### Diplomová práce



České vysoké učení technické v Praze

F2

Fakulta strojní Ústav technické matematiky

# Tvarová optimalizace lopatkové mříže sdruženou metodou

Bc. Pavel Mačák

Vedoucí: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.

Obor: Matematické modelování v technice

Studijní program: Aplikované vědy ve strojním inženýrství

Leden 2022

\*



# ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

## I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příir	mení: N	//ačák	Jméno: <b>Pavel</b>	Osobní číslo:	465509
		naoan	01110110. I <b>4101</b>	COODIII CICIO.	

Fakulta/ústav: Fakulta strojní

Zadávající katedra/ústav: Ústav technické matematiky Studijní program: Aplikované vědy ve strojním inženýrství Matematické modelování v technice Specializace:

Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:	Název diplomové práce:		
Shape optimization of blade cascade with adjoint method  Pokyny pro vypracování:  Student se seznámí s principy sdružené metody pro tvarovou optimalizaci.  V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizacií cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence.  Seznam doporučené literatury:  [1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007.  [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009.  [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Wo Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics,  [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620  Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS  Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce:  21.10.2021  Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  prof. Ing. Michael Valášek, DrS	Tvarová optimalizace lopatkové mř	íže sdruženou metodou	
Pokyny pro vypracování:  Student se seznámí s principy sdružené metody pro tvarovou optimalizaci.  V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizační cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence.  Seznam doporučené literatury:  [1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007.  [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009.  [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th WC Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, HJ WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational Mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620  Iméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS  Iméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce:  Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  prof. Ing. Michael Valášek, DrS	Název diplomové práce anglicky:		
Student se seznámí s principy sdružené metody pro tvarovou optimalizaci.  V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizační cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence.  Seznam doporučené literatury:  [1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007.  [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009.  [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Wc Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continu mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620  Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS  Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce:  16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  prof. Ing. Michael Valášek, DrS	Shape optimization of blade cascad	le with adjoint method	
V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizační cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence.  Seznam doporučené literatury:  [1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007.  [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009.  [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Wc Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continu mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620  Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS  Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce:  1 Termín odevzdání diplomové práce:  1 Termín odevzdání diplomové práce:  1 doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  1 prof. Ing. Michael Valášek, Dr.S.	Pokyny pro vypracování:		
[1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007. [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to Spalart-Allmarras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009. [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Word Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continumechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620  Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS  Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021  Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.  prof. Ing. Michael Valášek, DrS	V závěrečné práci provede odvození sdru OpenFOAM provede optimalizaci tvaru loj	žené metody a popíše optimalizační cy patky kompresorové mříže pro vhodně	
based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007.  [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009.  [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Word Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continual mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620  Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS  Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. prof. Ing. Michael Valášek, DrS	Seznam doporučené literatury:		
doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS  Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. prof. Ing. Michael Valášek, DrS	based on boundary integrals, for inviscid a [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOUS Spalart-Allmaras turbulence model for incomplete and the standard stand	and viscous flows. Computers and Fluid J, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHM compressible flows. Computers and Fluid PEINKE. Adjoint optimization of 2D-aid VCCM 2014, 5th European Conference oje JASAK a Christer FUREBY. A tensor	ds [online]. 2007.  ER. Continuous adjoint approach to the ds [online]. 2009.  rfoils in incompressible flows. 11th World on Computational Mechanics, rial approach to computational continuum
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce:  Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:  doc. lng. Jiří Fürst, Ph.D. prof. lng. Michael Valášek, DrS		·	
Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022  Platnost zadání diplomové práce:  doc. lng. Jiří Fürst, Ph.D. prof. lng. Michael Valášek, DrS	doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav te	echnické matematiky FS	
Platnost zadání diplomové práce:  doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. prof. Ing. Michael Valášek, DrS	Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí	(ho) nebo konzultanta(ky) diplomov	vé práce:
		0.2021 Termín odevzdán	í diplomové práce: 16.01.2022
		,	prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. podpis děkana(ky)
PŘEVZETÍ ZADÁNÍ	PŘEVZETÍ ZADÁNÍ		
Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací. Seznam použité literatury, jiných pramenů a jmen konzultantů je třeba uvést v diplomové práci.		·	, s výjimkou poskytnutých konzultací.

# Poděkování

# Prohlášení

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu práce doc. Ing. Jiřímu Fürstovi, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce. Zároveň děkuji své rodině a přátelům za jejich podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze, 1. ledna 2022

### **Abstrakt**

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

**Klíčová slova:** Optimalizace, CFD, OpenFOAM, Lopatková mříž

**Vedoucí:** doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. Ústav technické matematiky Resslova 307/9 Praha 6

### **Abstract**

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices biben-Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

**Keywords:** Optimization, CFD, OpenFOAM, Compressor cascade

**Title translation:** Shape optimization of blade cascade with adjoint method

Obsah	2.3 SIMPLE algoritmus	16
1 Úvod 3	2.4 Turbulence, modelování turbulence	16
Část I Teoretická část	3 Optimalizace sdruženou metodou	17
2 Základy numerického řešení nestlačitelných NS rovnic 7	3.1 Základy optimalizace	17
	3.2 Metoda sdružené optimalizace	19
2.1 Základy matematického popisu proudění	3.2.1 Optimální systém rovnic	20
2.1.1 Kontrolní objem a zákon zachování 8	3.2.2 Gradient pomocí sdružené metody	22
2.1.2 Zákon zachování hmoty, Rovnice kontinuity 10	3.2.3 Sdružené rovnice pro nestlačitelné proudění	23
2.1.3 Zákon zachování hybnosti, Rovnice hybnosti 10	3.3 Pohyb site	28
2.1.4 NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu	3.4 Optimalizacni cyklus	28
2.2 Základ metody konečných objemů 13	Část II Praktická aplikace	
2.2.1 Konečný objem 13	4 Transport autimosficos	
2.2.2 Aproximace numerickým tokem	4 Tvarova optimalizace kompresorove mrize	33

4.1 Sdruzene rce pro cilovou fci stlaceni	33
4.2 Optimalizace mrize GHH 1-S1	34
4.2.1 vysledky	35
5 Závěr	37
Přílohy	
A Seznam použitých symbolů a zkratek	41
B Rejstřík	43
C Literatura	45

# Obrázky

# **Tabulky**

2.1 Pevný kontrolní objem v obecném	
proudovém poli. [1] PREDELAT	
PODLE ZNACENI V TEXTU	9
3.1 Optimalizacni cyklus	29

\*

# Kapitola $oldsymbol{1}$

# Úvod

#### This is uvod

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque

1. Úvod

penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa. [9]

1. Úvod

Část l

Teoretická část

# Kapitola 2

# Základy numerického řešení nestlačitelných NS rovnic

Problém proudění či mechanika tekutiny je v rámci této práce chápán jako zkoumání pohybu velkého množství částic a jejich interakce. Velké množství ve smyslu, že zkoumané fluidum má takovou hustotu, že lze použít aproximaci reality pomocí matematického kontinua. To nám říká, že i v nekonečně malá (infinitesimální) část tekutiny obsahuje dostatečný počet částic, pro které lze specifikovat střední rychlost a střední kinetickou energii. Jsme tak schopni definovat pojmy rychlost, tlak, teplota, hustota a další důležité veličiny jako spojité funkce v rámci celého kontinua. Tato kapitola vychází různou měrou z publikací [1, 2, 4, 7, 3]

# 2.1 Základy matematického popisu proudění

Odvození základních rovnic mechaniky tekutin se opírá tzv. zákony zachování. Pro případ obecné tekutiny to jsou

- 1. zachování hmoty
- 2. zachování hybnosti a
- 3. zachování energie.

Pro případ nestlačitelné tekutiny si pak vystačíme pouze s prvními dvěma zmíněnými zákony zachování.

Zachování určité veličiny znamená, že její časovou změnu uvnitř libovolného objemu lze vyjádřit jako množství veličiny proudící přes hranici zvoleného objemu a produkci veličiny uvnitř objemu. Často se také mluví o bilanci veličiny v určitém objemu. Množství veličiny, které proudí přes hranici objemu se nazývá tok. Obecně se tok dá rozdělit na dvě složky. Konvekci, způsobenou konvektivním přenosem veličiny, a difuzi, způsobenou pohybem molekul tekutiny v klidovém stavu. Difuzivní přenos závisí na gradientu dané veličiny a pro případ homogenní distribuce tedy vymizí.

#### 2.1.1 Kontrolní objem a zákon zachování

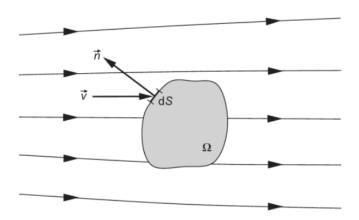
V předchozí kapitole se o zákonech zachování mluvilo v kontextu jistého objemu. Takovémuto libovolně zvolitelnému objemu se často říká kontrolní objem, nebo - pro účely numerické matematiky vhodněji - konečný kontrolní objem.

Mějme obecný kontrolní objem  $\Omega$  s uzavřenou hranicí  $\Gamma$ , který je pevný v prostoru s daným proudovým polem jak naznačuje obrázek 2.1. Zároveň lze definovat element hranice dS a jeho vnější normálu  $\mathbf{n}$ .

Pro obecnou zachovávanou veličinu W lze zákon zachování psát jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} W \, dV + \int_{\Gamma} \mathbf{F}(W) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} Q_{\Omega}(W) \, dV + \int_{\Gamma} \mathbf{Q}_{\Gamma}(W) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.1)$$

kde  $Q_{\Omega}(W)$  jsou objemové a  $\mathbf{Q}_{\Gamma}(W)$  povrchové zdroje a  $\mathbf{F}(W)$  je vektor hustoty toku veličiny W plochou  $\Gamma$ . Zákon v této formě je formálně platný



**Obrázek 2.1:** Pevný kontrolní objem v obecném proudovém poli. [1] PREDELAT PODLE ZNACENI V TEXTU

jak pro skalární veličinu W tak vektorovou  $\mathbf{W}$ . Speciálně pak pro skalární veličinu lze člen s tokem přes hranici rozdělit, podle dříve zmíněného dělení, na konvektivní tok

$$\mathbf{F}_{\mathbf{K}}(W) = W\mathbf{u} \tag{2.2}$$

a difuzivní tok vyjádřený pomocí zobecněného Fickova gradientního zákona

$$\mathbf{F}_{\mathbf{D}}(W) = \kappa \rho \nabla(W/\rho), \tag{2.3}$$

kde  $\kappa$  je koeficient difuzivity a dohromady tedy

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(W) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Gamma} W \left[ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right] - \kappa \rho \left[ \nabla (W/\rho) \cdot \mathbf{n} \right] dS.$$

Rovnici 2.1 tak můžeme rozepsat do podoby

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} W \, dV + \int_{\Gamma} W \left[ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right] - \kappa \rho \left[ \nabla (W/\rho) \cdot \mathbf{n} \right] dS = \int_{\Omega} Q_{\Omega}(W) \, dV + \int_{\Gamma} \mathbf{Q}_{\Gamma}(W) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$
(2.4)

Pro vektorovou veličinu lze udělat velmi podobné rozdělení, pouze s tím rozdílem, že všechny tři funkce W ( $\mathbf{F}, Q_{\Omega}, \mathbf{Q}_{\Gamma}$ ) budou o jeden tenzorový řád vyšší. Rovnice 2.1 s rozdělením na tenzory konvektivního a difuzivního toku tak dostane podobu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{W} \, dV + \int_{\Gamma} (\mathbb{F}_K(\mathbf{W}) - \mathbb{F}_D(\mathbf{W})) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q}_{\Omega}(\mathbf{W}) \, dV + \int_{\Gamma} \mathbb{Q}_{\Gamma}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$
(2.5)

Takto odvozený obecný zákon zachování (někdy taky bilanční rovnici) lze využít pro odvození základních rovnic proudění.

## 2.1.2 Zákon zachování hmoty, Rovnice kontinuity

Pro jednosložkové tekutiny vyjadřuje zákon zachování hmoty, tedy že hmotu v systému nelze vytvořit, ani ztratit, i.e. zdroj hmoty se uvnitř kontrolního nepředpokládá. Musí tedy platit, že změna hmotnosti uvnitř kontrolního objemu musí být rovna toku hmoty přes hranice kontrolního objemu, tedy

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dV = \int_{\Gamma} \rho \, u_i \, n_i dS = \int_{\Omega} \frac{\partial \left(\rho u_i\right)}{\partial x_i} dV.$$

Po převedení obou integrálů na jednu stranu, záměně operací integrace a derivace a vyžití distributivity integrálu vzhledem k operaci součet, dostáváme obecný tvar rovnice kontinuity pro nestacionární proudění stlačitelné tekutiny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u_i\right)}{\partial x_i} = 0. \tag{2.6}$$

Ke stejné rovnici dojdeme, pokud do rovnice zachovaní 2.4 dosadíme za obecnou skalární veličinu W hustotu  $\rho$ , uplatníme předpoklad nulových zdrojů na pravé straně a uvědomíme si, že difuzivní tok z rovnice 2.3 bude nulový, neboť

$$\nabla(W/\rho) = \nabla(\rho/\rho) = \nabla(1) = 0.$$

Za předpokladu nestlačitelnosti tekutiny, tedy že  $\rho=konst.$  lze navíc rovnici 2.6 zjednodušit na

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2.7}$$

což se běžně označuje jako rovnice kontinuity pro proudění nestlačitelné tekutiny (v indexovém a vektorovém zápisu).

#### 2.1.3 Zákon zachování hybnosti, Rovnice hybnosti

Odvození rovnice hybnosti vychází z druhého Newtonova zákona, který říká, že změna hybnosti je způsobena součtem sil účinkujících na element hmotnosti. Hybnost nekonečně malé části kontrolního objemu je

$$\rho \mathbf{u} \, dV$$

a tedy změna hybnosti uvnitř kontrolního objemu je

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, dV.$$

Sledovanou zachovávanou veličinou vektorovou veličinou  $\mathbf{W}$  z analogie předchozího vztahu s prvním členem rovnice 2.5 je hybnost  $\rho \mathbf{u}$ . Formálním použitím rovnice 2.2 dostáváme vztah pro tenzor konvektivního toku

$$\mathbb{F}_K(\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})$$

Difuzivní tok zůstává nulový neboť hybnost nemůže difundovat v tekutině za klidového stavu.

Nejdůležitější částí odvození rovnice hybnosti je interpretace zdrojových členů. Zdroj hybnosti je z hlediska fyziky vždy síla.

- 1. Objemové síly působí na hmotu v celém kontrolním objemu e.g. síla gravitační, inerciální, Coriolisova či elektromagnetická etc.
- 2. Povrchové síly působí přímo na povrchu Γ kontrolního objemu. Jedná se o deformační působení vnějších sil. Tenzor napětí, kterým se často toto působení vyjadřuje lze rozdělit na sférickou a deviátorovou složku, které v případě tekutin lze interpretovat jako působení tlaku okolí a smykové a normálové napětí vznikající mezi okolím a kontrolním objemem.

Objemové zdroje lze vyjádřit jednoduše. Pokud příslušnou vnější sílu vztáhneme na jednotku objemu  $\rho \mathbf{f_e}$  lze psát

$$\int_{\Omega} \mathbf{Q}_{\Omega} dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{\mathbf{e}} dV.$$

Povrchové zdroje jsou rozdělené na sférické působení okolního tlaku p a tenzor viskózního napětí  $\tau$ , tedy

$$\mathbb{Q}_{\Gamma} = -p\mathbb{I} + \tau,$$

$$Q_{\Gamma ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij},$$

kde  $\mathbb{I}$  je jednotkový tensor, případně  $\delta_{ij}$  Kronekerovo delta. Pro Newtonskou tekutinu lze tenzor viskózního smykového napětí vyjádřit podle [4] jako

$$\tau_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left( \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right],$$

za předpokladu konstantní dynamické viskozity  $\mu$  jak poukazuje [2].

Nyní lze již psát soustavu pohybových Navier-Stokesových (NS) rovnic v integrálním tvaru, tedy rovnice hybnosti pro stlačitelnou Newtonskou tekutinu, jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n} - \tau \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q}_{\Omega} \, dV.$$

Často lze rovnici hybnosti nalézt i v diferenciálním tvaru, například v [4]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \mu \left[ \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = \rho \mathbf{f_e}$$

#### 2.1.4 NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu

Obecný systém NS rovnic lze pro speciální případy zjednodušit zanedbáním některých fyzikálních vlivů. V této práci budeme později využívat zjednodušený tvar NS rovnic pro nestlačitelnou tekutinu. Tedy  $\rho=konst$ . čímž dostáváme rovnici kontinuity ve zjednodušeném tvaru 2.7, tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

a NS rovnice hybnosti v diferenciálním tvaru podle [4] má podobu

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f_e}. \tag{2.8}$$

Rovnici hybnosti jde dále vydělit konstantou hustoty, čímž dostaneme jakýsi měrný tlak  $\hat{p} = \frac{p}{\rho}$  a rovnice 2.8 přejde do tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla \hat{p} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f_e}. \tag{2.9}$$

# 2.2 Základ metody konečných objemů

Metoda konečných objemů (MKO, anglicky Finite volume method - FVM) je jednou z nejpoužívanějších metod pro řešení PDR proudění - společně s konečnými diferencemi a metodou konečných prvků. Popularita MKO pro numerické řešení problému proudění tkví podle [4] v její obecnosti, srozumitelnosti základních principů a snadnosti implementace pro libovolné sítě i složitější geometrie.

Zásadní výhodou z hlediska přesnosti MKO je pak princip tzv. konzervativní diskretizace (konzervativní ve smyslu zachovávající). Udržet v platnosti základní zákony zachování je důležitý aspekt správnosti řešení. MKO má tu výhodu, že konzervativní diskretizace je podle [4] splněna automaticky díky přímé diskretizaci integrálního tvaru zákonů zachování.

### 2.2.1 Konečný objem

MKO nese svůj název podle způsobu prostorové diskretizace, tj. rozdělení zkoumané oblasti  $\Omega=\mathbb{R}^d$  na vzájemně disjunktní neprázdné otevřené podoblasti  $\Omega_j$  s konečnou velikostí, matematicky psáno

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_{i},$$

$$\Omega_{i} \cap \Omega_{i} = \emptyset, \text{ pro } i \neq j.$$

Tyto konečné objemy (někdy buňky) jsou analogií kontrolních objemů z podsekce 2.1.1. Jakmile máme takto rozdělenou výpočetní oblast, tak na každý konečný objem aplikujeme zákon zachování v integrálním tvaru. To si můžeme dovolit, neboť zákony zachování byly v sekci 2.1 odvozeny pro libovolný kontrolní objem a lze je tedy aplikovat na každý konečný podobjem zvlášť. Obecný zákon zachování popsaný rovnicí 2.1 má pro j-tý kontrolní objem tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} W \, dV + \int_{\Gamma_j} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega_j} Q_{\Omega} \, dV, \qquad (2.10)$$

kde pro jednoduchost zápisu ponecháváme jen objemové zdroje na pravé straně. Pro každý konečný objem nyní definujeme prostorově střední hodnotu

sledované veličiny

$$\overline{W}|_{\Omega_j} = W_j(t) = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} W(\mathbf{x}, t) \, dV.$$

Stejným způsobem nahradíme i objemové zdroje v rovnici 2.10 a integrál toku **F** nahradíme součtem přes hranice. Dostaneme tvar rovnice zachování, napsanou pro j-tý kontrolní konečný objem

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_j|\Omega_j|) + \sum_{\forall f} \int_f \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = Q_j|\Omega_j|, \qquad (2.11)$$

kde stěny f jsou jednotlivé části hranice  $\Gamma_j$  a všechny stěny tvoří vzájemně disjunktní pokrytí příslušné hranice. Stojí za to podotknout, že rovnice 2.11 je stále matematicky ekvivalentní k rovnici 2.10. Prozatím jsme ještě neprovedly žádné aproximace či přibližné náhrady.

#### 2.2.2 Aproximace numerickým tokem

Nyní se pokusíme aproximovat integrál toku přes hranice z rovnice 2.11. Pro lepší představu teď předpokládejme, že tok zachovávané veličiny je dán z rovnic 2.3 a 2.2 jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}W - \kappa \nabla W.$$

Tok přes stěnu f (část hranice  $\Gamma_j$ ) se souřadnicí středu  $\mathbf{x_f}$  můžeme aproximovat pomocí

$$\int_{f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{f} (\mathbf{u}W - \kappa \nabla W) \cdot \mathbf{n} \, dS \approx (\mathbf{u}W_{f} - \kappa \nabla W_{f}) \cdot \mathbf{S}_{f} = \mathbf{F}_{f} \cdot \mathbf{S}_{f}, (2.12)$$

kde  $\mathbf{S_f} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{n} \, dS$ , což je konstantní vlastnost geometrie stěny,  $W_f(t) = W(\mathbf{x_f}, t)$  a  $\nabla W_f(t) = \nabla W(\mathbf{x_f}, t)$ .

Pro řešení úlohy je také potřeba zvolit, kde budou ukládány proměnné. Jinými slovy, jestli v našich rovnicích bude neznámá např.  $W_j$ , nebo  $W_f$ . V praxi se používá více možností i případných kombinací, jak uvádí [1, 4]. Standardně se používá ukládání hodnot ve středu buněk, ve středu stěn či ve vrcholech. V některých případech se objevuje i smíšený způsob (anglicky

staggered), kde hodnoty různých veličin jsou ukládány na jiných místech. Dále budeme předpokládat, že proměnné uchováváme ve středu buněk (anglicky cell-centered), tedy že proměnnou bude hodnota  $W_j$ . Pro další postup je tedy potřeba aproximovat hodnoty  $W_f$  a  $\nabla W_f \cdot \mathbf{S_f}$  pomocí zavedených neznámých ve středech buněk a získat tak  $\mathbf{F_f} = \mathbf{F_f}(W_j)$ . Poté již můžeme napsat semidiskrétní tvar (ve smyslu MKO) rovnice zachování skalární veličiny

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_j|\Omega_j|) + \sum_{\forall f} \mathbf{F_f} \cdot \mathbf{S_f} = Q_j|\Omega_j|.$$

Způsobů diskretizace numerického toku je mnoho, neboť jde o jednu ze stěžejních částí MKO. Numerický tok totiž zásadním způsobem ovlivňuje stabilitu a přesnost následného výpočtu. Dále jsou uvedeny pouze základní příklady způsobu diskretizace, neboť jejich rozbor není předmětem této práce.

#### Diskretizace difuzivního toku

Jak uvádí rovnice 2.12, aproximujeme člen difuzivního toku přes stěnu f jako

$$-\int_f \kappa \nabla W dS \approx \mathbf{F_D} = -\kappa \nabla W_f \cdot \mathbf{S_f}.$$

Pro diskretizaci takového členu můžeme vztah upravit na

$$\mathbf{F_D} = -\kappa \frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}} S_f,$$

kde  $\frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}}$  je tzv. derivace ve směru normály stěny f a  $S_f$  je plocha stěny. Pokud stěna f je právě mezi buňkami j=C a j=N, tak lze derivaci ve směru aproximovat pomocí

$$\frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}} \approx \frac{W_N - W_C}{||\mathbf{x_N} - \mathbf{x_C}||}.$$

- 2. Základy numerického řešení nestlačitelných NS rovnic
- Diskretizace konvektivního toku
- 2.3 SIMPLE algoritmus

myslenka, 'podvod', relaxace

# 2.4 Turbulence, modelování turbulence

v rychlosti o RANS, model turbulence Spalart a K-Omega rozdil vyhody a vhodnost aplikace (ucel modelu)

# Kapitola 3

# Optimalizace sdruženou metodou

Zájem o optimalizaci proudění tekutin je od nepaměti a předmětem vědeckého bádání minimálně od doby vynalezení integrálního počtu [10]. Tato kapitola se zabývá základní definicí problému optimalizace a představuje známou, avšak v oblasti proudění tekutiny, prozatím nepříliš hojně užívanou metodu optimalizace. Dále jsou odvozeny základy této metody pro její aplikaci v druhé části této práce.

# 3.1 Základy optimalizace

Pro popis problému optimalizace se používají pojmy:

- $stavové proměnné \phi$  nebo také fyzikální veličiny či proměnné jako tlak, rychlost, teplota atd. dané většinou z konkrétních rovnic
- lacktriangle návrhové parametry g materiálové vlastnosti, vstupní rychlost, tvar geometrie nebo hranice

- *cílová funkce/funkcionál*  $J(\phi, g)$  hodnocení kombinace stavových a návrhových parametrů, např. tlaková ztráta, stlačení nebo vztlak
- vazební rovnice  $R(\phi, g) = 0$  rovnice proudění

Problém optimalizace lze pak matematicky formulovat následovně. [10]

**Problém 3.1.** Nechť je dána množina parametrů  $g = \{g_n, n = 1, ..., N\}$ , cílová funkce  $J(\phi, g)$  a vazební rovnice  $R(\phi, g) = 0$ . Najděte takovou kombinaci parametrů g a  $\phi$ , která minimalizuje funkci  $J(\phi, g)$  a zároveň splňuje platnost podmiňujících rovnic  $R(\phi, g) = 0$ .

Metod na řešení optimalizačního problému je hned několik. Obecně je lze rozlišit na obecné a lokální optimalizační metody. Mezi všeobecně známe patři například metoda genetických algoritmu(obecná) a gradientní optimalizační metody(lokální). Základní rozdíl těchto metod je, že obecné optimalizační metody se zpravidla snaží přiblížit globálnímu optimu v celém prostoru přípustných parametrů, kdežto lokální metody na základě počátečního odhadu spadají do nejbližšího lokálního minima.

Typický optimalizační cyklus lokální metody lze zapsat následovně:

Mějme počáteční odhad  $q^{(0)}$ 

Pro n = 0, 1, 2...

- 1. Vyřešit  $R(\phi^{(n)}, g^{(n)})$  pro zjištění  $\phi^{(n)}$
- 2. Spočítat  $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)},g^{(n)})$
- 3. Pomocí výsledků 1 a 2 zjistit optimální krok $\delta g$  např.  $\delta g = -\alpha \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}q}(\phi^{(n)},g^{(n)})$
- 4. Změnit návrhové proměnné  $g^{(n+1)} = g^{(n)} + \delta g$

Různé algoritmy se odlišují ve způsobu vyhodnocení gradientu v kroku 2. (citlivostní gradient, sdružená metoda) a následně se větví při volbě vhodného optimalizačního kroku (CGM, BFSG).

## 3.2 Metoda sdružené optimalizace

Metoda sdružené optimalizace se snaží vyřešit problém popsaný v sekci 3.1. Jde o speciální případ gradientní metody optimalizace, a tedy se předpokládá, že původní výběr optimalizovaných parametrů se nachází poměrně blízko hledaného optima. Nové, optimálnější řešení se dostane podle předpisu

$$g^{(n+1)} = g^{(n)} - \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}q}(\phi^{(n)}, g^{(n)}), \tag{3.1}$$

kde  $\alpha<0$  je délka kroku. Co se týče znaménka v rovnici 3.1, tak to je v tomto případe –, neboť dle problému 3.1 hledáme minimum funkcionálu J a tedy musíme dělat krok proti směru nejvyššího růstu i.e. ve směru opačném ke gradientu.

Hlavním znakem sdružené gradientní optimalizace je způsob vyhodnocení gradientu cílové funkce vzhledem parametrům, tedy  $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}$ . Pro vyhodnocení tohoto gradientu jsou odvozeny nové parciální diferenciální rovnice (PDR). Proces odvození nových PDR z metody Lagrangeových multiplikátorů, která specifikuje novou cílovou funkci, která v sobě bude zahrnovat podmiňující rovnice. Definujeme tak novou cílovou funkci

$$L(\phi, g, \xi) = J(\phi, g) + \langle R(\phi, g), \xi \rangle, \tag{3.2}$$

kde  $\xi$  jsou tzv. sdružené proměnné (sdružené ke stavovým proměnným) a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  je symetrická, bilineární forma, jejíž podoba je zpravidla jasná až z konkrétně řešeného problému. Dostáváme tak nový problém, jehož řešení je však podle [10] ekvivalentní s problémem 3.1.

**Problém 3.2.** Nechť je dána množina parametrů  $g = \{g_n, n = 1, ..., N\}$ , cílová funkce  $J(\phi, g)$  a vazební rovnice  $R(\phi, g) = 0$ . Najděte takovou kombinaci parametrů g, stavových proměnných  $\phi$  a sdružených proměnných  $\xi$  tak, aby  $L(\phi, g, \xi) = J(\phi, g) + \langle R(\phi, g), \xi \rangle$  bylo stacionární.

Z matematického hlediska je dobré podotknout, že všechny argumenty L jsou na sobě nezávislé. Pro J tomu tak nebylo, protože  $\xi$  a g spolu byli svázané přes podmiňující rovnice  $R(\phi,g)=0$  a nešlo je tak volit nezávisle. Abychom splnili podmínku stacionarity, jak požaduje problém 3.2, musí být variance L podle všech proměnných rovna nule.

### 3.2.1 Optimální systém rovnic

V této části jsou ukázány jednotlivé variace

$$\delta L = \delta_{\xi} L + \delta_{\phi} L + \delta_{g} L \tag{3.3}$$

pro cílovou funkci L definovanou rovnicí 3.2.

#### Variace sdružených proměnných

Nulovost variace podle sdružených proměnných  $\xi$  lze zapsat jako

$$\delta_{\xi}L = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L(\phi, g, \xi + \epsilon \delta \xi) - L(\phi, g, \xi)}{\epsilon} = 0,$$

kde variace  $\delta \xi$  je libovolná. Po dosazení za L z rovnice 3.2, dostáváme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\phi,g) + \langle \xi + \epsilon \delta \xi, R(\phi,g) \rangle - (J(\phi,g) + \langle \xi, R(\phi,g) \rangle)}{\epsilon} = 0,$$

tedy

$$\langle \delta \xi, R(\phi, g) \rangle = 0.$$

Díky libovolnosti variace  $\delta \xi$  dostáváme původní vazební rovnici

$$R(\phi, g) = 0, (3.4)$$

která tvoří první část systému optimálních rovnic. Variace podle sdružených proměnných nám z části ukázala, že stacionární bod rozšířeného funkcionálu  $L(\phi,g,\xi)$  splňuje vazební rovnice.

#### Variace stavových proměnných

Dále vezměme variaci vzhledem ke stavovým proměnným  $\phi$ , tedy

$$\delta_{\phi}L = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L(\phi + \epsilon \delta \phi, g, \xi) - L(\phi, g, \xi)}{\epsilon} = 0$$

a opět po dosazení rovnice 3.2

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\phi + \epsilon \delta \phi, g) + \langle \xi, R(\phi + \epsilon \delta \phi, g) \rangle - (J(\phi, g) + \langle \xi, R(\phi, g) \rangle)}{\epsilon} = 0,$$

neboli

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left( \frac{J(\phi + \epsilon \delta \phi, g) - J(\phi, g)}{\epsilon} + \frac{\langle \xi, R(\phi + \epsilon \delta \phi) - R(\phi, g) \rangle}{\epsilon} \right) = 0.$$

Členy ve jmenovateli obsahující  $\epsilon$  přepíšeme pomocí Taylorova rozvoje okolo bodu  $\phi$ 

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left( \frac{J(\phi,g) + \frac{\partial J}{\partial \phi} \epsilon \delta \phi + O(e^2) - J(\phi,g)}{\epsilon} + \frac{\left\langle \xi, R(\phi,g) + \frac{\partial R}{\partial \phi} \epsilon \delta \phi + O(e^2) - R(\phi,g) \right\rangle}{\epsilon} \right) = 0,$$

kde vypadnou členy bez derivace, a po zkrácení  $\epsilon$  dostáváme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left( \frac{\partial J}{\partial \phi} \delta \phi + \left\langle \xi, \frac{\partial R}{\partial \phi} \delta \phi \right\rangle + O(\epsilon) \right) = 0.$$

Provedeme limitu

$$\frac{\partial J}{\partial \phi} \delta \phi + \left\langle \xi, \frac{\partial R}{\partial \phi} \delta \phi \right\rangle = 0, \tag{3.5}$$

použijeme

$$\frac{\partial J}{\partial \phi} \delta \phi = \left\langle 1, \frac{\partial J}{\partial \phi} \delta \phi \right\rangle$$

a označíme  $(\cdot)^*$  sdružený operátor k $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , tedy

$$\left\langle \left(\frac{\partial J}{\partial \phi}\right)^*, \delta \phi \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\right)^* \xi, \delta \phi \right\rangle = 0.$$

Další část systému optimálních rovnic jsou tedy tzv. sdružené rovnice

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\right)^* \xi = -\left(\frac{\partial J}{\partial \phi}\right)^*. \tag{3.6}$$

#### Variace návrhových parametrů

Poslední část variace  $\delta L$  je vzhledem k návrhovým parametrům g, tedy

$$\delta_g L = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L(\phi, g + \epsilon \delta g, \xi) - L(\phi, g, \xi)}{\epsilon} = 0,$$

kde obdobně jako pro stavové proměnné po dosazení z rovnice 3.2 dostaneme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\phi, g + \epsilon \delta g) + \langle \xi, R(\phi, g + \epsilon \delta g) \rangle - (J(\phi, g) + \langle \xi, R(\phi, g) \rangle)}{\epsilon} = 0$$

a po aplikování stejného postupu jako pro vztah 3.6, dostaneme poslední část optimálního systému rovnic, tzv. podmínky optimálnosti

$$\left(\frac{\partial R}{\partial g}\right)^* \xi = -\left(\frac{\partial J}{\partial g}\right)^*. \tag{3.7}$$

#### Řešení soustavy optimálních rovnic

Řešením soustavy optimálních rovnic 3.4, 3.6 a 3.7 dává řešení problému 3.2 a tedy i 3.1. Analyticky lze systém vyřešit pouze ve speciálních případech a oproti základnímu systému, tedy vazebním rovnicím, je tento nesegregovaný systém často masivní, jak upozorňuje [10]. Vyřešením této soustavy jako nesegregované dostaneme přímo optimální hodnoty návrhových parametrů, bohužel to v mnoha případech není možné. Řešení soustavy rovnic segregovaným způsobem už je schůdnější varianta, vyžaduje však iteraci a lze ukázat, že iterační metoda řešící každou z tří části odděleně je ekvivalentní k metodě nejvyššího spádu, jejíž rychlost konvergence je často nedostačující. Jak bylo již řečeno v úvodu této sekce, lze sdruženou metodu použít i jiným způsobem a to pro výpočet gradientu/variace  $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}$ , který je posléze použit v optimalizačním cyklu podle předpisu 3.1.

#### 3.2.2 Gradient pomocí sdružené metody

Získat gradient cílové funkce je v rámci optimalizačního cyklu, nastíněného na začátku této sekce, tradičně nejnáročnější operace. Gradient cílové funkce lze za použití řetízkového pravidla zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) + \frac{\partial J}{\partial g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}). \tag{3.8}$$

Mějme řešení sdružených rovnic 3.6 v n-té iteraci, i.e. mějme  $\xi^{(n)}$ , které řeší

$$\xi^{(n)} \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi} \Big|_{q^{(n)}} = \frac{\partial J}{\partial \phi} \Big|_{q^{(n)}}.$$
 (3.9)

Dosazením 3.9 do rovnice 3.8 dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = \xi^{(n)} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\Big|_{g^{(n)}}\right) \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}\Big|_{g^{(n)}} + \frac{\partial J}{\partial g}\Big|_{g^{(n)}},$$

kam dosadíme variaci vazebních rovnic  $R(\phi, g) = 0$ 

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\Big|_{g^{(n)}}\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}\Big|_{g^{(n)}} = -\frac{\partial R}{\partial g}\Big|_{g^{(n)}},$$

čímž se dopracujeme k hledanému vztahu

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}q}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = -\xi^{(n)} \cdot \frac{\partial R}{\partial q}\Big|_{q^{(n)}} + \frac{\partial J}{\partial q}\Big|_{q^{(n)}},$$

V optimalizačních úlohách se k zjištění gradientů typicky používá metoda konečných diferencí. Náročnost výpočtu ale roste přímo úměrně s počtem návrhových parametrů, kdežto ve sdružené metodě závisí vyhodnocení gradientu převážně na rychlosti výpočtu nových PDR. Ve sdružené metodě je pak navíc potřeba odvodit příslušné PDR a to teoreticky pro každou cílovou funkci. Prakticky lze ale určit dostatečně obecný předpis pro cílovou funkci, odvodit rovnice pro ni a konkrétní předpis dosadit až později.

#### 3.2.3 Sdružené rovnice pro nestlačitelné proudění

V této podsekci budou odvozeny sdružené rovnice pro tvarovou optimalizaci v nestlačitelném proudění podle [6, 3]. Podmiňující rovnice budou tedy NS rovnice pro stacionární stav s tekutinou o konstantní hustotě, tedy rovnice hybnosti

$$\mathbf{R}^{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot 2\nu D(\mathbf{u}), \tag{3.10}$$

kde operátor  $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$ , a rovnice kontinuity

$$R^p = -\nabla \cdot \mathbf{u}.\tag{3.11}$$

Stavové proměnné jsou tedy v tomto případě rychlost  ${\bf u}$  a měrný tlak ve smyslu rovnice 2.9, tedy  $p=\frac{p_{fyz}}{\rho}$ . K nim budou odpovídat sdružené proměnné

 $\xi = (\mathbf{v}, q)$ . Obecnou cílovou funkci lze v rámci mnoha inženýrských aplikací zapsat pomocí integrálu přes výpočetní oblast a integrálu přes hranici, tedy

$$J(\mathbf{u}, p, g) = \int_{\Omega} J_{\Omega}(\mathbf{u}, p, g) \, dV + \int_{\Gamma} J_{\Gamma}(\mathbf{u}, p, g) \, dS.$$
 (3.12)

S takto definovanými proměnnými, vazebními rovnicemi a cenovou funkcí lze definovat upravenou cenovou funkci

$$L = J + \int_{\Omega} \xi \cdot \mathbf{R} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{u}} + qR^{p} + J_{\Omega} \, d\Omega + \int_{\Gamma} J_{\Gamma} \, dS$$
 (3.13)

a pokračovat k odvození sdružených rovnic a definujeme vhodnou bilineární formu

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, dV. \tag{3.14}$$

Vyjdeme předpisu 3.5 pro variaci upravené cenové funkce podle stavových proměnných

$$\delta_{\phi}L = \frac{\partial J}{\partial \phi}\delta\phi + \int_{\Omega} \xi \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi}\delta\phi \,dV = 0$$
 (3.15)

Pro člen s J můžeme přímo psát

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} \delta u_i = \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial u_i} \delta u_i \, dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial u_i} \delta u_i \, dS, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial J}{\partial p} \delta p = \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \, dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \, dS.$$
 (3.17)

Pro člen se sdruženými proměnnými  $\xi\cdot\frac{\partial R}{\partial\phi}$  provedeme variaci  $\delta\phi$  postupně pro každou rovnici

$$\begin{split} \delta_{\mathbf{u}}\mathbf{R}^{\mathbf{u}} &= (\delta\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\delta\mathbf{u} - \nabla\cdot(2\nu D(\delta\mathbf{u})),\\ \delta_{p}\mathbf{R}^{\mathbf{u}} &= \nabla\delta p,\\ \delta_{\mathbf{u}}R^{p} &= -\nabla\cdot\delta\mathbf{u},\\ \delta_{p}R^{p} &= 0. \end{split}$$

Pro úplnost je potřeba podotknout, že jsme vynechali variaci kinematické viskozity  $\nu$ . Pro laminární proudění je to naprosto platný postup. Pokud ale budeme modelovat turbulenci za pomocí přídavné turbulentní vazkosti  $\nu = \nu_t + \widetilde{\nu}$ , tak buďto musíme udělat předpoklad tzv. zmražené turbulence (anglicky frozen turbulence) a nebo rozepsat i variace rovnic turbulence. Zkoumání variace modelů turbulence je nad rámec této práce a detailněji se o

něm píše v [11], kde se rozebírá i vliv zjednodušujícího předpokladu zmrazené turbulence na výsledek pro případ různých Reynoldsových čísel.

Odvozené vztahy nyní dosadíme do předpisu 3.15

$$\delta_{\phi}L = \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial u_{i}} \delta u_{i} \, dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial u_{i}} \delta u_{i} \, dS + \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \, dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \, dS + \int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{v} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u}}_{\mathbf{I}} \underbrace{-\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot (2\nu D(\delta \mathbf{u})))}_{\mathbf{I}\mathbf{I}} \, dV + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \delta p \, dV}_{\mathbf{V}} + \underbrace{\int_{\Omega} -q \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, dV}_{\mathbf{V}}.$$
(3.18)

Postupně teď pomocí Gaussovy věty (integrace per-partes) přesuneme derivace na sdružené proměnné, tak abychom mohli vytknout variace stavových proměnných. Pro odvození některých členů je výhodnější použít indexový zápis s Einstainovou sumační konvencí, tedy

$$I = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega} v_j \delta u_i \frac{\partial u_j}{x_i} \, dV$$

a po aplikaci Gaussovy věty

$$I = \int_{\Gamma} v_j \delta u_i u_j n_i \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial (v_j \delta u_i)}{x_i} u_j \, dV,$$

rozepíšeme derivaci součinu

$$\mathbf{I} = \int_{\Gamma} v_j \delta u_i u_j n_i \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} v_j \underbrace{\frac{\partial (\delta u_i)}{x_i} u_j}_{=0 \text{ z kontinuity}} \, \mathrm{d}V, - \int_{\Omega} \delta u_i \frac{\partial v_j}{x_i} u_j \, \mathrm{d}V$$

a tedy

$$I = \int_{\Gamma} v_j u_j n_i \delta u_i \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{x_i} u_j \delta u_i \, dV = \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$
(3.19)

Pro druhý člen můžeme psát

$$II = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega} v_j u_i \frac{\partial (\delta u_j)}{x_i} \, dV$$

a stejným postupem jako v předchozím případě (Gaussova věta, derivace součinu, rovnice kontinuity) dostáváme

$$II = \int_{\Gamma} v_j u_i n_i \delta u_j \, dS - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{x_i} \delta u_j \, dV = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$
(3.20)

Nejpracnější je pak člen číslo tři, tedy

$$III = \int_{\Omega} -\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot (2\nu D(\delta \mathbf{u}))) \, dV = \int_{\Omega} -v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \left( \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} \right) \right) \, dV,$$

použijeme Gaussovu větu poprvé

$$III = \int_{\Gamma} -v_i \left( \nu \left( \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} \right) \right) n_j \, dS + \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \nu \left( \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} \right) \, dV$$

a podruhé, zvlášť na oba členy v objemovém integrálu,

$$\begin{aligned} \text{III} &= \int_{\Gamma} -2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (n_j \delta u_i + n_i \delta u_j) \, \mathrm{d}S - \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta u_j \, \mathrm{d}V, \end{aligned}$$

čímž dostáváme výraz

$$III = \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{v})) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$
(3.21)

Dále

$$IV = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \delta p \, dV = \int_{\Omega} v_i \frac{\partial (\delta p)}{\partial x_i} \, dV = \int_{\Gamma} v_i n_i \delta p \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p \, dV$$

а

$$IV = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta p \, dS - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta p \, dV.$$
 (3.22)

Pro poslední člen pak

$$V = \int_{\Omega} -q \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega} -q \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_i} \, dV = \int_{\Gamma} -q \delta u_i n_i \, dS + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_i} \delta u_i \, dV$$

a vektorově tedy

$$V = \int_{\Gamma} -q \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$
 (3.23)

Konečně lze tedy rozepsat rovnici 3.15 pomocí odvozených členů

$$\begin{split} \delta_{\phi}L &= \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial u_{i}} \delta u_{i} \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial u_{i}} \delta u_{i} \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \, \mathrm{d}S + \\ &+ \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}V + \\ &+ \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}S - \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{v})) \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}V + \\ &+ \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta p \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta p \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} -q \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \end{split}$$

a poté co dáme k sobě členy se stejnou variací a typem integrálu

$$\delta_{\phi}L = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{v})) + \nabla q \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} + 2\nu \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) - q \mathbf{n} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS$$

$$- \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

$$+ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} - \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \delta p \, dV$$

$$+ \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \delta p \, dS$$

dostáváme stejný výraz jako je odvozen v [5].

Podmínka  $\delta_{\phi}L$  musí být splněna pro libovolnou variaci stavových proměnných. Z objemových integrálů nám tedy vychází sdružené NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu ve stacionárním stavu, které můžeme zapsat jako

$$2D(\mathbf{v})\mathbf{u} + \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{v})) - \nabla q = \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}$$
(3.24)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p},\tag{3.25}$$

kde jsme použili

$$\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_j + u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) u_j = 2D(\mathbf{v}) \mathbf{u}.$$

#### 3. Optimalizace sdruženou metodou •

Hraniční integrály nám pak dávají návod na sestavení okrajových podmínek pro sdružené rovnice a to tak, aby

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} + 2\nu \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) - q \mathbf{n} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS = \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$
(3.26)

$$\int_{\Gamma} \left( \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \delta p \, dS = 0.$$
 (3.27)

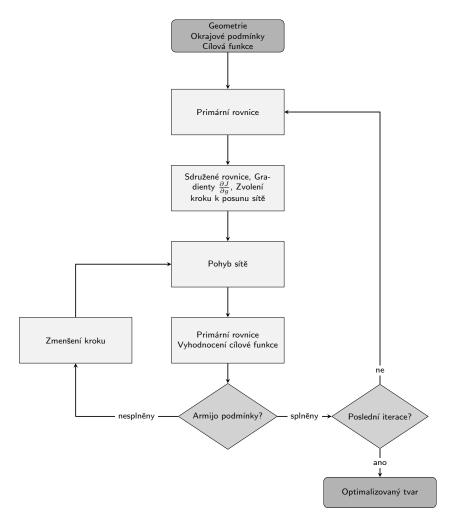
Systém sdružených rovnic nápadně připomíná původní systém nestlačitelných NS rovnic. Mezi zásadní rozdíly patří linearita rovnic a také, že v porovnání s původními NS rovnicemi má konvektivní člen opačné znaménko. To značí, že informace se v šíří proti směru stavové rychlosti  ${\bf u}$  namísto po směru proudu. Sdružené rovnice často bývají o něco jednodušší, neboť existuje celá řada cenových funkcí, které závisí pouze na hraničních hodnotách. Ku příkladu třecí ztráty, výslednice sil na těleso nebo stlačení. Pro takové cílové funkce pak odpadávají pravé strany sdružených rovnic, neboť  $J_{\Omega}=0$ .

### 3.3 Pohyb site

Nastinit nekolik moznych zpusobu, popsat vic zpusob pomoci obecneho prevodu na B-spliny z OF

### 3.4 Optimalizacni cyklus

flowchart s naznacenim kde kdy se jake rovnice pocitaji (hlavni NS-rce, sdruzene rce, pohyb site)



Obrázek 3.1: Optimalizacni cyklus

### Část II

Praktická aplikace

# Kapitola 4

### Tvarova optimalizace kompresorove mrize

chceme optimalizovat stlaceni

### 4.1 Sdruzene rce pro cilovou fci stlaceni

konkretni postup odvozeni rovnic z "nove"cilove funkce, zjednoduseni cilove fce pro nestlacitelne proudeni (pouze rozdil bez podilu)

Stlaceni

$$\Pi = \frac{p_{IN}^t}{p_{OUT}^t} \tag{4.1}$$

Minimalizovanou cílovou funkci lze tedy zapsat jako

$$J = p_{OUT}^t - p_{IN}^t, (4.2)$$

kde průměrný celkový tlak na libovolné hranici  $\Gamma$  získáme pomocí integrálu

$$p_{\Gamma}^{t} = \int_{\Gamma} p + \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \, \mathrm{d}S. \tag{4.3}$$

Ve smyslu vztahu 3.12 má takto definovaná cílová funkce stlačení pouze hraniční složku  $J_{\Gamma}$  a pro sdružené rovnice tak bude figurovat pouze v hraničních členech, tedy v rovnicích 3.26 a 3.27. Potřebujeme tedy vydefinovat parciální derivace podle primárních proměnných  $\mathbf{u}$  a p.

Parciální derivaci podle skalární veličiny p lze psát přímo jako

$$\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} = \frac{\partial \left( p + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right)}{\partial p} = 1. \tag{4.4}$$

Derivaci podle rychlosti můžeme psát jako

$$\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \left(p + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\right)}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \left(u_{j} u_{j}\right)}{\partial u_{i}} = \frac{\partial u_{j}}{\partial u_{i}} u_{j} = \delta_{ij} u_{j} = u_{i} = \mathbf{u}. \tag{4.5}$$

Pro pozdější implementaci v softwarovém balíku OpenFOAM je navíc potřeba vydefinovat ještě následující derivace.

$$\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial u_n} = \frac{\partial \left( p + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right)}{\partial u} \tag{4.6}$$

vydefinovani clenu potrebnych pro OF

implementace v OF

```
scalar pt = gSum
(
magSf
*(
p.boundaryField()[patchI]
+ 0.5*magSqr(Upatch)
)
* patchDirection_[oI]
);
patchPt_[oI] = mag(pt);
J_ += pt;
```

### 4.2 Optimalizace mrize GHH 1-S1

popis geometrie, vypocetni oblasti, okrajove podminky, nastaveni optimalizacniho algoritmu

Pro aplikaci optimalizačního algoritmu s novou cenovou funkcí pro stlačení byla zvolena axiální kompresorová mříž MAN GHH 1-S1 publikovaná v [8]. Výpočetní oblast

#### 4.2.1 vysledky

klaibrace S-A modelu, prubeh cilove fce, overeni vysledku pomoci vhodnejsiho modelu turbulence

## Kapitola 5

### Závěr

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

# Přílohy

### Příloha A

### Seznam použitých symbolů a zkratek

- $b_n$  Optimalizační parametry
- t Čas
- $\Gamma$  Hranice kontrolního objemu
- J Cílová funkce
- $n_i$ , **n** Normálový vektor hranice
- $\Omega$  Kontrolní objem
- $\frac{\partial}{\partial w}$  Parciální derivace podle veličiny w
- PDR Parciální diferenciální rovnice
- $R_i$  Podmiňující rovnice
- $\rho$  Hustota
- $u_i$ , **u** Vektor rychlosti

### Příloha B

### Rejstřík

Baumgartova stabilizace, 9

Princip virtuálních prací, 19

Bernoulliova diferenciální rovnice průhybové čáry, 26

Tvarové funkce, 22

Lagrangeovy rovnice

2. druhu, 5

smíšeného typu, 7–9, 11, 15

Metoda

 ${\rm MBS~flex,~21}$ 

poddajných tělísek, RFE, 11

### Příloha C

### Literatura

- [1] J. Blazek. Computational fluid dynamics: principles and applications. Butterworth-Heinemann, 2015.
- [2] R. Dvořák. Vnitřní aerodynamika. ČVUT, 1987.
- [3] J. Fürst. Metoda konečných objemů II. 2020.
- [4] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics. Elsevier, 2007.
- [5] C. Othmer. A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International journal for numerical methods in fluids*, 58(8):861–877, 2008.
- [6] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. *Computers & Fluids*, 36(2):325–341, 2007.
- [7] A. H. Shapiro. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. *New York: Ronald Press*, 1953.
- [8] W. Steinert, B. Eisenberg, and H. Starken. Design and testing of a controlled diffusion airfoil cascade for industrial axial flow compressor

C. Literatura

- application. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, volume 79047, page V001T01A044. American Society of Mechanical Engineers, 1990.
- [9] V. Stejskal and M. Valášek. Kinematics and dynamics of machinery. Marcel Dekker, inc., 1996. ISBN:0-8247-9731-0.
- [10] R. van den Braembussche and M. Manna. *Inverse Design and Optimisation Methods: April 21-25, 1997.* Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1997.
- [11] A. Zymaris, D. Papadimitriou, K. Giannakoglou, and C. Othmer. Continuous adjoint approach to the spalart–allmaras turbulence model for incompressible flows. *Computers & Fluids*, 38(8):1528–1538, 2009.