění tkví podle [5] v její obecnosti, srozumitelnosti základních principů a snadnosti implementace pro libovolné sítě i složitější geometrie.

Zásadní výhodou z hlediska přesnosti MKO je pak princip tzv. konzervativní diskretizace (konzervativní ve smyslu zachovávající). Udržet v platnosti základní zákony zachování je důležitý aspekt správnosti řešení. MKO má tu výhodu, že konzervativní diskretizace je podle [5] splněna automaticky díky přímé diskretizaci integrálního tvaru zákonů zachování.

2.2.1 Konečný objem

MKO nese svůj název podle způsobu prostorové diskretizace, tj. rozdělení zkoumané oblasti $\Omega = \mathbb{R}^d$ na vzájemně disjunktní neprázdné otevřené podoblasti Ω_j s konečnou velikostí, matematicky psáno

$$\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_i,$$
$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \text{ pro } i \neq j.$$

Tyto konečné objemy (někdy buňky) jsou analogií kontrolních objemů z podsekce 2.1.1. Jakmile máme takto rozdělenou výpočetní oblast, tak na každý konečný objem aplikujeme zákon zachování v integrálním tvaru. To si můžeme dovolit, neboť zákony zachování byly v sekci 2.1 odvozeny pro libovolný kontrolní objem a lze je tedy aplikovat na každý konečný podobjem zvlášť. Obecný zákon zachování popsaný rovnicí 2.1 má pro j-tý kontrolní objem tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} W \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma_j} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\Omega_j} Q_\Omega \, \mathrm{d}V, \tag{2.21}$$

kde pro jednoduchost zápisu ponecháváme jen objemové zdroje na pravé straně. Pro každý konečný objem nyní definujeme prostorově střední hodnotu sledované veličiny

$$\overline{W}|_{\Omega_j} = W_j(t) = \frac{1}{|\Omega_j|}\int_{\Omega_j} W(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V. \tag{2.22}$$

Stejným způsobem nahradíme i objemové zdroje v rovnici 2.21 a integrál toku **F** nahradíme součtem přes hranice. Dostaneme tvar rovnice zachování, napsanou pro j-tý kontrolní konečný objem

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_j|\Omega_j|) + \sum_{\forall f}\int_f \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = Q_j|\Omega_j|, \tag{2.23}$$

kde stěny f jsou jednotlivé části hranice Γ_j a všechny stěny tvoří vzájemně disjunktní pokrytí příslušné hranice. Stojí za to podotknout, že rovnice 2.23 je stále matematicky ekvivalentní k rovnici 2.21. Prozatím jsme ještě neprovedly žádné aproximace či přibližné náhrady.

2.2.2 Aproximace numerickým tokem

Nyní se pokusíme aproximovat integrál toku přes hranice z rovnice 2.23. Pro lepší představu teď předpokládejme, že tok zachovávané veličiny je dán z rovnic 2.3 a 2.2 jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}W - \kappa\nabla W. \tag{2.24}$$

Tok přes stěnu f (část hranice Γ_j) se souřadnicí středu $\mathbf{x_f}$ můžeme aproximovat pomocí

$$\int_f \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_f(\mathbf{u}W-\kappa\nabla W)\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \approx (\mathbf{u}W_f - \kappa\nabla W_f)\cdot\mathbf{S_f} = \mathbf{F_f}\cdot\mathbf{S_f}, \tag{2.25}$$

kde $\mathbf{S_f} = \int_{\Gamma_j}\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$, což je konstantní vlastnost geometrie stěny, $W_f(t) = W(\mathbf{x_f},t)$ a $\nabla W_f(t) = \nabla W(\mathbf{x_f},t)$.

Pro řešení úlohy je také potřeba zvolit, kde budou ukládány proměnné. Jinými slovy, jestli v našich rovnicích bude neznámá např. ve středu buňky (bude reprezentovat střední hodnotu v celé buňce) W_j, nebo uprostřed stěny W_f. V praxi se používá více možností i případných kombinací, jak uvádí [1, 5]. Standardně se používá ukládání hodnot ve středu buněk, ve středu stěn či ve vrcholech. V některých případech se objevuje i smíšený způsob (anglicky *staggered*), kde hodnoty různých veličin jsou ukládány na jiných místech. Dále budeme předpokládat, že proměnné uchováváme ve středu buněk (anglicky *cell-centered*), tedy že proměnnou bude hodnota W_j. Pro další postup je tedy potřeba aproximovat hodnoty W_f a $\nabla W_f \cdot \mathbf{S_f}$ pomocí zavedených neznámých ve středech buněk a získat tak $\mathbf{F_f} = \mathbf{F_f}(W_j)$. Poté již můžeme napsat semidiskrétní tvar (ve smyslu MKO) rovnice zachování skalární veličiny

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_j|\Omega_j|) + \sum_{\forall f} \mathbf{F_f} \cdot \mathbf{S_f} = Q_j|\Omega_j|. \tag{2.26}$$

Způsobů diskretizace numerického toku je mnoho, neboť jde o jednu ze stěžejních částí MKO. Numerický tok totiž zásadním způsobem ovlivňuje stabilitu a přesnost následného výpočtu. Dále jsou uvedeny pouze základní příklady způsobu diskretizace, neboť jejich rozbor není předmětem této práce.

Diskretizace difuzivního toku

Jak uvádí rovnice 2.25, aproximujeme člen difuzivního toku přes stěnu f jako

$$-\int_f \kappa \nabla W \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S \approx \mathbf{F_D} = -\kappa \nabla W_f \cdot \mathbf{S_f}. \tag{2.27}$$

Pro diskretizaci takového členu můžeme vztah upravit na

$$\mathbf{F_D} = -\kappa \frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}} S_f, \tag{2.28}$$

kde $\frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}}$ je tzv. derivace ve směru normály stěny f a S_f je plocha stěny. Pokud stěna f je právě mezi středy buněk $j = C$ a $j = N$, tedy n_f je vnější normála vzhledem k buňce C a vnitřní vzhledem k N, tak lze derivaci ve směru aproximovat pomocí

$$\frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}} \approx \frac{W_N - W_C}{||\mathbf{x_N} - \mathbf{x_C}||}. \tag{2.29}$$

Diskretizace konvektivního toku

Druhou částí toku přes střenu je konvektivní tok, z rovnice 2.25 tedy

$$\int_f \mathbf{u}W \cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}S \approx \mathbf{F_K} = W_f \mathbf{u_f} \cdot \mathbf{S_f} = W_f \phi_f, \tag{2.30}$$

kde jsme skalární součin $\mathbf{u_f} \cdot \mathbf{S_f}$ označily jako ϕ_f, tzv. konvektivní tok přes stěnu f. Interpolace W_f lze pro případ ortogonální sítě s konstantním krokem zapsat jednoduše jako

$$W_f = \frac{W_C + W_N}{2}. \tag{2.31}$$

Interpolaci lze provést i lepšími způsoby, které kompenzují případné nedokonalosti či nerovnoměrnosti v síti. Například pro ortogonální síť s nerovnoměrným krokem je vhodnější formulovat interpolaci jako

$$W_f \approx \frac{||\mathbf{x_{Nf}}||W_C + ||\mathbf{x_{Cf}}||W_N}{||\mathbf{x_{Nf}}|| + ||\mathbf{x_{Cf}}||} = \frac{||\mathbf{x_{Nf}}||W_C + ||\mathbf{x_{Cf}}||W_N}{||\mathbf{x_{CN}}||}, \tag{2.32}$$

kde $\mathbf{x_{jf}}$ je vektor mezi středem buňky $j = C, N$ a středem stěny f.

2.3 SIMPLE algoritmus

myslenka, 'podvod', relaxace

Algoritmus SIMPLE (zkratka pro *semi-implicit pressure linked equations*) pro řešení problému proudění nestlačitelné tekutiny lze v jeho původní variantě nalézt například v [9]. Od té doby se objevilo spoustu úprav a vylepšení jako SIMPLER, SIMPLEST nebo SIMPLEC.

2.3.1 Myšlenka segregovaných algoritmů

Algoritmus SIMPLE je jeden ze základních příkladů tzv. segregovaných algoritmů. Rovnice ze soustavy NS rovnic se zde neřeší jako jeden celek, ale odděleně každá zvlášť. Výhodou oproti klasickému sdruženému algoritmu je, že se vyhneme řešení rozsáhlé soustavy rovnic se špatně podmíněnou maticí, jak poukazuje [3].

Segregované algoritmy obecně naráží na problémy s konvergencí či přesností jakmile se zvýší závislost mezi jednotlivými rovnicemi soustavy. Jinými slovy matice soustavy sestavená sdruženou metodou začne být lépe podmíněná. V případě soustavy NS rovnic pro tekutinu o konstantní hustotě může být měřítkem fiktivní Machovo číslo $M = \frac{||\mathbf{u}||}{c}$, kde c má význam klidové rychlosti zvuku v tekutině.

2.3.2 Varianta algoritmu SIMPLE s rovnicí pro tlak

V softwarové knihovně OpenFOAM [13], která je pro potřeby aplikace v rámci této práce využita, je dle [3] algoritmus SIMPLE implementován v následující formě.

Nejprve se stanoví odhad rychlosti $\mathbf{u}^*$ pomocí tlak z předchozí iterace (případně z počáteční podmínky) z diskretizované rovnice hybnosti 2.20, ve které je konvektivní člen linearizován Picardovou aproximací. Pro odhad rychlosti tak dostáváme rovnici

$$a_C^0 \mathbf{u_C^*} = \sum_f a_{CN}^0 \mathbf{u_N^*} + \mathbf{Q_C^0} - \nabla p_c^0. \tag{2.33}$$

Zde horní indexy označují iteraci, tedy index ^{0} předchozí iteraci, index * odhad hodnoty nové iterace a později ^{n} hodnotu v nové iteraci. Dolní indexy pak označují buňku C, která sdílí stěnu f se sousední buňkou N. Koeficienty a jsou určeny podle metody diskretizace jednotlivých členů rovnice.

Označíme část rovnice pro odhad rychlosti

$$\frac{1}{a_C^0}\left(\sum_f a_{CN}^0 \mathbf{u_N^*} + \mathbf{Q_C^0}\right) = \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{C}^* \tag{2.34}$$

a po interpolaci na stěny

2

1 urceni odhadu rychlosti ze stareho tlaku, starych zdrojovych clenu a koeficientu a_C (relaxace rovnice) 3.86 2 urceni odhadu tlaku z noveho odhadu rychlosti 3.90 3 ziskani novych hodnot rychlosti a toku ϕ_f 3.91,3.92 4 vypocet noveho tlaku (relaxace korekce) 3.93

2.4 Turbulence, modelování turbulence

v rychlosti o RANS, model turbulence Spalart a K-Omega rozdil vyhody a vhodnost aplikace (ucel modelu)

Kapitola 3

Optimalizace sdruženou metodou

Zájem o optimalizaci proudění tekutin je od nepaměti a předmětem vědeckého bádání minimálně od doby vynalezení integrálního počtu [12]. Tato kapitola se zabývá základní definicí problému optimalizace a představuje známou, avšak v oblasti proudění tekutiny, prozatím nepříliš hojně užívanou metodu optimalizace. Dále jsou odvozeny základy této metody pro její aplikaci v druhé části této práce.

3.1 Základy optimalizace

Pro popis problému optimalizace se používají pojmy:

- *stavové proměnné* ϕ nebo také fyzikální veličiny či proměnné jako tlak, rychlost, teplota atd. dané většinou z konkrétních rovnic
- *návrhové parametry* g materiálové vlastnosti, vstupní rychlost, tvar geometrie nebo hranice

- *cílová funkce/funkcionál* $J(\phi, g)$ hodnocení kombinace stavových a návrhových parametrů, např. tlaková ztráta, stlačení nebo vztlak
- *vazební rovnice* $R(\phi, g) = 0$ rovnice proudění

Problém optimalizace lze pak matematicky formulovat následovně. [12]

Problém 3.1. *Nechť je dána množina parametrů $g = \{g_n, n = 1, ..., N\}$, cílová funkce $J(\phi, g)$ a vazební rovnice $R(\phi, g) = 0$. Najděte takovou kombinaci parametrů g a ϕ, která minimalizuje funkci $J(\phi, g)$ a zároveň splňuje platnost podmiňujících rovnic $R(\phi, g) = 0$.*

Metod na řešení optimalizačního problému je hned několik. Obecně je lze rozlišit na obecné a lokální optimalizační metody. Mezi všeobecně známe patři například metoda genetických algoritmu(obecná) a gradientní optimalizační metody(lokální). Základní rozdíl těchto metod je, že obecné optimalizační metody se zpravidla snaží přiblížit globálnímu optimu v celém prostoru přípustných parametrů, kdežto lokální metody na základě počátečního odhadu spadají do nejbližšího lokálního minima.

Typický optimalizační cyklus lokální metody lze zapsat následovně:

Mějme počáteční odhad $g^{(0)}$

Pro $n = 0, 1, 2...$

1. Vyřešit $R(\phi^{(n)}, g^{(n)})$ pro zjištění $\phi^{(n)}$
2. Spočítat $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)})$
3. Pomocí výsledků 1 a 2 zjistit optimální krok δg - např. $\delta g = -\alpha \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)})$
4. Změnit návrhové proměnné $g^{(n+1)} = g^{(n)} + \delta g$

Různé algoritmy se odlišují ve způsobu vyhodnocení gradientu v kroku 2. (citlivostní gradient, sdružená metoda) a následně se větví při volbě vhodného optimalizačního kroku (CGM, BFSG).

3.2 Metoda sdružené optimalizace

Metoda sdružené optimalizace se snaží vyřešit problém popsaný v sekci 3.1. Jde o speciální případ gradientní metody optimalizace, a tedy se předpokládá, že původní výběr optimalizovaných parametrů se nachází poměrně blízko hledaného optima. Nové, optimálnější řešení se dostane podle předpisu

$$g^{(n+1)} = g^{(n)} - \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}), \tag{3.1}$$

kde $\alpha < 0$ je délka kroku. Co se týče znaménka v rovnici 3.1, tak to je v tomto případe $-$, neboť dle problému 3.1 hledáme minimum funkcionálu J a tedy musíme dělat krok proti směru nejvyššího růstu i.e. ve směru opačném ke gradientu.

Hlavním znakem sdružené gradientní optimalizace je způsob vyhodnocení gradientu cílové funkce vzhledem parametrům, tedy $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}$. Pro vyhodnocení tohoto gradientu jsou odvozeny nové parciální diferenciální rovnice (PDR). Proces odvození nových PDR z metody Lagrangeových multiplikátorů, která specifikuje novou cílovou funkci, která v sobě bude zahrnovat podmiňující rovnice. Definujeme tak novou cílovou funkci

$$L(\phi, g, \xi) = J(\phi, g) + \langle R(\phi, g), \xi \rangle, \tag{3.2}$$

kde ξ jsou tzv. sdružené proměnné (sdružené ke stavovým proměnným) a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je symetrická, bilineární forma, jejíž podoba je zpravidla jasná až z konkrétně řešeného problému. Dostáváme tak nový problém, jehož řešení je však podle [12] ekvivalentní s problémem 3.1.

Problém 3.2. *Nechť je dána množina parametrů $g = \{g_n, n = 1, ..., N\}$, cílová funkce $J(\phi, g)$ a vazební rovnice $R(\phi, g) = 0$. Najděte takovou kombinaci parametrů g, stavových proměnných ϕ a sdružených proměnných ξ tak, aby $L(\phi, g, \xi) = J(\phi, g) + \langle R(\phi, g), \xi \rangle$ bylo stacionární.*

Z matematického hlediska je dobré podotknout, že všechny argumenty L jsou na sobě nezávislé. Pro J tomu tak nebylo, protože ξ a g spolu byli svázané přes podmiňující rovnice $R(\phi, g) = 0$ a nešlo je tak volit nezávisle. Abychom splnili podmínku stacionarity, jak požaduje problém 3.2, musí být variance L podle všech proměnných rovna nule.

3.2.1 Optimální systém rovnic

V této části jsou ukázány jednotlivé variace

$$\delta L = \delta_\xi L + \delta_\phi L + \delta_g L \tag{3.3}$$

pro cílovou funkci L definovanou rovnicí 3.2.

Variace sdružených proměnných

Nulovost variace podle sdružených proměnných ξ lze zapsat jako

$$\delta_\xi L = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L(\phi, g, \xi + \epsilon\delta\xi) - L(\phi, g, \xi)}{\epsilon} = 0,$$

kde variace $\delta\xi$ je libovolná. Po dosazení za L z rovnice 3.2, dostáváme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\phi, g) + \langle \xi + \epsilon\delta\xi, R(\phi, g)\rangle - (J(\phi, g) + \langle \xi, R(\phi, g)\rangle)}{\epsilon} = 0,$$

tedy

$$\langle \delta\xi, R(\phi, g)\rangle = 0.$$

Díky libovolnosti variace $\delta\xi$ dostáváme původní vazební rovnici

$$R(\phi, g) = 0, \tag{3.4}$$

která tvoří první část systému optimálních rovnic. Variace podle sdružených proměnných nám z části ukázala, že stacionární bod rozšířeného funkcionálu $L(\phi, g, \xi)$ splňuje vazební rovnice.

Variace stavových proměnných

Dále vezměme variaci vzhledem ke stavovým proměnným ϕ, tedy

$$\delta_\phi L = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L(\phi + \epsilon\delta\phi, g, \xi) - L(\phi, g, \xi)}{\epsilon} = 0$$

a opět po dosazení rovnice 3.2

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{J(\phi+\epsilon\delta\phi,g)+\langle\xi,R(\phi+\epsilon\delta\phi,g)\rangle-(J(\phi,g)+\langle\xi,R(\phi,g)\rangle)}{\epsilon}=0,$$

neboli

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{J(\phi+\epsilon\delta\phi,g)-J(\phi,g)}{\epsilon}+\frac{\langle\xi,R(\phi+\epsilon\delta\phi)-R(\phi,g)\rangle}{\epsilon}\right)=0.$$

Členy ve jmenovateli obsahující ϵ přepíšeme pomocí Taylorova rozvoje okolo bodu ϕ

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{J(\phi,g)+\frac{\partial J}{\partial\phi}\epsilon\delta\phi+O(e^2)-J(\phi,g)}{\epsilon}+\frac{\left\langle\xi,R(\phi,g)+\frac{\partial R}{\partial\phi}\epsilon\delta\phi+O(e^2)-R(\phi,g)\right\rangle}{\epsilon}\right)=0,$$

kde vypadnou členy bez derivace, a po zkrácení ϵ dostáváme

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\partial J}{\partial\phi}\delta\phi+\left\langle\xi,\frac{\partial R}{\partial\phi}\delta\phi\right\rangle+O(\epsilon)\right)=0.$$

Provedeme limitu

$$\frac{\partial J}{\partial\phi}\delta\phi+\left\langle\xi,\frac{\partial R}{\partial\phi}\delta\phi\right\rangle=0, \tag{3.5}$$

použijeme

$$\frac{\partial J}{\partial\phi}\delta\phi=\left\langle 1,\frac{\partial J}{\partial\phi}\delta\phi\right\rangle$$

a označíme $(\cdot)^*$ sdružený operátor k $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tedy

$$\left\langle\left(\frac{\partial J}{\partial\phi}\right)^*,\delta\phi\right\rangle+\left\langle\left(\frac{\partial R}{\partial\phi}\right)^*\xi,\delta\phi\right\rangle=0.$$

Další část systému optimálních rovnic jsou tedy tzv. sdružené rovnice

$$\left(\frac{\partial R}{\partial\phi}\right)^*\xi=-\left(\frac{\partial J}{\partial\phi}\right)^*. \tag{3.6}$$

Variace návrhových parametrů

Poslední část variace δL je vzhledem k návrhovým parametrům g, tedy

$$\delta_g L=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{L(\phi,g+\epsilon\delta g,\xi)-L(\phi,g,\xi)}{\epsilon}=0,$$

kde obdobně jako pro stavové proměnné po dosazení z rovnice 3.2 dostaneme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\phi, g + \epsilon\delta g) + \langle \xi, R(\phi, g + \epsilon\delta g) \rangle - (J(\phi, g) + \langle \xi, R(\phi, g) \rangle)}{\epsilon} = 0$$

a po aplikování stejného postupu jako pro vztah 3.6, dostaneme poslední část optimálního systému rovnic, tzv. podmínky optimálnosti

$$\left(\frac{\partial R}{\partial g} \right)^* \xi = - \left(\frac{\partial J}{\partial g} \right)^* . \tag{3.7}$$

Řešení soustavy optimálních rovnic

Řešením soustavy optimálních rovnic 3.4, 3.6 a 3.7 dává řešení problému 3.2 a tedy i 3.1. Analyticky lze systém vyřešit pouze ve speciálních případech a oproti základnímu systému, tedy vazebním rovnicím, je tento nesegregovaný systém často masivní, jak upozorňuje [12]. Vyřešením této soustavy jako nesegregované dostaneme přímo optimální hodnoty návrhových parametrů, bohužel to v mnoha případech není možné. Řešení soustavy rovnic segregovaným způsobem už je schůdnější varianta, vyžaduje však iteraci a lze ukázat, že iterační metoda řešící každou z tří části odděleně je ekvivalentní k metodě nejvyššího spádu, jejíž rychlost konvergence je často nedostačující. Jak bylo již řečeno v úvodu této sekce, lze sdruženou metodu použít i jiným způsobem a to pro výpočet gradientu/variace $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}$, který je posléze použit v optimalizačním cyklu podle předpisu 3.1.

3.2.2 Gradient pomocí sdružené metody

Získat gradient cílové funkce je v rámci optimalizačního cyklu, nastíněného na začátku této sekce, tradičně nejnáročnější operace. Gradient cílové funkce lze za použití řetízkového pravidla zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) + \frac{\partial J}{\partial g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}). \tag{3.8}$$

Mějme řešení sdružených rovnic 3.6 v n-té iteraci, i.e. mějme $\xi^{(n)}$, které řeší

$$\xi^{(n)} \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi}\Big|_{g^{(n)}} = \frac{\partial J}{\partial \phi}\Big|_{g^{(n)}}. \tag{3.9}$$

Dosazením 3.9 do rovnice 3.8 dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = \xi^{(n)} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\Big|_{g^{(n)}} \right) \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}\Big|_{g^{(n)}} + \frac{\partial J}{\partial g}\Big|_{g^{(n)}},$$

kam dosadíme variaci vazebních rovnic $R(\phi, g) = 0$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\Big|_{g^{(n)}} \right) \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}\Big|_{g^{(n)}} = -\frac{\partial R}{\partial g}\Big|_{g^{(n)}},$$

čímž se dopracujeme k hledanému vztahu

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = -\xi^{(n)} \cdot \frac{\partial R}{\partial g}\Big|_{g^{(n)}} + \frac{\partial J}{\partial g}\Big|_{g^{(n)}},$$

V optimalizačních úlohách se k zjištění gradientů typicky používá metoda konečných diferencí. Náročnost výpočtu ale roste přímo úměrně s počtem návrhových parametrů, kdežto ve sdružené metodě závisí vyhodnocení gradientu převážně na rychlosti výpočtu sdružených PDR. Ve sdružené metodě je pak navíc potřeba odvodit příslušné PDR a to teoreticky pro každou cílovou funkci. Prakticky lze ale určit dostatečně obecný předpis pro cílovou funkci, odvodit rovnice pro ni a konkrétní předpis dosadit až později.

3.2.3 Sdružené rovnice pro proudění nestlačitelné tekutiny

V této podsekci budou odvozeny sdružené rovnice pro tvarovou optimalizaci v nestlačitelném proudění podle [7, 3]. Podmiňující rovnice budou tedy NS rovnice pro stacionární stav s tekutinou o konstantní hustotě, tedy rovnice hybnosti

$$\mathbf{R}^{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot 2\nu D(\mathbf{u}), \tag{3.10}$$

kde operátor $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$, a rovnice kontinuity

$$R^p = -\nabla \cdot \mathbf{u}. \tag{3.11}$$

Stavové proměnné jsou tedy v tomto případě rychlost $\mathbf{u}$ a měrný tlak ve smyslu rovnice 2.20, tedy $p = \dfrac{p_{fyz}}{\rho}$. K nim budou odpovídat sdružené proměnné

$\xi = (\mathbf{v}, q)$. Obecnou cílovou funkci lze v rámci mnoha inženýrských aplikací zapsat pomocí integrálu přes výpočetní oblast a integrálu přes hranici, tedy

$$J(\mathbf{u}, p, g) = \int_\Omega J_\Omega(\mathbf{u}, p, g)\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma J_\Gamma(\mathbf{u}, p, g)\,\mathrm{d}S. \tag{3.12}$$

S takto definovanými proměnnými, vazebními rovnicemi a cenovou funkcí lze definovat upravenou cenovou funkci

$$L = J + \int_\Omega \xi \cdot \mathbf{R}\,\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{u}} + qR^p + J_\Omega\,\mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma J_\Gamma\,\mathrm{d}S \tag{3.13}$$

a pokračovat k odvození sdružených rovnic a definujeme vhodnou bilineární formu

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_\Omega \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\,\mathrm{d}V. \tag{3.14}$$

Vyjdeme předpisu 3.5 pro variaci upravené cenové funkce podle stavových proměnných

$$\delta_\phi L = \frac{\partial J}{\partial \phi}\delta\phi + \int_\Omega \xi \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi}\delta\phi\,\mathrm{d}V = 0 \tag{3.15}$$

Pro člen s J můžeme přímo psát

$$\frac{\partial J}{\partial u_i}\delta u_i = \int_\Omega \frac{\partial J_\Omega}{\partial u_i}\delta u_i\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \frac{\partial J_\Gamma}{\partial u_i}\delta u_i\,\mathrm{d}S, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial J}{\partial p}\delta p = \int_\Omega \frac{\partial J_\Omega}{\partial p}\delta p\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \frac{\partial J_\Gamma}{\partial p}\delta p\,\mathrm{d}S. \tag{3.17}$$

Pro člen se sdruženými proměnnými $\xi \cdot \dfrac{\partial R}{\partial \phi}$ provedeme variaci $\delta\phi$ postupně pro každou rovnici

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathbf{u}}\mathbf{R}^{\mathbf{u}} &= (\delta\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\delta\mathbf{u} - \nabla \cdot (2\nu D(\delta\mathbf{u})),\\
\delta_p\mathbf{R}^{\mathbf{u}} &= \nabla\delta p,\\
\delta_{\mathbf{u}}R^p &= -\nabla \cdot \delta\mathbf{u},\\
\delta_p R^p &= 0.
\end{aligned}$$

Pro úplnost je potřeba podotknout, že jsme vynechali variaci kinematické viskozity ν. Pro laminární proudění je to naprosto platný postup. Pokud ale budeme modelovat turbulenci za pomocí přídavné turbulentní vazkosti $\nu = \nu_t + \widetilde{\nu}$, tak buďto musíme udělat předpoklad tzv. zmražené turbulence (anglicky frozen turbulence) a nebo rozepsat i variace rovnic turbulence. Zkoumání variace modelů turbulence je nad rámec této práce a detailněji se o něm píše v [14], kde se rozebírá i vliv zjednodušujícího předpokladu zmrazené turbulence na výsledek pro případ různých Reynoldsových čísel.

Odvozené vztahy nyní dosadíme do předpisu 3.15

$$\delta_\phi L = \int_\Omega \frac{\partial J_\Omega}{\partial u_i}\delta u_i \,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \frac{\partial J_\Gamma}{\partial u_i}\delta u_i \,\mathrm{d}S + \int_\Omega \frac{\partial J_\Omega}{\partial p}\delta p \,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \frac{\partial J_\Gamma}{\partial p}\delta p \,\mathrm{d}S +$$
$$+ \int_\Omega \underbrace{\mathbf{v}\cdot(\delta\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\delta\mathbf{u}}_{\mathrm{II}} \underbrace{-\mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot(2\nu D(\delta\mathbf{u})))}_{\mathrm{III}} \,\mathrm{d}V +$$
$$+ \underbrace{\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla\delta p \,\mathrm{d}V}_{\mathrm{IV}} + \underbrace{\int_\Omega -q\nabla\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V.}_{\mathrm{V}} \quad (3.18)$$

Postupně teď pomocí Gaussovy věty (integrace per-partes) přesuneme derivace na sdružené proměnné, tak abychom mohli vytknout variace stavových proměnných. Pro odvození některých členů je výhodnější použít indexový zápis s Einstainovou sumační konvencí, tedy

$$\mathrm{I} = \int_\Omega \mathbf{v}\cdot(\delta\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \int_\Omega v_j\delta u_i \frac{\partial u_j}{x_i}\,\mathrm{d}V$$

a po aplikaci Gaussovy věty

$$\mathrm{I} = \int_\Gamma v_j\delta u_i u_j n_i \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial(v_j\delta u_i)}{x_i} u_j \,\mathrm{d}V,$$

rozepíšeme derivaci součinu

$$\mathrm{I} = \int_\Gamma v_j\delta u_i u_j n_i \,\mathrm{d}S - \int_\Omega v_j \underbrace{\frac{\partial(\delta u_i)}{x_i} u_j}_{=0 \text{ z kontinuity}} \,\mathrm{d}V, - \int_\Omega \delta u_i \frac{\partial v_j}{x_i} u_j \,\mathrm{d}V$$

a tedy

$$\mathrm{I} = \int_\Gamma v_j u_j n_i \delta u_i \,\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial v_j}{x_i} u_j \delta u_i \,\mathrm{d}V = \int_\Gamma (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega (\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V. \quad (3.19)$$

Pro druhý člen můžeme psát

$$\mathrm{II} = \int_\Omega \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\cdot\nabla)\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \int_\Omega v_j u_i \frac{\partial(\delta u_j)}{x_i}\,\mathrm{d}V$$

a stejným postupem jako v předchozím případě (Gaussova věta, derivace součinu, rovnice kontinuity) dostáváme

$$\mathrm{II} = \int_\Gamma v_j u_i n_i \delta u_j \,\mathrm{d}S - \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{x_i} \delta u_j \,\mathrm{d}V = \int_\Gamma (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V. \tag{3.20}$$

Nejpracnější je pak člen číslo tři, tedy

$$\mathrm{III} = \int_\Omega -\mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot(2\nu D(\delta\mathbf{u})))\,\mathrm{d}V = \int_\Omega -v_i \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\left(\frac{\partial(\delta\mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta\mathbf{u}_j)}{\partial x_i}\right)\right)\mathrm{d}V,$$

použijeme Gaussovu větu poprvé

$$\mathrm{III} = \int_\Gamma -v_i\left(\nu\left(\frac{\partial(\delta\mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta\mathbf{u}_j)}{\partial x_i}\right)\right) n_j\,\mathrm{d}S + \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\nu\left(\frac{\partial(\delta\mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta\mathbf{u}_j)}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}V$$

a podruhé, zvlášť na oba členy v objemovém integrálu,

$$\begin{aligned}\mathrm{III} = \int_\Gamma -2\nu\mathbf{v}\cdot D(\delta\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_\Gamma \nu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(n_j\delta u_i + n_i\delta u_j)\,\mathrm{d}S - \\ - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\nu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\delta u_j\,\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

čímž dostáváme výraz

$$\mathrm{III} = \int_\Gamma 2\nu\mathbf{n}\cdot D(\mathbf{v})\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \int_\Gamma 2\nu\mathbf{v}\cdot D(\delta\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla\cdot(2\nu D(\mathbf{v}))\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V. \tag{3.21}$$

Dále

$$\mathrm{IV} = \int_\Omega \mathbf{v}\cdot\nabla\delta p\,\mathrm{d}V = \int_\Omega v_i\frac{\partial(\delta p)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V = \int_\Gamma v_i n_i \delta p\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\delta p\,\mathrm{d}V$$

a

$$\mathrm{IV} = \int_\Gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\delta p\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v}\delta p\,\mathrm{d}V. \tag{3.22}$$

Pro poslední člen pak

$$\mathrm{V} = \int_\Omega -q\nabla\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V = \int_\Omega -q\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}V = \int_\Gamma -q\delta u_i n_i\,\mathrm{d}S + \int_\Omega \frac{\partial q}{\partial x_i}\delta u_i\,\mathrm{d}V$$

a vektorově tedy

$$\mathrm{V} = \int_\Gamma -q\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_\Omega \nabla q\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V. \tag{3.23}$$

Konečně lze tedy rozepsat rovnici 3.15 pomocí odvozených členů

$$
\begin{aligned}
\delta_\phi L = &\int_\Omega \frac{\partial J_\Omega}{\partial u_i}\delta u_i \,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \frac{\partial J_\Gamma}{\partial u_i}\delta u_i \,\mathrm{d}S + \int_\Omega \frac{\partial J_\Omega}{\partial p}\delta p \,\mathrm{d}V + \int_\Gamma \frac{\partial J_\Gamma}{\partial p}\delta p \,\mathrm{d}S + \\
+ &\int_\Gamma (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega (\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \\
+ &\int_\Gamma 2\nu\mathbf{n}\cdot D(\mathbf{v})\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S - \int_\Gamma 2\nu\mathbf{v}\cdot D(\delta\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla\cdot(2\nu D(\mathbf{v}))\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \\
&+ \int_\Gamma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\delta p\,\mathrm{d}S - \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{v}\delta p\,\mathrm{d}V + \int_\Gamma -q\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S + \int_\Omega \nabla q\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

a poté co dáme k sobě členy se stejnou variací a typem integrálu

$$
\begin{aligned}
\delta_\phi L = &\int_\Omega \left(\frac{\partial J_\Omega}{\partial \mathbf{u}} - \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} - (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nabla\cdot(2\nu D(\mathbf{v})) + \nabla q\right)\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \\
&+ \int_\Gamma \left(\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} + 2\nu\mathbf{n}\cdot D(\mathbf{v}) - q\mathbf{n}\right)\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S \\
&- \int_\Gamma 2\nu\mathbf{v}\cdot D(\delta\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S, \\
&+ \int_\Omega \left(\frac{\partial J_\Omega}{\partial p} - \nabla\cdot\mathbf{v}\right)\delta p\,\mathrm{d}V \\
&+ \int_\Gamma \left(\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right)\delta p\,\mathrm{d}S
\end{aligned}
$$

dostáváme stejný výraz jako je odvozen v [6].

Podmínka $\delta_\phi L$ musí být splněna pro libovolnou variaci stavových proměnných. Z objemových integrálů nám tedy vychází sdružené NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu ve stacionárním stavu, které můžeme zapsat jako

$$
2D(\mathbf{v})\mathbf{u} + \nabla\cdot(2\nu D(\mathbf{v})) - \nabla q = \frac{\partial J_\Omega}{\partial \mathbf{u}} \tag{3.24}
$$

$$
\nabla\cdot\mathbf{v} = \frac{\partial J_\Omega}{\partial p}, \tag{3.25}
$$

kde jsme použili

$$
\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}u_j + u_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)u_j = 2D(\mathbf{v})\mathbf{u}.
$$

Hraniční integrály nám pak dávají návod na sestavení okrajových podmínek pro sdružené rovnice a to tak, aby

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{n} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v} + 2\nu\mathbf{n}\cdot D(\mathbf{v}) - q\mathbf{n}\right)\cdot\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S = \int_\Gamma 2\nu\mathbf{v}\cdot D(\delta\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \tag{3.26}$$

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\right)\delta p\,\mathrm{d}S = 0. \tag{3.27}$$

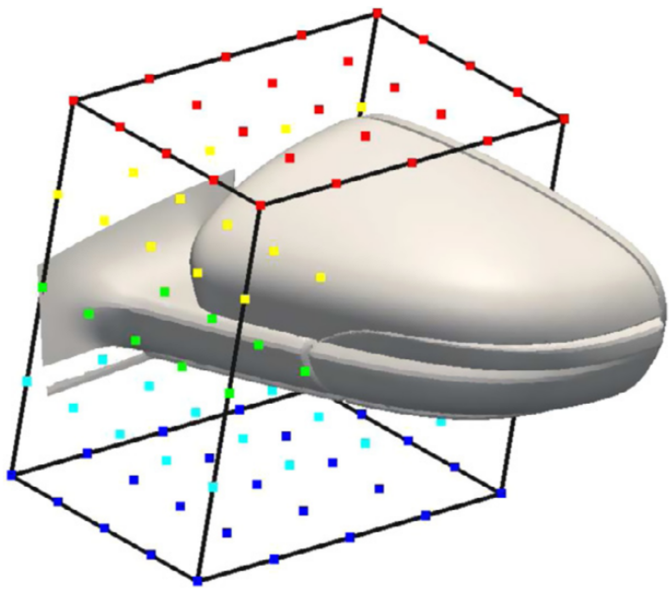
Systém sdružených rovnic nápadně připomíná původní systém NS rovnic pro nestlačitelné tekutiny. Mezi zásadní rozdíly patří linearita rovnic a také, že v porovnání s původními NS rovnicemi má konvektivní člen opačné znaménko. To značí, že informace se v šíří proti směru stavové rychlosti $\mathbf{u}$ namísto po směru proudu. Sdružené rovnice často bývají o něco jednodušší, neboť existuje celá řada cenových funkcí, které závisí pouze na hraničních hodnotách. Ku příkladu třecí ztráty, výslednice sil na těleso nebo stlačení. Pro takové cílové funkce pak odpadávají pravé strany sdružených rovnic, neboť $J_\Omega = 0$.

3.3 Pohyb sítě

Nastinit nekolik moznych zpusobu, popsat vic zpusob pomoci obecneho prevodu na B-spliny z OF

Prozatím jsme pracovali s obecnými návrhovými parametry g. V rámci zaměření a cíle této práce je nyní konkretizujeme. Pro tvarovou optimalizaci má smysl definovat návrhové parametry, které jsou svázané s tvarem výpočetní oblasti. Například pro křídlo letadla budeme chtít měnit profil, pro optimalizaci ztrát v koleni potrubí pak tvar samotného kolene atp. Pro tuto práci budeme později uvažovat kompresorovou mříž a měnit se tedy bude tvar lopatky.

První přístup co přichází v úvahu je brát přímo souřadnice bodů profilu jako návrhové parametry. To ovšem znamená spoustu návrhových parametrů, jejíchž počet při zjemňování sítě roste. V případě metody sdružené optimalizace to vlastně nevadí. Právě naopak bychom těžili tu největší výhodu



Obrázek 3.1: Řídící body objemového B-spline okolo automobilového zrcátka. Příklad z [8].

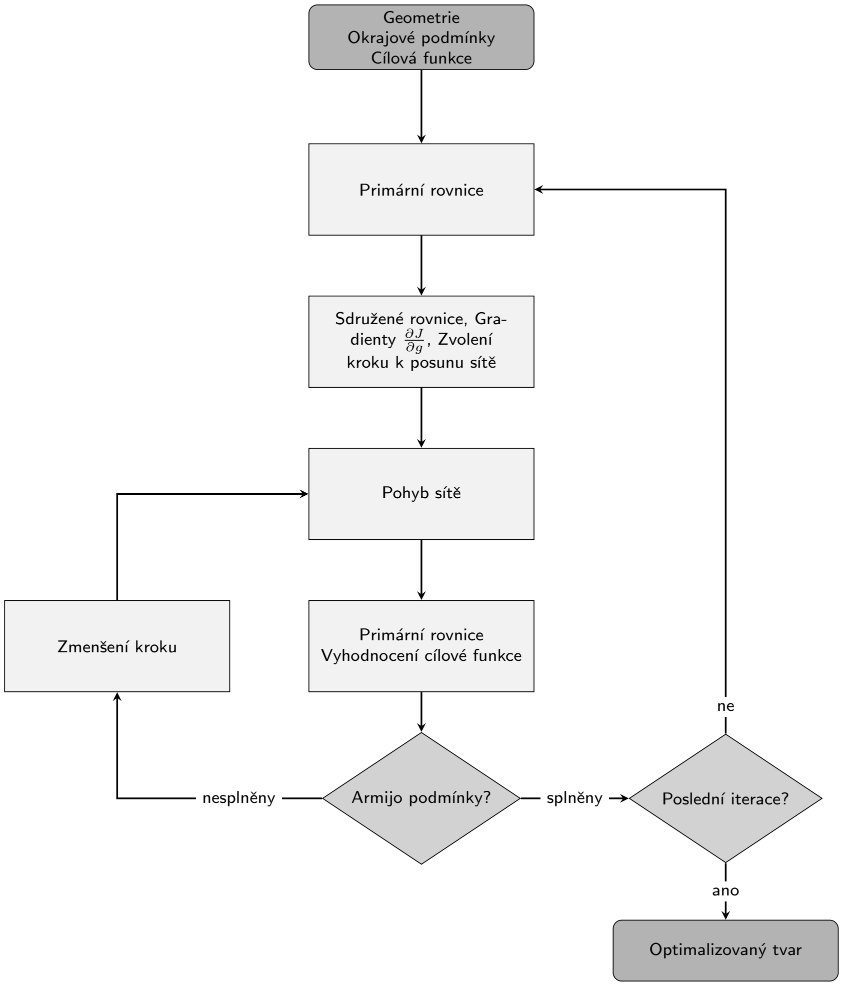
sdružené optimalizace, tedy (téměř) nezávislost rychlosti výpočtu gradientu optimalizace na počtu návrhových proměnných. Druhým, už horším avšak stále řešitelným problémem, je zachování platnosti a funkčnosti výpočetní sítě. Snadno se dá představit, že při pohybu pouze hranice, se mohou začít stěny křížit, vznikat záporné objemy apod. Takovou situaci lze řešit dodatečným výpočtem a posunem i ostatních ovlivněných bodů.

Lepším a obecně lépe fungujícím způsobem je podle [4] využít parametrizace oblasti pomocí objemových B-spline. Po vydefinování sítě řídících bodů jak ukazuje například obrázek 3.1, je každý z bodů sítě namapován z kartézského prostoru $\mathcal{R}^3(x, y, z)$ do parametrického prostoru $\mathcal{R}^3(u, v, w)$. Objemové B-spline pak definují zobrazení z parametrického prostoru do kartézského. Matematický popis tohoto postupu je detailněji popsán v [8].

V rámci optimalizace jsou jako návrhové parametry brány souřadnice řídících bodů objemových B-spline. Na základě získaných gradientů se nejprve pohne s řídícími body a následně se změna propaguje na každý parametrizovaný bod v kartézském prostoru sítě.

3.4 Optimalizacni cyklus

flowchart s naznacenim kde kdy se jake rovnice pocitaji (hlavni NS-rce, sdruzene rce, pohyb site)



Obrázek 3.2: Optimalizacni cyklus

Část II

Praktická aplikace

Kapitola 4

Tvarova optimalizace kompresorove mrize

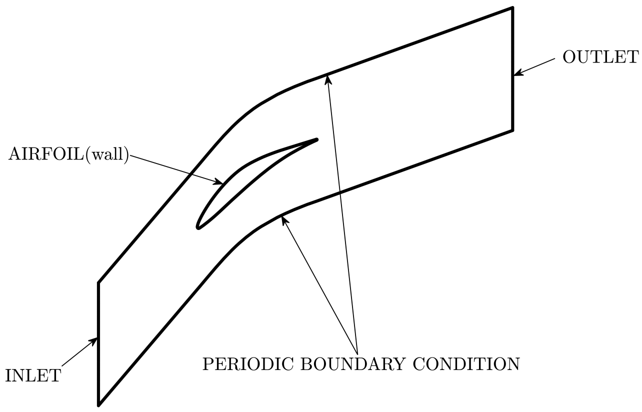
Optimalizace kompresorové mříže je fajn

Obecny popis pripadu a OP 2D

4.1 Obecný popis problému

Simulace prováděné v rámci této práce zjednodušeně reprezentují měřící soustavu tzv. lopatkových mříží. Pro lopatkové mříže jsou určující zejména geometrie samotné lopatky, rozteč t jednotlivých lopatek a stav proudu před a za mříží.

V rámci numerické simulace je topologie výpočetní oblasti naznačena na obrázku 4.1. Vstupní a výstupní hranice jsou rovnoběžné s osou y a jejich výška je právě zmiňovaný parametr rozteče t. Uprostřed oblasti se nachází uzavřená hranice reprezentující geometrii lopatky. Vrchní a spodní hranice jsou brány jako periodické, tedy to co vyteče spodem, vteče vrchem a naopak.



Obrázek 4.1: Náčrt topologie výpočetní oblasti pro standardní axiální kompresorovou mříž.

Prostorová diskretizace (síť) je v této práci vždy dělána tak, aby si stěny buněk na obou stranách periodické hranice odpovídali 1 : 1, pouze s posunutím t.

Krom periodicity jsou další okrajové podmínky následující. Na vstupu je předepsána Dirichletova okrajová podmínka pro vektor rychlosti a turbulentní proměnné. Tlak zde má nulovou Neumanovu podmínku. Na výstupu je naopak statický tlak fixován na nulu a rychlost je zde předepsána pomocí nulového gradientu.

4.2 Cílové funkce

V rámci aplikace sdružené optimalizace na tvar lopatky kompresorové mříže lze vymyslet hned několik cílů. V jednom stupni axiálního kompresoru se běžně sledují veličiny stlačení, účinnost (respektive ztráty) a výstupní úhel proudu. Pro tuto práci se jako sledovaná a optimalizovaná veličina bere ta poslední, tedy výstupní úhel proudu α_2.

K dosažení cílového úhlu na výstupu z lopatkové mříže α_{2tar} jsou použity dva postupy. Oba vycházejí z definice úhlu výstupního proudu

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{u_{y2}}{u_{x2}}\right). \tag{4.1}$$

Ze zákona zachování hmotnosti pro proudění nestlačitelné tekutiny vyplývá, že to co do kontrolní oblasti vteče, musí i vytéct. Jinými slovy toky vstupní a výstupní hranicí se musejí rovnat

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2, \tag{4.2}$$

což pro proudění nestlačitelné tekutiny kontrolní oblastí s vstupní a výstupní hranicí rovnoběžnou s osou y znamená, že

$$u_{x1} = u_{x2}. \tag{4.3}$$

Okrajové podmínky definují na vstupu konstantní uniformní vektor rychlosti $\mathbf{u_1}$ a přeneseně tedy i x-ovou složku rychlosti na výstupu. Z toho vyplývá, že pro zadané α_{2tar} můžeme apriori spočítat

$$u_{y2tar} = \tan(\alpha_{2tar}) \cdot u_{x2}, \tag{4.4}$$

tedy jistou cílovou rychlost na výstupu a cílovou funkci formulovat pomocí ní.

Dále jsou srovnány dvě formulace cílové funkce. První formulace optimalizuje přímo výstupní složku rychlosti, kdežto druhá optimalizuje nepřímo přes sílu na lopatku.

4.2.1 Přímá formulace

V přímé formulaci se snažíme aby

$$u_{y2tar} = \frac{1}{\phi_2} \sum_{f \in \Gamma_2} \phi_f u_{yf}, \tag{4.5}$$

tedy aby průměr u_y na výstupu vážený přes hmotnostní tok byl roven zadané cílové rychlosti. Minimalizovanou cílovou funkci formulujeme jako

$$J = \int_{\Gamma_2} \left(u_y(y) - u_{y2tar}\right)^2 \mathrm{d}S = \int_{\Gamma_2} J_\Gamma \, \mathrm{d}S. \tag{4.6}$$

Ve smyslu vztahu 3.12 má takto definovaná cílová funkce pouze hraniční složku J_Γ a pro sdružené rovnice tak bude ;ovat pouze v hraničních členech, tedy v rovnicích 3.26 a 3.27. Potřebujeme tedy vydefinovat parciální derivace podle primárních proměnných $\mathbf{u}$ a p. Pro implementaci v rámci knihovny OpenFOAM je pak navíc potřeba vydefinovat ještě derivace podle u_n a u_t, což pro dříve definovanou úlohu znamená podle složek u_x a u_y.

Parciální derivace podle primárního tlaku $\dfrac{\partial}{\partial p}$ je nulová, neboť tlak v cílové funkci nefiguruje.

Pro parciální derivaci podle primární rychlosti $\mathbf{u}$ je lepší se dívat na složku u_y jako na skalární součin $\mathbf{u}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{u}\cdot(0,1,0) = u_y$ a derivaci tedy provést jako

$$\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial\left(\mathbf{u}\cdot\mathbf{j} - u_{y2tar}\right)^2}{\partial \mathbf{u}} = 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{j} - u_{y2tar})\,\mathbf{j} = 2(u_y - u_{y2tar})\,\mathbf{j}. \tag{4.7}$$

U dodatečných derivací pro OpenFOAM vychází $\dfrac{\partial}{\partial u_n} = 0$ a $\dfrac{\partial}{\partial u_t}$ je stejná jako derivace podle $\mathbf{u}$.

implementace v OF do apendixu?

4.2.2 Nepřímá formulace přes sílu

Druhou možností jak dosáhnout zadaného úhlu výstupního proudu je použít optimalizaci přes cílovou sílu. Optimalizace síly na stěnu ve smyslu její minimalizace v předepsaném směru je v balíku OpenFOAM formulována jako

$$J = \frac{\int_\Gamma \rho(-\tau_{ij}n_j + pn_i)r_i\,\mathrm{d}S}{\frac{1}{2}\rho A U_\infty^2}, \tag{4.8}$$

kde τ_{ij} jsou složky tenzoru napětí, p tlak dělený konstantní hustotou ρ a $\mathbf{n}$ jednotkový normálový vektor. Vektor $\mathbf{r}$ pak definuje směr projekce vektoru síly (směr ve kterém se minimalizuje). A je referenční plocha a U_∞ je rychlost volného proudu. Takto definovaná cílová funkce tedy svou velikostí odpovídá koeficientu síly C_f.¨

Zatímco přímá formulace ovlivňovala přes derivaci cílové funkce okrajovou podmínku sdružených pouze na výstupní hranici, cílová funkce přes sílu ovlivňuje okrajovou podmínku přímo na lopatce. Druhým rozdílem je pak, že v přímé formulaci se objevuje jediná primární proměnná, kdežto pro integraci síly na lopatce jsou potřeba všechny proměnné, včetně turbulentní proměnné $\widetilde{\nu}$. Tyto rozdíly zavdávají dostatečný důvod pro porovnání těchto dvou formulací ve smyslu rychlosti konvergence či přesnosti.

4.3 Optimalizace mrize GHH 1-S1

popis geometrie, vypocetni oblasti, okrajove podminky, nastaveni optimalizacniho algoritmu

Pro aplikaci optimalizačního algoritmu s novou cenovou funkcí pro stlačení byla zvolena axiální kompresorová mříž MAN GHH 1-S1 publikovaná v [11]. Výpočetní oblast

4.3.1 vysledky

klaibrace S-A modelu, prubeh cilove fce, overeni vysledku pomoci vhodnejsiho modelu turbulence

Kapitola 5

Závěr

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Přílohy

Příloha A

Seznam použitých symbolů a zkratek

b_n	Optimalizační parametry
t	Čas
Γ	Hranice kontrolního objemu
J	Cílová funkce
n_i, $\mathbf{n}$	Normálový vektor hranice
Ω	Kontrolní objem
$\dfrac{\partial}{\partial w}$	Parciální derivace podle veličiny w
PDR	Parciální diferenciální rovnice
R_i	Podmiňující rovnice
ρ	Hustota
u_i, $\mathbf{u}$	Vektor rychlosti

Příloha B

Rejstřík

Příloha C

Literatura

[1] J. Blazek. *Computational fluid dynamics: principles and applications*. Butterworth-Heinemann, 2015.

[2] R. Dvořák. *Vnitřní aerodynamika*. ČVUT, 1987.

[3] J. Fürst. *Metoda konečných objemů II*. 2020.

[4] G. K. Giannakoglou K.C., Papoutsis-Kiachagias E.M. *adjointOptimisationFoam, an OpenFOAM-based optimisation tool*.

[5] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics*. Elsevier, 2007.

[6] C. Othmer. A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International journal for numerical methods in fluids*, 58(8):861–877, 2008.

[7] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. *Computers & Fluids*, 36(2):325–341, 2007.

[8] E. Papoutsis-Kiachagias, N. Magoulas, J. Mueller, C. Othmer, and K. Giannakoglou. Noise reduction in car aerodynamics using a surrogate

objective function and the continuous adjoint method with wall functions. *Computers & Fluids*, 122:223–232, 2015.

[9] S. V. Patankar and D. B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. In *Numerical prediction of flow, heat transfer, turbulence and combustion*, pages 54–73. Elsevier, 1983.

[10] A. H. Shapiro. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. *New York: Ronald Press*, 1953.

[11] W. Steinert, B. Eisenberg, and H. Starken. Design and testing of a controlled diffusion airfoil cascade for industrial axial flow compressor application. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, volume 79047, page V001T01A044. American Society of Mechanical Engineers, 1990.

[12] R. van den Braembussche and M. Manna. *Inverse Design and Optimisation Methods: April 21-25, 1997.* Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1997.

[13] H. G. Weller, G. Tabor, H. Jasak, and C. Fureby. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in physics*, 12(6):620–631, 1998.

[14] A. Zymaris, D. Papadimitriou, K. Giannakoglou, and C. Othmer. Continuous adjoint approach to the spalart–allmaras turbulence model for incompressible flows. *Computers & Fluids*, 38(8):1528–1538, 2009.