Diplomová práce



České vysoké učení technické v Praze

F2

Fakulta strojní Ústav technické matematiky

Tvarová optimalizace lopatkové mříže sdruženou metodou

Bc. Pavel Mačák

Vedoucí: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D.

Obor: Matematické modelování v technice

Studijní program: Aplikované vědy ve strojním inženýrství

Leden 2022

*



ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

I. OSOBNÍ A STUDIJNÍ ÚDAJE

Příir	mení: N	/lačák	Jméno: Pavel	Osobní číslo:	465509
		naoan	01110110. I 4101	CCCCIII CICIC.	

Fakulta/ústav: Fakulta strojní

Zadávající katedra/ústav: Ústav technické matematiky Studijní program: Aplikované vědy ve strojním inženýrství Matematické modelování v technice Specializace:

Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022 Platnost zadání diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. podpis děkana(ky)	Název diplomové práce:		
Shape optimization of blade cascade with adjoint method Pokyny pro vypracování: Student se seznámí s principy sdružené metody pro tvarovou optimalizaci. V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizacní cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence. Seznam doporučené literatury: [1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007. [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to ti Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009. [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Wo Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620 Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) inebo konzultanta(ky) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) inebo konzultanta(ky) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) inebo konzultante, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.	Tvarová optimalizace lopatkové m	rííže sdruženou metodou	
Pokyny pro vypracování: Student se seznámí s principy sdružené metody pro tvarovou optimalizaci. V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizační cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence. Seznam doporučené literatury: [1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007. [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to ti Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009. [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Wo Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, (4) WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continuum enchanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620 Iméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Iméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) práce podpis dekana(ky) Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.	Název diplomové práce anglicky:		
Student se seznámí s principy sdružené metody pro tvarovou optimalizaci. V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizační cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence. Seznam doporučené literatury: [1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007. [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009. [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Wo Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continuu mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620 Iméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Iméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Iméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) práce	Shape optimization of blade casca	ade with adjoint method	
V závěrečné práci provede odvození sdružené metody a popíše optimalizační cyklus. Pomocí softwarového balíku OpenFOAM provede optimalizaci tvaru lopatky kompresorové mříže pro vhodně zvolenou cenovou funkci. Výsledek optimalizace ověří výpočtem s pokročilejším modelem turbulence. Seznam doporučené literatury: [1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007. [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009. [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in compressible flows. 11th Wo Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, (4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continuum echanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620 Jiméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Jaméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce PŘEVZETÍ ZADÁNÍ Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.	Pokyny pro vypracování:		
[1] PAPADIMITRIOU, D. I. a K. C. GIANNAKOGLOU. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007. [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009. [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Wo Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620 Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022 Platnost zadání diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) ústavulkatedry prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) ústavulkatedry Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.	V závěrečné práci provede odvození sdr OpenFOAM provede optimalizaci tvaru le	užené metody a popíše optimalizační cy opatky kompresorové mříže pro vhodně	
based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. Computers and Fluids [online]. 2007. [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIOU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHMER. Continuous adjoint approach to the Spalart-Allmaras turbulence model for incompressible flows. Computers and Fluids [online]. 2009. [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-airfoils in incompressible flows. 11th Wo Congress on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, WCCM 2014, 5th European Conference on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hrvoje JASAK a Christer FUREBY. A tensorial approach to computational continuum echanics using object-oriented techniques. Computers in Physics [online]. 1998, 12(6), 620 Jméno a pracoviště vedoucí(ho) diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022 Platnost zadání diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) ústavulkatedry prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) ústavulkatedry Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.	Seznam doporučené literatury:		
doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav technické matematiky FS Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022 Platnost zadání diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry PŘEVZETÍ ZADÁNÍ Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.	based on boundary integrals, for inviscid [2] ZYMARIS, A. S., D. I. PAPADIMITRIC Spalart-Allmaras turbulence model for in [3] SCHRAMM, M., B. STOEVESANDT a Congress on Computational Mechanics, [4] WELLER, Henry G., Gavin TABOR, Hr mechanics using object-oriented techniq	and viscous flows. Computers and Fluid DU, K. C. GIANNAKOGLOU a C. OTHM compressible flows. Computers and Fluid J. PEINKE. Adjoint optimization of 2D-ail WCCM 2014, 5th European Conference voje JASAK a Christer FUREBY. A tensor ues. Computers in Physics [online]. 199	ds [online]. 2007. ER. Continuous adjoint approach to the ids [online]. 2009. rfoils in incompressible flows. 11th World on Computational Mechanics, rial approach to computational continuum
Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoucí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomové práce: Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022 Platnost zadání diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry podpis děkana(ky) Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.		·	
Datum zadání diplomové práce: 21.10.2021 Termín odevzdání diplomové práce: 16.01.2022 Platnost zadání diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry prof. Ing. Michael Valášek, DrSc podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry podpis děkana(ky) PŘEVZETÍ ZADÁNÍ Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.	doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D., ústav	technické matematiky FS	
Platnost zadání diplomové práce: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. podpis vedoucí(ho) práce Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.	Jméno a pracoviště druhé(ho) vedoud	cí(ho) nebo konzultanta(ky) diplomov	vé práce:
podpis vedoucí(ho) práce podpis vedoucí(ho) ústavu/katedry podpis děkana(ky) PŘEVZETÍ ZADÁNÍ Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.		.10.2021 Termín odevzdán	í diplomové práce: 16.01.2022
Diplomant bere na vědomí, že je povinen vypracovat diplomovou práci samostatně, bez cizí pomoci, s výjimkou poskytnutých konzultací.		, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	prof. Ing. Michael Valášek, DrSc. podpis děkana(ky)
	PŘEVZETÍ ZADÁNÍ		
		·	, s výjimkou poskytnutých konzultací.
	<u> </u>		

Poděkování

Prohlášení

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu práce doc. Ing. Jiřímu Fürstovi, Ph.D. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce. Zároveň děkuji své rodině a přátelům za jejich podporu při studiu.

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze, 1. ledna 2022

Abstrakt

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Klíčová slova: Optimalizace, CFD, OpenFOAM, Lopatková mříž

Vedoucí: doc. Ing. Jiří Fürst, Ph.D. Ústav technické matematiky Resslova 307/9 Praha 6

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices biben-Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Keywords: Optimization, CFD, OpenFOAM, Compressor cascade

Title translation: Shape optimization of blade cascade with adjoint method

Obsah	2.3 SIMPLE algoritmus 16
1 Úvod 3	2.3.1 Myšlenka segregovaných algoritmů16
Část I Teoretická část	2.3.2 Varianta algoritmu SIMPLE s rovnicí pro tlak
2 Základy numerického řešení nestlačitelných NS rovnic 7	2.4 Turbulence, modelování turbulence
2.1 Základy matematického popisu proudění	3 Optimalizace sdruženou metodou 19
2.1.1 Kontrolní objem a zákon	3.1 Základy optimalizace 19
zachování 8	3.2 Metoda sdružené optimalizace 21
2.1.2 Zákon zachování hmoty, Rovnice kontinuity 10	3.2.1 Optimální systém rovnic 22
2.1.3 Zákon zachování hybnosti, Rovnice hybnosti 10	3.2.2 Gradient pomocí sdružené metody24
2.1.4 NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu	3.2.3 Sdružené rovnice pro proudění nestlačitelné tekutiny 25
2.2 Základ metody konečných objemů 13	3.3 Pohyb sítě
2.2.1 Konečný objem 13	3.4 Optimalizacni cyklus 32
2.2.2 Aproximace numerickým tokem	Část II

Praktická aplikace	5 Závěr	57	
4 Tvarova optimalizace kompresorove mrize	37	Přílohy	
4.1 Obecný popis problému	37	A Seznam použitých symbolů a zkratek	61
4.2 Cílové funkce	38	B Rejstřík	63
4.2.1 Přímá formulace	39		
4.2.2 Nepřímá formulace přes sílu .	40	C Literatura	65
4.3 Optimalizace mříže GHH 1-S1	41		
4.3.1 Okrajové podmínky	42		
4.3.2 Modelování turbulence	42		
4.3.3 Prostorová diskretizace	43		
4.3.4 Parametry optimalizace	45		
4.3.5 Výsledky optimalizace	46		
4.3.6 Ověření vhodnějším modelem turbulence	52		

Obrázky

2.1 Pevný kontrolní objem v obecném proudovém poli 9
3.1 Řídící body objemového B-spline okolo automobilového zrcátka. Příklad z [9]
3.2 Optimalizacni cyklus
4.1 Náčrt topologie výpočetní oblasti pro standardní axiální kompresorovou mříž
4.2 Výpočetní síť pro lopatkovou mříž GHH 1-S1 s detailem náběžné a odtokové hrany. Síť sestává z celkem 85 tisíc hexahedrálních buněk 44
4.3 Pozice řídících bodů objemových B-spline ve výpočetní oblasti pro lopatkovou mříž GHH 1-S1. Růžové body se smí pohybovat pouze ve směru osy y 45
4.4 Konvergence residua $\frac{ u_{y2}^i - u_{y2tar} }{ u_{y2}^0 }$ pro přímou formulaci cílové funkce J v průběhu iteračních cyklů. Hranice konvergence 1% naznačena růžovou čarou. 47

4.5 Konvergence residua $\frac{ F_{yP}^i - F_{yPtar} }{ F_{yP}^0 } \text{ pro nepřímou}$ formulaci cílové funkce J v průběhu iteračních cyklů. Hranice konvergence 1% naznačena růžovou čarou 48
4.6 Konvergence residua $\frac{ \alpha_2^i - \alpha_{2tar} }{ \alpha_2^0 }$ pro přímou formulaci cílové funkce J v průběhu iteračních cyklů. Hranice konvergence 1% naznačena růžovou čarou 49
4.7 Konvergence residua $\frac{ \alpha_2^i - \alpha_{2tar} }{ \alpha_2^0 }$ pro nepřímou formulaci cílové funkce J v průběhu iteračních cyklů. Hranice konvergence 1% naznačena růžovou čarou 50
4.8 Obrys tvaru lopatky před optimalizací (černě) a po optimalizaci s přímou (modře) a nepřímou (červeně) formulací cílové funkce. Červená křivka na většině obrázku překrývá modrou 51
4.9 Vizualizace pole posunu bodů sítě ve směru osy y
4.10 Pole velikosti vektoru rychlosti $ \mathbf{u} $ pro původní profil lopatky 53

4.11 Pole velikosti vektoru rychlosti u pro optimalizovaný profil	
lopatky	53
4.12 Pole přídavné turbulentní vazkos ν_t pro původní profil lopatky	ti
$\alpha_2 = \alpha_2^0 \dots \dots$	54
4.13 Pole přídavné turbulentní vazkos ν_t pro optimalizovaný profil lopatky	
4.14 Pole velikosti vektoru rychlosti pro původní (vlevo) a optimalizovan (vpravo) profil lopatky	-
4.15 Pole přídavné turbulentní vazkos pro původní (vlevo) a optimalizovan (vpravo) profil lopatky	ιý

Tabulky

4.1 Cílové hodnoty pro optimalizaci. 46

*

Kapitola $oldsymbol{1}$

Úvod

This is uvod

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque

1. Úvod

penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

1. Úvod

Část l

Teoretická část

Kapitola 2

Základy numerického řešení nestlačitelných NS rovnic

Problém proudění či mechanika tekutiny je v rámci této práce chápán jako zkoumání pohybu velkého množství částic a jejich interakce. Velké množství ve smyslu, že zkoumané fluidum má takovou hustotu, že lze použít aproximaci reality pomocí matematického kontinua. To nám říká, že i v nekonečně malá (infinitesimální) část tekutiny obsahuje dostatečný počet částic, pro které lze specifikovat střední rychlost a střední kinetickou energii. Jsme tak schopni definovat pojmy rychlost, tlak, teplota, hustota a další důležité veličiny jako spojité funkce v rámci celého kontinua. Tato kapitola vychází různou měrou z publikací [1, 2, 5, 11, 3]

2.1 Základy matematického popisu proudění

Odvození základních rovnic mechaniky tekutin se opírá tzv. zákony zachování. Pro případ obecné tekutiny to jsou

- 1. zachování hmoty
- 2. zachování hybnosti a
- 3. zachování energie.

Pro případ nestlačitelné tekutiny si pak vystačíme pouze s prvními dvěma zmíněnými zákony zachování.

Zachování určité veličiny znamená, že její časovou změnu uvnitř libovolného objemu lze vyjádřit jako množství veličiny proudící přes hranici zvoleného objemu a produkci veličiny uvnitř objemu. Často se také mluví o bilanci veličiny v určitém objemu. Množství veličiny, které proudí přes hranici objemu se nazývá tok. Obecně se tok dá rozdělit na dvě složky. Konvekci, způsobenou konvektivním přenosem veličiny, a difuzi, způsobenou pohybem molekul tekutiny v klidovém stavu. Difuzivní přenos závisí na gradientu dané veličiny a pro případ homogenní distribuce tedy vymizí.

2.1.1 Kontrolní objem a zákon zachování

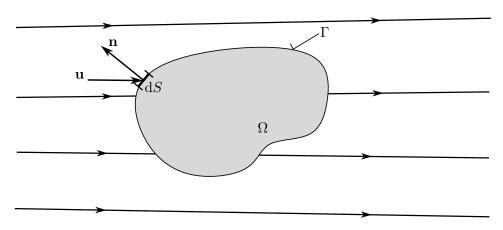
V předchozí kapitole se o zákonech zachování mluvilo v kontextu jistého objemu. Takovémuto libovolně zvolitelnému objemu se často říká kontrolní objem, nebo - pro účely numerické matematiky vhodněji - konečný kontrolní objem.

Mějme obecný kontrolní objem Ω s uzavřenou hranicí Γ , který je pevný v prostoru s daným proudovým polem jak naznačuje obrázek 2.1. Zároveň lze definovat element hranice dS a jeho vnější normálu \mathbf{n} .

Pro obecnou zachovávanou veličinu W lze zákon zachování psát jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} W \, dV + \int_{\Gamma} \mathbf{F}(W) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} Q_{\Omega}(W) \, dV + \int_{\Gamma} \mathbf{Q}_{\Gamma}(W) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.1)$$

kde $Q_{\Omega}(W)$ jsou objemové a $\mathbf{Q}_{\Gamma}(W)$ povrchové zdroje a $\mathbf{F}(W)$ je vektor hustoty toku veličiny W plochou Γ . Zákon v této formě je formálně platný



Obrázek 2.1: Pevný kontrolní objem v obecném proudovém poli.

jak pro skalární veličinu W tak vektorovou \mathbf{W} . Speciálně pak pro skalární veličinu lze člen s tokem přes hranici rozdělit, podle dříve zmíněného dělení, na konvektivní tok

$$\mathbf{F}_{\mathbf{K}}(W) = W\mathbf{u} \tag{2.2}$$

a difuzivní tok vyjádřený pomocí zobecněného Fickova gradientního zákona

$$\mathbf{F}_{\mathbf{D}}(W) = \kappa \rho \nabla(W/\rho), \tag{2.3}$$

kde κ je koeficient difuzivity a dohromady tedy

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(W) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Gamma} W \left[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right] - \kappa \rho \left[\nabla (W/\rho) \cdot \mathbf{n} \right] dS. \tag{2.4}$$

Rovnici 2.1 tak můžeme rozepsat do podoby

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} W \, dV + \int_{\Gamma} W \left[\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right] - \kappa \rho \left[\nabla (W/\rho) \cdot \mathbf{n} \right] dS = \int_{\Omega} Q_{\Omega}(W) \, dV + \int_{\Gamma} \mathbf{Q}_{\Gamma}(W) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$
(2.5)

Pro vektorovou veličinu lze udělat velmi podobné rozdělení, pouze s tím rozdílem, že všechny tři funkce W ($\mathbf{F},Q_{\Omega},\mathbf{Q}_{\Gamma}$) budou o jeden tenzorový řád vyšší. Rovnice 2.1 s rozdělením na tenzory konvektivního a difuzivního toku tak dostane podobu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{W} \, dV + \int_{\Gamma} \left(\mathbb{F}_K(\mathbf{W}) - \mathbb{F}_D(\mathbf{W}) \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q}_{\Omega}(\mathbf{W}) \, dV + \int_{\Gamma} \mathbb{Q}_{\Gamma}(\mathbf{W}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$
(2.6)

Takto odvozený obecný zákon zachování (někdy taky bilanční rovnici) lze využít pro odvození základních rovnic proudění.

2.1.2 Zákon zachování hmoty, Rovnice kontinuity

Pro jednosložkové tekutiny vyjadřuje zákon zachování hmoty, tedy že hmotu v systému nelze vytvořit, ani ztratit, i.e. zdroj hmoty se uvnitř kontrolního nepředpokládá. Musí tedy platit, že změna hmotnosti uvnitř kontrolního objemu musí být rovna toku hmoty přes hranice kontrolního objemu, tedy

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \, dV = \int_{\Gamma} \rho \, u_i \, n_i dS = \int_{\Omega} \frac{\partial \left(\rho u_i\right)}{\partial x_i} dV. \tag{2.7}$$

Po převedení obou integrálů na jednu stranu, záměně operací integrace a derivace a vyžití distributivity integrálu vzhledem k operaci součet, dostáváme obecný tvar rovnice kontinuity pro nestacionární proudění stlačitelné tekutiny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u_i\right)}{\partial x_i} = 0. \tag{2.8}$$

Ke stejné rovnici dojdeme, pokud do rovnice zachovaní 2.5 dosadíme za obecnou skalární veličinu W hustotu ρ , uplatníme předpoklad nulových zdrojů na pravé straně a uvědomíme si, že difuzivní tok z rovnice 2.3 bude nulový, neboť

$$\nabla(W/\rho) = \nabla(\rho/\rho) = \nabla(1) = 0. \tag{2.9}$$

Za předpokladu nestlačitelnosti tekutiny, tedy že $\rho=konst.$ lze navíc rovnici 2.8 zjednodušit na

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{2.10}$$

což se běžně označuje jako rovnice kontinuity pro proudění nestlačitelné tekutiny (v indexovém a vektorovém zápisu).

2.1.3 Zákon zachování hybnosti, Rovnice hybnosti

Odvození rovnice hybnosti vychází z druhého Newtonova zákona, který říká, že změna hybnosti je způsobena součtem sil účinkujících na element hmotnosti. Hybnost nekonečně malé části kontrolního objemu je

$$\rho \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \tag{2.11}$$

a tedy změna hybnosti uvnitř kontrolního objemu je

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, dV. \tag{2.12}$$

Sledovanou zachovávanou veličinou vektorovou veličinou \mathbf{W} z analogie předchozího vztahu s prvním členem rovnice 2.6 je hybnost $\rho \mathbf{u}$. Formálním použitím rovnice 2.2 dostáváme vztah pro tenzor konvektivního toku

$$\mathbb{F}_K(\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \tag{2.13}$$

Difuzivní tok zůstává nulový neboť hybnost nemůže difundovat v tekutině za klidového stavu.

Nejdůležitější částí odvození rovnice hybnosti je interpretace zdrojových členů. Zdroj hybnosti je z hlediska fyziky vždy síla.

- 1. Objemové síly působí na hmotu v celém kontrolním objemu e.g. síla gravitační, inerciální, Coriolisova či elektromagnetická etc.
- 2. Povrchové síly působí přímo na povrchu Γ kontrolního objemu. Jedná se o deformační působení vnějších sil. Tenzor napětí, kterým se často toto působení vyjadřuje lze rozdělit na sférickou a deviátorovou složku, které v případě tekutin lze interpretovat jako působení tlaku okolí a smykové a normálové napětí vznikající mezi okolím a kontrolním objemem.

Objemové zdroje lze vyjádřit jednoduše. Pokud příslušnou vnější sílu vztáhneme na jednotku objemu $\rho \mathbf{f_e}$ lze psát

$$\int_{\Omega} \mathbf{Q}_{\Omega} dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}_{\mathbf{e}} dV. \tag{2.14}$$

Povrchové zdroje jsou rozdělené na sférické působení okolního tlaku p a tenzor viskózního napětí τ , tedy

$$\mathbb{Q}_{\Gamma} = -p\mathbb{I} + \tau,$$

$$Q_{\Gamma ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij},$$

kde \mathbb{I} je jednotkový tensor, případně δ_{ij} Kronekerovo delta. Pro Newtonskou tekutinu lze tenzor viskózního smykového napětí vyjádřit podle [5] jako

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right], \tag{2.15}$$

za předpokladu konstantní dynamické viskozity μ jak poukazuje [2].

Nyní lze již psát soustavu pohybových Navier-Stokesových (NS) rovnic v integrálním tvaru, tedy rovnice hybnosti pro stlačitelnou Newtonskou tekutinu, jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + p \mathbf{n} - \tau \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} \mathbf{Q}_{\Omega} \, dV. \tag{2.16}$$

Často lze rovnici hybnosti nalézt i v diferenciálním tvaru, například v [5]

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \mu \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] = \rho \mathbf{f_e}$$
 (2.17)

2.1.4 NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu

Obecný systém NS rovnic lze pro speciální případy zjednodušit zanedbáním některých fyzikálních vlivů. V této práci budeme později využívat zjednodušený tvar NS rovnic pro nestlačitelnou tekutinu. Tedy $\rho=konst$. čímž dostáváme rovnici kontinuity ve zjednodušeném tvaru 2.10, tedy

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.18}$$

a NS rovnice hybnosti v diferenciálním tvaru podle [5] má podobu

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f_e}. \tag{2.19}$$

Rovnici hybnosti jde dále vydělit konstantou hustoty, čímž dostaneme jakýsi měrný tlak $\hat{p}=\frac{p}{\rho}$ a rovnice 2.19 přejde do tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla \hat{p} + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f_e}. \tag{2.20}$$

2.2 Základ metody konečných objemů

Metoda konečných objemů (MKO, anglicky Finite volume method - FVM) je jednou z nejpoužívanějších metod pro řešení PDR proudění - společně s konečnými diferencemi a metodou konečných prvků. Popularita MKO pro numerické řešení problému proudění tkví podle [5] v její obecnosti, srozumitelnosti základních principů a snadnosti implementace pro libovolné sítě i složitější geometrie.

Zásadní výhodou z hlediska přesnosti MKO je pak princip tzv. konzervativní diskretizace (konzervativní ve smyslu zachovávající). Udržet v platnosti základní zákony zachování je důležitý aspekt správnosti řešení. MKO má tu výhodu, že konzervativní diskretizace je podle [5] splněna automaticky díky přímé diskretizaci integrálního tvaru zákonů zachování.

2.2.1 Konečný objem

MKO nese svůj název podle způsobu prostorové diskretizace, tj. rozdělení zkoumané oblasti $\Omega = \mathbb{R}^d$ na vzájemně disjunktní neprázdné otevřené podoblasti Ω_j s konečnou velikostí, matematicky psáno

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Omega}_{i},
\Omega_{i} \cap \Omega_{j} = \emptyset, \text{ pro } i \neq j.$$

Tyto konečné objemy (někdy buňky) jsou analogií kontrolních objemů z podsekce 2.1.1. Jakmile máme takto rozdělenou výpočetní oblast, tak na každý konečný objem aplikujeme zákon zachování v integrálním tvaru. To si můžeme dovolit, nebot zákony zachování byly v sekci 2.1 odvozeny pro libovolný kontrolní objem a lze je tedy aplikovat na každý konečný podobjem zvlášť. Obecný zákon zachování popsaný rovnicí 2.1 má pro j-tý kontrolní objem tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_j} W \, dV + \int_{\Gamma_j} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega_j} Q_{\Omega} \, dV, \qquad (2.21)$$

kde pro jednoduchost zápisu ponecháváme jen objemové zdroje na pravé straně. Pro každý konečný objem nyní definujeme prostorově střední hodnotu

sledované veličiny

$$\overline{W}|_{\Omega_j} = W_j(t) = \frac{1}{|\Omega_j|} \int_{\Omega_j} W(\mathbf{x}, t) \, dV.$$
 (2.22)

Stejným způsobem nahradíme i objemové zdroje v rovnici 2.21 a integrál toku **F** nahradíme součtem přes hranice. Dostaneme tvar rovnice zachování, napsanou pro j-tý kontrolní konečný objem

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_j|\Omega_j|) + \sum_{\forall f} \int_f \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = Q_j|\Omega_j|, \qquad (2.23)$$

kde stěny f jsou jednotlivé části hranice Γ_j a všechny stěny tvoří vzájemně disjunktní pokrytí příslušné hranice. Stojí za to podotknout, že rovnice 2.23 je stále matematicky ekvivalentní k rovnici 2.21. Prozatím jsme ještě neprovedly žádné aproximace či přibližné náhrady.

2.2.2 Aproximace numerickým tokem

Nyní se pokusíme aproximovat integrál toku přes hranice z rovnice 2.23. Pro lepší představu teď předpokládejme, že tok zachovávané veličiny je dán z rovnic 2.3 a 2.2 jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}W - \kappa \nabla W. \tag{2.24}$$

Tok přes stěnu f (část hranice Γ_j) se souřadnicí středu $\mathbf{x_f}$ můžeme aproximovat pomocí

$$\int_{f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{f} (\mathbf{u}W - \kappa \nabla W) \cdot \mathbf{n} \, dS \approx (\mathbf{u}W_{f} - \kappa \nabla W_{f}) \cdot \mathbf{S}_{f} = \mathbf{F}_{f} \cdot \mathbf{S}_{f}, (2.25)$$

kde $\mathbf{S_f} = \int_{\Gamma_j} \mathbf{n} \, dS$, což je konstantní vlastnost geometrie stěny, $W_f(t) = W(\mathbf{x_f}, t)$ a $\nabla W_f(t) = \nabla W(\mathbf{x_f}, t)$.

Pro řešení úlohy je také potřeba zvolit, kde budou ukládány proměnné. Jinými slovy, jestli v našich rovnicích bude neznámá např. ve středu buňky (bude reprezentovat střední hodnotu v celé buňce) W_j , nebo uprostřed stěny W_f . V praxi se používá více možností i případných kombinací, jak uvádí [1, 5]. Standardně se používá ukládání hodnot ve středu buněk, ve středu

stěn či ve vrcholech. V některých případech se objevuje i smíšený způsob (anglicky staggered), kde hodnoty různých veličin jsou ukládány na jiných místech. Dále budeme předpokládat, že proměnné uchováváme ve středu buněk (anglicky cell-centered), tedy že proměnnou bude hodnota W_j . Pro další postup je tedy potřeba aproximovat hodnoty W_f a $\nabla W_f \cdot \mathbf{S_f}$ pomocí zavedených neznámých ve středech buněk a získat tak $\mathbf{F_f} = \mathbf{F_f}(W_j)$. Poté již můžeme napsat semidiskrétní tvar (ve smyslu MKO) rovnice zachování skalární veličiny

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_j|\Omega_j|) + \sum_{\forall f} \mathbf{F_f} \cdot \mathbf{S_f} = Q_j|\Omega_j|. \tag{2.26}$$

Způsobů diskretizace numerického toku je mnoho, neboť jde o jednu ze stěžejních částí MKO. Numerický tok totiž zásadním způsobem ovlivňuje stabilitu a přesnost následného výpočtu. Dále jsou uvedeny pouze základní příklady způsobu diskretizace, neboť jejich rozbor není předmětem této práce.

Diskretizace difuzivního toku

Jak uvádí rovnice 2.25, aproximujeme člen difuzivního toku přes stěnu f jako

$$-\int_{f} \kappa \nabla W \cdot \mathbf{n} dS \approx \mathbf{F}_{\mathbf{D}} = -\kappa \nabla W_{f} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{f}}.$$
 (2.27)

Pro diskretizaci takového členu můžeme vztah upravit na

$$\mathbf{F_D} = -\kappa \frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}} S_f, \tag{2.28}$$

kde $\frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}}$ je tzv. derivace ve směru normály stěny f a S_f je plocha stěny. Pokud stěna f je právě mezi středy buněk j=C a j=N, tedy n_f je vnější normála vzhledem k buňce C a vnitřní vzhledem k N, tak lze derivaci ve směru aproximovat pomocí

$$\frac{\partial W_f}{\partial \mathbf{n_f}} \approx \frac{W_N - W_C}{||\mathbf{x_N} - \mathbf{x_C}||}.$$
 (2.29)

Diskretizace konvektivního toku

Druhou částí toku přes střenu je konvektivní tok, z rovnice 2.25 tedy

$$\int_{f} \mathbf{u}W \cdot \mathbf{n} \, dS \approx \mathbf{F}_{\mathbf{K}} = W_{f}\mathbf{u}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{f}} = W_{f}\phi_{f}, \qquad (2.30)$$

kde jsme skalární součin $\mathbf{u_f}\cdot\mathbf{S_f}$ označily jako ϕ_f , tzv. konvektivní tok přes stěnu f. Interpolace W_f lze pro případ ortogonální sítě s konstantním krokem zapsat jednoduše jako

$$W_f = \frac{W_C + W_N}{2}. (2.31)$$

Interpolaci lze provést i lepšími způsoby, které kompenzují případné nedokonalosti či nerovnoměrnosti v síti. Například pro ortogonální sít s nerovnoměrným krokem je vhodnější formulovat interpolaci jako

$$W_f \approx \frac{||\mathbf{x_{Nf}}||W_C + ||\mathbf{x_{Cf}}||W_N}{||\mathbf{x_{Nf}}|| + ||\mathbf{x_{Cf}}||} = \frac{||\mathbf{x_{Nf}}||W_C + ||\mathbf{x_{Cf}}||W_N}{||\mathbf{x_{CN}}||}, \qquad (2.32)$$

kde \mathbf{x}_{if} je vektor mezi středem buňky j = C, N a středem stěny f.

2.3 SIMPLE algoritmus

myslenka, 'podvod', relaxace

Algoritmus SIMPLE (zkratka pro semi-implicit pressure linked equations) pro řešení problému proudění nestlačitelné tekutiny lze v jeho původní variantě nalézt například v [10]. Od té doby se objevilo spoustu úprav a vylepšení jako SIMPLER, SIMPLEST nebo SIMPLEC.

2.3.1 Myšlenka segregovaných algoritmů

Algoritmus SIMPLE je jeden ze základních příkladů tzv. segregovaných algoritmů. Rovnice ze soustavy NS rovnic se zde neřeší jako jeden celek, ale

odděleně každá zvlášť. Výhodou oproti klasickému sdruženému algoritmu je, že se vyhneme řešení rozsáhlé soustavy rovnic se špatně podmíněnou maticí, jak poukazuje [3].

Segregované algoritmy obecně naráží na problémy s konvergencí či přesností jakmile se zvýší závislost mezi jednotlivými rovnicemi soustavy. Jinými slovy matice soustavy sestavená sdruženou metodou začne být lépe podmíněná. V případě soustavy NS rovnic pro tekutinu o konstantní hustotě může být měřítkem fiktivní Machovo číslo $M = \frac{||\mathbf{u}||}{c}$, kde c má význam klidové rychlosti zvuku v tekutině.

2.3.2 Varianta algoritmu SIMPLE s rovnicí pro tlak

V softwarové knihovně OpenFOAM [15], která je pro potřeby aplikace v rámci této práce využita, je dle [3] algoritmus SIMPLE implementován v následující formě.

Nejprve se stanoví odhad rychlosti \mathbf{u}^* pomocí tlak z předchozí iterace (případně z počáteční podmínky) z diskretizované rovnice hybnosti 2.20, ve které je konvektivní člen linearizován Picardovou aproximací. Pro odhad rychlosti tak dostáváme rovnici

$$a_C^0 \mathbf{u}_C^* = \sum_f a_{CN}^0 \mathbf{u}_N^* + \mathbf{Q}_C^0 - \nabla p_c^0.$$
 (2.33)

Zde horní indexy označují iteraci, tedy index 0 předchozí iteraci, index * odhad hodnoty nové iterace a později n hodnotu v nové iteraci. Dolní indexy pak označují buňku C, která sdílí stěnu f se sousední buňkou N. Koeficienty a jsou určeny podle metody diskretizace jednotlivých členů rovnice.

Označíme část rovnice pro odhad rychlosti

$$\frac{1}{a_C^0} \left(\sum_f a_{CN}^0 \mathbf{u_N^*} + \mathbf{Q_C^0} \right) = \widehat{\mathbf{u}_C^*}$$
 (2.34)

a po interpolaci na stěny

2. Základy numerického řešení nestlačitelných NS rovnic

2

1 urceni odhadu rychlosti ze stareho tlaku, starych zdrojovych clenu a koeficientu a_C (relaxace rovnice) 3.86 2 urceni odhadu tlaku z noveho odhadu rychlosti 3.90 3 ziskani novych hodnot rychlosti a toku ϕ_f 3.91,3.92 4 vypocet noveho tlaku (relaxace korekce) 3.93

2.4 Turbulence, modelování turbulence

v rychlosti o RANS, model turbulence Spalart a K-Omega rozdil vyhody a vhodnost aplikace (ucel modelu)

Kapitola 3

Optimalizace sdruženou metodou

Zájem o optimalizaci proudění tekutin je od nepaměti a předmětem vědeckého bádání minimálně od doby vynalezení integrálního počtu [14]. Tato kapitola se zabývá základní definicí problému optimalizace a představuje známou, avšak v oblasti proudění tekutiny, prozatím nepříliš hojně užívanou metodu optimalizace. Dále jsou odvozeny základy této metody pro její aplikaci v druhé části této práce.

3.1 Základy optimalizace

Pro popis problému optimalizace se používají pojmy:

- $primární proměnné \phi$ nebo také fyzikální veličiny či proměnné jako tlak, rychlost, teplota atd. dané většinou z konkrétních rovnic
- lacktriangle návrhové parametry g materiálové vlastnosti, vstupní rychlost, tvar geometrie nebo hranice

- *cílová funkce/funkcionál* $J(\phi, g)$ hodnocení kombinace primárních a návrhových parametrů, např. tlaková ztráta, stlačení nebo vztlak
- vazební rovnice $R(\phi, g) = 0$ rovnice proudění

Problém optimalizace lze pak matematicky formulovat následovně. [14]

Problém 3.1. Nechť je dána množina parametrů $g = \{g_n, n = 1, ..., N\}$, cílová funkce $J(\phi, g)$ a vazební rovnice $R(\phi, g) = 0$. Najděte takovou kombinaci parametrů g a ϕ , která minimalizuje funkci $J(\phi, g)$ a zároveň splňuje platnost podmiňujících rovnic $R(\phi, g) = 0$.

Metod na řešení optimalizačního problému je hned několik. Obecně je lze rozlišit na obecné a lokální optimalizační metody. Mezi všeobecně známe patři například metoda genetických algoritmu(obecná) a gradientní optimalizační metody(lokální). Základní rozdíl těchto metod je, že obecné optimalizační metody se zpravidla snaží přiblížit globálnímu optimu v celém prostoru přípustných parametrů, kdežto lokální metody na základě počátečního odhadu spadají do nejbližšího lokálního minima.

Typický optimalizační cyklus lokální metody lze zapsat následovně:

Mějme počáteční odhad $q^{(0)}$

Pro n = 0, 1, 2...

- 1. Vyřešit $R(\phi^{(n)}, g^{(n)})$ pro zjištění $\phi^{(n)}$
- 2. Spočítat $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)},g^{(n)})$
- 3. Pomocí výsledků 1 a 2 zjistit optimální krok δg např. $\delta g = -\alpha \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}q}(\phi^{(n)},g^{(n)})$
- 4. Změnit návrhové proměnné $g^{(n+1)} = g^{(n)} + \delta g$

Různé algoritmy se odlišují ve způsobu vyhodnocení gradientu v kroku 2. (citlivostní gradient, sdružená metoda) a následně se větví při volbě vhodného optimalizačního kroku (CGM, BFSG).

3.2 Metoda sdružené optimalizace

Metoda sdružené optimalizace se snaží vyřešit problém popsaný v sekci 3.1. Jde o speciální případ gradientní metody optimalizace, a tedy se předpokládá, že původní výběr optimalizovaných parametrů se nachází poměrně blízko hledaného optima. Nové, optimálnější řešení se dostane podle předpisu

$$g^{(n+1)} = g^{(n)} - \alpha \cdot \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}q}(\phi^{(n)}, g^{(n)}), \tag{3.1}$$

kde $\alpha<0$ je délka kroku. Co se týče znaménka v rovnici 3.1, tak to je v tomto případe –, neboť dle problému 3.1 hledáme minimum funkcionálu J a tedy musíme dělat krok proti směru nejvyššího růstu i.e. ve směru opačném ke gradientu.

Hlavním znakem sdružené gradientní optimalizace je způsob vyhodnocení gradientu cílové funkce vzhledem parametrům, tedy $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}$. Pro vyhodnocení tohoto gradientu jsou odvozeny nové parciální diferenciální rovnice (PDR). Proces odvození nových PDR z metody Lagrangeových multiplikátorů, která specifikuje novou cílovou funkci, která v sobě bude zahrnovat podmiňující rovnice. Definujeme tak novou cílovou funkci

$$L(\phi, g, \xi) = J(\phi, g) + \langle R(\phi, g), \xi \rangle, \tag{3.2}$$

kde ξ jsou tzv. sdružené proměnné (sdružené k primárním proměnným) a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je symetrická, bilineární forma, jejíž podoba je zpravidla jasná až z konkrétně řešeného problému. Dostáváme tak nový problém, jehož řešení je však podle [14] ekvivalentní s problémem 3.1.

Problém 3.2. Nechť je dána množina parametrů $g = \{g_n, n = 1, ..., N\}$, cílová funkce $J(\phi, g)$ a vazební rovnice $R(\phi, g) = 0$. Najděte takovou kombinaci parametrů g, primárních proměnných ϕ a sdružených proměnných ξ tak, aby $L(\phi, g, \xi) = J(\phi, g) + \langle R(\phi, g), \xi \rangle$ bylo stacionární.

Z matematického hlediska je dobré podotknout, že všechny argumenty L jsou na sobě nezávislé. Pro J tomu tak nebylo, protože ξ a g spolu byli svázané přes podmiňující rovnice $R(\phi,g)=0$ a nešlo je tak volit nezávisle. Abychom splnili podmínku stacionarity, jak požaduje problém 3.2, musí být variance L podle všech proměnných rovna nule.

3.2.1 Optimální systém rovnic

V této části jsou ukázány jednotlivé variace

$$\delta L = \delta_{\xi} L + \delta_{\phi} L + \delta_{g} L \tag{3.3}$$

pro cílovou funkci L definovanou rovnicí 3.2.

Variace sdružených proměnných

Nulovost variace podle sdružených proměnných ξ lze zapsat jako

$$\delta_{\xi}L = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L(\phi, g, \xi + \epsilon \delta \xi) - L(\phi, g, \xi)}{\epsilon} = 0,$$

kde variace $\delta \xi$ je libovolná. Po dosazení za L z rovnice 3.2, dostáváme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\phi,g) + \langle \xi + \epsilon \delta \xi, R(\phi,g) \rangle - (J(\phi,g) + \langle \xi, R(\phi,g) \rangle)}{\epsilon} = 0,$$

tedy

$$\langle \delta \xi, R(\phi, g) \rangle = 0.$$

Díky libovolnosti variace $\delta \xi$ dostáváme původní vazební rovnici

$$R(\phi, g) = 0, (3.4)$$

která tvoří první část systému optimálních rovnic. Variace podle sdružených proměnných nám z části ukázala, že stacionární bod rozšířeného funkcionálu $L(\phi,g,\xi)$ splňuje vazební rovnice.

Variace primárních proměnných

Dále vezměme variaci vzhledem ke primárním proměnným ϕ , tedy

$$\delta_{\phi}L = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L(\phi + \epsilon \delta \phi, g, \xi) - L(\phi, g, \xi)}{\epsilon} = 0$$

a opět po dosazení rovnice 3.2

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\phi + \epsilon \delta \phi, g) + \langle \xi, R(\phi + \epsilon \delta \phi, g) \rangle - (J(\phi, g) + \langle \xi, R(\phi, g) \rangle)}{\epsilon} = 0,$$

neboli

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{J(\phi + \epsilon \delta \phi, g) - J(\phi, g)}{\epsilon} + \frac{\langle \xi, R(\phi + \epsilon \delta \phi) - R(\phi, g) \rangle}{\epsilon} \right) = 0.$$

Členy ve jmenovateli obsahující ϵ přepíšeme pomocí Taylorova rozvoje okolo bodu ϕ

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{J(\phi,g) + \frac{\partial J}{\partial \phi} \epsilon \delta \phi + O(e^2) - J(\phi,g)}{\epsilon} + \frac{\left\langle \xi, R(\phi,g) + \frac{\partial R}{\partial \phi} \epsilon \delta \phi + O(e^2) - R(\phi,g) \right\rangle}{\epsilon} \right) = 0,$$

kde vypadnou členy bez derivace, a po zkrácení ϵ dostáváme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{\partial J}{\partial \phi} \delta \phi + \left\langle \xi, \frac{\partial R}{\partial \phi} \delta \phi \right\rangle + O(\epsilon) \right) = 0.$$

Provedeme limitu

$$\frac{\partial J}{\partial \phi} \delta \phi + \left\langle \xi, \frac{\partial R}{\partial \phi} \delta \phi \right\rangle = 0, \tag{3.5}$$

použijeme

$$\frac{\partial J}{\partial \phi}\delta\phi = \left\langle 1, \frac{\partial J}{\partial \phi}\delta\phi \right\rangle$$

a označíme $(\cdot)^*$ sdružený operátor k $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tedy

$$\left\langle \left(\frac{\partial J}{\partial \phi}\right)^*, \delta \phi \right\rangle + \left\langle \left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\right)^* \xi, \delta \phi \right\rangle = 0.$$

Další část systému optimálních rovnic jsou tedy tzv. sdružené rovnice

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\right)^* \xi = -\left(\frac{\partial J}{\partial \phi}\right)^*. \tag{3.6}$$

Variace návrhových parametrů

Poslední část variace δL je vzhledem k návrhovým parametrům g, tedy

$$\delta_g L = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L(\phi, g + \epsilon \delta g, \xi) - L(\phi, g, \xi)}{\epsilon} = 0,$$

kde obdobně jako pro primární proměnné po dosazení z rovnice 3.2 dostaneme

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{J(\phi, g + \epsilon \delta g) + \langle \xi, R(\phi, g + \epsilon \delta g) \rangle - (J(\phi, g) + \langle \xi, R(\phi, g) \rangle)}{\epsilon} = 0$$

a po aplikování stejného postupu jako pro vztah 3.6, dostaneme poslední část optimálního systému rovnic, tzv. podmínky optimálnosti

$$\left(\frac{\partial R}{\partial g}\right)^* \xi = -\left(\frac{\partial J}{\partial g}\right)^*. \tag{3.7}$$

Řešení soustavy optimálních rovnic

Řešením soustavy optimálních rovnic 3.4, 3.6 a 3.7 dává řešení problému 3.2 a tedy i 3.1. Analyticky lze systém vyřešit pouze ve speciálních případech a oproti základnímu systému, tedy vazebním rovnicím, je tento nesegregovaný systém často masivní, jak upozorňuje [14]. Vyřešením této soustavy jako nesegregované dostaneme přímo optimální hodnoty návrhových parametrů, bohužel to v mnoha případech není možné. Řešení soustavy rovnic segregovaným způsobem už je schůdnější varianta, vyžaduje však iteraci a lze ukázat, že iterační metoda řešící každou z tří části odděleně je ekvivalentní k metodě nejvyššího spádu, jejíž rychlost konvergence je často nedostačující. Jak bylo již řečeno v úvodu této sekce, lze sdruženou metodu použít i jiným způsobem a to pro výpočet gradientu/variace $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}$, který je posléze použit v optimalizačním cyklu podle předpisu 3.1.

3.2.2 Gradient pomocí sdružené metody

Získat gradient cílové funkce je v rámci optimalizačního cyklu, nastíněného na začátku této sekce, tradičně nejnáročnější operace. Gradient cílové funkce lze za použití řetízkového pravidla zapsat jako

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = \frac{\partial J}{\partial \phi}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) + \frac{\partial J}{\partial g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}). \tag{3.8}$$

Mějme řešení sdružených rovnic 3.6 v n-té iteraci, i.e. mějme $\xi^{(n)}$, které řeší

$$\xi^{(n)} \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi} \Big|_{q^{(n)}} = \frac{\partial J}{\partial \phi} \Big|_{q^{(n)}}.$$
 (3.9)

Dosazením 3.9 do rovnice 3.8 dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}g}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = \xi^{(n)} \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\Big|_{g^{(n)}}\right) \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}\Big|_{g^{(n)}} + \frac{\partial J}{\partial g}\Big|_{g^{(n)}},$$

kam dosadíme variaci vazebních rovnic $R(\phi, g) = 0$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \phi}\Big|_{g^{(n)}}\right)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}g}\Big|_{g^{(n)}} = -\frac{\partial R}{\partial g}\Big|_{g^{(n)}},$$

čímž se dopracujeme k hledanému vztahu

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}q}(\phi^{(n)}, g^{(n)}) = -\xi^{(n)} \cdot \frac{\partial R}{\partial q}\Big|_{q^{(n)}} + \frac{\partial J}{\partial q}\Big|_{q^{(n)}},$$

V optimalizačních úlohách se k zjištění gradientů typicky používá metoda konečných diferencí. Náročnost výpočtu ale roste přímo úměrně s počtem návrhových parametrů, kdežto ve sdružené metodě závisí vyhodnocení gradientu převážně na rychlosti výpočtu sdružených PDR. Ve sdružené metodě je pak navíc potřeba odvodit příslušné PDR a to teoreticky pro každou cílovou funkci. Prakticky lze ale určit dostatečně obecný předpis pro cílovou funkci, odvodit rovnice pro ni a konkrétní předpis dosadit až později.

3.2.3 Sdružené rovnice pro proudění nestlačitelné tekutiny

V této podsekci budou odvozeny sdružené rovnice pro tvarovou optimalizaci v nestlačitelném proudění podle [8, 3]. Podmiňující rovnice budou tedy NS rovnice pro stacionární stav s tekutinou o konstantní hustotě, tedy rovnice hybnosti

$$\mathbf{R}^{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \,\mathbf{u} + \nabla p - \nabla \cdot 2\nu D(\mathbf{u}), \tag{3.10}$$

kde operátor $D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$, a rovnice kontinuity

$$R^p = -\nabla \cdot \mathbf{u}.\tag{3.11}$$

Primární proměnné jsou tedy v tomto případě rychlost ${\bf u}$ a měrný tlak ve smyslu rovnice 2.20, tedy $p=\frac{p_{fyz}}{\rho}$. K nim budou odpovídat sdružené

proměnné $\xi = (\mathbf{v}, q)$. Obecnou cílovou funkci lze v rámci mnoha inženýrských aplikací zapsat pomocí integrálu přes výpočetní oblast a integrálu přes hranici, tedy

$$J(\mathbf{u}, p, g) = \int_{\Omega} J_{\Omega}(\mathbf{u}, p, g) \, dV + \int_{\Gamma} J_{\Gamma}(\mathbf{u}, p, g) \, dS.$$
 (3.12)

S takto definovanými proměnnými, vazebními rovnicemi a cenovou funkcí lze definovat upravenou cenovou funkci

$$L = J + \int_{\Omega} \xi \cdot \mathbf{R} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}^{\mathbf{u}} + qR^{p} + J_{\Omega} \, d\Omega + \int_{\Gamma} J_{\Gamma} \, dS$$
 (3.13)

a pokračovat k odvození sdružených rovnic a definujeme vhodnou bilineární formu

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, dV. \tag{3.14}$$

Vyjdeme předpisu 3.5 pro variaci upravené cenové funkce podle primárních proměnných

$$\delta_{\phi}L = \frac{\partial J}{\partial \phi}\delta\phi + \int_{\Omega} \xi \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi}\delta\phi \,dV = 0 \tag{3.15}$$

Pro člen sJ můžeme přímo psát

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} \delta u_i = \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial u_i} \delta u_i \, dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial u_i} \delta u_i \, dS, \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial J}{\partial p} \delta p = \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \, dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \, dS.$$
 (3.17)

Pro člen se sdruženými proměnnými $\xi \cdot \frac{\partial R}{\partial \phi}$ provedeme variaci $\delta \phi$ postupně pro každou rovnici

$$\begin{split} \delta_{\mathbf{u}}\mathbf{R}^{\mathbf{u}} &= (\delta\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\delta\mathbf{u} - \nabla\cdot(2\nu D(\delta\mathbf{u})),\\ \delta_{p}\mathbf{R}^{\mathbf{u}} &= \nabla\delta p,\\ \delta_{\mathbf{u}}R^{p} &= -\nabla\cdot\delta\mathbf{u},\\ \delta_{p}R^{p} &= 0. \end{split}$$

Pro úplnost je potřeba podotknout, že jsme vynechali variaci kinematické viskozity ν . Pro laminární proudění je to naprosto platný postup. Pokud ale budeme modelovat turbulenci za pomocí přídavné turbulentní vazkosti $\nu = \nu_t + \widetilde{\nu}$, tak buďto musíme udělat předpoklad tzv. zmražené turbulence (anglicky frozen turbulence) a nebo rozepsat i variace rovnic turbulence. Zkoumání variace modelů turbulence je nad rámec této práce a detailněji se o

něm píše v [16], kde se rozebírá i vliv zjednodušujícího předpokladu zmrazené turbulence na výsledek pro případ různých Reynoldsových čísel.

Odvozené vztahy nyní dosadíme do předpisu 3.15

$$\delta_{\phi}L = \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial u_{i}} \delta u_{i} \, dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial u_{i}} \delta u_{i} \, dS + \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \, dV + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \, dS + \int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{v} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u}}_{\mathbf{I}} \underbrace{-\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot (2\nu D(\delta \mathbf{u})))}_{\mathbf{I}\mathbf{I}} \, dV + \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \delta p \, dV}_{\mathbf{V}} + \underbrace{\int_{\Omega} -q \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, dV}_{\mathbf{V}}.$$
(3.18)

Postupně teď pomocí Gaussovy věty (integrace per-partes) přesuneme derivace na sdružené proměnné, tak abychom mohli vytknout variace primárních proměnných. Pro odvození některých členů je výhodnější použít indexový zápis s Einstainovou sumační konvencí, tedy

$$I = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\delta \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega} v_j \delta u_i \frac{\partial u_j}{x_i} \, dV$$

a po aplikaci Gaussovy věty

$$I = \int_{\Gamma} v_j \delta u_i u_j n_i \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial (v_j \delta u_i)}{x_i} u_j \, dV,$$

rozepíšeme derivaci součinu

$$\mathbf{I} = \int_{\Gamma} v_j \delta u_i u_j n_i \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} v_j \underbrace{\frac{\partial (\delta u_i)}{x_i} u_j}_{=0 \text{ z kontinuity}} \, \mathrm{d}V, - \int_{\Omega} \delta u_i \frac{\partial v_j}{x_i} u_j \, \mathrm{d}V$$

a tedy

$$I = \int_{\Gamma} v_j u_j n_i \delta u_i \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{x_i} u_j \delta u_i \, dV = \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$
(3.19)

Pro druhý člen můžeme psát

$$II = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \delta \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega} v_j u_i \frac{\partial (\delta u_j)}{x_i} \, dV$$

a stejným postupem jako v předchozím případě (Gaussova věta, derivace součinu, rovnice kontinuity) dostáváme

$$II = \int_{\Gamma} v_j u_i n_i \delta u_j \, dS - \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_j}{x_i} \delta u_j \, dV = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$
(3.20)

Nejpracnější je pak člen číslo tři, tedy

$$III = \int_{\Omega} -\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot (2\nu D(\delta \mathbf{u}))) \, dV = \int_{\Omega} -v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial (\delta \mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} \right) \right) \, dV,$$

použijeme Gaussovu větu poprvé

$$III = \int_{\Gamma} -v_i \left(\nu \left(\frac{\partial (\delta \mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} \right) \right) n_j \, dS + \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \nu \left(\frac{\partial (\delta \mathbf{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial (\delta \mathbf{u}_j)}{\partial x_i} \right) \, dV$$

a podruhé, zvlášť na oba členy v objemovém integrálu,

$$\begin{aligned} \text{III} &= \int_{\Gamma} -2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma} \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (n_j \delta u_i + n_i \delta u_j) \, \mathrm{d}S - \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta u_j \, \mathrm{d}V, \end{aligned}$$

čímž dostáváme výraz

$$III = \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS - \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\Omega} \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{v})) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$
(3.21)

Dále

$$IV = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla \delta p \, dV = \int_{\Omega} v_i \frac{\partial (\delta p)}{\partial x_i} \, dV = \int_{\Gamma} v_i n_i \delta p \, dS - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \delta p \, dV$$

a

$$IV = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta p \, dS - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta p \, dV.$$
 (3.22)

Pro poslední člen pak

$$V = \int_{\Omega} -q \nabla \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = \int_{\Omega} -q \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial x_i} \, dV = \int_{\Gamma} -q \delta u_i n_i \, dS + \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial x_i} \delta u_i \, dV$$

a vektorově tedy

$$V = \int_{\Gamma} -q \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \delta \mathbf{u} \, dV.$$
 (3.23)

Konečně lze tedy rozepsat rovnici 3.15 pomocí odvozených členů

$$\begin{split} \delta_{\phi}L &= \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial u_{i}} \delta u_{i} \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial u_{i}} \delta u_{i} \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} \delta p \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} \delta p \, \mathrm{d}S + \\ &+ \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}V + \\ &+ \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}S - \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{v})) \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}V + \\ &+ \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \delta p \, \mathrm{d}S - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \delta p \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} -q \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega} \nabla q \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathrm{d}V \end{split}$$

a poté co dáme k sobě členy se stejnou variací a typem integrálu

$$\delta_{\phi}L = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{v})) + \nabla q \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV$$

$$+ \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} + 2\nu \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) - q \mathbf{n} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS$$

$$- \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

$$+ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} - \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \delta p \, dV$$

$$+ \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \delta p \, dS$$

dostáváme stejný výraz jako je odvozen v [7].

Podmínka $\delta_{\phi}L$ musí být splněna pro libovolnou variaci primárních proměnných. Z objemových integrálů nám tedy vychází sdružené NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu ve stacionárním stavu, které můžeme zapsat jako

$$2D(\mathbf{v})\mathbf{u} + \nabla \cdot (2\nu D(\mathbf{v})) - \nabla q = \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \mathbf{u}}$$
(3.24)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p},\tag{3.25}$$

kde jsme použili

$$\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_j + u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) u_j = 2D(\mathbf{v}) \mathbf{u}.$$

Hraniční integrály nám pak dávají návod na sestavení okrajových podmínek pro sdružené rovnice a to tak, aby

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} + 2\nu \mathbf{n} \cdot D(\mathbf{v}) - q \mathbf{n} \right) \cdot \delta \mathbf{u} \, dS = \int_{\Gamma} 2\nu \mathbf{v} \cdot D(\delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$
(3.26)

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right) \delta p \, dS = 0.$$
 (3.27)

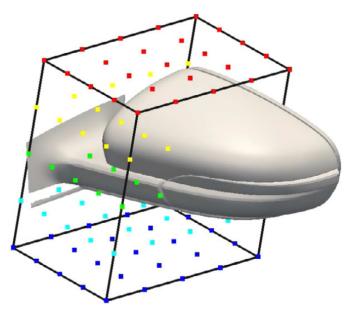
Systém sdružených rovnic nápadně připomíná původní systém NS rovnic pro nestlačitelné tekutiny. Mezi zásadní rozdíly patří linearita rovnic a také, že v porovnání s původními NS rovnicemi má konvektivní člen opačné znaménko. To značí, že informace se v šíří proti směru primární rychlosti ${\bf u}$ namísto po směru proudu. Sdružené rovnice často bývají o něco jednodušší, neboť existuje celá řada cenových funkcí, které závisí pouze na hraničních hodnotách. Ku příkladu třecí ztráty, výslednice sil na těleso nebo stlačení. Pro takové cílové funkce pak odpadávají pravé strany sdružených rovnic, neboť $J_{\Omega}=0$.

3.3 Pohyb sítě

Nastinit nekolik moznych zpusobu, popsat vic zpusob pomoci obecneho prevodu na B-spliny z OF

Prozatím jsme pracovali s obecnými návrhovými parametry g. V rámci zaměření a cíle této práce je nyní konkretizujeme. Pro tvarovou optimalizaci má smysl definovat návrhové parametry, které jsou svázané s tvarem výpočetní oblasti. Například pro křídlo letadla budeme chtít měnit profil, pro optimalizaci ztrát v koleni potrubí pak tvar samotného kolene atp. Pro tuto práci budeme později uvažovat kompresorovou mříž a měnit se tedy bude tvar lopatky.

První přístup co přichází v úvahu je brát přímo souřadnice bodů profilu jako návrhové parametry. To ovšem znamená spoustu návrhových parametrů, jejíchž počet při zjemňování sítě roste. V případě metody sdružené optimalizace to vlastně nevadí. Právě naopak bychom těžili tu největší výhodu



Obrázek 3.1: Řídící body objemového B-spline okolo automobilového zrcátka. Příklad z [9].

sdružené optimalizace, tedy (téměř) nezávislost rychlosti výpočtu gradientu optimalizace na počtu návrhových proměnných. Druhým, už horším avšak stále řešitelným problémem, je zachování platnosti a funkčnosti výpočetní sítě. Snadno se dá představit, že při pohybu pouze hranice, se mohou začít stěny křížit, vznikat záporné objemy apod. Takovou situaci lze řešit dodatečným výpočtem a posunem i ostatních ovlivněných bodů.

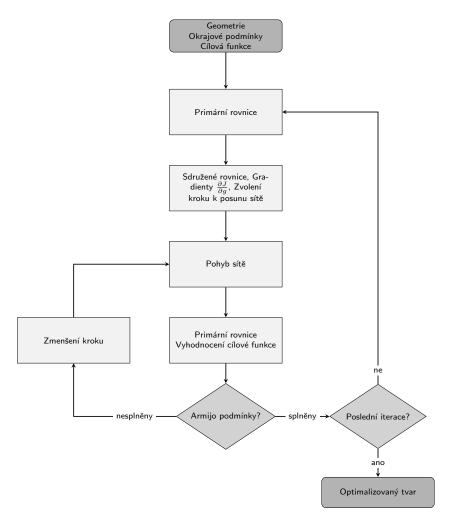
Lepším a obecně lépe fungujícím způsobem je podle [4] využít parametrizace oblasti pomocí objemových B-spline. Po vydefinování sítě řídících bodů jak ukazuje například obrázek 3.1, je každý z bodů sítě namapován z kartézského prostoru $\mathcal{R}^3(x,y,z)$ do parametrického prostoru $\mathcal{R}^3(u,v,w)$. Objemové B-spline pak definují zobrazení z parametrického prostoru do kartézského. Matematický popis tohoto postupu je detailněji popsán v [9].

V rámci optimalizace jsou jako návrhové parametry brány souřadnice řídících bodů objemových B-spline. Na základě získaných gradientů se nejprve pohne s řídícími body a následně se změna propaguje na každý parametrizovaný bod v kartézském prostoru sítě.

3. Optimalizace sdruženou metodou • • • • • •

3.4 Optimalizacni cyklus

flowchart s naznacenim kde kdy se jake rovnice pocitaji (hlavni NS-rce, sdruzene rce, pohyb site)



Obrázek 3.2: Optimalizacni cyklus

Část II

Praktická aplikace

Kapitola 4

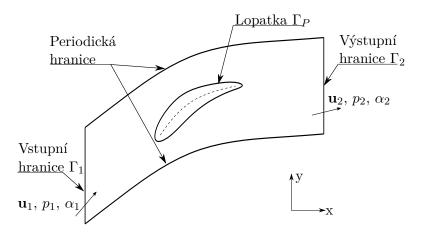
Tvarova optimalizace kompresorove mrize

Optimalizace kompresorové mříže je fajn Používá se OF, SIMPLE pro primarni i sdruzene rce v konzistentní formulaci"

4.1 Obecný popis problému

Simulace prováděné v rámci této práce zjednodušeně reprezentují měřící soustavu tzv. lopatkových mříží. Pro lopatkové mříže jsou určující zejména geometrie samotné lopatky, rozteč t jednotlivých lopatek a stav proudu před a za mříží.

V rámci numerické simulace je topologie výpočetní oblasti naznačena na obrázku 4.1. Vstupní a výstupní hranice jsou rovnoběžné s osou y a jejich výška je právě zmiňovaný parametr rozteče t. Uprostřed oblasti se nachází uzavřená hranice reprezentující geometrii lopatky. Vrchní a spodní hranice jsou brány jako periodické, tedy to co vyteče spodem, vteče vrchem a naopak. Prostorová diskretizace (síť) je v této práci vždy dělána tak, aby si stěny buněk na obou stranách periodické hranice odpovídali 1:1, pouze s posunutím t.



Obrázek 4.1: Náčrt topologie výpočetní oblasti pro standardní axiální kompresorovou mříž.

Krom periodicity jsou další okrajové podmínky následující. Na vstupu je předepsána Dirichletova okrajová podmínka pro vektor rychlosti a turbulentní proměnné. Tlak zde má nulovou Neumanovu podmínku. Na výstupu je naopak statický tlak fixován na nulu a rychlost je zde předepsána pomocí nulového gradientu.

4.2 Cílové funkce

V rámci aplikace sdružené optimalizace na tvar lopatky kompresorové mříže lze vymyslet hned několik cílů. V jednom stupni axiálního kompresoru se běžně sledují veličiny stlačení, účinnost (respektive ztráty) a výstupní úhel proudu. Pro tuto práci se jako sledovaná a optimalizovaná veličina bere ta poslední, tedy výstupní úhel proudu α_2 .

K dosažení cílového úhlu na výstupu z lopatkové mříže α_{2tar} jsou použity dva postupy. Oba vycházejí z definice úhlu výstupního proudu

$$\alpha_2 = \arctan\left(\frac{u_{y2}}{u_{x2}}\right). \tag{4.1}$$

Ze zákona zachování hmotnosti pro proudění nestlačitelné tekutiny vyplývá, že to co do kontrolní oblasti vteče, musí i vytéct. Jinými slovy toky vstupní a výstupní hranicí se musejí rovnat

$$\dot{m_1} = \dot{m_2},\tag{4.2}$$

což pro proudění nestlačitelné tekutiny kontrolní oblastí s vstupní a výstupní hranicí rovnoběžnou s osou y znamená, že

$$u_{x1} = u_{x2}. (4.3)$$

Okrajové podmínky definují na vstupu konstantní uniformní vektor rychlosti $\mathbf{u_1}$ a přeneseně tedy i x-ovou složku rychlosti na výstupu. Z toho vyplývá, že pro zadané α_{2tar} můžeme apriori spočítat

$$u_{v2tar} = \tan(\alpha_{2tar}) \cdot u_{x2},\tag{4.4}$$

tedy jistou cílovou rychlost na výstupu a cílovou funkci formulovat pomocí ní.

Dále jsou srovnány dvě formulace cílové funkce. První formulace optimalizuje přímo výstupní složku rychlosti, kdežto druhá optimalizuje nepřímo přes sílu na lopatku.

Zatímco přímá formulace ovlivňuje přes derivaci cílové funkce okrajovou podmínku sdružených rovnic pouze na výstupní hranici Γ_2 , cílová funkce přes sílu ovlivňuje okrajovou podmínku na lopatce Γ_P . Druhým rozdílem je pak, že v přímé formulaci se objevuje jediná primární proměnná, kdežto pro integraci síly na lopatce jsou potřeba všechny proměnné, včetně turbulentní proměnné $\tilde{\nu}$. Tyto rozdíly zavdávají dostatečný důvod pro zkoumání a porovnání těchto dvou formulací ve smyslu rychlosti konvergence a přesnosti.

4.2.1 Přímá formulace

V přímé formulaci se snažíme aby

$$u_{y2tar} = \frac{1}{\phi_2} \sum_{f \in \Gamma_2} \phi_f u_{yf}, \tag{4.5}$$

tedy aby průměr u_y na výstupu vážený přes hmotnostní tok byl roven zadané cílové rychlosti. Minimalizovanou cílovou funkci formulujeme jako

$$J = \int_{\Gamma_2} (u_y(y) - u_{y2tar})^2 dS = \int_{\Gamma_2} J_{\Gamma} dS.$$
 (4.6)

Ve smyslu vztahu 3.12 má takto definovaná cílová funkce pouze hraniční složku J_{Γ} a pro sdružené rovnice tak bude ;ovat pouze v hraničních členech, tedy v rovnicích 3.26 a 3.27. Potřebujeme tedy vydefinovat parciální derivace podle primárních proměnných \mathbf{u} a p. Pro implementaci v rámci knihovny OpenFOAM je pak navíc potřeba vydefinovat ještě derivace podle u_n a u_t , což pro dříve definovanou úlohu znamená podle složek u_x a u_y .

Parciální derivace podle primárního tlaku $\frac{\partial}{\partial p}$ je nulová, neboť tlak v cílové funkci nefiguruje.

Pro parciální derivaci podle primární rychlosti \mathbf{u} je lepší se dívat na složku u_y jako na skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{u} \cdot (0, 1, 0) = u_y$ a derivaci tedy provést jako

$$\frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} - u_{y2tar}\right)^{2}}{\partial \mathbf{u}} = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{j} - u_{y2tar}) \,\mathbf{j} = 2(u_{y} - u_{y2tar}) \,\mathbf{j}. \tag{4.7}$$

U dodatečných derivací pro OpenFOAM vychází $\frac{\partial}{\partial u_n} = 0$ a $\frac{\partial}{\partial u_t}$ je stejná jako derivace podle **u**.

implementace v OF do apendixu?

4.2.2 Nepřímá formulace přes sílu

Druhou možností jak dosáhnout zadaného úhlu výstupního proudu je použít optimalizaci přes cílovou sílu. Optimalizace síly na stěnu ve smyslu její minimalizace v předepsaném směru je v balíku OpenFOAM formulována jako

$$J_{OF} = \frac{\int_{\Gamma} \rho(-\tau_{ij}n_j + pn_i)r_i \,dS}{\frac{1}{2}\rho AU_{\infty}^2},$$
(4.8)

kde τ_{ij} jsou složky tenzoru napětí, p tlak dělený konstantní hustotou ρ a **n** jednotkový normálový vektor. Vektor **r** pak definuje směr projekce vektoru síly (směr ve kterém se minimalizuje). A je referenční plocha a U_{∞} je rychlost volného proudu. Takto definovaná cílová funkce tedy svou velikostí odpovídá koeficientu síly C_f .

Pro potřeby optimalizace na cílovou sílu F_{yPtar} bylo vhodnější použít přímo samotnou sílu, tedy pouze čitatel v rovnici 4.8, a za vektor projekce brát jednotkový vektor ve směru osy y. Pro celkovou sílu působící na lopatku ve směru y tak lze psát

$$F_{yP} = \int_{\Gamma_P} \rho(-\tau_{ij}n_j + pn_i)\delta_{i2} \,\mathrm{d}S. \tag{4.9}$$

Absolutní velikost takto vyhodnocené síly samozřejmě závisí i na rozměru lopatky v ose z. Číselné výsledky uváděné později jsou uváděny vždy relativní, takže nezávisí na libovolné konstantní výšce lopatky. Cílovou funkci pro cílovou sílu tak definujeme podobně jako pro rychlost přes kvadrát rozdílu, tedy

$$J = (F_{yP} - F_{yPtar})^2. (4.10)$$

Pro derivaci této cílové funkce podle libovolné proměnné w pak platí

$$\frac{\partial J}{\partial w} = 2(F_{yP} - F_{yPtar}) \cdot \frac{\partial F_{yP}}{\partial w}.$$
 (4.11)

Výraz $\frac{\partial F_{yP}}{\partial w}$ odpovídá derivaci čitatele cílové funkce definované rovnicí 4.8, tedy

$$\frac{\partial F_{yP}}{\partial w} = \frac{\partial (\text{nom}(J_{OF}))}{\partial w}.$$
(4.12)

Pro tuto cílovou funkci tedy nebylo potřeba odvozovat potřebné derivace a stačilo pouze vynásobit příslušné výrazy definované v kódu knihovny Open-FOAM výrazem $2(F_{yP}-F_{yPtar})$.

4.3 Optimalizace mříže GHH 1-S1

popis geometrie, vypocetni oblasti, okrajove podminky, nastaveni optimalizacniho algoritmu

4. Tvarova optimalizace kompresorove mrize

Pro aplikaci nově zpracovaných cílových funkcí byla zvolena axiální kompresorová mříž MAN GHH 1-S1 publikovaná v [12]. Výpočetní oblast topologicky odpovídá náčrtu na obrázku 4.1. Rozteč lopatek v mříži je $t=0.0476\,\mathrm{m}$. Hustota tekutiny používaná při vyhodnocení síly je $\rho=1.225\,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^{-3}$ a kinematická viskozita $\nu=1.5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$.

4.3.1 Okrajové podmínky

Na vstupu je Machovo číslo M=0.62 a úhel proudu $\alpha_1=47^\circ$, což při klidové rychlosti vzduchu $c=340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ vede na okrajovou podmínku pro vstupní rychlost

$$\mathbf{u_1} = M \cdot c \cdot (\cos(\alpha_1), \sin(\alpha_1), 0) \doteq (143.8, 154.2, 0) \,\mathrm{m \, s}^{-1}.$$
 (4.13)

Statický tlak na výstupu je fixován $p_2 = 0 \,\mathrm{m}^2 \mathrm{s}^{-2}$.

4.3.2 Modelování turbulence

Modelování turbulence se realizuje pomocí přídavné turbulentní vazkosti. Pro zjištění turbulentní vazkosti ν_t je v optimalizačním algoritmu použit model Spalart-Almaras. Jelikož ale tento model je původně navržen pro obtékání profilu křídla ve volném proudu, není ve své původní variantě vhodný pro modelování turbulence ve vnitřní aerodynamice, kam kompresorové mříže spadají. Knihovna OpenFOAM prozatím ale neobsahuje sdružené rovnice pro žádný jiný model turbulence než Spalart-Alamaras a odvození sdružených rovnic pro pokročilejší model turbulence je nad rámec této práce, byl použit následující postup.

Ve výchozí konfiguraci byla provedena simulace s vhodnějším modelem k- ω SST s následujícími okrajovými podmínkami na vstupu. Intenzita turbulence na vstupu I=2%, tedy odkud plyne Dirichletova podmínka pro turbulentní kinetickou energii k ze vztahu

$$k = 1.5(I|\mathbf{u}|)^2. \tag{4.14}$$

Turbulentní směšovací délka $L_t = 0.002\,\mathrm{m}$, odkud plyne Dirichletova okrajová podmínka pro ω ze vztahu

$$\omega = \frac{k^{0.5}}{C_{\mu}^{0.25} L_t}; \ C_{\mu} = 0.09.$$
 (4.15)

Ve výchozí konfiguraci bylo následně provedeno několik simulací s modelem Spalart-Almaras, kde se variovala vstupní hodnota turbulentní proměnné tohoto modelu $\tilde{\nu}_1$ z intervalu $\langle 10^{-6}, 10 \rangle$. Pro každý výpočet byl vyhodnocen koeficient ztráty celkového tlaku podle vztahu z [12]

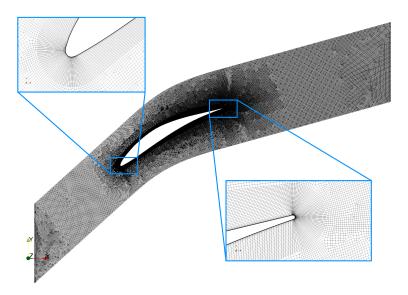
$$\omega = \frac{p_{t1} - p_{t2}}{p_{t1} - p_1} \tag{4.16}$$

a poměr celkových tlaků $\frac{p_{t1}}{p_{t2}}$. Pro další simulace této lopatkové mříže pak byla na vstupu zvolena Dirichletova podmínka $\tilde{\nu} = 3.4 \cdot 10^{-4}$ neboť pro tuto hodnotu vyšel relativní rozdíl v předpovědi modelem Spalart-Almaras oproti k- ω SST pro obě vyhodnocované veličiny pod 1%.

4.3.3 Prostorová diskretizace

Výpočetní oblast byla diskretizována na množinu vzájemně disjunktních objemů. Dvourozměrná síť byla vytvořena v softwaru ANSYS ICEM a její detail je ukázán na obrázku 4.2. Následný převod sítě do formátu pro OpenFOAM (2D síť na pseudo-3D) byl proveden s parametrem 0.01 pro souřadnice z.

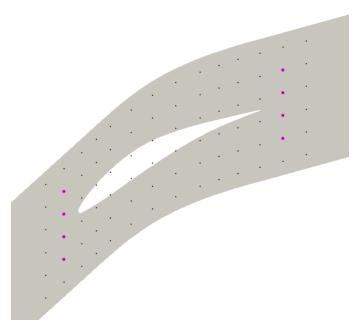
Síť byla tvořena s důrazem na co nejlepší zachycení mezní vrstvy. Buňky v oblasti okolo lopatky jsou exponenciálně zmenšovány, aby se dosáhlo $y^+ < 1$ a nebylo tak nutné používat stěnové funkce ani pro jeden z turbulentních modelů. S touto sítí ve výchozí konfiguraci s modelem k- ω SST je dosaženo $\max_{\Gamma_P}(y^+) \doteq 0.39$. Validita této sítě byla ověřena metodou Grid convergence index (zkráceně GCI) v [13].



Obrázek 4.2: Výpočetní síť pro lopatkovou mříž GHH 1-S1 s detailem náběžné a odtokové hrany. Síť sestává z celkem 85 tisíc hexahedrálních buněk.

Řídící body objemových B-spline

Pro transformaci tvaru lopatky a pohybu se sítí pomocí objemových B-spline je potřeba vydefinovat řídící body. Z experimentů s různým rozdělením řídícím bodů a jejich fixací v průběhu optimalizačních cyklů vzešlo, že stabilita řešení sdružených rovnic i konečný výsledek optimalizace na rozdělení řídících bodů závisí víc než by se dalo označit za uživatelsky příjemné. Konečné rozdělení řídících bodu je ukázáno na 4.3. Ve směru u, který koresponduje se směrem osy x, bylo zvoleno 14 vrstev bodů a ve směru v pak 6. Fixované v průběhu simulace byly všechny krajní body. Druhá a předposlední vrstva ve směru u (sloupec) má pak zakázán pohyb ve směru osy x. Vrstvy ve směru u procházející náběžnou a odtokovou hranou profilu mají zakázán pohyb úplně. Cílem těchto omezení je fixovat pozici začátku a konce lopatky, aby nedošlo k natahování lopatky a deformaci odtokové hrany. Tento nechtěný efekt měl tendenci nastat pokud se fixovaly například pouze vnější body.



Obrázek 4.3: Pozice řídících bodů objemových B-spline ve výpočetní oblasti pro lopatkovou mříž GHH 1-S1. Růžové body se smí pohybovat pouze ve směru osy u.

4.3.4 Parametry optimalizace

Cílové funkce používané pro optimalizaci jsou definovány rovnicemi 4.6 a 4.10, tedy optimalizace přímá na u_{y2tar} a nepřímá na F_{yPtar} . Optimalizace tvaru lopatky byla dodatečně omezena, tak aby průřez lopatky zůstal konstantní, což lze pro trojrozměrný prostor matematicky formulovat jako

$$V = -1/3 \int_{\Gamma_P} x_k n_k dS. \tag{4.17}$$

Kvůli přidané podmínce konstantního průřezu byla jako metoda aktualizace zvolena metoda projekce omezení (anglicky constraint projection). Výchozí krok ve směru gradientu η je v první iteraci spočítán podle maximálního povoleného pohybu sítě, který byl nastaven na $5 \cdot 10^{-4}$. Velikost kroku η se posléze v jednotlivých iteracích zmenšuje podle Armijo podmínky jak definuje [6]. Tento cyklus zmenšuje krok $\eta^{k+1} = 0.75 \cdot \eta^k$ a vyhodnocuje hodnotu cílové

4. Tvarova optimalizace kompresorove mrize

$\Delta \alpha_2$	α_{2tar}	$u_{y2tar} [\mathrm{ms}^{-1}]$	F_{yPtar} [N]
-4°	17.46°	45.32	9.12
-2°	19.46°	50.91	8.65
$+2^{\circ}$	23.46°	62.53	7.69
$+4^{\circ}$	25.46°	68.60	7.17
$+6^{\circ}$	27.46°	74.87	6.65
+8°	29.46°	81.38	6.10

Tabulka 4.1: Cílové hodnoty pro optimalizaci.

funkce J (tedy simuluje primární rovnice) než jsou splněny dané podmínky. Pro Armijo podmínky je důležitý koeficient c1, který byl zvolen 10^{-3} .

Výstupní úhel proudu byl ve výchozí konfiguraci s modelem Spalart-Alamars $\alpha_2^0=21.46^\circ$. Cílové výstupní úhly byly zvoleny z množiny $\langle \alpha_2^0-4^\circ,\alpha_2^0+8^\circ\rangle$ s krokem 2°. Celkem tedy 6 různých cílových úhlů.

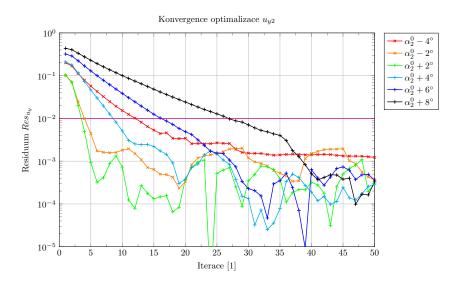
4.3.5 Výsledky optimalizace

K dosažení cílového úhlu výstupního proudu byla použita nejdříve přímá formulace cílové funkce. Následně, když optimalizace zkonvergovala, byla vyhodnocena síla F_{yP} působící na lopatku. Tato síla pak byla použita jako cílová síla F_{yPtar} pro nepřímou formulaci cílové funkce. Konkrétní cílové hodnoty s odpovídajícími cílovými úhly jsou uvedeny v tabulce 4.1.

Optimalizace u_{y2}

Pro vyhodnocení konvergence optimalizace s přímou formulací cílové funkce je jako určující norma (residuum) pro každou iteraci i brán relativní rozdíl

$$Res_{u_y}^i = \frac{|u_{y2}^i - u_{y2tar}|}{|u_{y2}^0|}. (4.18)$$



Obrázek 4.4: Konvergence residua $\frac{|u_{y2}^i-u_{y2tar}|}{|u_{y2}^0|}$ pro přímou formulaci cílové funkce J v průběhu iteračních cyklů. Hranice konvergence 1% naznačena růžovou čarou.

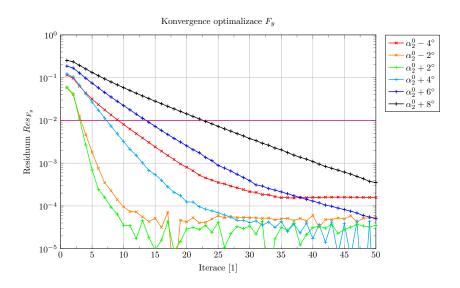
Residua pro všechny cílové hodnoty v průběhu optimalizačních cyklů jsou ukázány na obrázku 4.4. Optimalizaci pak považujeme za zkonvergovanou, pokud residuum klesne pod jedno procento. Na obrázku 4.4 je hranice konvergence naznačena růžovou čarou.

Jelikož ale ve výsledku chceme optimalizovat hodnotu výstupního úhlu, je rozumné se dívat i na residuum vzhledem k $\alpha_2,$ tedy na

$$Res_{\alpha}^{i} = \frac{|\alpha_{2}^{i} - \alpha_{2tar}|}{|\alpha_{2}^{0}|}.$$
(4.19)

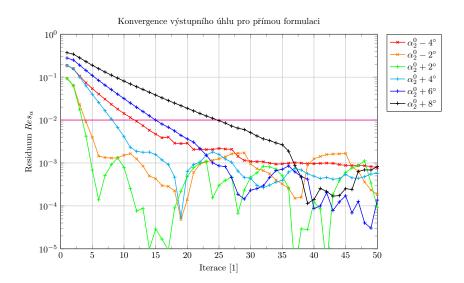
Graf konvergence vzhledem k α_2 na obrázku 4.6 je samozřejmě pro přímou formulaci velice podobný grafu residua samotné optimalizace, neboť α_2 se z u_{y2} přímo vyhodnocuje podle vztahu 4.1. Teoreticky by měly být grafy naprosto stejné, neboť u_{x2} by mělo být podle vztahu 4.3 pro všechny případy stejné. Vlivem chyb diskretizace tomu tak úplně není a grafy se tak pro malé hodnoty residua drobně liší.

4. Tvarova optimalizace kompresorove mrize



Obrázek 4.5: Konvergence residua $\frac{|F_{yP}^i - F_{yPtar}|}{|F_{yP}^0|}$ pro nepřímou formulaci cílové funkce J v průběhu iteračních cyklů. Hranice konvergence 1% naznačena růžovou čarou.

Dále lze z grafu konvergence vypozorovat, že čím větší je rozdíl $\Delta\alpha_2=\alpha_{2tar}-\alpha_2^0$, tím déle trvá optimalizaci zkonvergovat. To samozřejmě odpovídá očekávání. Při porovnání konvergence optimalizace do záporných versus do kladných úhlu výstupního proudu lze říci, že optimalizovat do kladných úhlů je pro takto nastavený optimalizační algoritmus jednodušší. Optimalizace do kladných úhlů odpovídá napřimování tvaru lopatky, kdežto při optimalizaci do záporných úhlů je pro dosažení cílové hodnoty úhlu výstupního proudu potřeba lopatku ohnout více. Tento zmiňovaný rozdíl lze nejlépe vidět při porovnání případů $\alpha_{2tar}=\pm 4^\circ$. Pro kladný úhel $+4^\circ$ optimalizace zkonverguje už v 9. iteraci, kdežto při ohýbání lopatky k dosažení záporného $\Delta\alpha$ je potřeba optimalizačních cyklů 12.



Obrázek 4.6: Konvergence residua $\frac{|\alpha_2^i-\alpha_{2tar}|}{|\alpha_2^0|}$ pro přímou formulaci cílové funkce J v průběhu iteračních cyklů. Hranice konvergence 1% naznačena růžovou čarou.

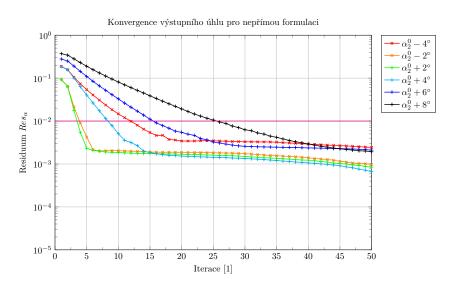
Optimalizace F_{yP}

Pro vyhodnocení konvergence optimalizace s nepřímou formulací cílové funkce je jako residuum pro každou iteraci i brán relativní rozdíl

$$Res_{F_y}^i = \frac{|F_{yP}^i - F_{yPtar}|}{|F_{yP}^0|}.$$
 (4.20)

Stejně jako pro přímou formulaci bereme hranici konvergence jedno procento. Residua pro všechny cílové hodnoty v průběhu optimalizačních cyklů pro nepřímou formulaci cílové funkce jsou ukázány na obrázku 4.5 s naznačenou hranicí konvergence.

V porovnání s grafem konvergence 4.4 pro přímou formulaci cílové funkce průběh residua 4.5 o poznání méně osciluje. To si lze vysvětlit tím, že pro vyhodnocení cílové funkce pro sílu (a jejích derivací) jsou použity všechny primární proměnné a tedy se využívá více informací z proudového pole pro předpověď gradientu. Na základě tohoto pozorování lze s opatrností usoudit,



Obrázek 4.7: Konvergence residua $\frac{|\alpha_2^i-\alpha_{2tar}|}{|\alpha_2^0|}$ pro nepřímou formulaci cílové funkce J v průběhu iteračních cyklů. Hranice konvergence 1% naznačena růžovou čarou.

že optimalizace na cílovou sílu je značně stabilnější než optimalizace na cílovou výstupní rychlost. Zároveň optimalizační algoritmus zkonverguje v méně iteracích než tomu bylo pro přímou formulaci cílové funkce. Například pro případ $\Delta\alpha=+8^\circ$ stačilo o pět iterací méně. V tomto smyslu by bylo zajímavé i porovnání průběhu residuí jako funkce výpočetního času. V současné konfiguraci optimalizačních algoritmů byl celkový čas výpočtu (pro 50 iterací) vždy nižší pro přímou formulaci. Ve zmiňovaném případě $\Delta\alpha=+8^\circ$ byl celkový výpočetní čas pro přímou formulaci 2265 s a pro nepřímou formulaci 2927 s.

Optimalizaci na cílovou sílu používáme k nepřímému dosažení žádaného výstupního úhlu proudu. Proto je důležitější podívat se na graf konvergence residua ve smyslu vztahu 4.19, který je na obrázku 4.7. Nejmarkantnějším rozdílem v porovnání s grafem 4.6 je průběh residua pod hranicí konvergence, který je opět méně divoký. Nejdůležitější srovnání je ale v počtu iterací potřebných ke zkonvergování α_2 . Na rozdíl od porovnání konvergence cílových residuí 4.18 a 4.20 je počet potřebných iterací pro všechny případy $\Delta\alpha_2$ stejný. Jak bylo ale zmíněno v předchozím odstavci, optimalizace s přímou formulací

cílové funkce je ve všech případech rychlejší. Na základě tohoto porovnání lze bezpečně říci, že pro případ optimalizace lopatky GHH 1-S1 na takto kvalitní síti nepřináší nepřímá formulace žádné benefity. Pro jiné případy tomu tak ovšem být nemusí, neb z průběhu cílových residuí 4.18 a 4.20 lze usoudit, že optimalizace na cílovou sílu je mnohem stabilnější, což může hrát ve složitějších aplikacích důležitou roli.

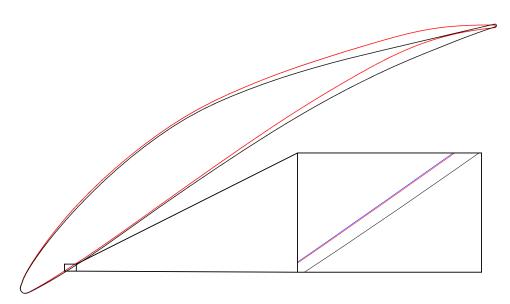
Srovnání pro $\Delta \alpha_2 = -4^\circ$

Porovnání tvaru lopatky je provedeno mezi původním tvarem profilu a profilem z optimalizace zkorvergované ve smyslu Res_{α} . Pro $\alpha_2 = -4^{\circ}$ to je profil ze 12. iterace optimalizačního algoritmu.

Zajímavé je srovnání optimalizovaných tvarů lopatky získaných přímou a nepřímou formulací. Jak je vidět na obrázku 4.8, tvar optimalizovaných profilu je v podstatě totožný. Obě formulace pohybují především s částí lopatky v blízkosti odtokové hrany jak je vidět z obrázku 4.9. To dává smysl, nebot koncová část lopatky má mnohem větší vliv na směr proudu na výstupu než část u náběžné hrany.

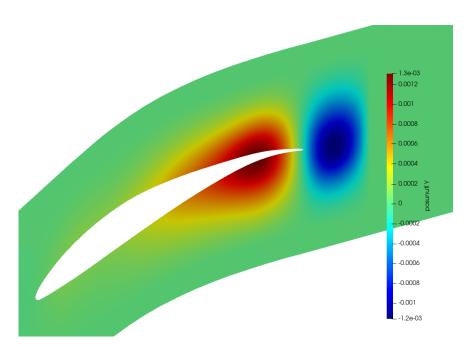
Pro lepší představu o rozdílu mezi původním a optimalizovaným profilem lopatky je nyní uvedeno několik obrázků. Nejprve lze porovnat pole velikosti rychlosti pro původní 4.10 a optimalizovaný 4.11 tvar lopatky. Za koncem lopatky lze vidět pruh nižší velikosti rychlosti, což je úplav. Směr úplavu vizuálně naznačuje hrubý směr proudu na výstupu. Při porovnání stavu před a po lze jasně vidět že směr úplavu změnil. Přesněji se proud ohnul dolů, což odpovídá zmenšení úhlu proudu na výstupu. Zároveň si lze u optimalizované lopatky vidět větší oblast odtržení proudu u odtokové hrany. Tento efekt potvrzuje i porovnání pole přídavné turbulentní vazkosti ν_t na obrázcích 4.12 a 4.13. Maximální velikost přídavné vazkosti v oblasti úplavu za optimalizovanou lopatkou je vyšší a úplav jako takový je širší. To ve výsledku vede na větší ztráty, což dokládá například i zvýšení velikosti síly působící na lopatku ve směru osy x. Optimalizovaná lopatka sice splňuje cílové ohnutí proudu, rozhodně to ale nedělá nejefektivnějším způsobem.

4. Tvarova optimalizace kompresorove mrize

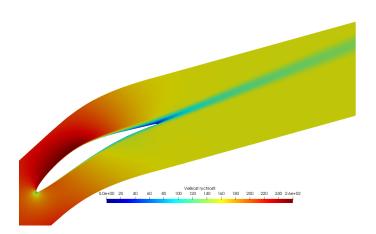


Obrázek 4.8: Obrys tvaru lopatky před optimalizací (černě) a po optimalizaci s přímou (modře) a nepřímou (červeně) formulací cílové funkce. Červená křivka na většině obrázku překrývá modrou.

4.3.6 Ověření vhodnějším modelem turbulence

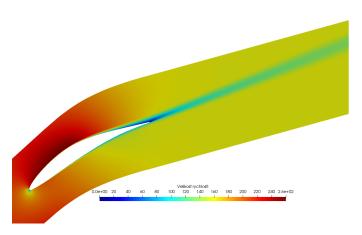


Obrázek 4.9: Vizualizace pole posunu bodů sítě ve směru osy y.

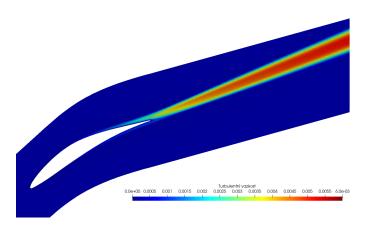


Obrázek 4.10: Pole velikosti vektoru rychlosti $||\mathbf{u}||$ pro původní profil lopatky.

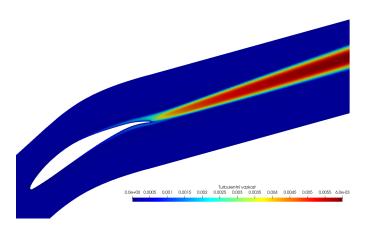
4. Tvarova optimalizace kompresorove mrize • • • •



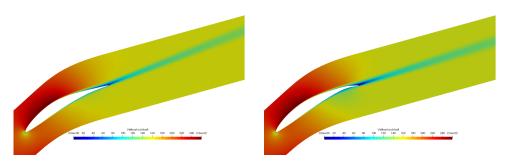
Obrázek 4.11: Pole velikosti vektoru rychlosti $||\mathbf{u}||$ pro optimalizovaný profil lopatky.



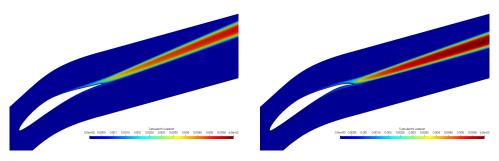
Obrázek 4.12: Pole přídavné turbulentní vazkosti ν_t pro původní profil lopatky $\alpha_2=\alpha_2^0.$



Obrázek 4.13: Pole přídavné turbulentní vazkosti ν_t pro optimalizovaný profil lopatky.



Obrázek 4.14: Pole velikosti vektoru rychlosti pro původní (vlevo) a optimalizovaný (vpravo) profil lopatky.



Obrázek 4.15: Pole přídavné turbulentní vazkosti pro původní (vlevo) a optimalizovaný (vpravo) profil lopatky.

Kapitola 5

Závěr

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Přílohy

Příloha A

Seznam použitých symbolů a zkratek

- b_n Optimalizační parametry
- t Čas
- Γ Hranice kontrolního objemu
- J Cílová funkce
- n_i , **n** Normálový vektor hranice
- Ω Kontrolní objem
- $\frac{\partial}{\partial w}$ Parciální derivace podle veličiny w
- PDR Parciální diferenciální rovnice
- R_i Podmiňující rovnice
- ρ Hustota
- u_i , **u** Vektor rychlosti

Příloha B

Rejstřík

Baumgartova stabilizace, 9

Princip virtuálních prací, 19

Bernoulliova diferenciální rovnice průhybové čáry, 26

Tvarové funkce, 22

Lagrangeovy rovnice

2. druhu, 5

smíšeného typu, 7–9, 11, 15

Metoda

 ${\rm MBS~flex,~21}$

poddajných tělísek, RFE, 11

Příloha C

Literatura

- [1] J. Blazek. Computational fluid dynamics: principles and applications. Butterworth-Heinemann, 2015.
- [2] R. Dvořák. Vnitřní aerodynamika. ČVUT, 1987.
- [3] J. Fürst. Metoda konečných objemů II. 2020.
- [4] G. K. Giannakoglou K.C., Papoutsis-Kiachagias E.M. adjointOptimisationFoam, an OpenFOAM-based optimisation tool.
- [5] C. Hirsch. Numerical computation of internal and external flows: The fundamentals of computational fluid dynamics. Elsevier, 2007.
- [6] J. Nocedal and S. Wright. Numerical optimization. 1999.
- [7] C. Othmer. A continuous adjoint formulation for the computation of topological and surface sensitivities of ducted flows. *International journal for numerical methods in fluids*, 58(8):861–877, 2008.
- [8] D. Papadimitriou and K. Giannakoglou. A continuous adjoint method with objective function derivatives based on boundary integrals, for inviscid and viscous flows. *Computers & Fluids*, 36(2):325–341, 2007.

C. Literatura

- [9] E. Papoutsis-Kiachagias, N. Magoulas, J. Mueller, C. Othmer, and K. Giannakoglou. Noise reduction in car aerodynamics using a surrogate objective function and the continuous adjoint method with wall functions. *Computers & Fluids*, 122:223–232, 2015.
- [10] S. V. Patankar and D. B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. In Numerical prediction of flow, heat transfer, turbulence and combustion, pages 54–73. Elsevier, 1983.
- [11] A. H. Shapiro. The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow. *New York: Ronald Press*, 1953.
- [12] W. Steinert, B. Eisenberg, and H. Starken. Design and testing of a controlled diffusion airfoil cascade for industrial axial flow compressor application. In *Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*, volume 79047, page V001T01A044. American Society of Mechanical Engineers, 1990.
- [13] A. Tater, P. Mačák, P. Kovář, T. Kaňka, and T. Vampola. Mesh suitability for cfd simulations performed on axialcompressor airfoil cascades. Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics, předloženo 2021.
- [14] R. van den Braembussche and M. Manna. Inverse Design and Optimisation Methods: April 21-25, 1997. Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1997.
- [15] H. G. Weller, G. Tabor, H. Jasak, and C. Fureby. A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques. *Computers in physics*, 12(6):620–631, 1998.
- [16] A. Zymaris, D. Papadimitriou, K. Giannakoglou, and C. Othmer. Continuous adjoint approach to the spalart–allmaras turbulence model for incompressible flows. *Computers & Fluids*, 38(8):1528–1538, 2009.