

JIRÍ FÜRST

METODA KONEČNÝCH
OBJEMŮ II

Toto dílo podléhá licenci Creative Commons Uvedte původ-Neužívejte
dílo komerčně-Zachovějte licenci 4.0 Mezinárodní. Pro zobrazení
licenčních podmínek navštivte [https://creativecommons.org/
licenses/by-nc-sa/4.0/](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Obsah

Seznam značení	5
1 Metoda konečných objemů pro skalární problém	9
1.1 Odvození metody konečných objemů	10
1.2 Diskretizace konvektivního členu	12
1.2.1 Protiproudové schéma	13
1.2.2 Schéma s lineární interpolací	14
1.2.3 Protiproudové schéma druhého řádu přesnosti .	14
1.2.4 Další schémata	15
1.3 Diskretizace difusivního členu	15
1.4 Diskretizace časové derivace	17
1.5 Plně diskrétní metoda verze metody konečných objemů pro lineární problém	18
2 Numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic	19
2.1 Numerické řešení Stokesova problému	19
2.2 Algoritmus SIMPLE pro případ proudění nestlačitelné tekutiny	19
2.3 Algoritmus PISO pro případ proudění nestlačitelné tekutiny	19
2.4 Algoritmus SIMPLE pro případ proudění stlačitelné tekutiny	20
2.4.1 Vliv stlačitelnosti	21
2.4.2 Finální verze algoritmu SIMPLE pro proudění stlačitelné tekutiny	21
2.4.3 Aplikace algoritmu SIMPLE pro proudění nevazké tekutiny dvourozměrným kanálem	23
3 Aplikace	29
3.1 Proudění v oblastech s pohyblivou hranicí	29
3.1.1 Metoda konečných objemu ve zobecněné Lagrangeovsko-Eulerovská formulaci	29
3.1.2 Implementace ALE metody v algoritmech SIMPLE a PISO	31

3.1.3	Geometrický zákon zachování	32
3.1.4	Interakce tekutiny s poddajným tělům	33
3.1.5	Numerické řešení obtékání pružně uchyceného profilu	34
3.2	Modelování turbulence	37
3.2.1	Přímá numerická simulace	37
3.2.2	Středování a filtrování Navierových-Stokesových rovnic	38
3.2.3	Modeły typu RANS	40
3.2.4	Algebraické a jednorovnicové modely	41
3.2.5	Dvourovnicový model $k - \epsilon$	42
3.2.6	Dvourovnicový model $k - \omega$	43
3.2.7	Dvourovnicový model $k - \omega$ SST	43
3.2.8	Okrajové podmínky, stěnové funkce	44
3.2.9	Numerická aproximace modelu turbulence	47
3.2.10	Turbulentní obtékání profilu NACA 0012.	49
3.2.11	Modeły typu LES	51
3.2.12	Hybridní modely RANS-LES	55
3.3	Optimalizace a sdružená metoda	59
3.3.1	Sdružené rovnice	60
3.3.2	Minimalizace odporu	64
3.3.3	Topologická optimalizace	67
3.3.4	Optimalizace sítě pro výpočet hodnoty funkcionálu	68

Seznam značení

Latinka

e	specifická vnitřní energie, str. 15	J/kg
\mathcal{F}_i^b	Množina hraničních stěn příslušných k Ω_i a hranici b .	
\mathcal{F}_i	Množina vnitřních stěn příslušných k Ω_i .	
E	celková vnitřní energie, str. 15	J/kg
H	celková vnitřní enthalpie, str. 15	J/kg
h	specifická vnitřní enthalpie, str. 15	J/kg
m	Počet kontrolních objemů v síti	
\mathcal{N}_i	Množina indexů sousedů Ω_i (přes stěnu).	
p	tlak, str. 15	Pa
\vec{q}	tepelný tok, str. 15	W/m ²
\mathbb{R}	Množina reálných čísel	
\mathbb{R}_+	Množina nezáporných reálných čísel	
\vec{S}	normála na stěnu sítě	m ^{d-1}
t	čas	s
\vec{u}	rychlost, str. 15	m/s

Řecká abeceda

ϵ	Rychlost disipace, str. 38	m ² /s ³
ν	kinematická vazkost, str. 15	m ² /s
ω	Specifická rychlosť disipace, str. 39	1/s
ϕ_f	Objemový tok stěnou f , str. 12	m ³ /s
ρ	hustota, str. 15	kg/m ³

$\vec{\tau}$	tenzor tečných napětí, str. 15	Pa
$\vec{\tau}^{sgs}$	Tenzor napětí malých měřítek, str. 35	m^2/s^2
$\vec{\tau}^t$	Tenzor Reynoldsových napětí, str. 35	m^2/s^2

Horní indexy

d	Dimenze prostoru
eff	Efektivní, str. 36
n	hodnota v aktuální iteraci/čase
o	hodnota v předchozí iteraci/čase
sgs	Malá měřítka, str. 35
t	Turbulentní, str. 35

Dolní indexy

C	hodnota v aktuálním kontrolním objemu
f	hodnota ve středu stěny
N, E, W, S	hodnoty v sousedních objemech (pro kartézksou síť')
n, e, w, s	hodnoty ve středech stěn (pro kartézksou síť')

Úvod

Tento text je určen jako podpůrný studijní materiál pro předmět *Metoda konečných objemů II* vyučovaný na FS ČVUT v Praze. Text začal vznikat v době omezené výuky z důvodu pandemie Covid-19 jako doplněk k on-line přednáškám a je průběžně aktualizován. Tématicky navazuje na předmět *Metoda konečných objemů I* ve kterém jsou studenti seznámeni matematickými základy metody konečných objemů pro hyperbolické parciální diferenciální rovnice prvního řádu. Jmenovitě jsou v předmětu *Metoda konečných objemů I* probírána tato téma:

- počáteční a okrajová úloha pro skalární lineární a nelineární rovnici konvekce,
- problémy spojené s existencí a jednoznačností klasického řešení daných úloh,
- analytické řešení těchto úloh metodou charakteristik,
- koncept slabého a entropického řešení počáteční úlohy,
- metoda konečných objemů pro jednorozměrný skalární problém,
- metoda konečných objemů pro jednorozměrný hyperbolický systém (lineární i nelineární),
- stabilita, konzistence a konvergence numerické metody,
- konstrukce metody vyššího řádu přesnosti pro jednorozměrné úlohy,
- konstrukce numerických toků pro hyperbolické systémy,
- konstrukce sdružené metody pro systém Eulerových rovnic jednorozměrném a vícerozměrném případě.

Tento text se zaměřuje na vybrané numerické metody používané pro řešení systému Navierových-Stokesových rovnic a to speciálně na tzv. sekvenční metody založené na postupném řešení jednotlivých rovnic. Od čtenáře se nevyžaduje detailní znalost témat probíraných

v předmětu *Metoda konečných objemů I* s výjimkou znalosti pojmu
stabilita, konzistence, řád přesnosti a konvergence.

Vzhledem k okolnostem vzniku nelze tento text v žádném případě považovat za bezchybný a jediný zdroj informací a čtenáři se důrazně doporučuje použití další literatury.

1

Metoda konečných objemů pro skalární problém

Základní principy metody konečných objemů budou pro jednoduchost vysvětleny nejprve na případu skalárního problému konvekce s difuzí. Budeme přitom uvažovat dva typy úloh.

Definice 1 Je dána skalární parciální diferenciální rovnice

Počáteční úloha

$$\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}u(\vec{x}, t)) = \nabla \cdot (\mu \nabla u(\vec{x}, t)), \quad (1.1)$$

kde $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$ je konstantní vektor, $\mu > 0$ a $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ je dvakrát differencovatelná funkce. Dále je dána dvakrát differencovatelná funkce (počáteční podmínka) $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Počáteční úlohou pak rozumíme nalézt takovou dvakrát differencovatelnou funkci $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, že

Stejná definice lze použít i pro $\mu = 0$. V tom případě stačí uvažovat jednou differencovatelnou funkci.

- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d \forall t > 0$ je splněna rovnice 1.1,

- $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d$ je $u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x})$.

Funkci u pak nazveme řešením počáteční úlohy.

V případě úlohy na omezené oblasti je potřeba doplnit okrajové podmínky a řešíme pak smíšenou (též počátečně-okrajovou) úlohu.

Definice 2 Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je souvislá oblast s Lipschitzovskou hranicí (ne nutně omezená), $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$ je konstantní vektor a $\mu > 0$ je konstanta. Nechť $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ a $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. Dále mějme na $\Gamma_D \times \mathbb{R}_+$ zadanou funkci α a na $\Gamma_N \times \mathbb{R}_+$ funkce β . Smíšenou úlohou pak rozumíme nalézt takovou dvakrát differencovatelnou funkci $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, že

Smíšená úloha

- $\forall \vec{x} \in \Omega \forall t > 0$ je splněna rovnice 1.1,
- $\forall \vec{x} \in \Omega$ je $u(\vec{x}, 0) = u_0(\vec{x})$,
- $\forall \vec{x} \in \Gamma_D \forall t > 0$ je $u(\vec{x}, t) = \alpha(\vec{x}, t)$,
- $\forall \vec{x} \in \Gamma_N \forall t > 0$ je $\frac{\partial u(\vec{x}, t)}{\partial n} = \beta(\vec{x}, t)$ (\vec{n} je vnější normála).

Pro případ neomezené oblasti navíc požadujeme

- $\lim_{||\vec{x}|| \rightarrow \infty, \vec{x} \in \Omega} u(\vec{x}, t) = 0$. 1.1,

Funkci u pak nazveme řešením smíšené úlohy.

1.1 Odvození metody konečných objemů

Standardní postup při odvození metody konečných objemů vychází z tzv. *metody přímek*, kdy je nejprve provedena diskretizace v prostoru převádějící parciální diferenciální rovnici na systém obyčejných diferenciálních rovnic. Ve druhém kroku se diskretizuje tento systém obyčejných diferenciálních rovnic. Pro diskretizaci použijeme tzv. síť, tj. rozdelení oblasti \mathbb{R}^d či Ω na vzájemně disjunktní neprázdné otevřené podoblasti Ω_i konečné velikosti (tzv. *konečné* nebo *kontrolní objemy*), tedy

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^n \overline{\Omega}_i, \text{ a } \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \text{ pro } i \neq j. \quad (1.2)$$

Pro případ počáteční úlohy či neomezené oblasti Ω je $n = \infty$.

Vnitřní stěnu sdílenou objemy Ω_i a Ω_j nazveme $d - 1$ rozměrný útvar $\Gamma_{ij} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$ (pokud existuje). Podobně hraniční stěnu nazveme $d - 1$ rozměrný útvar $\Gamma_{ib} = \overline{\Omega}_i \cap \Gamma_b$, kde $b = \{D, N\}$ jsou části hranice pro smíšenou úlohu. Pro $d = 3$ nazveme hranou neprázdný jednorozměrný průnik dvou stěn, pro $d = 2$ jsou stěny hranami. V obou případech jsou hrany jednorozměrné omezené křivky a jejich konce nazveme vrcholy sítě. V dalším textu budeme pracovat pouze s pojmy objem (d rozměrný objekt), stěna ($d - 1$ rozměrný objekt) a vrchol (bod).

Symbolom \mathcal{N}_i budeme značit množinu objemů sousedících s Ω_i stěnou, symbolom \mathcal{F}_i označíme množinu všech vnitřních stěn příslušných k Ω_i symbolom \mathcal{F}_i^b množinu hraničních stěn objemu Ω_i , tj.

$$\mathcal{N}_i = \{j : j \neq i \wedge \dim(\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j) = d - 1\}, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{F}_i = \{\Gamma_{ij} : j \in \mathcal{N}_i\}, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{F}_i^b = \{\overline{\Omega}_i \cap \Gamma_b : b \in \{D, N\}\}, \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

Integrujme nyní rovnici 1.1 přes kontrolní objem Ω_i

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_{\Omega_i} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v}u) - \nabla \cdot (\mu \nabla u) \right) d\vec{x} = \\ &= \iiint_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial t} d\vec{x} + \iiint_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{v}u - \mu \nabla u) d\vec{x} = \\ &= \frac{d}{dt} \iint_{\Omega_i} u d\vec{x} + \iint_{\partial \Omega_i} (\vec{v}u - \mu \nabla u) \cdot \vec{n} dS. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Mimo tento standardní postup je možné provést diskretizaci metodou konečných objemů také v $d + 1$ rozměrném "časoprostoru".

Pro zjednodušení zápisu budeme, bude-li to možné, vynechávat parametry \vec{x} a t .

Pro další postup diskretizace zvolíme způsob approximace funkce u pomocí diskrétních hodnot u_i . V následujícím textu použijeme diskretizaci s neznámými hodnotami vztaženými ke kontrolním objemům (tzv. *cell centered* formulace). Samozřejmě to není jediná možnost. Neznámé lze vztáhnout k vrcholům síť (*vertex centered*) či ke stěnám (*face centered*). Pro systémy rovnic lze dokonce jednotlivé přístupy kombinovat a např. rychlosti vztáhnout ke stěnám a tlaky k buňkám (tzv. *staggered* formulace).

Označme

$$u_i(t) = \frac{1}{|\Omega_i|} \iiint_{\Omega_i} u d\vec{x}, \quad (1.8)$$

kde $|\Omega_i|$ je velikost objemu Ω_i . Tj. $u_i(t)$ je střední hodnota $u(\vec{x}, t)$ v objemu Ω_i . Integrál po hranici Ω_i rozdělíme na součet integrálů přes vnitřní stěny Γ_{ij} a hraniční stěny Γ_{ib} . Máme tedy

$$\begin{aligned} |\Omega_i| \frac{d u_i(t)}{dt} = & - \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \iint_f (\vec{v}u - \mu \nabla u) \cdot \vec{n} dS - \\ & - \sum_{b \in \{N, D\}} \sum_{f \in \mathcal{F}_i^b} \iint_f (\vec{v}u - \mu \nabla u) \cdot \vec{n} dS. \end{aligned} \quad (1.9)$$

První integrál na pravé straně vyjadřuje toky mezi objemem Ω_i a sousedními objemy, druhý integrál obsahuje toky mezi Ω_i a příslušnými částmi hranice $\partial\Omega$.

Aproximujeme nyní toky přes jednotlivé stěny jako

$$\iint_f (\vec{v}u - \mu \nabla u) \cdot \vec{n} dS \approx (\vec{v}u_f - \mu \nabla u_f) \cdot \vec{S}_f, \quad (1.10)$$

kde $\vec{S}_f \approx \int_f \vec{n} dS$, $u_f(t) \approx u(\vec{x}_f, t)$ a $\nabla u_f(t) \approx \nabla u(\vec{x}_f, t)$. Potom lze předchozí vztah zapsat jako

$$\begin{aligned} |\Omega_i| \frac{d u_i(t)}{dt} = & - \sum_{f \in \mathcal{F}_i} (\vec{v}u_f - \mu \nabla u_f) \cdot \vec{S}_f - \\ & - \sum_{b \in \{N, D\}} \sum_{f \in \mathcal{F}_i^b} (\vec{v}u_f - \mu \nabla u_f) \cdot \vec{S}_f. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Posledním krokem k semidiskrétní formulaci metody konečných objemů je doplnění vztahů pro approximaci u_f a gradientu ∇u_f pomocí u_i a u_j (a případně i hodnot v dalších objemech). Po dosazení u_i a u_j tedy dostáváme semidiskrétní formulaci metody konečných objemů ve tvaru

$$|\Omega_i| \frac{d u_i(t)}{dt} = -R(u_i; \{u_j : j \in \mathcal{N}_i\}), \quad (1.12)$$

nebo ve vektorové formě

$$|\Omega_i| \frac{d u_i(t)}{dt} = -R(u)_i, \quad (1.13)$$

kde $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_m]$. V případě smíšené úlohy operátor R závisí na okrajových podmínkách α a β .

Pokud navíc vyjádříme hodnoty u_f a $\nabla u_f \cdot \vec{S}_f$ jako lineární funkce u_i a u_j (a případně i hodnot u v dalších objemech), můžeme celou approximaci pravé strany vyjádřit pomocí zobrazení ve tvaru

Jedná se o affinní zobrazení $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$.

$$R(\mathbf{u}) = \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{r}, \quad (1.14)$$

kde \mathbf{R} je čtvercová matice $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m,m}$ a $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$ je vektor. m přitom značí počet kontrolních objemů v oblasti. Předpokládáme přitom $M < \infty$.

1.2 Diskretizace konvektivního členu

Při sestavení matice \mathbf{R} a vektoru \mathbf{r} provedeme nejprve diskretizaci konvektivního členu $\nabla \cdot (\vec{v}u)$. Ten bude v metodě konečných objemů reprezentován pomocí zobrazení R^c resp. pomocí matice \mathbf{R}^c a vektoru \mathbf{r}^c .

Diskretizace konvektivního členu je dle rovnice (1.11)

$$\iiint_{\Omega_i} \nabla \cdot (\vec{v}u) d\vec{x} \approx R^c(u)_i = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \vec{v} \cdot \vec{S}_f u_f + \sum_{b \in \{D,N\}} \sum_{f \in \mathcal{F}_i^b} \vec{v} \cdot \vec{S}_f u_f \quad (1.15)$$

První část přitom vyjadřuje konvektivní toky přes vnitřní stěny sítě, druhá část jsou toky přes hranici oblasti. V obou částech se vyskytuje součin $\vec{v} \cdot \vec{S}_f$. Označme tento *objemový tok stěnou* f jako

$$\phi_f = \vec{v} \cdot \vec{S}_f. \quad (1.16)$$

Máme tedy

$$R^c(u)_i = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \phi_f u_f + \sum_{b \in \{D,N\}} \sum_{f \in \mathcal{F}_i^b} \phi_f u_f. \quad (1.17)$$

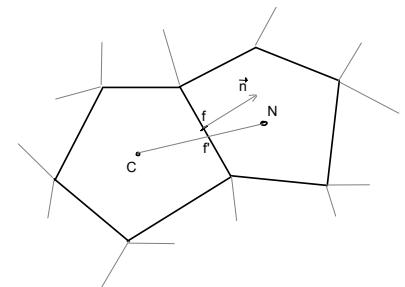
Hodnotu u_f budeme approximovat pomocí hodnot v sousedních kontrolních objemech. Ty si označíme indexy C ($C = i$) a N ($N \in \mathcal{N}_i$), viz obr. 1.1. Hodnotu u_f pak vyjádříme jako

$$u_f = w_f u_C + (1 - w_f) u_N + u'_f, \quad (1.18)$$

kde w_f je váha závisející na geometrických parametrech sítě (blíže jí specifikujeme později) a u' je případná korekce pro schéma vyššího řádu nebo pro neortogonální sítě.

Pro případ okrajových stěn samozřejmě objem N neexistuje a pro výpočet u_f pak použijeme vztah

$$u_f = w_f u_C + u'_f, \quad (1.19)$$



Obrázek 1.1: Sítě při approximaci u_f .

1.2.1 Protiproudové schéma

U tohoto schématu approximujeme pro vnitřní stěny hodnotu u_f v závislosti na znaménku ϕ_f . Váhy w_f jsou

$$w_f = \begin{cases} 1 & \text{pro } \phi_f > 0, \\ 0 & \text{pro } \phi_f < 0 \end{cases}. \quad (1.20)$$

a součin $\phi_f u_f$ je potom

$$\phi_f u_f = (\phi_f)^+ u_C + (\phi_f)^- u_N. \quad (1.21)$$

Pro případ Dirichletovu okrajovou podmínku, tj. $u(\vec{x}, t) = \alpha(t)$, je pro $f \in \mathcal{F}_C^D$

$$\phi_f u_f = (\phi_f)^+ u_C + (\phi_f)^- \alpha(\vec{x}_f, t). \quad (1.22)$$

Pro Neumannovu okrajovou podmínku, tj. $\partial u / \partial n = \beta(\vec{x}, t)$ nejprve určíme pomocnou hodnotu řešení na stěně $f \in \mathcal{F}_i^N$ jako

$$\tilde{u}_f = u_C + \delta_f \frac{\partial u}{\partial n} = u_C + \delta \beta(\vec{x}_f, t), \quad (1.23)$$

kde $\delta_f = \vec{n}_f \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_C)$ je vzdálenost středu C od stěny. Potom

$$\phi_f u_f = (\phi_f)^+ u_C + (\phi_f)^- \tilde{u}_f = \phi_f u_C + (\phi_f)^- \delta_f \beta_f. \quad (1.24)$$

Příspěvky do matice R a vektoru r tedy budou

$$R_{i,i}^c = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} (\phi_f)^+ + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} (\phi_f)^+ + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^N} \phi_f, \quad (1.25)$$

$$R_{i,j}^c = (\phi_f)^- \text{ pro } j \in \mathcal{N}_i, \quad (1.26)$$

$$r_i^c = \sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} (\phi_f)^- \alpha_f + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^N} (\phi_f)^- \delta_f \beta_f. \quad (1.27)$$

Lemma 1 Je-li $\forall i, \forall f \in \mathcal{F}_i^N : \phi_f \geq 0$, potom má matice $R^{c,\mathcal{F}}$ pro protiproudové schéma na diagonále kladné prvky, mimo diagonálu nekladné prvky, je nesymetrická a po řádkách i sloupcích neostře diagonálně dominantní.

Pozn. předpoklad tvrzení je, že Neumannovu podmínku nepředepisujeme na "vstupu", tj. tam, kde $\vec{v} \cdot n < 0$. Neostrá diagonální dominance po řádkách vyplývá ze vztahu $\sum_f \phi_f = 0$ (součet je přes všechny stěny), neostrá diagonální dominance po sloupcích je důsledkem konzervativity. Každá stěna je při výpočtu totiž zahrnuta dvakrát (při výpočtu R_C a R_N) s opačnou orientací \vec{S}_f a prohozenou rolí C a N .

Protiproudové schéma vede na matici R s velmi příznivými vlastnostmi. Jeho nevýhodou je však nízká přesnost a velmi silný vliv numerické difuse.

Schéma je běžně nazývané *upwind*.

$$(\phi_f)^+ = \max(\phi_f, 0), (\phi_f)^- = \min(\phi_f, 0).$$

1.2.2 Schéma s lineární interpolací

Toto schéma je založené na výpočtu u_f pomocí lineární interpolace z u_C a u_N . Pro vnitřní stěny je

V programu OpenFOAM nazývané *linear*.

$$u_f = w_f u_C + (1 - w_f) u_N, \quad (1.28)$$

kde váha w_f je (viz obr. 1.1)

$$w_f = \frac{||\vec{x}_N - \vec{x}_f||}{||\vec{x}_N - \vec{x}_C||}. \quad (1.29)$$

To však zanedbává rozdíl mezi body \vec{x}_f a $\vec{x}_{f'}$. Používá se také výpočetně jednodušší vzorec

$$w_f = \frac{||\vec{x}_N - \vec{x}_f||}{||\vec{x}_N - \vec{x}_f|| + ||\vec{x}_f - \vec{x}_C||}, \quad (1.30)$$

zde není zapotřebí bod $\vec{x}_{f'}$. Podobně jako u předchozího vztahu je však v případě $\vec{x}_f \neq \vec{x}_{f'}$ přesnost interpolace snížena.

Pro stěny s Dirichletovou podmínkou je $u_f = \alpha_f$ a pro Neumannovu podmínku máme $u_f = \tilde{u}_f = u_C + \delta_f \beta_f$.

Příspěvky do matice R a vektoru r tedy budou pro centrální schéma

$$R_{i,i}^c = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \phi_f w_f + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^N} \phi_f, \quad (1.31)$$

$$R_{i,j}^c = \phi_f (1 - w_f) \text{ pro } j \in \mathcal{N}_i, \quad (1.32)$$

$$r_i^c = \sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} \phi_f \alpha_f + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^N} \phi_f \delta_f \beta_f. \quad (1.33)$$

Matice R^c již bohužel nemá podobně příznivé vlastnosti, jako v případě protiproudového schématu. Obecně nelze nic říci o znaménkách prvků či o diagonální dominanci. Na druhou stranu však lineární interpolace (za předpokladu $\vec{x}_f \approx \vec{x}_{f'}$) vede k diskretizaci druhého řádu přesnosti.

1.2.3 Protiproudové schéma druhého řádu přesnosti

Dalším typem schématy je tzv. protiproudové schéma druhého řádu přesnosti. V prvním kroku vypočteme pro každý kontrolní objem odhad gradientu řešení. Ten spočteme např. pomocí metody nejmenších čtverců z hodnot u_j kde $j \in \mathcal{N}_i$, pomocí Gaussovy věty s lineární interpolací či jinou metodou. Hodnotu u_f pak pro vnitřní stěny určíme jako

$$u_f = \begin{cases} u_C + \nabla u_C \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_C) & \text{pro } \phi_f > 0, \\ u_N + \nabla u_N \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_N) & \text{pro } \phi_f < 0, \end{cases} \quad (1.34)$$

V programu OpenFOAM nazývané *linear upwind*.

a tedy

$$\begin{aligned}\phi_f u_f = & (\phi_f)^+ u_C + (\phi_f)^- u_N + \\ & + \left[(\phi_f)^+ \nabla u_C \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_C) + (\phi_f)^- \nabla u_N \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_N) \right].\end{aligned}\quad (1.35)$$

První dva členy přitom přispívají do matice R^c , členy v hranaté závorce pak přispívají do r^c .

Pro Dirichletovu okrajovou podmíinku je

$$u_f = (\phi_f)^+ u_C + \left[(\phi_f)^+ \nabla u_C \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_C) + (\phi_f)^- \alpha_f \right].\quad (1.36)$$

První člen opět přispívá do matice R^c a člen v hranaté závorce jde do r^c . Pro Neumannovu podmínku určíme podobně jako u protiproudového schématu hodnotu řešení na hranici \tilde{u} a máme tedy

$$u_f = \phi_f u_C + \left[(\phi_f)^+ \nabla u_C \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_C) + (\phi_f)^- \delta_f \beta_f \right].\quad (1.37)$$

Matrice R^c je pro toto schéma totožná s maticí pro protiproudové schéma 1. řádu. Rozdíl je pouze ve vektoru r^c kde

$$\begin{aligned}r_i^c = & \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \left[(\phi_f)^+ \nabla u_C \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_C) + (\phi_f)^- \nabla u_N \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_N) \right] + \\ & + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} \left[(\phi_f)^+ \nabla u_C \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_C) + (\phi_f)^- \alpha_f \right] + \\ & + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} \left[(\phi_f)^+ \nabla u_C \cdot (\vec{x}_f - \vec{x}_C) + (\phi_f)^- \delta_f \beta_f \right].\end{aligned}\quad (1.38)$$

Toto schéma je druhého řádu přesnosti a obsahuje i korekci pro případ $\vec{x}_f \neq \vec{x}_{f'}$. Na druhou stranu je však v případě úloh s velkými gradienty řešení potřeba omezit velikostí $\nabla u_{C/N}$ například pomocí Barthova a Jespersenova limiteru (Barth a kol. 1989).

1.2.4 Další schémata

Mimo výše uvedená existuje i celá řada dalších schémat. Jedná se mimo jiné o TVD či NVD schémata jejichž popis lze nalézt např. v (Moukalled a kol. 2016), (Hrvoje Jasak, 1996), (H. Jasak a kol. 1999) a jinde.

1.3 Diskretizace difusivního členu

Difusivní člen $-\nabla \cdot (\mu \nabla u)$ je v metodě konečných objemů reprezentován zobrazením R^d

^d jako *diffusive*.

$$\iiint_{\Omega_i} -\nabla \cdot (\mu \nabla u) d\vec{x} \approx R^d(u)_i = - \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \mu \frac{\partial u_f}{\partial n_f} S_f - \sum_{b \in \{D,N\}} \sum_{f \in \mathcal{F}_i^b} \mu \frac{\partial u_f}{\partial n_f} S_f.\quad (1.39)$$

V případě, kdy je vektor \overrightarrow{CN} rovnoběžný s \vec{n}_f , je pro vnitřní stěny

$$\frac{\partial u_f}{\partial n_f} \approx \frac{u_N - u_C}{\|\vec{x}_N - \vec{x}_C\|}. \quad (1.40)$$

Pro stěny s Dirichletovou podmínkou je

$$\frac{\partial u_f}{\partial n_f} \approx \frac{\alpha_f - u_C}{\|\vec{x}_f - \vec{x}_C\|}, \quad (1.41)$$

a pro stěny s Neumannovou podmínkou je

$$\frac{\partial u_f}{\partial n_f} = \beta_f. \quad (1.42)$$

V matici R^d a v r^d pak bude při této approximaci

$$R_{i,i}^d = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \mu \frac{S_f}{\|\vec{x}_N - \vec{x}_C\|} + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} \mu \frac{S_f}{\|\vec{x}_f - \vec{x}_C\|}, \quad (1.43)$$

$$R_{i,j}^d = -\mu \frac{S_f}{\|\vec{x}_N - \vec{x}_C\|} \text{ pro } j \in \mathcal{N}_i, \quad (1.44)$$

$$r_i^d = -\sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} \mu \frac{\alpha_f S_f}{\|\vec{x}_f - \vec{x}_C\|} - \sum_{f \in \mathcal{F}_i^N} \mu S_f \beta_f. \quad (1.45)$$

Lemma 2 Matice R^d je symetrická, diagonální prvky jsou kladné, mimo-diagonální prvky jsou nekladné. Matice je neostře diagonálně dominantní, v řádkách odpovídajících objemům přiléhajícím ke Γ_D je ostře diagonálně dominantní.

Pro obecné síť však většinou neplatí podmínka rovnoběžnosti \overrightarrow{CN} s \vec{n}_f a je nutné přidat tzv. neortogonální korekce. Obrázky 1.2 a 1.3 ukazují dva mnoha z možných způsobů provedení korekce. První, tzv. super-relaxované schéma, má dle (Hrvoje Jasak, 1996) lepší numerické vlastnosti. Obě varianty však lze popsát stejným způsobem.

Aproximace derivace je

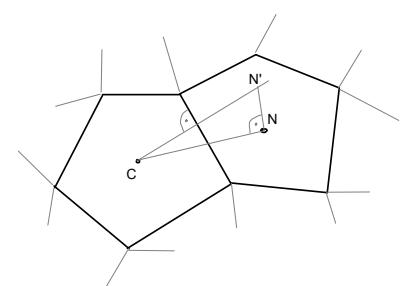
$$\frac{\partial u_f}{\partial n_f} \approx \frac{u_{N'} - u_C}{\|\vec{x}_{N'} - \vec{x}_C\|}, \quad (1.46)$$

hodnotu $u_{N'}$ přitom určíme z předem vypočteného gradientu ∇u_f (např. $\nabla u_f = (\nabla u_C + \nabla u_N)/2$) jako

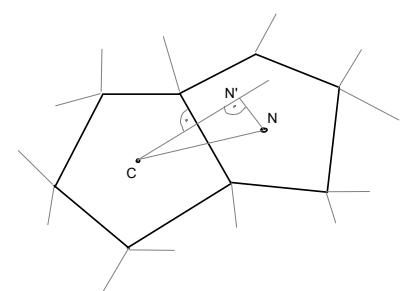
$$u_{N'} \approx u_N + \nabla u_f \cdot (\vec{x}_{N'} - \vec{x}_N), \quad (1.47)$$

tedy

$$\frac{\partial u_f}{\partial n_f} \approx \frac{u_N - u_C}{\|\vec{x}_{N'} - \vec{x}_C\|} + \frac{\nabla u_f \cdot (\vec{x}_{N'} - \vec{x}_N)}{\|\vec{x}_{N'} - \vec{x}_C\|}. \quad (1.48)$$



Obrázek 1.2: Neortogonální korekce (super-relaxované schéma)



Obrázek 1.3: Neortogonální korekce (schéma s minimální korekcí)

Matice R^d a vektor r^d pak jsou

$$R_{i,i}^d = \sum_{f \in \mathcal{F}_i} \mu \frac{S_f}{\|\vec{x}_{N'} - \vec{x}_C\|} + \sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} \mu \frac{S_f}{\|\vec{x}_f - \vec{x}_C\|}, \quad (1.49)$$

$$R_{i,j}^d = -\mu \frac{S_f}{\|\vec{x}_{N'} - \vec{x}_C\|} \text{ pro } j \in \mathcal{N}_i, \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} r_i^d &= -\sum_{f \in \mathcal{F}_i} \mu S_f \frac{\nabla u_f \cdot (\vec{x}_{N'} - \vec{x}_N)}{\|\vec{x}_{N'} - \vec{x}_C\|} - \\ &\quad - \sum_{f \in \mathcal{F}_i^D} \mu \frac{\alpha_f S_f}{\|\vec{x}_f - \vec{x}_C\|} - \sum_{f \in \mathcal{F}_i^N} \mu S_f \beta_f. \end{aligned} \quad (1.51)$$

1.4 Diskretizace časové derivace

Plně diskrétní formulaci získáme approximací časové derivace pomocí vhodné diferenční formule. V nejjednoduším případě lze použít explicitní Eulerovu metodu, při které dostaneme

$$|\Omega_i| \frac{u_i^n - u_i^o}{\Delta t} = -R(u^o)_i, \quad (1.52)$$

kde Δt je velikost časového kroku a horní indexy n a o označují aktuálně počítanou časovou vrstvu a $o = n - 1$ předcházející časovou vrstvu. Explicitní metoda je ale pouze podmínečně stabilní. Podmínka stability ve tvaru $\Delta t < \Delta t_{max}$ je v mnoha případech velmi restriktivní a výpočet explicitní metodou může být neefektivní.

Implicitní Eulerova metoda prvního řádu je

$$|\Omega_i| \frac{u_i^n - u_i^o}{\Delta t} = -R(u^n)_i, \quad (1.53)$$

a časovou derivaci (levá strana předchozího vztahu) můžeme podobně jako prostorové derivace reprezentovat afinním operátorem

$$|\Omega_i| \frac{u_i^n - u_i^o}{\Delta t} = (Du^n)_i + d_i, \quad (1.54)$$

kde

$$D = \text{diag} \left(\frac{|\Omega_i|}{\Delta t} \right) = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} |\Omega_1| & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\Omega_m| \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

a

$$d = -\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} |\Omega_1| u_1^o \\ \vdots \\ |\Omega_m| u_m^o \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Diskrétní formulace metody konečných objemů je potom

$$(D + R)u^n = -(d + r). \quad (1.57)$$

Podobně je pro zpětnou diferenční formuli druhého řádu přesnosti je

$$|\Omega_i| \frac{du_i}{dt} \approx |\Omega_i| \frac{3u_i^n - 4u_i^o + u_i^{oo}}{2\Delta t} = (\text{Du}^n)_i + d_i, \quad (1.58)$$

kde tentokrát $D = \text{diag}(3|\Omega_i|/(2\Delta t))$ a $d_i = |\Omega_i|(-4u_i^o + u_i^{oo})/(2\Delta t)$ a u^{oo} je hodnota řešení v předminulé časové vrstvě.

1.5 Plně diskrétní metoda verze metody konečných objemů pro lineární problém

Dáme-li dohromady reprezentaci operátorů R^c , R^d a D , dostaneme plně diskrétní formulaci metody konečných objemů ve tvaru soustavy algebraických lineárních rovnic

$$(D + R^c + R^d)u^n + (d + r^c + r^d) = 0 \quad (1.59)$$

neboli $Au^n + b = 0$. Matice A je při diskretizaci konvektivních členů protiproudovým schématem:

- nesymetrická,
- má kladné prvky na diagonále a nekladné mimo diagonálu,
- při vhodně zvolených okrajových podmínkách je neostře diagonálně dominantní s tím, že v některých řádkách je diagonální dominance ostrá.

Předpokládáme-li navíc irreducibilitu matice A , tj. není možné přesknout řádky a sloupce tak, že by matice měla tvar

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},$$

pak je matice A regulární (jedná se o matici z třídy tzv. M-matic).

2

Numerické řešení Navierových-Stokesových rovnic

Systém Navierových-Stokesových rovnic popisující proudění stlačitelné tekutiny je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \vec{\tau}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{u}) - \nabla \cdot \vec{q}. \quad (2.3)$$

Tlak je s ostatními veličinami svázán pomocí stavové rovnice $p = p(\rho, e)$, kde $e = E - \|\vec{u}\|^2/2$ je vnitřní energie vztážená na jeden kilogram.

Pro případ proudění nestlačitelné tekutiny s konstantní hustotou výše uvedený systém přejde na systém

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{u}), \quad (2.5)$$

kde ν je kinematická vazkost.

2.1 Numerické řešení Stokesova problému

TODO...

2.2 Algoritmus SIMPLE pro případ proudění nestlačitelné tekutiny

TODO...

2.3 Algoritmus PISO pro případ proudění nestlačitelné tekutiny

TODO...

V případě turbulentního proudění zahrnují $\vec{\tau}$ a \vec{q} také Reynoldsovův tenzor napětí a turbulentní přenos tepla

Stavová rovnice ideálního plynu je $p = \rho r T = \rho r e / C_v$, kde r je specifická plynová konstanta a C_v je specifická tepelná kapacita při konstantním objemu.

2.4 Algoritmus SIMPLE pro případ proudění stlačitelné tekutiny

V této části si popíšeme algoritmus SIMPLE pro případ proudění stlačitelné tekutiny. Začínco v případě proudění nestlačitelné tekutiny algoritmus SIMPLE realizoval pouze vazbu mezi ruchlostí \vec{u} a tlakem, tak v případě stlačitelné tekutiny je třeba brát v úvahu i rovnici energie (2.3). Další komplikací je i závislost hustoty (a tedy i toku hmoty přes hranici kontrolního objemu) na tlaku.

Uvažujme nejprve případ stacionárního proudění (tj. $\partial/\partial t = 0$). Podobně jako v případě nestlačitelné tekutiny nejprve získáme odhad rychlosti \vec{u}^* řešením hybnostní rovnice se starou hodnotou tlaku a linearizovaným konvektivním tokem

$$\nabla \cdot (\rho^0 \vec{u}^0 \otimes \vec{u}^*) - \nabla \cdot \vec{\tau}^* = -\nabla p^0. \quad (2.6)$$

Po diskretizaci metodou konečných objemů tedy máme pro rychlost soustavu rovnic ve tvaru

$$a_C^0 \vec{u}^* = \sum_f a_f^0 \vec{u}_f^* - \nabla p_C = H(\vec{u}^*)_C - \nabla p_C^0, \quad (2.7)$$

neboli

$$\vec{u}_C^* = \frac{H(\vec{u}^*)_C}{a_C^0} - \frac{1}{a_C^0} \nabla p_C^0 = \hat{u}_C^* - \frac{1}{a_C^0} \nabla p_C^0. \quad (2.8)$$

Pokud bychom použili nové (dosud neznámé) hodnoty tlaku p^n spolu s původní hustotou ρ^0 , dostali bychom odhad rychlosti

$$\vec{u}_C^n = \hat{u}_C^* - \frac{1}{a_C^0} \nabla p_C^n. \quad (2.9)$$

Budeme nyní požadovat splnění rovnice kontinuity pro rychlosť \vec{u}^n spolu s **hustotou** ρ^n . Pokud nebude docházet současně ke změně teploty, bude (přibližně) $\rho^n \approx \frac{\rho^0}{p^n} p^n = \psi^0 p^n$ a rovnice kontinuity bude ve spojité verzi

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot (\rho^n \vec{u}^n) \approx \nabla \cdot \left(\rho^n \left(\hat{u}^* - \frac{1}{a} \nabla p^n \right) \right) \approx \\ &\approx \nabla \cdot (\psi^0 \hat{u}^* p^n) - \nabla \cdot \left(\frac{\rho^n}{a} \nabla p^n \right) \approx \nabla \cdot (\psi^0 \hat{u}^* p^n) - \nabla \cdot \left(\frac{\rho^0}{a} \nabla p^n \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tlak p^n tedy získáme řešením rovnice

$$\nabla \cdot (\psi^0 \hat{u}^* p^n) - \nabla \cdot \left(\frac{\rho^0}{a} \nabla p^n \right) = 0. \quad (2.11)$$

V diskrétním tvaru tedy máme rovnici pro tlak

$$\sum_f \psi_f^0 \hat{u}_f^* \cdot \vec{S}_f p_f^n - \sum_f \frac{\rho_f^0}{a_f^0} \|\vec{S}_f\| \frac{\partial p_f^n}{\partial n} = 0. \quad (2.12)$$

Pro ideální plyn je $\psi = \frac{1}{RT}$, pro reálný plyn je potřeba provést linearizaci $\rho^n \approx \rho^0 + \psi^0(p^n - p^0)$ kde $\psi = (\partial\rho/\partial p)|_T$.

p_f je approximace tlaku na stěně f , pro rovnomořnou kartézskou síť je $p_f = (p_C + p_N)/2$. $\partial p_f/\partial$ je approximace derivace tlaku ve směru normály, pro rovnomořnou kartézskou síť je $\partial p_f/\partial n = (p_C - p_N)/\|\vec{x}_N - \vec{x}_C\|$.

Po spočtení opravené hodnoty tlaku p^n můžeme určit rychlosť \vec{u}^n jako

$$\vec{u}_C^n = \hat{u}_C^* - \frac{1}{a_C^0} \nabla p_C^n \quad (2.13)$$

a z rovnice energie (2.3) určíme energii E^n . Nakonec ze stavové rovnice dopočítáme hustotu ρ^n .

2.4.1 Vliv stlačitelnosti

Pokusíme se blíže analyzovat vliv stlačitelnosti na rovnici pro tlak (2.11) resp. (2.12). Budeme uvažovat 2D proudění nevazké tekutiny a provedeme diskretizaci na pravidelné kartézské síti s konstantním krokem Δx . Navíc budeme uvažovat rychlosť $\vec{u} = (u, v)$ takovou, že $u > 0$ a $v > 0$. Aproximace konvektivního členu metodou konečných objemů za použití schématu *upwind* prvního řádu přesnosti je pak

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho^0 \vec{u}^0 \otimes \vec{u}^n) &\approx \frac{1}{\Delta x^2} \sum_f \Phi_f^0 \vec{u}_f^n = \\ &= \frac{\rho_n^0 v_n^0 + \rho_e^0 u_e^0}{\Delta x} \vec{u}_C^n - \frac{\rho_s^0 v_s^0}{\Delta x} \vec{u}_S^n + \frac{\rho_w^0 u_w^0}{\Delta x} \vec{u}_W^n. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Člen a je tedy zhruba $a \approx \rho U / \Delta x$ ($U = ||\vec{u}||$). Koeficienty u tlaku v prvním členu rovnice (2.12) jsou tedy zhruba (předpokládáme ideální plyn)

$$\psi \hat{u} \cdot \vec{S} \approx \frac{1}{rT} U \Delta x \quad (2.15)$$

a u druhého členu

$$\frac{\rho}{a} \left| \left| \vec{S} \right| \right| \frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{\Delta x}{U}. \quad (2.16)$$

Poměr těchto členů je U^2 / rT . Uvážíme-li, že pro ideální plyn je rychlosť zvuku $c^2 = \kappa r T$, je tento poměr roven κM^2 . Tedy pro nízká Machova čísla je v rovnici pro tlak významnější druhý člen (Poissonova rovnice). Se zvyšujícím se Machovo číslem roste vliv $\nabla \cdot (\psi \hat{u} p)$ což je konvektivní člen pro tlak.

2.4.2 Finální verze algoritmu SIMPLE pro proudění stlačitelné tekutiny

Stejně jako pro případ nestlačitelné tekutiny je třeba v algoritmu SIMPLE použít relaxaci. Budeme pracovat s proměnnými \vec{u} a p definovanými ve středech kontrolních objemů a tokem homoty \mathcal{E} definovaném ve středech stěn. Algoritmus SIMPLE se potom skládá z následujících

kroků:

Algoritmus 1: Algoritmus SIMPLE pro stacionární proudění stlačitelné tekutiny

```

 $\vec{u}^n \leftarrow$  počáteční podmínka pro rychlosť;
 $p^n \leftarrow$  počáteční podmínka pro tlak;
 $e^n \leftarrow$  počáteční podmínka pro vnitřní energii;
 $\rho^n \leftarrow \rho(p^0, e^0)$  ze stavové rovnice;

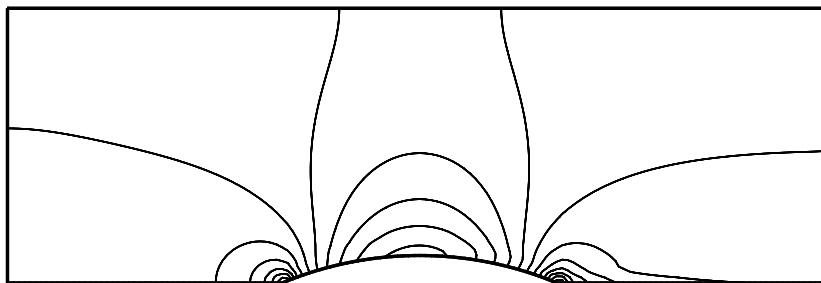
repeat
     $\vec{u}^0 \leftarrow \vec{u}^n; p^0 \leftarrow p^n; e^0 \leftarrow e^n; \rho^0 \leftarrow \rho^n;$ 
    forall  $f \in \mathcal{F}$  do  $\phi_f \leftarrow \vec{S}_f \cdot \text{interpolate}(\rho^0 \vec{u}^0)_f;$ 
     $UEqn \approx \nabla \cdot (\rho^0 \vec{u}^0 \otimes \vec{u}^*) - \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{u}^*) - \nabla \cdot (\vec{\tau}^0 - \mu \nabla \vec{u}^0);$ 
    relax( $UEqn, \alpha$ );
    solve  $UEqn = -\nabla p^0$  for  $\vec{u}^*$ ;
    forall  $\forall c \in \mathcal{C}$  do  $\hat{u}_C \leftarrow H(\vec{u}^*)_C / a_C^0;$ 
    forall  $f \in \mathcal{F}$  do
         $\rho_f^0 \leftarrow \text{interpolate}(\rho^0)_f;$ 
         $a_f^0 \leftarrow \text{interpolate}(a^0)_f;$ 
         $\psi_f^0 \leftarrow \text{interpolate}(\psi(e^0, p^0))_f;$ 
    end
     $pEqn \approx \nabla \cdot \left( \psi_f^0 \hat{u}_f^* p^* - \frac{\rho_f^0}{a_f^0} \nabla p^* \right);$ 
    relax( $pEqn, \beta_1$ );
    solve  $pEqn = 0$  for  $p^*$ ;
    forall  $f \in \mathcal{F}$  do  $\phi_f^n \leftarrow \psi_f^0 p^* \hat{u}_f \cdot \vec{S}_f - \frac{a_f^0}{a_f^0} \nabla p_f^n \cdot \vec{S}_f;$ 
    forall  $c \in \mathcal{C}$  do  $p_C^n \leftarrow p_C^0 + \beta_2(p_C^* - p_C^0);$ 
    forall  $c \in \mathcal{C}$  do  $\vec{u}_C^n \leftarrow \hat{u}_C - \frac{1}{a_C^0} \nabla p^n;$ 
     $hEqn \approx \nabla \cdot \left( \rho^0 \vec{u}^n (h^n + ||\vec{u}^n||^2 / 2) - \vec{\tau}^n \cdot \vec{u}^n - \frac{\lambda}{C_p} \nabla h^n \right);$ 
    relax( $hEqn, \gamma$ );
    solve  $hEqn = 0$  for  $h^n$ ;
    forall  $c \in \mathcal{C}$  do  $\rho_C^n \leftarrow \rho(p_C^n, h_C^n);$ 
until  $||\vec{u}^n - \vec{u}^0|| < \epsilon_u$  and  $||p^n - p^0|| < \epsilon_p$ ;

```

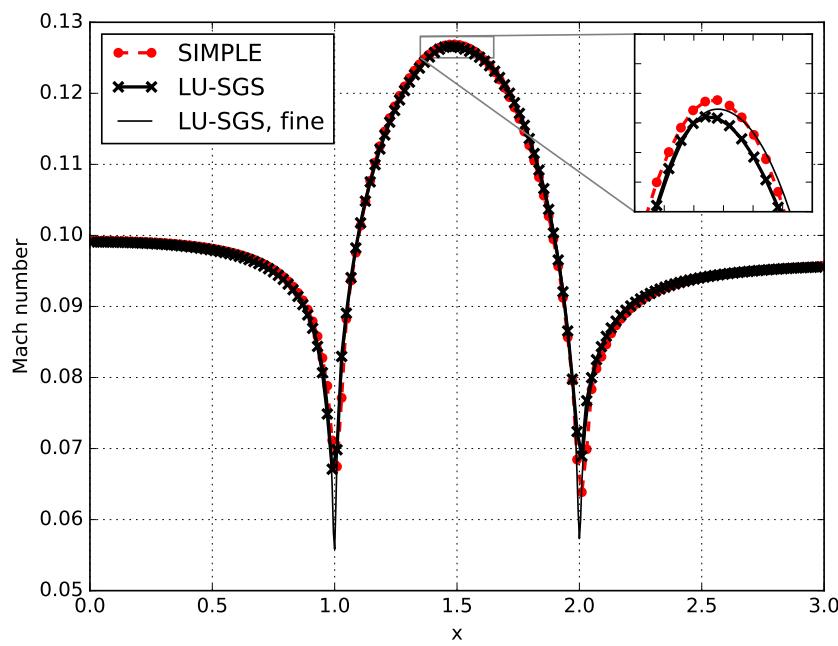
V literatuře (Moukalled a kol. 2016) lze nalézt řadu variant výše uvedeného algoritmu. Ty se liší pořadím rovnic (např. nejdříve se řeší rovnice pro energi, poté hybnostní rovnice a nakonec rovnice pro tlak), nebo jsou doplněny o výpočet odhadu hostoty, používají jiný způsob relaxace či při odvození rovnice pro tlak uvažují místo konstantní teploty např. konstantní entropii.

2.4.3 Aplikace algoritmu SIMPLE pro proudění nevazké tekutiny dvourozměrným kanálem

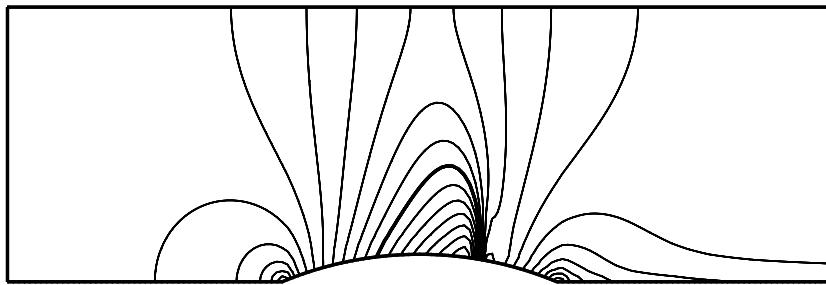
V této části se pokusíme prezentovat některé vlastnosti algoritmu SIMPLE v porovnání s metodou založenou na použití tzv. Riemannových řešičů, viz např. (Fürst, 2018). Uvažujeme proudění nevazké tekutiny kanálem s překážkou na spodní stěně. Výpočty jsou provedeny na síti s 50×150 kontrolními objemy. Na vstupu (levá hranice) je předepsán celkový tlak $p_{tot} = 100$ kPa, celková teplota $T_{tot} = 288,15$ K a rychlosť ve směru osy x . Statický tlak na výstupu je volen tak, aby režim odpovídal několika hodnotám izentropického Machova čísla M_{2i} .



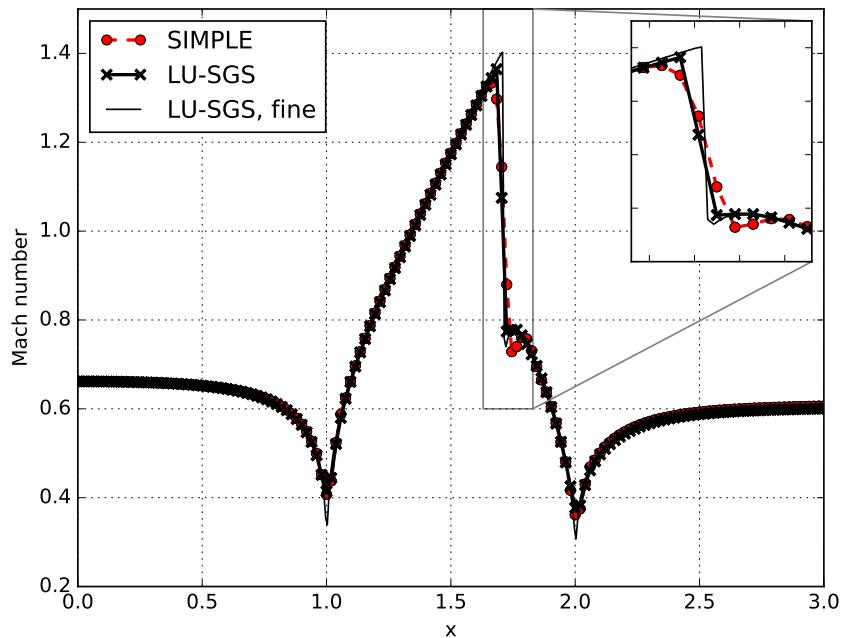
Obrázek 2.1: Izočáry Machova čísla pro $M_{2i} = 0, 1$.



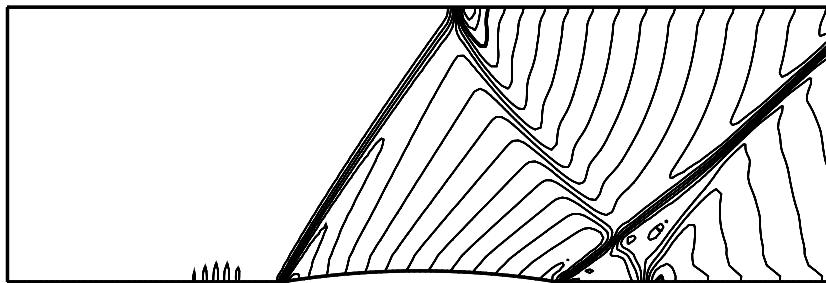
Obrázek 2.2: Rozložení Machova čísla podél spodní stěny pro $M_{2i} = 0, 1$.



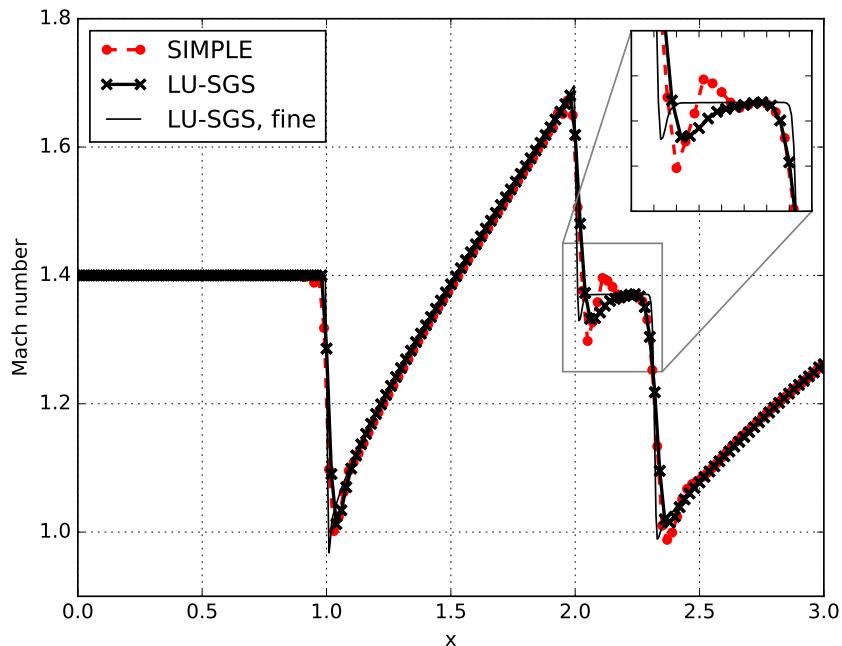
Obrázek 2.3: Izočáry Machova čísla pro $M_{2i} = 0,675$.



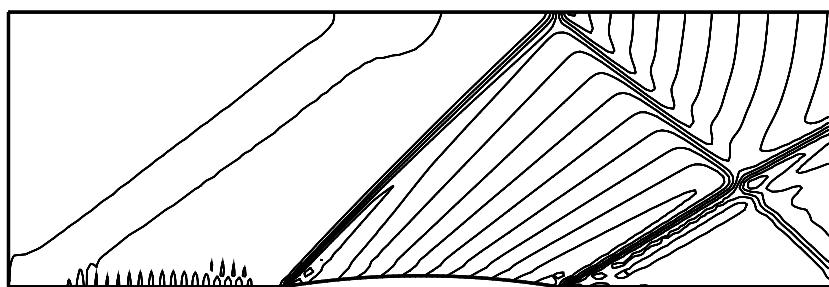
Obrázek 2.4: Rozložení Machova čísla podél spodní stěny pro $M_{2i} = 0,675$.



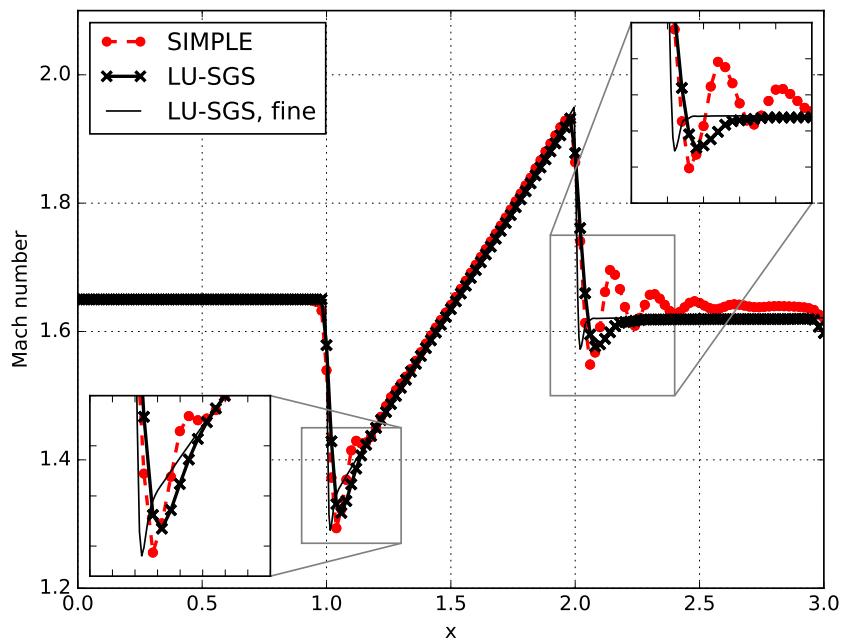
Obrázek 2.5: Izočáry Machova čísla pro $M_{2i} = 1,4$.



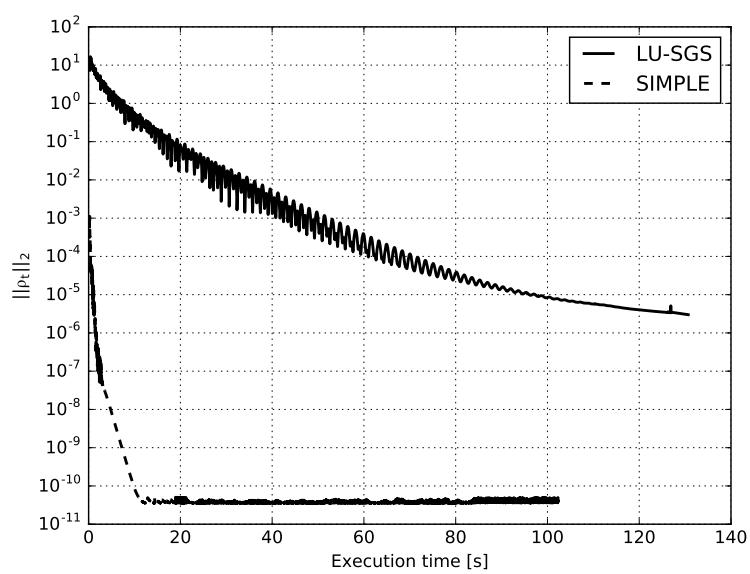
Obrázek 2.6: Rozložení Machova čísla podél spodní stěny pro $M_{2i} = 1,4$.



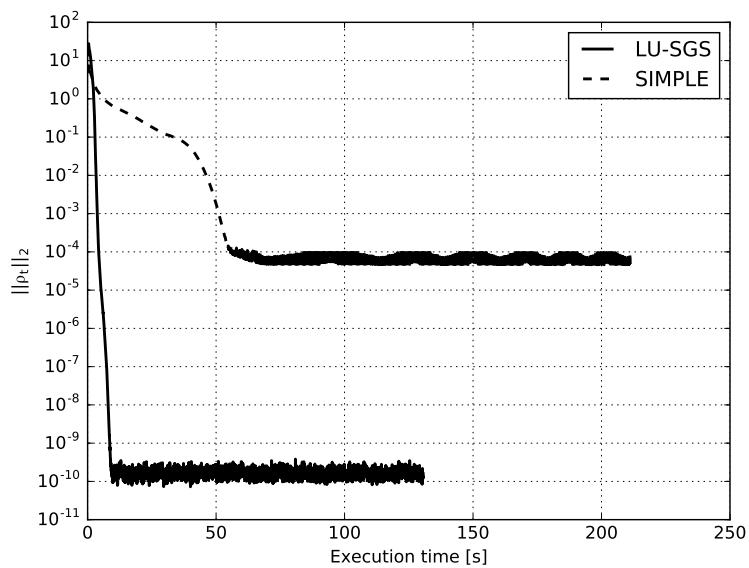
Obrázek 2.7: Izocáry Machova čísla pro $M_{2i} = 1,65$.



Obrázek 2.8: Rozložení Machova čísla podél spodní stěny pro $M_{2i} = 1,65$.



Obrázek 2.9: Rychlosť konvergencie pro $M_{2i} = 0,1$.



Obrázek 2.10: Rychlosť konvergencie pro $M_{2i} = 1,65$.

3

Applikace

3.1 Proudění v oblastech s pohyblivou hranicí

V praxi se často setkáváme s úlohami definovanými v oblastech s pohyblivou hranicí. Může se přitom jednat buď o problémy, při nichž nedochází k deformaci oblasti (např. proudění v rotorové lopatkové řadě turbín), a nebo o problémy, při nichž se celá oblast deformeuje (například obtékání poddajného tělesa) a případně dochází i ke změně topologie oblasti (např. uzavřením ventilu dojde k rozdelení oblasti na dvě nesouvisele podoblasti).

Třídu úloh, v nichž nedochází k deformaci oblasti, lze často řešit přechodem k souřadnému systému spojenému s pohybem oblasti. V případě neinerciálního systému pak do rovnic přibudou zdrojové členy (odstředivá síla, Coriolisova síla, ...). Výsledný systém je však (až na zdrojové členy) velmi podobný původnímu systému Navierových-Stokesových rovnic a lze jej řešit dříve popsánými metodami.

V této kapitole se budeme zabývat především problémy, při nichž dochází k deformacím oblasti beze změny její topologie. Budeme přitom předpokládat, že rychlosť pohybu hranice je spojitá funkce jak v čase, tak v prostoru.

Při velmi velkých změnách tvaru či při změně topologie je v průběhu řešení potřeba "přesíťovávat" a řešení interpolovat na novou síť.

3.1.1 Metoda konečných objemu ve zobecněné Lagrangeovsko-Eulerovská formulaci

Uvažujme obecný zákon zachování ve tvaru

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F}(W) = 0 \quad (3.1)$$

v oblasti $\Omega(t)$ závislé na čase. Pro odvození zobecněné Lagrangeovsko-Eulerovské formulace (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation - ALE*) budeme uvažovat transformaci referenční oblasti $\Omega_0 = \Omega(0)$ na časově závislou oblast $\Omega(t)$, tj. předpokládáme existenci funkce

$\Psi(\vec{X}, t)$ takové, že

$$\forall t \geq 0 : \forall \vec{x} \in \Omega(t) : \exists_1 \vec{X} \in \Omega_0 : \vec{x} = \Psi(\vec{X}, t). \quad (3.2)$$

Dále budeme předpokládat, že Ψ je prostá a má spojité druhé derivace.

Zvolíme nyní v referenční oblasti $\Omega(0)$ kontrolní objem $\Omega_{i0} \subset \Omega_0$. Ten se bude pomocí transformace Ψ zobrazovat na objem $\Omega_i(t) = \{\Psi(\vec{X}, t) : \vec{X} \in \Omega_{i0}\}$. Integrujeme zákon zachování v čase t přes oblast $\Omega(t)$ a v členu s prostorovou derivací převedeme pomocí Gaussovy věty na integrál po hranici

$$\begin{aligned} 0 &= \iiint_{\Omega_i(t)} \left(\frac{\partial W(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F}(W(\vec{x}, t)) \right) d\vec{x} = \\ &= \iiint_{\Omega_i(t)} \frac{\partial W(\vec{x}, t)}{\partial t} d\vec{x} + \iint_{\partial\Omega_i(t)} \vec{F}(W(\vec{x}, t)) \cdot \vec{n} dS \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dalším krokem při odvození metody konečných objemů je záměna integrálu a časové derivace v prvním členu předchozího vztahu. Zde je třeba postupovat opatrně a využít přechodu k referenční oblasti Ω_{i0} nezávislou na čase.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_i(t)} W(\vec{x}, t) d\vec{x} &= \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_{i0}} W(\vec{x}(\vec{X}, t), t) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \right| d\vec{X} = \\ &= \iiint_{\Omega_{i0}} \frac{\partial}{\partial t} \left(W(\vec{x}(\vec{X}, t), t) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \right| \right) \Big|_{\vec{x}} d\vec{X} = \\ &= \iiint_{\Omega_{i0}} \frac{\partial W(\vec{x}(\vec{X}, t), t)}{\partial t} \Big|_{\vec{X}} \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \right| d\vec{X} + \iiint_{\Omega_{i0}} W(\vec{X}, t) \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \right| \Big|_{\vec{X}} d\vec{X} = \\ &= \iiint_{\Omega_{i0}} \left(\nabla W(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{\partial W(\vec{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} \right) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \right| d\vec{X} + \\ &\quad + \iiint_{\Omega_{i0}} W(\vec{X}, t) \nabla \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} \right| d\vec{X} = \\ &= \iiint_{\Omega_i(t)} \frac{\partial W(\vec{x}, t)}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} d\vec{x} + \iiint_{\Omega_i(t)} \nabla \cdot (W(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) d\vec{x}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde $\vec{v}(\vec{x}, t) = (\partial \vec{x} / \partial t)_{\vec{X}}$ je rychlosť pohybu bodu \vec{x} . Při odvození jsme využili vztah pro derivaci jakobiánu transformace, viz odvození Reynoldsova teorému. Po dosazení do vztahu (3.3) a aplikaci Greenovy věty na člen $\nabla \cdot (W \vec{v})$ dostáváme vztah

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_i(t)} W(\vec{x}, t) d\vec{x} = - \iint_{\partial\Omega_i(t)} \left(\vec{F}(W(\vec{x}, t)) - W(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) \right) \cdot \vec{n} dS. \quad (3.5)$$

Symbolom $W_i(t)$ označíme numerickou approximaci střední hodnoty řešení v (pohybujícím se) kontrolním objemu $\Omega_i(t)$

$$W_i(t) = \frac{1}{|\Omega_i(t)|} \iiint_{\Omega_i(t)} W(\vec{x}, t) d\vec{x}. \quad (3.6)$$

Viz odvození Reynoldsova transportního teorému.

Na rozdíl od odvození zákonů zachování zde nutně neuvažujeme materiálový kontrolní objem.

Potom **semidiskrétní tvar metody konečných objemů v ALE formulaci má tvar**

$$\frac{d(|\Omega_i(t)|W_i(t))}{dt} = - \sum_j \left(\vec{F}(W_i(t), W_j(t)) - \vec{v}_{ij}(t) \cdot W_{ij}(t) \right) \cdot \vec{S}_{ij}(t), \quad (3.7)$$

kde \vec{F} je numerický tok, suma probíhá přes všechny sousedy kontrolního objemu i a index ij znamená approximaci řešení ve středu stěny mezi objemy i a j . Výše uvedený vzorec je možné převést na tvar podobný standardní MKO zavedením modifikovaného toku

$$\vec{F}^{ALE}(W_i, W_j, \vec{v}_{ij}) = \vec{F}(W_i, W_j) - \vec{v}_{ij} \cdot W_{ij}, \quad (3.8)$$

potom

$$\frac{d(|\Omega_i(t)|W_i(t))}{dt} = - \sum_j \vec{F}^{ALE}(W_i(t), W_j(t), \vec{v}_{ij}(t)) \cdot \vec{S}_{ij}(t). \quad (3.9)$$

Diskretizací v čase lze potom získat plně diskrétní verzi metody konečných objemů. Použijeme-li například implicitní Eulerovu metodu, dostáváme

$$\frac{|\Omega_i^n|W_i^n - |\Omega_i^o|W_i^o}{\Delta t} = - \sum_j \vec{F}^{ALE}(W_i^n, W_j^n, \vec{v}_{ij}^n) \cdot \vec{S}_{ij}^n. \quad (3.10)$$

3.1.2 Implementace ALE metody v algoritmech SIMPLE a PISO

Pokusíme se nejprve ukázat základní myšlenku implementace ALE metody v algoritmech typu SIMPLE a PISO pro řešení Navierových-Stokesových rovnic. Vydeme přitom ze spojité formulace a provedeme diskretizaci v čase. Zavedeme **relativní rychlosť** $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.

Potom

$$\frac{|\Omega_i^n|\rho^n - |\Omega_i^o|\rho^o}{\Delta t} = - \iiint_{\Omega_i^n} \nabla \cdot (\rho^n \vec{w}^n) d\vec{x}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega_i^n|\rho^n \vec{u}^n - |\Omega_i^o|\rho^o \vec{u}^o}{\Delta t} &= - \iiint_{\Omega_i^n} \left(\nabla \cdot (\rho^n \vec{w}^n \otimes \vec{u}^n - \vec{\tau}^n) + \right. \\ &\quad \left. + \nabla p^n \right) d\vec{x}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{|\Omega_i^n|\rho^n E^n - |\Omega_i^o|\rho^o E^o}{\Delta t} &= - \iiint_{\Omega_i^n} \nabla \cdot \left(\rho^n \vec{w}^n H^n + p^n \vec{v}^n - \right. \\ &\quad \left. - \vec{\tau} \cdot \vec{u} + \vec{q} \right) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Odrození lze jednoduše provést i aplikací Greenovy věty pro čtyřrozměrný časoprostorový nadobjem.

Samozřejmě pro nestacionární případ.

Při implementaci algoritmu SIMPLE či PISO pro proudění stlačitelné tekutiny tedy stačí v diskretizaci konvektivních členů použít místo hmotového toku $\phi = \rho \vec{u} \cdot \vec{S}$ relativní hmotový tok $\phi^{ALE} = \rho \vec{w} \cdot \vec{S}$, v rovnici energie přidat člen $p \vec{v}$ a zahrnout změnu objemu buňky do časové derivace.

Pro případ nestlačitelné tekutiny je situace podobná. Rovnici kontinuity dostaneme z rovnice kontinuity pro stlačitelnou tekutin dosazením $\rho = \text{const.}$, tedy

$$\frac{|\Omega_i^n| - |\Omega_i^o|}{\Delta t} = - \iiint_{\Omega_i^n} \nabla \cdot (\vec{w}^n) d\vec{x}. \quad (3.14)$$

Pokud diskretizace splňuje geometrický zákon zachování (viz kapitola 3.1.3)

$$\frac{|\Omega_i^n| - |\Omega_i^o|}{\Delta t} = \iiint_{\Omega_i^n} \nabla \cdot (\vec{v}^n) d\vec{x}, \quad (3.15)$$

redukuje se rovnice kontinuity na známý tvar

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.16)$$

resp.

$$\sum_f \phi_f^n = 0. \quad (3.17)$$

Rozdíl oproti algoritmům SIMPLE a PISO na pevné síti je tedy pouze v diskretizaci rovnice pro rychlosť, kdy v konvektivním členu diskretilujeme místo $\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u})$ člen $\nabla \cdot (\vec{w} \otimes \vec{u})$. Dostáváme opět rovnici

$$\vec{u}_C^* = \frac{1}{a_C^o} H(\vec{u}^*)_C - \frac{1}{a_C} \nabla p^o = \hat{u}_C^* - \frac{1}{a_C} \nabla p_C^o. \quad (3.18)$$

a předpokládáme tedy

$$\vec{u}_C^n = \hat{u}_C^* - \frac{1}{a_C} \nabla p_C^n. \quad (3.19)$$

Dosazením do rovnice kontinuity dostáváme pro nestlačitelnou tekutinu

$$\sum_f \left(\hat{u}_f^* - \frac{1}{a_f} \nabla p_f^n \right) = 0, \quad (3.20)$$

tedy Poissonovu rovnici pro tlak. Po vyřešení této rovnice upravíme rychlosť dle rovnice (3.19) a pokračujeme další iterací.

3.1.3 Geometrický zákon zachování

Jedním z důležitých problémů výpočtů na pohyblivých sítích je dodržení geometrického zákona zachování

$$\frac{|\Omega_i^n| - |\Omega_i^o|}{\Delta t} = \sum_f \vec{v}_f^n \cdot \vec{S}_f^n. \quad (3.21)$$

Tento vztah zaručuje zachování konstantního řešení při pohybu sítě a hraje také důležitou roli v konzervativitě numerické metody. Dává přitom do souvislosti způsob provedení časové diskretizace řešeného

Zde uvedený vzorec pro jednoduchost používá v čase implicitní metodu 1. řádu. Podobný vztah lze napsat i pro metody vyšších řádů jako např. BDF2.

problému s diskretizací geometrických toků $\phi_f^{Geom} = \vec{v}_f^n \cdot \vec{S}_f^n$ neboli se způsobem výpočtu rychlosti pohybu sítě. Pro případ metody konečných diferencí byl tento problém popsán například již v (Pulliam a kol. 1978). Z tohoto článku pak vychází celá řada prací věnovaných různým způsobům realizace geometrického zákona zachování pro různé třídy numerických metod.

Jeden z postupů zajištění platnosti vztahu (3.21) je založen na poznatku, že pro metodu konečných objemů nepotřebujeme znát rychlosti pohybu vrcholů sítě či středů stran. Důležitý je pro nás pouze geometrický objemový tok ϕ_f^{Geom} .

Uvažujme kontrolní objem Ω_i ve tvaru čtyřúhelníka $ABCD$, viz obrázek 3.1.

Pozice vrcholů v předchozí časové vrstvě jsou označeny horním indexem o , v aktuální vrstvě indexem n . Geometrický objemový tok ϕ^{Geom} stěnou AB kompatibilní se zpětnou Eulerovou metodou 1. řádu potom určíme pomocí plochy čtyřúhelníka $A^o A^n B^n A^o$ jako

$$\phi_{AB}^{Geom} = \frac{|A^o A^n B^n B^o|}{\Delta t}. \quad (3.22)$$

Při výpočtu plochy bereme v úvahu znaménko, tj. horní část plochy na obr. 3.1 je záporná, dolní část kladná. Ve dvourozměrném případě je

$$|A^o A^n B^n B^o| = \frac{1}{2} \overrightarrow{A^o B^n} \times \overrightarrow{A^n B^o}, \quad (3.23)$$

ve trojrozměrném případě je postup principiálně stejný, místo velikosti plochy se však uvažuje objem útvaru vzniklého posunem stěny z konfigurace o do n .

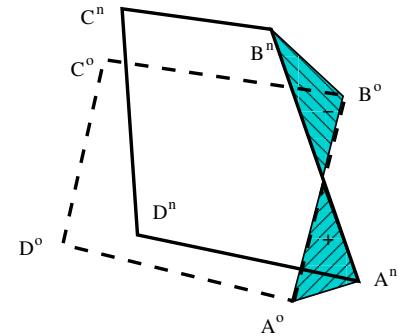
3.1.4 Interakce tekutiny s poddajným tělesem

Jednou třídou úloh, kde se využívá výpočty na pohyblivých sítích, je problém interakce proudící tekutin s poddajným tělesem. Oblast, ve které formulujeme úlohu, se skládá z části vyplněné tekutinou $\Omega^f(t)$ a části vyplněnou poddajným tělesem $\Omega^s(t)$. Rozhraní mezi tekutinou a tělesem označíme $\Sigma = \overline{\Omega^f} \cap \overline{\Omega^s}$. V časově závislé oblasti Ω^f pak řešíme systém Navierových-Stokesových rovnic, v oblasti Ω^s pak problém elasticity. Obě úlohy jsou přitom svázány pomocí okrajových podmínek na Σ . Nechť $\vec{x}^s(\vec{X}, t)$ označuje aktuální polohu materiálového bodu \vec{X} v čase t v části vyplněné tělesem a $\vec{x}^f(\vec{X}, t)$ aktuální polohu referenčního bodu \vec{X} v části vyplněné tekutinou. Na společné hranici Σ musí platit:

$$\vec{x}^f(\vec{X}, t) = \vec{x}^s(\vec{X}, t), \quad (3.24)$$

$$(-p^f \vec{\delta} + \vec{\tau}^f) \cdot \vec{n}^f = -\vec{\sigma}^s \cdot \vec{n}^s, \quad (3.25)$$

Tento postup je použit mimo jiné v programu OpenFOAM.



Obrázek 3.1: Výpočet geometrického objemového toku ϕ^{Geom} .

\vec{x}^f se týká deformace sítě, není to tedy materiálový bod.

kde $\vec{n}^f = -\vec{n}^s$ jsou normálové vektory na Σ , p a $\vec{\tau}$ označuje tlak a tečná napětí v tekutině a $\vec{\sigma}^s$ je tenzor napětí v tělese.

Vzhledem k rozdílné povaze problémů proudění a elasticity je poměrně běžné využití kombinace dvou různých typů numerických metod, např. metody konečných objemů pro tekutinu a metody konečných prvků pro poddajné těleso. Přitom však vzniká problém jak zaručit splnění vazby na Σ . Nejčastěji se přitom používají následující dvě strategie výpočtu (podrobnější popis je např. v (Fernández, 2011)).

Slabá vazba Slabá vazba neboli *weak coupling* je z hlediska implementace nejjednodušší a umožňuje mimo jiné snadné propojení hotových softwarových balíků. Při této strategii se střídavě řeší problém proudění a problém elasticity přičemž se uvažují na Σ následující vazební podmínky

$$\vec{x}^f(\vec{X}, t^n) = \vec{x}^s(\vec{X}, t^o), \quad (3.26)$$

$$(-p^{f,n} \vec{\delta} + \vec{\tau}^{f,n}) \cdot \vec{n}^{f,n} = -\vec{\sigma}^{s,n} \cdot \vec{n}^{s,n}. \quad (3.27)$$

Při výpočtu jednoho časového kroku se pak postupuje tak, že se známého tvaru tělesa v čase o určíme tvar oblasti $\Omega^{f,n}$ (první z podmínek), v této oblasti řešíme problém proudění, určíme normálová napětí v tekutině na hranici Σ v čase n , řešíme problém elasticity a získáme nový tvar tělesa.

Jak již bylo řečeno, jedná se o velmi jednoduchý postup. Nevýhodou však může být nestabilita pro určité typy úloh, nepřesnosti vazebních podmínek či porušení diskrétní verze zákona zachování energie.

Silná vazba Při silné vazbě se řeší oba problémy současně. Toho lze dosáhnout buď pomocí monolitického řešiče nebo pomocí iteračního procesu. Jedná se o výpočetně náročnější postup avšak při správném způsobu řešení lze zaručit na diskrétní úrovni zákon zachování energie či odstranit problémy s nestabilitou výpočtu. Detailnější popis lze nalézt např. v (Fernández, 2011).

3.1.5 Numerické řešení obtékání pružně uchyceného profilu

Jako příklad úlohy na interakci proudící tekutiny s tělesem uvedeme případ obtékání dvourozměrného pružně uchyceného profilu křídla. Profil je přitom uvažován jako dokonale tuhý a je umožněn jeho pohyb pouze ve směru osy y a natočení (změna úhlu náběhu). Pohyb profilu ve směru osy y a změna jeho natočení jsou přitom dány

Jedná se o příklad *wingMotion* z programového balíku OpenFOAM.

rovnicemi

$$m\ddot{y} + d\dot{y} + ky = F_y(t), \quad (3.28)$$

$$I\ddot{\alpha} + D\dot{\alpha} + K\alpha = M(t), \quad (3.29)$$

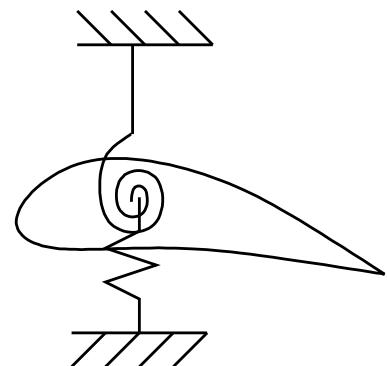
kde m , d , k , I , D a K jsou po řadě hmotnost profilu, tlumení a tuhost ve vertikálním směru, moment setrvačnosti a tlumení a tuhost v torzi. Na pravé straně je síla ve vertikálním směru a moment síly od obtékající tekutiny.

Celý výpočet byl realizován v programovém balíku OpenFOAM pro případ profilu turbulentně obtékánoho nestlačitelnou tekutinou. Obrázek 3.3 znázorňuje tvar a velikost oblasti. Na levé hranici je předepisována rychlosť $U = 100 \text{ m/s}$. Turbulence je modelována pomocí $k - \omega$ SST modelu ve formulaci pro vysoké Reynoldsovo číslo v kombinaci se stěnovými funkcemi. Intenzita turbulence ve vstupním proudu je $Tu = 5\%$ a poměr turbulentní a laminární vazkosti je $\nu_T/\nu = 100$. Na pravé straně (výstup) je předepsán tlak $p = 0 \text{ Pa}$. Hustota plynu je $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ a kinematická viskozita je $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Reynoldsovo číslo vztažené na délku tětvity profilu je $Re = 6,67 \times 10^6$.

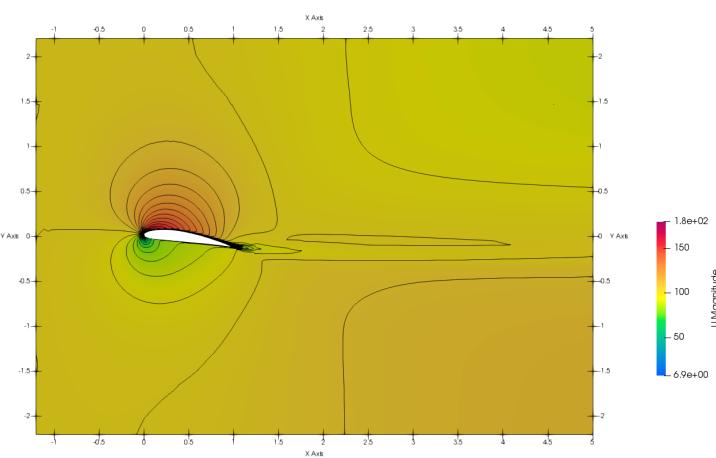
Parametry profilu a uchycení jsou $m = 22,9 \text{ kg}$, $d = 2 \text{ Ns/m}$, $k = 4000 \text{ N/m}$, $I = 22,9 \text{ kg m}^2$, $D = 0,5 \text{ N m s}$, $K = 700 \text{ N m}$.

Síla ve směru osy y a kroutící moment získaný řešením pravděvolného pole jsou použity pro výpočet nové polohy a natočení profilu. Výpočetní síť je pak upravena tak, že do vzdálenosti 0,3 m od profilu se síť pohybuje jako tuhé těleso. Ve vzdálenosti větší než 1 m je síť pevná. Mezi těmito vzdálenostmi je pohyb sítě interpolován. Síť byla vytvořena programem snappyHexMesh z balíku OpenFOAM a obsahuje přibližně 12 500 převážně čtyřúhelníkových buněk s mírným zjednodušením v mezní vrstvě, viz obr. 3.4.

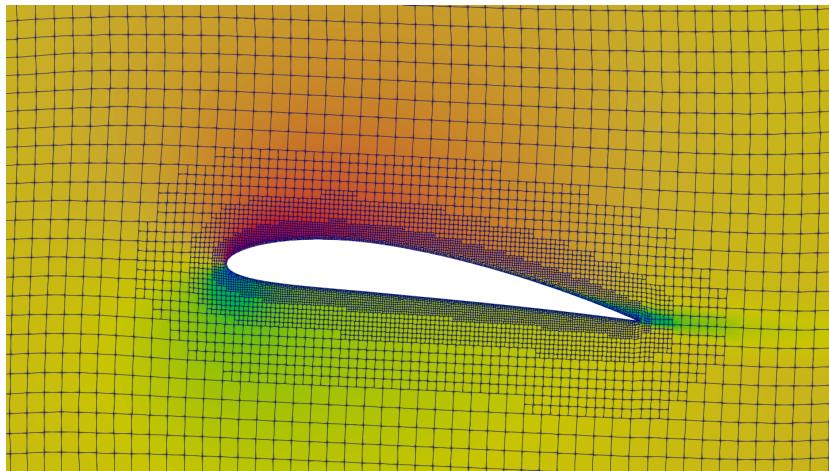
Při simulaci je nejprve proveden výpočet stacionárního obtékání s pevně uchyceným profilem. To je použito jako počáteční podmínka pro výpočet nestacionárního obtékání s uvažováním pružného uchycení. Vzhledem k tomu, že profil nebyl na začátku nastaven do rovnovážné polohy, začne se profil vychylovat a po čase dojde díky silnému tlumení k ustavení do rovnovážné polohy.



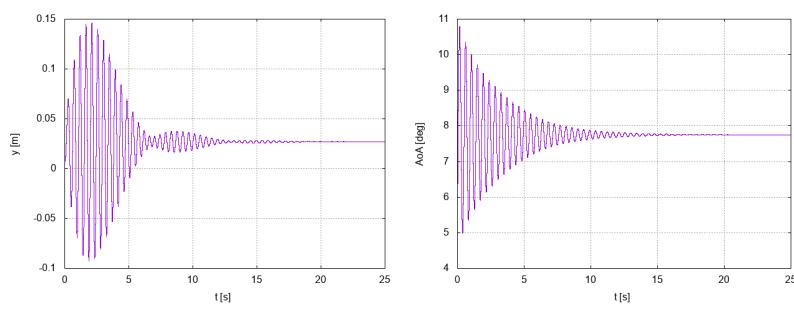
Obrázek 3.2: Obtékání pružně uchyceného profilu.



Obrázek 3.3: Velikost rychlosti pro případ obtékání pružně uchyceného profilu v čase $t = 5$ s.



Obrázek 3.4: Detail sítě pro obtékání pružně uchyceného profilu v čase $t = 5$ s.



Obrázek 3.5: Výkylka a úhel nastavení kmitajícího profilu v závislosti na čase.

3.2 Modelování turbulence

Proudění tekutiny s vyšším Reynoldsovým číslem je zpravidla turbulentní. Takovýto pohyb je charakterizován následujícími vlastnostmi:

- pohyb je popsán systémem Navierových-Stokesových rovnic (atž už pro stlačitelnou nebo nestlačitelnou tekutinu),
- přestože se jedná o deterministický jev, je pohyb tekutiny chaotický,
- v turbulentním proudění dochází oproti laminárnímu k většímu přenosu hmoty, hybnosti a tepla,
- v turbulentním proudění dochází ke zvýšené disipaci,
- turbulence je vždy trojrozměrný jev,
- turbulence se odehrává v širokém rozsahu délkových a časových měřítek.

V této kapitole se budeme věnovat pouze některým aspektům spojeným s matematickým modelováním turbulentního proudění. Podrobnější rozbor modelů turbulence lze nalézt např. ve skriptu (Příhoda a kol. 2007).

3.2.1 Přímá numerická simulace

Jak již bylo řečeno v úvodu, turbulentní proudění je popsáno systémem Navierových-Stokesových rovnic. Z toho vychází metoda přímé numerické simulace (*direct numerical simulation* neboli DNS). Při této metodě se řeší standardní systém Navierových-Stokesových rovnic bez jakéhokoliv dodatečného modelu. Praktické využití DNS je ovšem limitováno skutečností, že při řešení musíme zachytit všechna délková měřítka, jinými slovy velikost kroku sítě musí být srovnatelná s velikostí nejmenších výrů. Tato velikost (tzv. Kolmogorovovo délkové měřítko) je řádově

$$\eta_K \approx L Re^{-3/4}, \quad (3.30)$$

kde Re je Reynoldsovo číslo vztažené k délkovému měřítku L (typicky velikost oblasti). Pro zachycení všech výrů tedy potřebujeme síť s rozlišením $\Delta x \approx \eta_K$, tedy s $Re^{3/4}$ buňkami na délku oblasti. Turbulence je trojrozměrný děj, proto musí síť obsahovat řádově $Re^{9/4}$ buněk. Vzhledem k podmínce stability $\Delta t \approx \Delta x / U$ jsou celkové nároky na výpočetní čas řádově Re^3 . To je pro většinu praktických úloh neakceptovatelné a proto lze DNS využít pouze pro úlohy s velmi nízkým Re .

3.2.2 Středování a filtrování Navierových-Stokesových rovnic

Pro praktické úlohy z technické praxe se často vychází z řešení středovaných či filtrovaných rovnic. Přestože se jedná o rozdílné koncepty (viz níže), je odvozen takto upravených rovnic do jisté míry podobné. Předpokládejme systém Navierových-Stokesových rovnic pro nestlačitelnou Newtonovskou tekutinu

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{u}). \quad (3.32)$$

Symbolem $\langle v \rangle$ označíme aplikaci středování nebo filtrování proměnné v (bude vysvětleno později) takové, že

- $\langle \cdot \rangle$ je lineární,
- $\langle \cdot \rangle$ komutuje s operátorem derivace (lze zaměnit pořadí).

Aplikací filtru na systém Navierových-Stokesových rovnic dostáváme s využitím linearity a komutativnosti dostaváme

$$\nabla \cdot \langle \vec{u} \rangle = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \vec{u} \otimes \vec{u} \rangle) + \nabla \langle p \rangle = \nabla \cdot (\nu \nabla \langle \vec{u} \rangle). \quad (3.34)$$

Konvektivní člen je nelineární a nelze tedy rozdělit filtr na jeho jednotlivé členy. Nicméně poslední rovnici můžeme upravit do tvaru

$$\frac{\partial \langle \vec{u} \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \vec{u} \rangle \otimes \langle \vec{u} \rangle) + \nabla \langle p \rangle = \nabla \cdot (\nu \nabla \langle \vec{u} \rangle) + \nabla \cdot \vec{\tau}^{\langle \rangle}, \quad (3.35)$$

kde dodatečný tenzor $\vec{\tau}^{\langle \rangle}$ zachycující vliv filtrování je

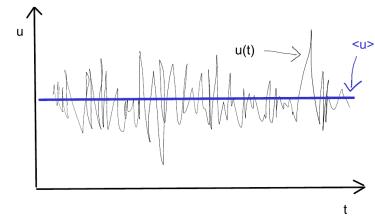
$$\vec{\tau}^{\langle \rangle} = \langle \vec{u} \rangle \otimes \langle \vec{u} \rangle - \langle \vec{u} \otimes \vec{u} \rangle. \quad (3.36)$$

Formálně je systém rovnic (s výjimkou dodatečného tenzoru $\vec{\tau}^{\langle \rangle}$) totožný se původním systémem avšak je zapsaný pro filtrované resp. středované veličiny.

Reynoldsovo časové středování Jedním z nejběžněji používaných je tzv. Reynoldsovo časové středování. Operace $\langle \cdot \rangle$ je přitom definována jako

$$\langle v \rangle(\vec{x}) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(\vec{x}, t) dt. \quad (3.37)$$

Z uvedeného vzorce je jasně vidět, že Reynoldsovo časové středování vede k časově nezávislým veličinám a je tedy vhodné pouze pro případ statisticky stacionárních procesů.



Smyslem filtrování je odstranění jevů malých měřítek.

$\langle v \rangle$ se pro Reynoldsovo středování často značí symbolem \bar{v} .

Jedná se o tzv. ergodické procesy.

Pro Reynoldsovo středování platí důležitý vztah $\langle\langle v \rangle\rangle = \langle v \rangle$.

Zavedeme-li rozklad veličiny $v(\vec{x}, t)$ na středovanou hodnotu $\langle v \rangle(\vec{x})$ a fluktuaci $v'(\vec{x}, t)$, je

$$\langle \vec{u} \rangle = \langle \langle \vec{u} \rangle + \vec{u}' \rangle = \langle \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}' \rangle \quad (3.38)$$

a tedy $\langle \vec{u}' \rangle = 0$. Potom

$$\langle \vec{u} \otimes \vec{u} \rangle = \langle (\langle \vec{u} \rangle + \vec{u}') \otimes (\langle \vec{u} \rangle + \vec{u}') \rangle = \langle \vec{u} \rangle \otimes \langle \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}' \otimes \vec{u}' \rangle \quad (3.39)$$

a tenzor $\vec{\tau}^{\langle \rangle}$ nazývaný v tomto případě **tenzor Reynoldsových napětí**. V dalším textu jej budeme značit jako $\vec{\tau}^t$ a platí pro něj

$$\vec{\tau}^t = -\langle \vec{u}' \otimes \vec{u}' \rangle. \quad (3.40)$$

Reynoldsovo souborové středování Pro případ nestacionárního prouďení není časové středování vhodné protože z veličiny závislé na poloze a čase vytvoří veličinu závislou pouze na poloze. Proto je potřeba v tomto případě definovat Reynoldsovo souborové středování jako průměrnou hodnotu veličiny v z mnoha nezávislých realizací daného procesu, tedy

$$\langle v \rangle(\vec{x}, t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v^i(\vec{x}, t). \quad (3.41)$$

I v tomto případě můžeme provést rozklad na střední hodnotu a fluktuaci a tenzor Reynoldsových napětí má formálně stejný tvar jako v předchozím případě.

Obě varianty Reynoldsova středování jsou základem modelů založených na řešení Reynoldsovský středovaných Navierových-Stokesových rovnic (*Reynolds averaged Navier-Stokes equations* neboli **RANS**).

Prostorové filtrování Další možností je filtrování v prostorových souřadnicích. Zde bývá filtrování definováno pomocí konvoluce s jádrem $K_L(\vec{x})$ jako

$$\langle v \rangle(\vec{x}, t) = (K_L * v)(\vec{x}, t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} K_L(\vec{x} - \vec{y}) v(\vec{y}, t) d\vec{y}. \quad (3.42)$$

Jádro K_L je přitom voleno tak, že $\iint_{\mathbb{R}^3} K_L(\vec{x}) d\vec{x} = 1$, $K_L(\vec{x}) \geq 0$ a $K_L(\vec{x}) = 0$ pro $||\vec{x}|| > L$. V tomto případě již $\langle\langle v \rangle\rangle \neq \langle v \rangle$ a dodatečný tenzor $\vec{\tau}^{\langle \rangle}$ již nelze snadno vyjádřit pomocí fluktuací rychlosti. Nicméně obecný tvar (3.36) je stále platný. V tomto případě jej však nazýváme tenzorem napětí malých měřítek neboli *subgrid scale stress tensor* $\vec{\tau}^{sgs}$.

Konvoluce s K_L "průměruje" v na $[-L, L]^3$.

Podobně lze také aplikovat filtrování pomocí tzv. *low-pass* filtru ve spektrálním prostoru.

Prostorové či spektrální filtrování tvoří základ pro tzv. simulace velkých vírů (*large eddy simulation* neboli **LES**), kdy víry s délkovým měřítkem větším než L jsou při simulaci zachyceny a vlivy malých vírů jsou modelovány.

3.2.3 Modely typu RANS

Při RANS přístupu je v případě proudění nestlačitelné Newtonské tekutiny řešen systém středovaných rovnic

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \nabla \cdot (\nu \nabla \vec{u}) + \nabla \cdot \vec{\tau}^t, \quad (3.44)$$

kde u a p jsou středované rychlosti a tlak a $\vec{\tau}^t = -\langle \vec{u}' \otimes \vec{u}' \rangle$ je tenzor Reynoldsových napětí. Pro nestlačitelnou tekutinu platí $\nabla \cdot (\nabla \vec{u})^T = 0$ a pravou stranu předchozí rovnice můžeme zapsat jako

$$\nabla \cdot (\nu \nabla \vec{u}) + \nabla \cdot \vec{\tau}^t = \nabla \cdot \left(\nu (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T) \right) + \nabla \cdot \vec{\tau}^t = \nabla \cdot \vec{\tau}^{eff}, \quad (3.45)$$

kde $\vec{\tau}^{eff}$ je tzv. **efektivní tenzor napětí** a skládá se s tenzorem tečných napětí a Reynoldsova tenzorem $\vec{\tau}^t$.

Boussinesqova hypotéza Jedním z nejpoužívanějších postupů při modelování turbulence pomocí RANS rovnic je zavedení tzv. **vírové** nebo turbulentní **vazkosti** ν^t a aproximace Reynoldsova tenzoru jako

$$\vec{\tau}^t \approx \nu^t \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right). \quad (3.46)$$

Tato aproximace přitom vychází z předpokladu homogenní turbulence a z analogie turbulentního a přenosu hybnosti a přenosu hybnosti vlivem pohybu částic (laminární vazkost). RANS rovnice jsou v tomto případě

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \left(\nu^{eff} \nabla \vec{u} \right), \quad (3.48)$$

kde tzv. efektivní vazkost je $\nu^{eff} = \nu + \nu^t$.

Přestože jsou předpoklady Boussinesqovy hypotézy značně omezující a v mnoha případech nejsou splněny, vychází z nich většina modelů turbulence používaných pro řešení úloh z technické praxe. Jako příklad uvedeme jednorovnicový Spalartův-Almarasův model nebo dvourovnicové modely $k - \epsilon$ nebo $k - \omega$ včetně Menterova *SST* modelu, viz (Menter a kol. 2003).

Modely Reynoldsových napětí Pokročilejší modely approximují jednotlivé složky tenzoru Reynoldsových napětí. Sem patří jak algebraické modely EARSM, viz (Hellsten, 2005), tak modely přidávající rovnice pro jednotlivé složky tenzoru. Tyto modely jsou však výpočetně náročnější a proto se používají většinou jen ve specifických případech, kdy selhávají jednoduché modely založené na Boussinesqově hypotéze.

3.2.4 Algebraické a jednorovnicové modely

Z rozměrové analýzy vyplývá, že turbulentní vazkost ν^t je součinem délkového a rychlostního měřítka. Idealizovaná představa víru vede ke vztahu pro rychlostní měřítko (rychlosť na okraji jádra víru)

$$U \sim l_m \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|, \quad (3.49)$$

kde l_m je tzv. směšovací délka (délkové měřítko odpovídající velikosti víru). Zobecněním pro vícerozměrný případ dostaváme tzv. **Prandtlův model směšovací délky** s turbulentní viskozitou danou vztahem

$$\nu^t = l_m^2 \|\nabla \times \vec{u}\|. \quad (3.50)$$

Problémem je však určení l_m . Pro proudění v mezních vrstvách se uvádí $l_m = \min(0,4y, 0,09\delta)$, kde y je vzdálenost od stěny a δ je tloušťka mezní vrstvy. V těsné blízkosti stěny však tento odhad neplatí. Pro smykové vrstvy je l_m úměrné polovině šířky vrstvy, pro další typy proudových polí platí pro l_m jiné odhady.

Z výše uvedeného vyplývá, že jednou ze slabin modelu je závislost na volbě l_m . Další nevýhodou je závislost ν^t pouze na lokálním stavu rychlostního pole.

V literatuře lze nalézt několik modelů vycházejících z konceptu Prandtlova modelu s vylepšenými vztahy pro směšovací délku, namátkou uvedeme model Baldwinův a Lomaxův nebo Cebecihova a Smithova model.

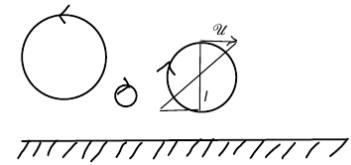
Určitým vylepšením jsou jednorovnicové modely založené na řešení dodatečné parciální diferenciální rovnice pro kinetickou turbulentní energii $k = 0,5\langle u'_i u'_i \rangle = -\text{tr}(\vec{\tau}^t)/2$. Rychlostní měřítko je pak

$$U \approx \sqrt{k}, \quad (3.51)$$

a turbulentní vazkost je

$$\nu^t = l_m \sqrt{k}. \quad (3.52)$$

I zde je třeba specifikovat směšovací délku l_m . Model však již uvažuje závislost turbulence i na dějích před daným místem. V literatuře je uváděn např. Prandtlův jednorovnicový model. Dále je možné



nalézt jednorovnicové modely založené na řešení PDR pro veličiny odpovídající přímo ν^t (viz např. Spalartův a Almarasův model). Ty jsou však často odvozeny úpravou pokročilejších dvourovnicových modelů.

3.2.5 Dvourovnicový model $k - \epsilon$

Problém určení délkového měřítka je odstraněn ve dvourovnicových modelech které přidávají k systému středovaných Navierových-Stokesových rovnic dvě dodatečné PDR umožňující určení rychlostního a délkového měřítka. Jedna ze skupin modelů, tzv. $k - \epsilon$ modely, přidávají rovnici pro turbulentní kinetickou energii k a rychlosť disipace ϵ

$$\epsilon = k^{3/2} / L, \quad (3.53)$$

kde L je délkové měřítko. Základní $k - \epsilon$ model navržený v (Launder a kol. 1974) používá následující rovnice

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k \vec{u}) = P_k - \epsilon + \nabla \cdot \left((\nu + \frac{\nu^t}{\sigma_k}) \nabla k \right), \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \vec{u}) = C_{\epsilon,1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon,2} \frac{\epsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left((\nu + \frac{\nu^t}{\sigma_\epsilon}) \nabla \epsilon \right), \quad (3.55)$$

kde

$$P_k = \vec{\tau}^t : \nabla \vec{u} = \tau_{ij}^t \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.56)$$

je tzv. dvojitá kontrakce součinu $\vec{\tau}^t$ a $\nabla \vec{u}$. Rovnici pro turbulentní energii k je přitom možno odvodit přímo ze systému Navierových-Stokesových rovnic, viz (Příhoda a kol. 2007), za předpokladu izotropie nejmenších výří a approximací turbulentní difuze k . Podobným způsobem lze odvodit i rovnici pro ϵ , ta však obsahuje řadu neznámých členů a proto je místo ní použita modelová rovnice vycházející z analogie rovnice pro k .

Pro tenzor Reynoldsových napětí a turbulentní vazkost platí vztahy

$$\vec{\tau}^t = 2\nu^t \vec{S} - \frac{2}{3} k \vec{\delta}, \quad (3.57)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right), \quad (3.58)$$

$$\nu_t = C_\nu \frac{k^2}{\epsilon}. \quad (3.59)$$

Parametry $C_\nu = 0,09$, $C_{\epsilon,1} = 1,44$, $C_{\epsilon,2} = 1,92$, $\sigma_k = 1$ a $\sigma_\epsilon = 1,3$ jsou přitom určeny z experimentálních dat.

Výše uvedený model však nelze použít v blízkosti obtékané stěny. Důvodem je to, že model byl odvozen na základě předpokladu izotropie nejmenších výří. Tento předpoklad však v blízkosti stěny neplatí. Dalším problémem je neznámá okrajová podmínka pro ϵ u

stěny. Z tohoto důvodu se bud' používají pokročilejší verze $k - \epsilon$ modelů¹, dvouvrstvé modely² a nebo se model nejčastěji používá v kombinaci se stěnovou funkcí, viz kapitola 3.2.8.

3.2.6 Dvourovnicový model $k - \omega$

Hlavní nevýhodou modelu $k - \epsilon$ jsou problémy v blízkosti stěny. Proto byla vyvinuta řada alternativních přístupů nahrazující rovnici pro ϵ jinou veličinou umožňující určení délkového měřítka. Zřejmě nejúspěšnější variantou jsou modely typu $k - \omega$ ve kterých se jako druhá veličina využívá specifická rychlosť disipace $\omega = C_v k / \epsilon$, viz např. (Wilcox, 2006).

Modelové rovnice jsou pro původní variantu modelu

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k \vec{u}) = P_k - \beta^* k \omega + \nabla \cdot ((\nu + \sigma^* \nu^t) \nabla k), \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \vec{u}) = \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \nabla \cdot ((\nu + \sigma \nu^t) \nabla \omega). \quad (3.61)$$

Turbulentní vazkost je $\nu^t = k / \omega$ a parametry modelu jsou $\beta^* = 0,09$, $\beta = 0,075$, $\sigma^* = \sigma = 0,5$ a $\gamma = 5/9$.

Tento model je možné použít i v blízkosti stěny přičemž $k_{wall} = 0$ a ω se v blízkosti stěny chová jako $\omega \approx 6\nu / (\beta y^2)$, tzn. že na stěně nabývá hodnoty $+\infty$. Proto se pro praktické výpočty ω na stěně volí jako dostatečně veliké a nebo se využívá podmínka pro drsnou stěnu, viz (Wilcox, 2006).

Výraznou nevýhodou základního modelu $k - \omega$ je silná závislost na hodnotě ω ve volném proudu. To se podařilo vyřešit přidáním členů příčné difuze do novějších verzí modelu.

3.2.7 Dvourovnicový model $k - \omega SST$

Nejpopulárnějším dvourovnicovým modelem je pravděpodobně model $k - \omega SST$ navržený Menterem, viz (Menter a kol. 2003). Tento model kombinuje přednosti modelů $k - \epsilon$ ve volném proudu a $k - \omega$ v blízkosti stěny. Pro jeho odvození se vychází z modelu $k - \epsilon$ přičemž se za ϵ dosadí $\beta^* k \omega$. Úpravou a zjednodušením pak dostaváme rovnici pro ϵ z modelu $k - \epsilon$ zapsanou v proměnné ω

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \vec{u}) &= \gamma_2 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_2 \omega^2 + \nabla \cdot ((\nu + \sigma_2 \nu^t) \nabla \omega) + \\ &\quad + 2 \frac{\sigma_2}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega. \end{aligned} \quad (3.62)$$

V blízkosti stěny je použita původní rovnice z Wilcoxova modelu, tj.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \vec{u}) = \gamma_1 \frac{\omega}{k} P_k - \beta_1 \omega^2 + \nabla \cdot ((\nu + \sigma_1 \nu^t) \nabla \omega). \quad (3.63)$$

¹ Tzv. modely pro nízké Re neboli *low-Re* modely.

² Např. jednorovnicový model u stěny kombinovaný s $k - \epsilon$ ve volném proudu

Výsledné modelové rovnice jsou získané kombinací výše uvedených rovnic pomocí přechodové funkce F_1 , která nabývá v blízkosti stěny hodnotu 1 a ve volném proudu hodnotu 0, tedy

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (k \vec{u}) = P_k - \beta^* k \omega + \nabla \cdot ((\nu + \sigma^* \nu^t) \nabla k), \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \vec{u}) &= \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \nabla \cdot ((\nu + \sigma \nu^t) \nabla \omega) + \\ &+ 2(1 - F_1) \frac{\sigma_2}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Hodnota $\beta^* = 0,09$ a ostatní parametry modelu jsou kombinací hodnot s indexem 1 a 2 jako $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$ s $\sigma_1^* = 0,85$, $\gamma_1 = 5/9$, $\beta_1 = 0,075$, $\sigma_1 = 0,5$ a $\sigma_2^* = 1$, $\gamma_2 = 0,44$, $\beta_2 = 0,0828$, $\sigma_2 = 0,85$. Směšovací funkce přitom závisí na vzdálenosti d k nejbližší stěně a dáná jako

$$F_1 = \tanh(\arg_1^4), \quad (3.66)$$

$$\arg_1 = \min \left(\max \left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* d \omega}, \frac{500 \nu}{d^2 \omega} \right), \frac{4 \sigma_2 k}{D_\omega d^2} \right), \quad (3.67)$$

$$D_\omega = \max \left(2 \frac{\sigma_2}{\omega} \nabla k \cdot \nabla \omega, 10^{-20} \right). \quad (3.68)$$

Další změnou oproti původnímu Wilcoxovu modelu je omezení turbulentní vaznosti v mezní vrstvě s nepříznivým tlakovým gradientem

$$\nu^t = \min \left(\frac{k}{\omega}, \frac{a_1 k}{F_2 \Omega} \right), \quad (3.69)$$

kde $a_1 = 0,3$, $\Omega = \sqrt{2 \vec{\vec{\Omega}} : \vec{\vec{\Omega}}}$ s $\vec{\vec{\Omega}} = (\nabla \vec{u} - (\nabla \vec{u})^T)/2$ a tlumící funkce F_2 je

$$F_2 = \tanh(\arg_2^2), \quad (3.70)$$

$$\arg_2 = \max \left(\frac{2 \sqrt{k}}{\beta^* \omega d}, \frac{500 \nu}{\omega d^2} \right). \quad (3.71)$$

3.2.8 Okrajové podmínky, stěnové funkce

Modelové rovnice pro k a ϵ či ω jsou rovnicemi druhého řádu modelující konvekci s difusí a obsahující zdrojové členy. Pro jejich řešení je třeba na okrajích oblasti předepsat buď Dirichletovy nebo Neumannovy resp. Newtonovy okrajové podmínky.

Podmínky na vstupu a výstupu Na vstupu do oblasti se většinou používá pro modelové rovnice Dirichletovy podmínky, tj. zadání hodnoty k a ϵ či ω . V praktických úlohách se tyto hodnoty zadávají nejčastěji pomocí intenzity turbulence definované vztahem

$$Tu = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} k_{in}}}{||\vec{u}_{in}||} \times 100 \%. \quad (3.72)$$

Ze znalosti velikosti vstupní rychlosti $\|\vec{u}_{in}\|$ a Tu lze vypočítat k_{in} .

Podmínka pro ϵ či ω se často zadává bud' předepsáním směšovací délky l_m (viz Prandtlův model směšovací délky) a nebo pomocí poměru vazkostí ν^t / ν . Tento poměr se pohybuje řádově od 0,1 pro úlohy s nízkou turbulencí ($Tu < 1\%$) až po 100 pro úlohy s velikou intenzitou turbulence na vstupu ($Tu = 5 - 20\%$).

Na výstupu z oblasti se běžně používají Neumannovy okrajové podmínky.

Podmínky na pevné stěně Při simulacích turbulentního proudění je nutné používat v blízkosti stěny dostatečně jemnou síť. Rozhodující je přitom velikost buněk ve směru kolmém na stěnu. Požadavky na síť přitom vycházejí z tloušťky a struktury mezní vrstvy. Neblíže ke stěně jsou víry výrazně tlumeny stěnou a délkové měřítko je omezeno vzdáleností ke stěně. V této oblasti tedy převažuje vliv molekulární vaznosti a proudění je zde prakticky laminární. Ve větší vzdálenosti naopak převažuje turbulentní vaznost a proudění je v této části plně turbulentní.

Zjednodušením Navierových-Stokesových rovnic pro případ ustáleného proudění v mezní vrstvě dostáváme Prandtlovu rovnici mezní vrstvy

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu^{eff} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.74)$$

V laminární podvrstvě, kde $\nu^{eff} \approx \nu$ je pro případ proudění bez tlakového gradientu a za předpokladu $\partial/\partial x \approx 0$ a $v \approx 0$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.75)$$

a s využitím okrajové podmínky na stěně $u(y=0) = 0$ je $u(y) = Ky$. Definujeme-li bezrozměrnou rychlosť a bezrozměrnou souřadnici y jako

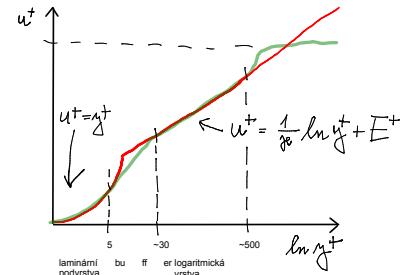
$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad (3.76)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad (3.77)$$

kde u_τ je tzv. třecí rychlosť definovaná vztahem $u_\tau = \sqrt{\nu |\partial u / \partial y|}$, dostáváme v blízkosti stěny

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} = \frac{Ky}{u_\tau} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} y}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} = y^+. \quad (3.78)$$

Tento vztah platí přibližně pro $y^+ < 5$.



Ve větší vzdálenosti od stěny, kde převažuje turbulentní vazkost, je

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu^t \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.79)$$

Z Prandtlova modelu směšovací délky je však $\nu^t = l_m^2 |\partial u / \partial y|$ s

$l_m = \kappa y$. Máme tedy (po vydělení konstantou)

$$\begin{aligned} \kappa &\approx 0,4. \\ \partial u / \partial y &> 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) = 0 \quad (3.80)$$

a tedy

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = c_1. \quad (3.81)$$

neboli

$$u(y) = c_1 \ln y + c_2. \quad (3.82)$$

V celé mezní vrstvě však platí $\nu^{eff} \partial u / \partial y = const.$, takže konstantu c_1 určíme ze vztahu

$$\nu \partial u / \partial y|_{y=0} = (u_\tau)^2 = \nu^t \frac{\partial u}{\partial y} = \kappa^2 c_1^2, \quad (3.83)$$

tedy $c_1 = u_\tau / \kappa$. Je tedy

$$u(y) = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + c_2 \quad (3.84)$$

a v bezrozměrném tvaru je

$$u^+(y) = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + E^+. \quad (3.85)$$

Parametr E^+ (integrační konstanta) je určen z experimentálních dat a pro hladkou stěnu nabývá hodnoty $E^+ \approx 5$. Tento logaritmický vztah platí zhruba od $y^+ \approx 30$. Horní hranice odpovídá tloušťce mezní vrstvy a je zhruba kolem $y^+ \approx 200 - 500$.

V oblasti $5 < y^+ < 30$ se nachází tzv. přechodová vrstva kde neplatí ani jeden z dříve uvedených vztahů.

Při numerickém řešení turbulentního proudění je tedy třeba volit jeden z následujících přístupů:

- Model vhodný pro nízké Re . V tomto případě je potřeba použít síť s takovým zjemněním u stěny, že první buňka bude mít bezrozměrnou velikost y^+ menší než 5, důrazně doporučované je však $y^+ < 1$. V tomto případě je $\nu_{wall}^t = 0$ a stejně tak $k_{wall} = 0$. Podmínka pro ω či pro ϵ vychází asymptotického chování modelu pro $y \rightarrow 0$.
- Použití stěnové funkce (viz níže). Pro standardní stěnové funkce je pak potřeba síť při které první buňka bude mít velikost y^+ v rozsahu 30 – 200.

Mluvíme o rozměru kolmém na stěnu.

Problémem je, že hodnotu u_τ získáme teprve po vyřešení proudového pole. Přesto dokážeme alespoň zhruba na základě Reynoldsova čísla odhadnout velikost první buňky.

V případě použití standardní stěnové funkce se výpočet provádí následujícím způsobem. V prvním bodě známe rychlosť u_1 a vzdálenosť od stěny je y_1 . Aproximace napětí na stěně pomocí $\nu u_1 / y_1$ je však chybné. Předpokládáme-li však platnosť zákona stěny, tak

$$u_1^+ = \frac{u_1}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{u_\tau y_1}{\nu} \right) + E^+. \quad (3.86)$$

Numerickým řešením této nelineární rovnice získáme aktuální hodnotu u_τ na stěně. „Správná“ hodnota napětí na stěně je $(u_\tau)^2$. Tuto správnou hodnotu lze snadno implementovat použitím fiktivní hodnoty turbulentní vaznosti na stěně

$$\nu_{wall}^t = (u_\tau)^2 \frac{y_1}{|u_1|} - \nu. \quad (3.87)$$

Tuto hodnotu použijeme pro vyčíslení vazkých toků na pevné stěně.

V rovnicích pro k a ω (resp. ϵ) se využívá známých průběhů těchto veličin v blízkosti stěny. Ty se pak budou přidávat k rovnicím jako zdrojové členy a nebo se přímo definují hodnoty v první buňce jako

$$k_1 = (u_\tau)^2 k_1^+ = (u_\tau)^2 \frac{1}{\sqrt{\beta^*}}, \quad (3.88)$$

$$\omega_1 = \frac{(u_\tau)^2}{\nu} \omega_1^+ = \frac{(u_\tau)^2}{\nu} \frac{1}{\kappa \sqrt{\beta^*} y_1^+}. \quad (3.89)$$

3.2.9 Numerická approximace modelu turbulence

Rovnice modelu turbulence obsahují časovou derivaci, konvektivní, difusivní a zdrojové členy. Konvektivní a difusivní členy přitom lze approximovat standardním postupem. Problémy však mohou vznikat při approximaci zdrojových členů. Ty totiž mohou nabývat značných velikostí a mohou zhoršovat stabilitu výpočtu. Problém může nastat například v okamžiku, kdy během výpočtu třeba i v jediném bodě klesne hodnota k pod nulu. To nejenže neodpovídá definičnímu oboru k , ale v případě $k - \epsilon$ modelu to vede k okamžitému přerušení výpočtu.

Z tohoto důvodu je třeba při numerickém řešení potřeba zachovat nezápornost k a ω (resp. ϵ). Nejprve si vezmeme jednoduchou modelovou rovnici

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y. \quad (3.90)$$

Jejím řešením je $y(t) = y(0) \exp(\lambda t)$, tedy pokud $y(0) > 0$, je i $y(t) > 0$. Budeme-li tuto úlohu řešit pomocí explicitní Eulerovy

Popis je platný pro $u_1 > 0$.

Z posledního vztahu je vidět, že stěnovou funkci nelze použít pro odtržené proudění.

V literatuře jsou takovéto členy označovány jako *stiff*.

metody, dostáváme

$$y^n = y^o + \Delta t \lambda y^o = (1 + \Delta t \lambda) y^o. \quad (3.91)$$

Z tohoto vztahu je vidět, že při $\lambda > 0$ zachovává explicitní Eulerova metoda pozitivitu pro libovolné $\Delta t > 0$. Pro $\lambda < 0$ je však pro zachování pozitivity potřeba dodržet podmínu

$$\Delta t < -\frac{1}{\lambda}, \text{ pro } \lambda < 0. \quad (3.92)$$

Při použití implicitní Eulerovy metody je

$$y^n = y^o + \Delta t \lambda y^n \quad (3.93)$$

a tedy

$$y^n = \frac{1}{1 - \Delta t \lambda} y^o. \quad (3.94)$$

Z tohoto vztahu je vidět, že implicitní Eulerova metoda zachovává pozitivitu při $\lambda < 0$ pro libovolné $\Delta t > 0$ a při $\lambda > 0$ pro $\Delta t < 1/\lambda$.

Z rozboru modelové rovnice vyplývá, že pro $\lambda > 0$ je vhodnější (z hlediska zachování pozitivity) explicitní a pro $\lambda < 0$ implicitní Eulerova metoda.

Pro případ původního $k - \omega$ modelu jsou zjednodušené modelové rovnice

$$\frac{dk}{dt} = P_k - \beta^* k \omega, \quad (3.95)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2. \quad (3.96)$$

Zdrojový člen P_k je $P_k = \vec{\tau}^t : \nabla \vec{u} = 2\nu^t \vec{S} : \vec{S}$ a je tedy $P_k \geq 0$. V rovnici pro ω je $\gamma \frac{\omega}{k} P_k = 2\gamma \vec{S} : \vec{S} > 0$. Rovnice pro ω nezávisí na k a proto jí při často sekvenčním postupu řešíme nejdříve. Nelineární člen ω^2 nejprve linearizujeme v okolí ω^o , tj. $\omega^o \omega$. První člen na pravé straně pak approximujeme pomocí explicitní a druhý pomocí implicitní Eulerovy metody, tedy

$$\omega^n = \omega^o + \Delta t \left(\gamma S^2 - \beta \omega^o \omega^n \right), \quad (3.97)$$

kde $S = \sqrt{2\vec{S} : \vec{S}}$. Pro zjednodušený model je tedy

$$\omega^n = \frac{\omega^o + \Delta t \gamma S^2}{1 + \Delta t \beta \omega^o}. \quad (3.98)$$

Poté řešíme rovnici pro k kde opět první člen approximujeme explicitně, druhý implicitně. Tedy

$$k^n = k^o + \Delta t \left(\nu^{t,o} S^2 - \beta^* k^n \omega^n \right), \quad (3.99)$$

Kam se "ztratil" člen $-\frac{2}{3} k \vec{\delta}^2$?

a tedy

$$k^n = \frac{k^o + \Delta t v^{t,o} S^2}{1 + \Delta t \beta^* \omega^n}. \quad (3.100)$$

Při vyšetřování approximace zdrojových členů jsme však zanedbali jak konvektivní, tak difusivní členy. Proto ani výše uvedený postup není univerzální a nezaručuje vždy pozitivitu k a ω . Většina softwarových balíků tak aplikuje v průběhu řešení různé strategie pro omezení nestability řešení.

Výše uvedený princip se často využívá i pro složitější modely, kde již dělení na kladný a záporný zdrojový člen nemusí být tak jednoduché.

3.2.10 Turbulentní obtékání profilu NACA 0012.

Jako příklad si uvedeme numerické řešení turbulentního obtékání dvourozměrného profilu NACA 0012 nestlačitelnou tekutinou s úlem náběhu $\alpha = 2^\circ$ s Reynoldsovým číslem vztaženým na délku tětviny $Re_c = 6 \times 10^6$. Turbulenci budeme modelovat pomocí dvourovnicového SST modelu.

Profil s tětvou délky $c = 1$ m umístíme do středu oblasti tvaru kruhu o poloměru 100 m. Na vstupní části vnější hranici použijeme pro rychlosť, k a ω Dirichletovu podmítku, na zbytku Neumannovu podmítku. Pro tlak použijeme na vnější hranici Neumannovu podmítku s tím, že ve zvoleném bodě budeme požadovat kinematický tlak $p = 0 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Intenzita turbulence na vstupní části vnější hranice byla předepsána jako $Tu = 1\%$ a omega byla dopočítána z poměru $\nu_t/\nu \approx 100$.

Předpokládáme-li kinematickou viskozitu $\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ a $c = 1 \text{ m}$, vychází z $Re = 6 \times 10^6$ velikost rychlosti ve volném proudě $U = 90 \text{ m/s}$.

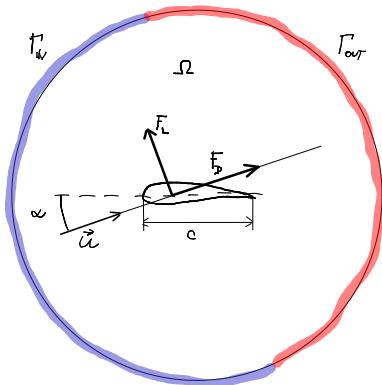
Síť budeme volit tak, že na jedné straně profilu bude přibližně 100 buněk. Pro parametry zjemnění ve směru kolmém na stěnu bychom však potřebovali znát u_τ . To však neznáme a pokusíme se tedy pouze o odhad. Jako hrubý odhad nám poslouží třecí součinitel pro obtékání hladké desky. Ten je v poměrně širokém rozsahu vyšších Reynoldsových čísel zhruba $c_f \approx 0,004$. Velikost napětí na stěně lze tedy odhadnout jako

$$\tau = \frac{c_f}{2} U^2 \approx 16,2 \text{ m}^2/\text{s}^2. \quad (3.101)$$

Tedy $u_\tau \approx 4,025 \text{ m/s}$ a pro zadanou hodnotu $y^+ = 1$ vychází reálný rozměr první buňky

$$y = \frac{\nu}{u_\tau} y^+ \approx 4 \times 10^{-6} \text{ m}. \quad (3.102)$$

Výpočet provedeme na 4 sítích, první síť (M1) nebude mít v blízkosti



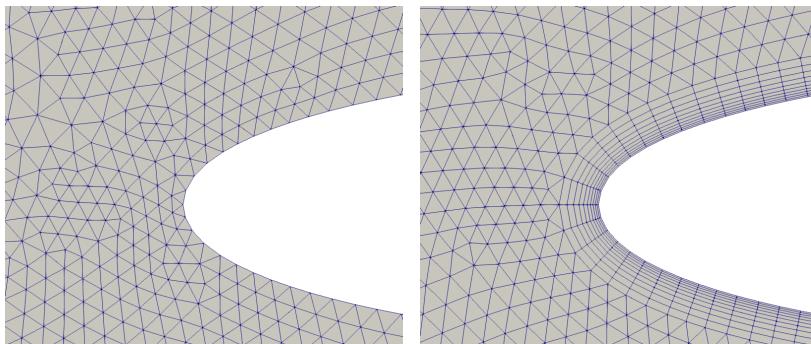
Na internetu jsou volně dostupné online kalkulačky pro určení velikosti první buňky.

stěny žádné zjemnění, síť M₂ bude zjemněná v blízkosti stěny na velikost odpovídající $y^+ \approx 100$, M₃ na $y^+ \approx 10$ a M₄ na $y^+ \approx 1$. Sítě M₂ až M₄ přitom v blízkosti profilu používají zjemnění až do vzdálenosti 16 mm s postupně rostoucí velikostí s poměrem $\Delta y_{j+1}/\Delta y_j = 1,2$.

Tabulka 3.1 shrnuje základní parametry použitých sítí.

Síť	n	n_{bl}	y_1^+	y_1/c
M ₁	35 427	-	~ 1000	$\sim 1 \times 10^{-2}$
M ₂	38 711	10	100	600×10^{-6}
M ₃	41 195	22	10	60×10^{-6}
M ₄	43 886	35	1	5×10^{-6}

Obrázek 3.6 ukazuje detail zjemnění sítě v blízkosti náběžné hrany profilu. Síť je přitom tvořena (s výjimkou M₁) kombinací trojúhelníkových buněk ve volném proudu a čtyřúhelníkových buněk v blízkosti profilu.



Tabulka 3.2 ukazuje vypočtené hodnoty koeficientu vztlaku a odporu získané s použitím stěnové funkce počítané pomocí u_τ , dále se stěnovou funkcí počítanou pomocí $u^* = \sqrt{k}$ a bez použití stěnové funkce. Z tabulky je vidět, že použití stěnové funkce nevyžaduje tak razantní zjemnění u stěny jako výpočet bez stěnových funkcí. Síť však musí být navržena tak, aby první bod ležel v logaritmické části zákona stěny (síť M₂). Použitelnost stěnových funkcí je dále omezena předpoklady, které byly použity při jejich odvození, tj. například nulový gradient tlaku ve směru proudu. Nehodí se tedy pro případ odtrženého proudění či proudění se silným tlakovým gradientem.

Obrázek 3.7 ukazuje závislost koeficientu vztlaku $C_L = 2F_L/(A\rho_\infty U_\infty^2)$ a odporu $C_D = 2F_D/(A\rho_\infty U_\infty^2)$ (A je plocha křídla). Výpočet byl proveden na síti M₂ a M₄ a pro ověření ještě na strukturované síti vytvořené hyperbolickým generátorem Construct2d s $y^+ \approx 1$. Z obrázku je vidět, že pro úhly náběhu $\alpha > 10$ deg je výpočet se stěnovou funkcí na síti M₂ nespolehlivý. Navíc pro úhly náběhu větší než přibližně 7 deg výrazně nadhodnocuje koeficient odporu C_D . Rozdíl mezi ex-

Tabulka 3.1: Parametry sítí pro výpočty obtékání profilu NACA 0012, n je celkový počet buňek v síti, n_{bl} - počet zjemněných vrstev v mezní vrstvě, y_1^+ - bezrozměrná velikost první buňky, y_1/c - velikost první buňky vzhledem k délce profilu.

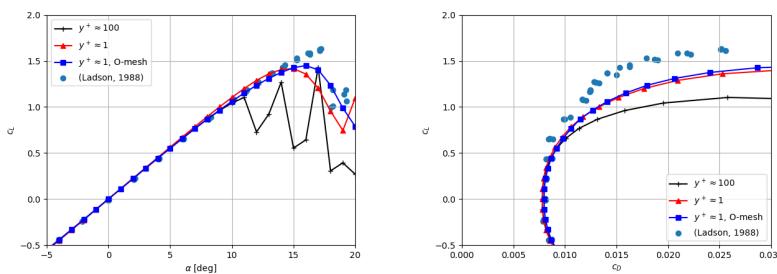
Obrázek 3.6: Detail výpočetní sítě v blízkosti náběžné hrany profilu, vlevo síť M₁, vpravo M₂.

Existují i pokročilejší stěnové funkce umožňující široký rozsah y_1^+ či uvažující nenulový tlakový gradient.

Síť'	stěnová funkce	c_L	err_L	c_D	err_D
M ₁	ano, u_τ	0,1799	18,7 %	0,00579	28,8 %
M ₂	ano, u_τ	0,2235	1,0 %	0,00790	3,0 %
M ₃	ano, u_τ	0,2247	1,5 %	0,00931	14,3 %
M ₄	ano, u_τ	0,2262	2,2 %	0,00794	2,4 %
M ₁	ano, u^*	0,2193	0,9 %	0,00123	84,9 %
M ₂	ano, u^*	0,2232	0,9 %	0,00798	2,0 %
M ₃	ano, u^*	0,2245	1,5 %	0,00938	15,3 %
M ₄	ano, u^*	0,2262	2,2 %	0,00794	2,4 %
M ₁	ne	0,2204	0,4 %	0,00103	87,4 %
M ₂	ne	0,2307	4,3 %	0,00254	68,8 %
M ₃	ne	0,2247	1,5 %	0,00931	14,3 %
M ₄	ne	0,2262	2,2 %	0,00794	2,4 %

Tabulka 3.2: Srovnání vypočtených koeficientů vztlaku a odporu s experimentálními daty, sloupec err je relativní chyba vzhledem k experimentálním hodnotám $c_L = 0,2213$ a $c_D = 0,00814$ viz (Ladson, 1988)

experimentálními daty a výpočtem na síti M₄ může být způsobený tím, že v experimentu bylo na náběžné hraně zdrsnění pro urychlení přechodu do turbulence.



Obrázek 3.7: Koeficient vztlaku a odporu pro obtékání profilu NACA0012 při různých úhlech náběhu.

3.2.11 Modely typu LES

Na rozdíl od RANS přístupu, kdy je vliv všech fluktuací zahrnut pomocí modelu turbulence, jsou při simulaci velkých víry (*large eddy simulation* neboli LES) víry větších velikostí nesoucí významnou část energie simulovaly a modelovány jsou pouze víry menší než zvolené délkové měřítko filtru. To bývá nejčastěji voleno jako velikost buňky.

Smagorinského model Nejjednodušší LES model lze přitom odvodit použitím Boussinesqovy hypotézy pro malé víry a konceptu směšovací délky. V případě LES však roli směšovací délky přebírá délkové měřítko filtru. Nejjednodušším modelem je tak tzv. Smagorinského model, kde tenzor napětí malých měřítek $\vec{\tau}^{sgs}$ je dán vztahem

$$\vec{\tau}^{sgs} = 2\nu^{sgs} \vec{S} = 2\nu^{sgs} \frac{\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T}{2}, \quad (3.103)$$

Metoda konečných objemů už z principu obsahuje filtrování pomocí jádra K_L odpovídajícího charakteristické funkci kontrolního objemu.

kde

$$\nu^{sgs} = (C_S \Delta)^2 S. \quad (3.104)$$

Délkové měřítko Δ odpovídá kroku sítě a často se volí jako $\Delta = \sqrt[3]{|\Omega_i|}$ a C_S je Smagorinského "konstanta" $C_S \approx 0,17$. Tato hodnota však byla odvozena pro případ izotropní turbulenci a není univerzální. Základním nedostatkem tohoto modelu je skutečnost, že jej nelze použít v blízkosti stěny. Určitým vylepšení je tak Lillyho a Smagorinského model, kde

$$\nu^{sgs} = L_S^2 S \quad (3.105)$$

s délkovým měřítkem $L_S = \min(\kappa d, C_S \Delta)$ kde d je vzdálenost k nejbližší stěně.

Dynamický Smagorinského model Dalším problémem je neuniverzálnost "konstanty" C_S . To se snaží odstranit tzv. dynamický model. U tohoto modelu se během vypočtu na data získaná ze simulace s filtrem s délkovým měřítkem Δ aplikuje explicitní filtr s délkovým měřítkem $\tilde{\Delta} > \Delta$. Ze znalosti proudového pole filtrovaného s Δ a s $\tilde{\Delta}$ je pak určen vliv víru o měřítkách mezi Δ a s $\tilde{\Delta}$. Označme [.] aplikaci filtru $\tilde{\Delta}$ a $\vec{T}(\vec{u}) = \vec{u} \otimes \vec{u}$. Potom Smagorinského model (s filtrem Δ) lze zapsat jako

$$\langle \vec{T}(\vec{u}) \rangle = \vec{T}(\langle \vec{u} \rangle) - 2(C_S \Delta)^2 \langle S \rangle \langle \vec{S} \rangle. \quad (3.106)$$

Budeme-li tento vztah filtrovat pomocí [.], dostaneme

$$[\langle \vec{T}(\vec{u}) \rangle] = [\vec{T}(\langle \vec{u} \rangle)] - 2(C_S \Delta)^2 [\langle S \rangle] [\langle \vec{S} \rangle]. \quad (3.107)$$

Předpokládejme nyní, že stejný Smagorinského model bude platný i při použití složeného filtru $[(\cdot)]$, tedy

$$[\langle \vec{T}(\vec{u}) \rangle] = \vec{T}([\langle \vec{u} \rangle]) - 2(C_S \tilde{\Delta})^2 [\langle S \rangle] [\langle \vec{S} \rangle]. \quad (3.108)$$

Odečtením rovnic (3.107) a (3.108) dostaneme

$$\begin{aligned} \vec{L} &= [\vec{T}(\langle \vec{u} \rangle)] - \vec{T}([\langle \vec{u} \rangle]) = \\ &= 2C_S^2 \Delta^2 \left([\langle S \rangle] [\langle \vec{S} \rangle] - \frac{\tilde{\Delta}^2}{\Delta^2} [\langle S \rangle] [\langle \vec{S} \rangle] \right) = 2C_S^2 \Delta^2 \vec{M}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Tenzor $\vec{L} = [\langle \vec{u} \rangle \otimes \langle \vec{u} \rangle] - [\langle \vec{u} \rangle] \otimes [\langle \vec{u} \rangle]$ dokážeme ze známých hodnot $\langle \vec{u} \rangle$ vypočítat. Stejně tak dokážeme vyčíslit tensor \vec{M} . Hodnotu C_S pak určíme ze vztahu

$$C^2 \Delta^2 = \frac{\vec{L} : \vec{M}}{\vec{M} : \vec{M}}. \quad (3.110)$$

Takto získaná hodnota C_S se však často výrazně mění jak v prostoru, tak v čase. Proto se na tuto získané hodnoty aplikuje vyhlazování a ořezávání do relevantních velikostí.

Např. ANSYS Fluent používá $C_S = 0.1$.

Tento model lze do jisté míry považovat za hybridní model typu RANS-LES. Kombinuje totiž Prandtlův a Smagorinského model.

$$\langle \vec{S} \rangle = (\nabla \langle \vec{u} \rangle + (\nabla \langle \vec{u} \rangle)^T) / 2, \langle S \rangle = \sqrt{2 \langle \vec{S} \rangle : \langle \vec{S} \rangle}.$$

Při této úpravě jsme uvažovali konstantní parametry C_S a Δ . To však obecně neplatí!

Tzv. Germanova identita použité pro Smagorinského model.

WALE model Chování výše uvedených LES modelů v blízkosti stěny se snaží vylepšit tzv. WALE model se složitějším výpočtem ν^{sgs}

$$\nu^{sgs} = L_S^2 \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(S_{ij}^d S_{ij})^{5/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}}, \quad (3.111)$$

kde

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right) \quad (3.112)$$

a ($C_w = 0,23$)

$$L_S = \min(\kappa d, C_w \Delta). \quad (3.113)$$

Výše uvedené modely vycházejí pouze z lokálního stavu tekutiny a nerespektují unášení malých výřadních proudem. Tento nedostatek odstraňuje jednorovnicový model založený na řešení dodatečné rovnice pro kinetickou energii výřadní malých měřítek $k^{sgs} = -\text{tr}(\vec{\tau}^{sgs})/2$

$$\frac{\partial k^{sgs}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} k^{sgs}) = -\vec{\tau}^{sgs} : \nabla \vec{u} - C_e \frac{(k^{sgs})^{3/2}}{\Delta} + \nabla \cdot \left(\frac{\nu^t}{\sigma_k} \nabla k^{sgs} \right). \quad (3.114)$$

Tenzor $\vec{\tau}^{sgs}$ je v tomto případě

$$\vec{\tau}^{sgs} = 2C_k \sqrt{k^{sgs}} \Delta \vec{S}. \quad (3.115)$$

U všech LES modelů je nezbytně nutné provádět simulace ve 3D a v nestacionárním režimu. Dále je třeba používat diskretizaci s nízkou úrovní numerické vaznosti (viz níže) a buňky sítě by měly být pokud možno izotropní (tj. podobné velikosti ve všech směrech). Poslední požadavek však mimo jiné znamená nutnost výrazného zjednodušení u stěny nejen ve směru kolmém, ale i ve směru proudu a v příčném směru. V důsledku je pak pro případ obtékání stěny potřeba velmi mnoho buněk a výpočet se často stává příliš náročný.

Aproximace prostorových derivací pro LES metody Při výpočtech pomocí LES metody je třeba zajistit aby vliv numerické vaznosti resp. chyby approximace byl menší než vliv LES modelu. K tomu je zapotřebí použít dostatečně přesnou approximaci prostorových derivací. Uvažujme zjednodušený model reprezentovaný rovnicí lineární konvekce v 1D, tedy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.116)$$

Při numerickém řešení počáteční úlohy pro tuto rovnici použijeme pro jednoduchost metodu konečných differencí a prostorovou derivaci $\partial u / \partial x$ budeme approximovat jedním z následujících způsobů

zpětná diference 1. řádu $(\partial u / \partial x)_j \approx \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x},$

centrální diference 2. řádu $(\partial u / \partial x)_j \approx \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}$,

centrální diference 4. řádu $(\partial u / \partial x)_j \approx \frac{-u_{j+2} + 8u_{j+1} - 8u_{j-1} + u_{j-2}}{12\Delta x}$.

Aplikujeme nyní výše uvedená approximace na výpočet derivací komplexní funkce $u(x) = \exp(ikx)$, kde $i = \sqrt{-1}$ a k je tzv. vlnové číslo ($k = 2\pi/\lambda$, kde λ je vlnová délka). Přesná hodnota derivace $u'(x)$ je $iku(x)$. Dosazením za $u_j = \exp(ijk\Delta x)$ dostáváme při označení $\sigma = k\Delta x$ pro zpětnou differenci 1. řádu

$$\begin{aligned} u'_j &\approx \frac{e^{ijk\sigma} - e^{i(j-1)\sigma}}{\Delta x} = \frac{1 - e^{-i\sigma}}{\Delta x} e^{ijk\sigma} = \\ &= \frac{1 - \cos(\sigma) + i \sin(\sigma)}{i\sigma} u'(j\sigma) = T_\sigma u'(j\sigma). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Komplexní zlomek (přenosová funkce T_σ) před $u'(j\sigma)$ určuje velikost chyby vzniklé při použití zpětné diference 1. řádu. Pro centrální derivaci 2. řádu je přenosová funkce reálná a je

$$T_\sigma = \frac{\sin(\sigma)}{\sigma}, \quad (3.118)$$

a pro centrální differenci 4. řádu je

$$T_\sigma = \frac{\sin(16\sigma) - 2\sin(2\sigma)}{12\sigma}. \quad (3.119)$$

Ze tvaru přenosových funkcí a z obrázku 3.8 je vidět, že schéma používající zpětnou differenci 1. řádu má v T_σ nenulovou imaginární složku. Ta se projeví jako disipace a numerické schéma založené na zpětné (resp. protiproudové) approximaci je pro LES nevhodné. Centrální schémata mají T reálné. Jejich přesnost však závisí na hodnotě $\sigma = k\Delta x = 2\pi\Delta x/\lambda$. Budeme-li požadovat $T_\sigma > 0.95$, je pro zachycení víru metodou 2. řádu zapotřebí cca 11 bodů, metodou 4. řádu cca 6 bodů, metodou 6. a 8. řádu cca 4 body.

Podobně lze provést analýzu pro parabolickou rovnici

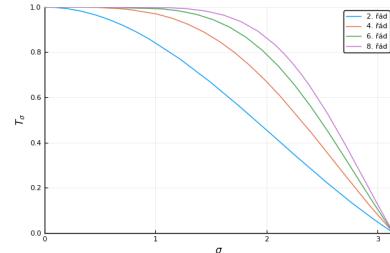
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.120)$$

Pro centrální derivaci druhého řádu máme

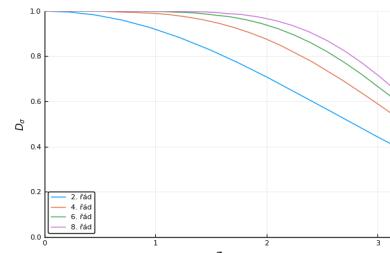
$$u''_j \approx \frac{e^{i(j-1)\sigma} - 2e^{ijk\sigma} + e^{i(j+1)\sigma}}{\Delta x^2} = 2 \frac{1 - \cos(\sigma)}{\sigma^2} u''(j\sigma). \quad (3.121)$$

Tedy $u''_j = D_\sigma u''(j\sigma)$, kde $D_\sigma = 2(1 - \cos(\sigma)) / \sigma^2$. Podobně lze odvodit přenosové funkce i pro přesnější diferenční vztahy.

Obrázek 3.9 ukazuje průběhy přenosových funkcí pro approximaci druhé derivace pomocí centrálních differencí 2. až 8. řádu. Podobně jako při approximaci první derivace je vidět, že zvýšení řádu přesnosti posouvá přenosovou funkci blíže k hodnotě 1. Pokud budeme opět požadovat dosažení hodnoty 0,95, pak lze určit, že pro zachycení víru potřebujeme alespoň 8 bodů pro metodu 2. řádu přesnosti, 4 body pro metodu 4. řádu a 3 body pro metody 6. a 8. řádu přesnosti.



Obrázek 3.8: Přenosová funkce pro approximaci první derivace centrální diferenci 2., 4., 6. a 8. řádu



Obrázek 3.9: Přenosová funkce pro approximaci druhé derivace pomocí centrálních differencí

3.2.12 Hybridní modely RANS-LES

Jedním z problémů LES metod je nutnost výrazného zjemnění v blízkosti stěny. Pro RANS modely je třeba u stěny také zjemňovat, avšak v tomto případě stačí zjemnění v normálovém směru. Proto byla navržena skupina modelů kombinující LES ve větší vzdálenosti od stěny s RANS modelem v blízkosti stěny, viz např. tzv. *detached eddy simulation* neboli DES model (Spalart, 2009). Tento model původně vycházel ze Spalartova a Allmarasova modelu turbulence. Koncept DES byl však poté rozšířen i na další typy modelů turbulence. Pro případ kombinace $k - \omega$ modelu v blízkosti stěny a jednorovnicového LES modelu by výsledný DES model mohl vypadat takto:

$$\frac{\partial k^{DES}}{\partial t} + \nabla \cdot (k^{DES} \vec{u}) = P_k - \beta^* k^{DES} \omega F^{DES} + \\ + \nabla \cdot ((\nu + \sigma^* \nu^{DES}) \nabla k^{DES}), \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \vec{u}) = \gamma \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \\ + \nabla \cdot ((\nu + \sigma \nu^{DES}) \nabla \omega) \quad (3.123)$$

kde k^{DES} je kinetická energie modelovaných fluktuací. Oproti $k - \omega$ modelu je v rovnici pro k^{sgs} disipace násobena funkcí F^{DES}

$$F^{DES} = \max \left(\frac{L^t}{C_{DES} \Delta}, 1 \right), \quad (3.124)$$

kde $L^t = \sqrt{k^{sgs}} / \omega$ je délkové měřítko a $C_{DES} = 0,61$ je parametr modelu. V případě dostatečně jemné sítě (malé Δ) je tak v F^{DES} aktivní první člen a rovnice pro k pak odpovídá jednorocnicovému modelu turbulence. V blízkosti stěn je však $F^{DES} = 1$ a DES model tedy přechází na standardní dvourovnicový model $k - \omega$.

U modelů typu DES se však objevují i některé nežádoucí vlastnosti jako například závislost řešení na síti. To se snaží odstranit pokročilejší varianty modelů, tzv. *delayed DES* neboli DDES či *improved DES* neboli IDDES. Mimo tyto typy modelů je možné jmenovat zonální LES, kdy uživatel explicitně specifikuje oblast pro LES a RANS model, či vylepšené RANS modely (např. Menterův SAS SST model).

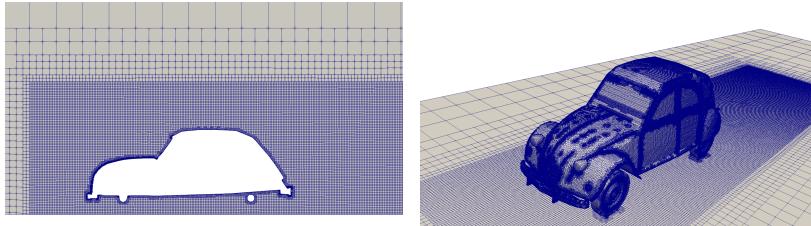
Turbulentní obtékání automobilu Jako příklad pužití DES modelu uvedeme problém obtékání automobilu. Pomocí softwaru OpenFOAM budeme řešit obtékání modelu Citroenu 2CV.

První verze byly vybaveny motorem o obsahu 375 cm^3 s výkonem 7 kW . My budeme uvažovat pozdější modely s motorem o 602 cm^3 dodávající 22 kW s maximální rychlosťí 115 km/h . Budeme uvažovat cestovní rychlosť $U = 90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$. Problém budeme řešit v oblasti tvaru kvádru o délce 22 m , šířce a délce 8 m . Úlohu řešíme



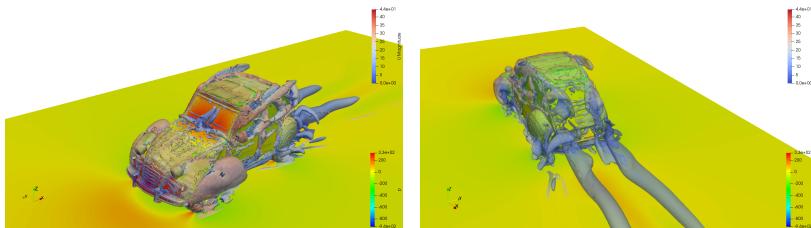
Obrázek 3.10: Model z 3dmag.org.

v souřadném systému spojeném s automobilem, tzn. že dolní stěna (vozovka) se pohybuje rychlostí U .



Obrázek 3.11: Řez a povrchová síť pro případ obtékání Citroenu 2CV. Síť je vytvořena pomocí snappyHexMesh a má cca 5×10^6 buněk.

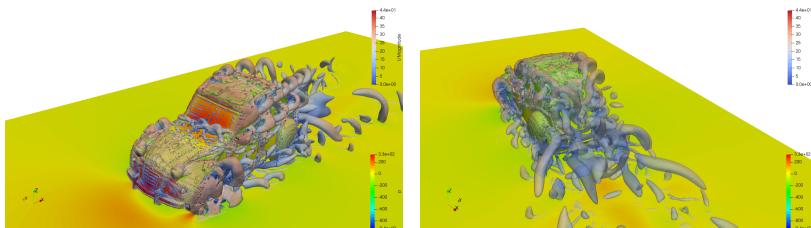
Nejprve byl proveden výpočet s použitím standardního SST modelu v RANS režimu pomocí SIMPLE algoritmu. Obrázek 3.12 ukazuje rozložení tlaku na povrchu automobilu a vozovky a izoplochy Q kritéria.



$$Q = 2(\Omega^2 - S^2)$$

Obrázek 3.12: Rozložení tlaku a izoplochy Q kritéria pro výpočet v RANS režimu.

Výsledek výpočtu v RANS režimu byl poté použit jako počáteční podmínka pro nestacionární výpočet PISO algoritmem s použitím SST DES modelu. Obrázek 3.13 opět znázorňuje rozložení tlaku a izoplochy Q kritéria. Je zde vidět značně složitější struktura proudového pole.



Obrázek 3.13: Rozložení tlaku a izoplochy Q kritéria pro výpočet v DES režimu (pro $t = 0,5$ s).

Z výpočtů byl vyhodnocen koeficient odporu c_D a vztlaku c_L dle vztahu

$$c_D = \frac{2F_x}{A\rho_\infty U_\infty^2}, \quad (3.125)$$

$$c_L = \frac{2F_z}{A\rho_\infty U_\infty^2}, \quad (3.126)$$

kde čelní plocha vozidla je $A = 2,19 \text{ m}^2$. Tabulka 3.3 udává vypočtené součinitele odporu a vztlaku pomocí RANS metody a pomocí DES

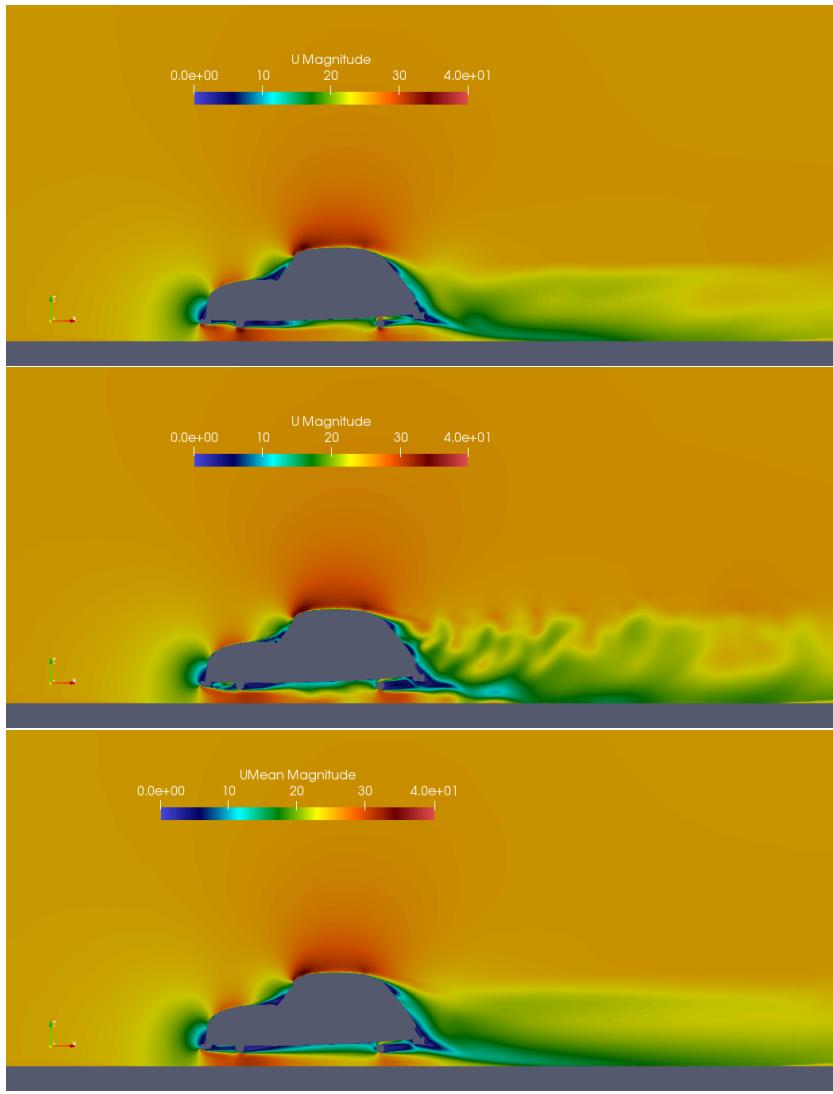
Pro 2CV se na internetu uvádí $c_D = 0,51$.

metody. Pro DES metodu jsou přitom uváděny časově průměrované hodnoty přes interval délky 0,1 s.

	c_D	c_L
RANS	0,46	0,23
DES	0,50	0,28

Tabulka 3.3: Vypočtené součinitele odporu a vztlaku pro Citroen 2CV

Obrázek 3.14 ukazuje rozložení velikosti rychlosti v rovině $y = 0$ pro RANS výpočet, DES výpočet a časově středovanou rychlosť z DES výpočtu. Je vidět, že časově středovaná rychlosť je do značné míry podobná výsledkům z RANS výpočtu.



Obrázek 3.14: Rozložení velikosti rychlosti v rovině $y = 0$, po řadě RANS výpočet, okamžité hodnoty rychlosti z DES výpočtu, časově středované rychlosti z DES výpočtu.

3.3 Optimalizace a sdružená metoda

Tato kapitola je věnovaná úvodu do optimalizace pomocí tzv. sdružené neboli *adjoint* metody. Optimalizací přitom rozumíme nalézt minimum funkcionálu $J(W, \beta)$, kde W je obsahuje proměnné popisu jící proudové pole a β jsou parametry pro optimalizaci (např. souřadnice bodů udávající tvar oblasti). W přitom musí splňovat vazbu $R(W, \beta) = 0$ (např. Navierovy-Stokesovy rovnice). Jedná se tedy o problém nalezení vázaného extrému

$$\min_{\beta} J(W, \beta) \text{ při } R(W, \beta) = 0. \quad (3.127)$$

Pro proudění nestlačitelné tekutiny je $W = [\vec{u}, p]$.

Jedním z možných postupů při optimalizaci je využití metody hrubé síly, kdy provedeme řadu výpočtů pro různé hodnoty parametrů β a minimum pak hledáme z vyčíslených hodnot J . Tento postup se často kombinuje s pokročilými technikami pro určení množiny parametrů β pro výpočet jako jsou například genetické algoritmy či metody odezvových ploch. Tyto postupy jsou velmi jednoduché a snadno se dají realizovat pomocí dostupných CFD řešičů. Jejich nevýhodou je však veliká výpočetní náročnost stoupající s počtem parametrů (tj. s rozdílem vektoru β).

Problém vázaného extrému budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů, tj. místo minima J budeme minimalizovat rozšířený funkcionál

$$L(W, \beta, \Psi) = J(W, \beta) + \Psi \cdot R(W, \beta), \quad (3.128)$$

kde Ψ jsou sdružené proměnné k W . Označme symbolem δ variaci, potom

$$\begin{aligned} \delta L &= \frac{\partial J}{\partial W} \delta W + \frac{\partial J}{\partial \beta} \delta \beta + \delta \Psi \cdot R + \Psi \cdot \frac{\partial R}{\partial W} \delta W + \frac{\partial(\Psi \cdot R)}{\partial \beta} \delta \beta = \\ &= \left(\frac{\partial J}{\partial W} + \Psi \cdot \frac{\partial R}{\partial W} \right) \delta W + \left(\frac{\partial J}{\partial \beta} + \frac{\partial(\Psi \cdot R)}{\partial \beta} \right) \delta \beta + \delta \Psi \cdot R. \end{aligned} \quad (3.129)$$

Podmínka minima L je, že $\delta L = 0$ pro libovolné δW , $\delta \beta$ a $\delta \Psi$. Budeme tedy požadovat pro libovolné δW

$$\frac{\partial L}{\partial W} \delta W = \left(\frac{\partial J}{\partial W} + \Psi \cdot \frac{\partial R}{\partial W} \right) \delta W = 0, \quad (3.130)$$

neboli

$$\left(\frac{\partial R}{\partial W} \right)^T \cdot \Psi^T = - \left(\frac{\partial J}{\partial W} \right)^T. \quad (3.131)$$

Minimum L potom budeme hledat tak, aby (při splnění $R = 0$) bylo

$$\delta L = \left(\frac{\partial J}{\partial \beta} + \frac{\partial(\Psi \cdot R)}{\partial \beta} \right) \delta \beta = 0. \quad (3.132)$$

Skalární součin $\Psi \cdot R$ je často reprezentován integrálem s integrační oblastí závislou na β .

Z této rovnice je vidět že řešíme systém rovnic se sdruženým (transponovaným) operátorem. Odtud bývá název metody.

Hodnotu β Minimalizující L budeme hledat iterační metodou

$$\beta^n = \beta^o - d_n \frac{\delta L}{\delta \beta}, \quad (3.133)$$

kde $d_n > 0$ je parametr udávající velikost kroku. Gradient $\delta L / \delta \beta$ sice lze určit i pomocí konečných differencí, náročnost výpočtu pak ale roste s rozměrem vektoru β . U sdružené metody je na druhou stranu potřeba řešit dodatečný systém rovnic avšak výpočetní složitost je prakticky nezávislá na velikosti vektoru β .

Při odvození sdružené metody lze postupovat několika způsoby. První z nich je odvození dodatečných rovnic ze spojité formulace (tj. ze systému PDR) a jejich následná diskretizace (jedná se o tzv. **spojitou sdruženou metodu** neboli *continuous adjoint method*) a nebo provedeme nejprve diskretizaci a sdruženou metodu odvodíme pro systém algebraických rovnic (**diskrétní sdružená metoda** neboli *discrete adjoint method*). V tomto textu se budeme věnovat prvnímu přístupu, tj. spojité sdružené metodě.

Uvažujme systém Navierových-Stokesových rovnic pro ustálené proudění nestlačitelné tekutiny s konstantní hustotou. Vazba R má v tomto případě tvar

$$R^p = -\nabla \cdot \vec{u}, \quad (3.134)$$

$$\vec{R}^u = \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p - \nabla \cdot (2\nu \vec{D}(\vec{u})), \quad (3.135)$$

kde $\vec{D}(\vec{u}) = (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T)/2$. Po složkách při použití Einsteinova sumačního pravidla je to tedy

$$R^p = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \quad (3.136)$$

$$R_i^u = \frac{\partial(u_j u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right). \quad (3.137)$$

Primární proměnné jsou $W = [\vec{u}, p]$. K nim uvažujeme sdružené proměnné $\Psi = [\vec{v}, q]$.

Předpokládejme J ve tvaru

$$J(\vec{u}, p, \beta) = \iiint_{\Omega(\beta)} J_\Omega(\vec{u}, p, \beta) d\vec{x} + \iint_{\Gamma(\beta)} J_\Gamma(\vec{u}, p, \beta) dS. \quad (3.138)$$

Rozšířený funkcionál je potom

$$L = \iiint_{\Omega(\beta)} \left(J_\Omega + q R^p + \vec{v} \cdot \vec{R}^u \right) d\vec{x} + \iint_{\Gamma(\beta)} J_\Gamma dS. \quad (3.139)$$

3.3.1 Sdružené rovnice

Prvním krokem je odvození sdružených rovnic 3.131 neboli $\delta L / \delta W$.

Variace $\delta \beta = 0$ a integrační oblast považujeme v tuto chvíli za konstantní.

Z definice J máme

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial u_i} d\vec{x} + \oint_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial u_i} dS, \quad (3.140)$$

$$\frac{\partial J}{\partial p} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p} d\vec{x} + \oint_{\Gamma} \frac{\partial J_{\Gamma}}{\partial p} dS. \quad (3.141)$$

Součin $\Psi \cdot \frac{\partial R}{\partial W} \delta W$ je

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \frac{\partial R}{\partial W} \delta W = & \iiint_{\Omega} (\vec{v} \cdot (\nabla \cdot (\delta \vec{u} \otimes \vec{u})) + \nabla \cdot (\vec{u} \otimes \delta \vec{u}) + \nabla(\delta p) - \\ & - \nabla \cdot (2\nu \vec{D}(\delta \vec{u}))) - q \nabla \cdot (\delta \vec{u}) d\vec{x} \quad (3.142) \end{aligned}$$

Derivace převedeme pomocí Gaussovy věty na \vec{v} a p . Integraci provedeme postupně pro jednotlivé členy. Při integraci použijeme zápis ve složkách.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \vec{v} \cdot (\nabla \cdot (\delta \vec{u} \otimes \vec{u})) d\vec{x} &= \iiint_{\Omega} v_j \frac{\partial(\delta u_i u_j)}{\partial x_i} d\vec{x} = \\ &= \oint_{\Gamma} v_j \delta u_i u_j n_i dS - \iiint_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \delta u_i u_j d\vec{x} = \\ &= \oint_{\Gamma} (\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{n} \cdot \delta \vec{u} dS - \iiint_{\Omega} (\nabla \vec{v} \cdot \vec{u}) \cdot \delta \vec{u} d\vec{x}. \quad (3.143) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \vec{v} \cdot (\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \delta \vec{u})) d\vec{x} &= \iiint_{\Omega} v_j \frac{\partial(u_i \delta u_j)}{\partial x_i} d\vec{x} = \\ &= \oint_{\Gamma} v_j u_i \delta u_j n_i dS - \iiint_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_i \delta u_j d\vec{x} = \\ &= \oint_{\Gamma} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{v} \cdot \delta \vec{u} dS - \iiint_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} \cdot \delta \vec{u} d\vec{x}. \quad (3.144) \end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} \vec{v} \cdot \nabla(\delta p) d\vec{x} = \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot \vec{n} \delta p dS - \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} \delta p d\vec{x}. \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\Omega} \vec{v} \cdot (\nabla \cdot (2\nu \vec{D}(\delta \vec{u})) d\vec{x} = \\
& = \iiint_{\Omega} v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) \right) d\vec{x} = \\
& = \oint_{\Gamma} v_i n_j \nu \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) dS - \\
& - \iiint_{\Omega} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \nu \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\delta u_j)}{\partial x_i} \right) d\vec{x} = \\
& = \oint_{\Gamma} 2\nu \vec{v} \cdot \vec{D}(\delta \vec{u}) \cdot \vec{n} dS - \oint_{\Gamma} \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} (n_j \delta u_i + n_i \delta u_j) dS + \\
& + \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \delta u_j \right) d\vec{x} = \\
& = \oint_{\Gamma} 2\nu \vec{v} \cdot \vec{D}(\delta \vec{u}) \cdot \vec{n} dS - \oint_{\Gamma} 2\nu \vec{n} \cdot \vec{D}(\vec{v}) \cdot \delta \vec{u} dS + \\
& + \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (2\nu \vec{D}(\vec{v})) \cdot \delta \vec{v} d\vec{x} \quad (3.146)
\end{aligned}$$

$$\iiint_{\Omega} q \nabla \cdot (\delta \vec{u}) d\vec{x} = \oint_{\Gamma} q \vec{n} \delta \vec{u} dS - \iiint_{\Omega} \nabla q \cdot \delta \vec{u} d\vec{x}. \quad (3.147)$$

Sečteme výše odvozené výrazy a dáme dohromady členy s $\delta \vec{u}$ a s δp a dostáváme

$$\begin{aligned}
\Psi \cdot \frac{\partial R}{\partial W} \delta W = & \\
= & \iiint_{\Omega} \left(-\nabla \vec{v} \cdot \vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla q - \nabla \cdot (2\nu \vec{D}(\vec{v})) \right) \cdot \delta \vec{u} d\vec{x} + \\
& + \iiint_{\Omega} (-\nabla \cdot \vec{v}) \delta p d\vec{x} + \\
+ & \oint_{\Gamma} \left((\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{n} + (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{v} + 2\nu \vec{n} \cdot \vec{D}(\vec{v}) - q \vec{n} \right) \cdot \delta \vec{u} dS + \\
& + \oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot n \delta p dS + \\
& + \oint_{\Gamma} 2\nu \vec{v} \cdot \vec{D}(\delta \vec{u}) \cdot \vec{n} dS. \quad (3.148)
\end{aligned}$$

Podmínka

$$\frac{\partial J}{\partial W} \delta W + \Psi \cdot \frac{\partial R}{\partial W} \delta W = 0 \quad (3.149)$$

má být splněna pro libovolné δW . Z toho dostáváme **sdružené rovnice** (argumenty objemových integrálů)

$$\nabla \vec{v} \cdot \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} - \nabla q + \nabla \cdot (2\nu \vec{D}(\vec{v})) = \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial \vec{u}}, \quad (3.150)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial J_{\Omega}}{\partial p}. \quad (3.151)$$

Někteří autoři vycházejí z Navierových-Stokesových rovnice s nekonzervativním tvarem konvektivního členu $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$ a při odvození sdružených rovnic zanedbávají člen $\vec{v} \cdot (\delta \vec{u} \nabla \vec{u})$ (člen prvního řádu). V rovnici 3.150 pak schází první člen působící problémy se stabilitou numerického řešení. Dále bude v prvním z povrchových integrálů scházet $(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{n}$.

Okrajové podmínky pro \vec{v} a p pak získáme tak, aby vymizely povrchové integrály ve vztahu 3.146. Probereme si teď dva specifické případy okrajových podmínek.

Dirichletova podmínka pro \vec{u} a Neumannova podmínka pro p Tato kombinace se obvykle vyskytuje například na pevné stěně nebo na vstupní části hranice. Na této části hranice je tedy

$$\vec{u} = \vec{u}_b, \quad (3.152)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (3.153)$$

Z hraničního integrálu obsahujícího δp máme okrajovou podmínku pro \vec{v} ve tvaru

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial p}. \quad (3.154)$$

Variace $\delta \vec{u}$ je na této hranici rovna 0 (Dirichletova podmínka), avšak $\vec{D}(\delta \vec{u}) \neq 0$. Pro variaci $\delta \vec{u}$ však platí $\nabla \cdot (\delta \vec{u}) = 0$ a tedy $\text{tr}(\vec{D}(\delta \vec{u})) = 0$. Derivace $\delta \vec{u}$ v tečném směru je rovna nula. Součin $\vec{n} \cdot \vec{D}$ je potom vektor kolmý k \vec{n} a tedy máme okrajovou podmínku pro tečnou složku \vec{v} :

$$v_t = 0. \quad (3.155)$$

Pro sdružený tlak použijeme Neumannovu podmínku

$$\partial q / \partial n = 0. \quad (3.156)$$

Neumannova podmínka pro \vec{u} a Dirichletova podmínka pro p Tato kombinace se nejčastěji vyskytuje na výstupu z oblasti. Tvar okrajových podmínek pro sdružené veličiny vyplývají opět z tvaru hraničních integrálů s variacemi primárních veličin. Tentokrát je $\delta p = 0$ a $\delta \vec{u} \neq 0$.

Určitou komplikací je hraniční integrál s $\vec{D}(\delta \vec{u})$. V některých případech jej dokážeme vhodně zahrnout do formulace úlohy. V ostatních případech jej budeme zahrnout do citlivosti a nebo zanedbáme. V tomto se tímto členem dále nebudeme zabývat.

Hraniční integrál obsahující δp automaticky vymizí. Z integrálu s variací $\delta \vec{u}$ máme

$$(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{n} + (\vec{u} \cdot \vec{n}) \vec{v} + 2v \vec{n} \cdot \vec{D}(\vec{v}) - q \vec{n} = -\frac{\partial J_\Gamma}{\partial \vec{u}} \quad (3.157)$$

a tedy (po vynásobení \vec{n})

$$q = \vec{v} \cdot \vec{u} + u_n v_n + 2v\vec{n} \cdot \vec{D}(\vec{v}) \cdot \vec{n} + \frac{\partial J_\Gamma}{\partial \vec{u}} \cdot \vec{n}, \quad (3.158)$$

kde u_n a v_n jsou normálové složky rychlostí. Vynásobením libovolným tečným vektorem \vec{t} máme (po složkách)

$$t_i \frac{\partial J_\Gamma}{\partial u_i} + v_i u_j t_i n_j + \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j t_i = 0, \quad (3.159)$$

a tedy

$$\vec{t} \cdot \frac{\partial J_\Gamma}{\partial \vec{u}} + v_t u_n + \nu \frac{\partial v_t}{\partial n} = 0, \quad (3.160)$$

Zbývající podmínka pro v_n musí být zvolena tak, aby byla splněna „rovnice kontinuity“, tedy

$$\iint_{\Gamma} v_n dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial J_\Omega}{\partial p} d\vec{x}. \quad (3.161)$$

Variace L, citlivost Po vypočtení sdružené rychlosti \vec{v} a tlaku p lze pak vyčíslit variaci δL jako

$$\delta L = \left(\frac{\partial J}{\partial \beta} + \Psi \cdot \frac{\partial R}{\partial \beta} \right) \delta \beta. \quad (3.162)$$

člen v závorce (tj. $\delta L / \delta \beta$) vyjadřuje potom citlivost na změnu β .

Výpočet je variace δL je však třeba udělat pozorně. Změnou β se může měnit nejen hodnota J , ale i integrační oblast Ω . Při výpočtu $\partial R / \partial \beta$ lze přitom v případě oblasti závislé na β vyžít dříve uvedený vztah mezi δW a $\delta \beta$, tedy

$$\frac{\partial R}{\partial \beta} \delta \beta = - \frac{\partial R}{\partial W} \delta W. \quad (3.163)$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Psi \cdot R)}{\partial \beta} \delta \beta &= - \frac{\partial (\Psi \cdot R)}{\partial W} \delta W = \\ &= - \iiint_{\Omega} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{R}^u}{\partial u_j} \delta u_j + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{R}^u}{\partial p} \delta p - q \frac{\partial \vec{R}^p}{\partial u_j} \delta u_j \right) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (3.164)$$

Konkrétní tvar variace L resp. citlivosti ukážeme na dvou specifických případech.

3.3.2 Minimalizace odporu

Jako první příklad si uvedeme čás optimalizačního procesu při minimalizaci odporu vzduchu obtékaného tělesa. Budeme uvažovat obtékané těleso s hranicí $\Sigma \subset \Gamma$ a parametr β definovaný na Σ ma

význam posunu hranice Σ ve směru normály. Funkcí J bude síla působící ve směru vektoru \vec{k} , tedy

$$J = \vec{k} \cdot \iint_{\Sigma} \left(p \vec{I} - 2\nu \vec{D}(\vec{u}) \right) \vec{n} dS. \quad (3.165)$$

Normála \vec{n} je vnější vzhledem k oblasti vyplněné tekutinou!

Máme tedy $J_{\Omega} = 0$ a na Σ je $J_{\Gamma} = p \vec{k} \cdot \vec{n} - \vec{k} \cdot \vec{D}(\vec{u}) \cdot \vec{n}$. Naším úkolem je nalézt gradient $\delta L / \delta \beta$. V (Sorgiovanni, 2017) je uveden přehled alternativních formulací lišící se způsobem výpočtu síly a v důsledku okrajovými podmínkami pro sdruženou úlohu a výpočtem citlivosti.

Úlohu budeme řešit v oblasti Ω s hranicí $\Gamma = \Sigma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, kde na části hranice $\Sigma \cup \Gamma_1$ předpokládáme Dirichletovu podmítku pro \vec{u} a Neumannovu podmítku pro p a na Γ_2 naopak.

Máme tedy primární úlohu

$$-\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.166)$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \left(2\nu \vec{D}(\vec{u}) \right), \quad (3.167)$$

s okrajovými podmínkami

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \text{ a } \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Sigma \cup \Gamma_1, \quad (3.168)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0 \text{ a } p = p_0 \quad \text{na } \Gamma_2, \quad (3.169)$$

navíc $\vec{u}_0 = 0$ na Σ .

Sdružená úloha je

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.170)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{u} \cdot (\nabla \vec{v}) - \nabla q + \nabla \cdot \left(2\nu \vec{D}(\vec{v}) \right) = 0, \quad (3.171)$$

s okrajovými podmínkami

$$\vec{v} = -\vec{k} \text{ a } \frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Sigma, \quad (3.172)$$

$$\vec{v} = 0 \text{ a } \frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \quad (3.173)$$

$$q = u_n v_n + \vec{u} \cdot \vec{v} + \nu \frac{\partial v_n}{\partial n} \text{ a } v_t u_n + \nu \frac{\partial v_t}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_2. \quad (3.174)$$

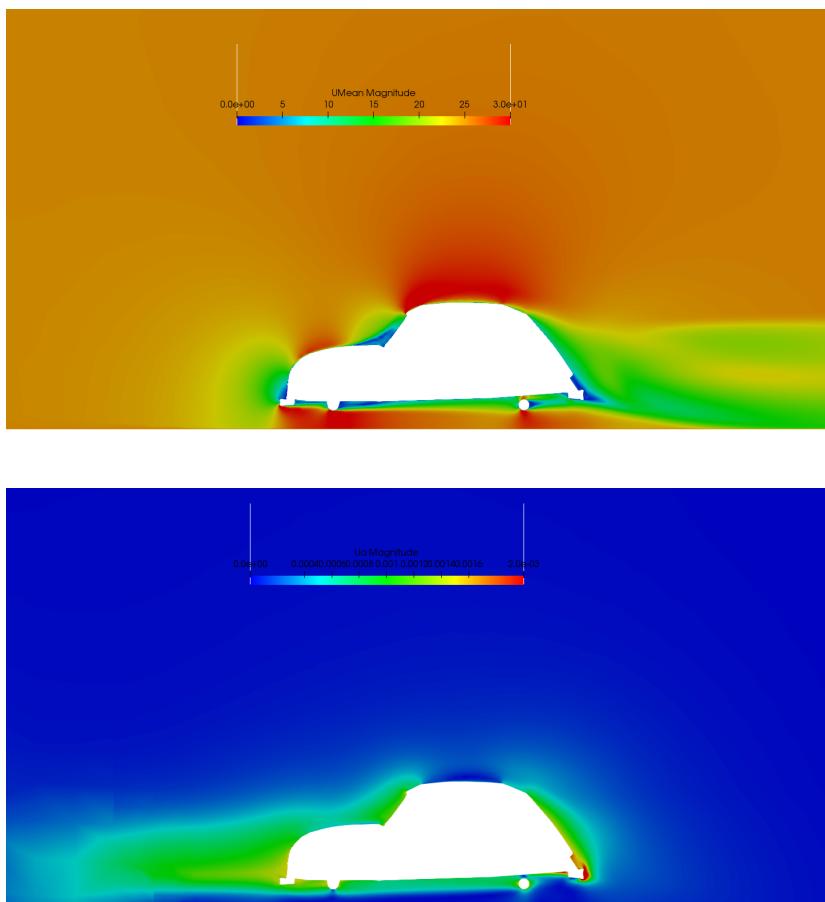
Díky takto zvolené okrajové podmínce na Σ platí $\delta \vec{v} = 0$ a hraniční integrál s $\vec{D}(\delta \vec{u})$ se odečte s tečným příspěvkem $\partial J_{\Gamma} / \partial \vec{u}$.

Posledním krokem je odvození citlivosti. V (Sorgiovanni, 2017) je pro takto formulovanou úlohu odvozen vztah

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} \delta \beta &= \iint_{\Sigma} \left((\nabla p \cdot \vec{k}) - 2\nu \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2} (\vec{n} \cdot \vec{k}) \right) \delta \beta dS - \\ &\quad - \iint_{\Sigma} \left(\nu \frac{\partial \vec{u}_t}{\partial n} \cdot \frac{\partial \vec{v}_t}{\partial n} + \nu \vec{n} \cdot (\nabla \vec{v})^T \cdot \frac{\partial \vec{u}_t}{\partial n} \right) \delta \beta dS. \end{aligned} \quad (3.175)$$

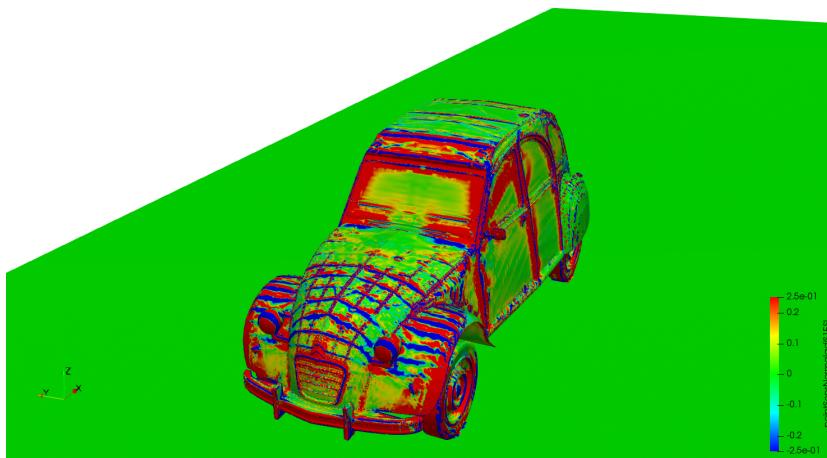
Výpočet δL je v tomto případě poměrně složitý a vyžaduje vyčíslení druhých derivací. Alternativní formulace vycházející například z vyčíslení odporu pomocí bilancí hybnosti mezi vstupem a vystupem mohou vést k jednodušším vztahům.

Jako příklad zde uvádíme výpočet citlivosti odporu automobilu na tvaru karosérie. Opět byl zvolen model Citroen 2CV pohybující se rychlosť 90 km/h. Obrázek 3.15 ukazuje rozložení velikosti rychlosti a velikosti sdružené rychlosti v rovině symetrie. Je vidět že v důsledku obráceného znaménka u konvektivního člena je pole sdružené rychlosti výrazně odlišné od primární rychlosti.



Obrázek 3.15: Velikost rychlosti (nahore) a sdružené rychlosťi (dole) v rovině symetrie při výpočtu citlivosti odporu na tvaru automobilu.

Obrázek 3.16 ukazuje rozložení $\delta L / \delta \beta$ na povrchu modelu. Je vidět, že snížení odporu vzduchu by bylo možné dosáhnout zakřivením čelního skla, přetvarováním předních blatníků a bočních skel. Na obrázku je zároveň vidět série příčných pruhů na kapotě a blatníkách. Ty jsou způsobeny nedokonalostí CAD modelu ve formátu



Obrázek 3.16: Citlivost odporu na tvaru karosérie, červená barva znamená "zatlačení" dovnitř, modrá barva "vytažení" ven.

STL, tedy jako množina trojúhelníků.

Z obrázku je také vidět, že při praktických aplikacích je nutné pole citlivostí dále zpracovat například vyhlazením. Tím se ale

3.3.3 Topologická optimalizace

Dalším typem úloh je tzv. topologická optimalizace která se využívá pro hrubý návrh geometrie. Obrázek 3.17 ukazuje jednu z možných aplikací.

Úkolem je nalézt tvar rozvětveného kanálu s jedním vstupem a dvěma výstupy tak, aby při průtoku docházelo k minimálním ztrátám, viz (Othmer a kol. 2007). Kanál přitom být podoblastí Ω . Ztrátu lze vyčíslit jako

$$J = \iint_{\Sigma} \left(p + \frac{1}{2} \|\vec{u}\|^2 \right) \vec{u} \cdot \vec{n} dS, \quad (3.176)$$

kde $\Sigma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out1} \cup \Gamma_{out2}$.

Tuto úlohu lze řešit tak, že v oblasti Ω uvažujeme systém Navierových-Stokesových rovnic s porézní překážkou

$$-\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.177)$$

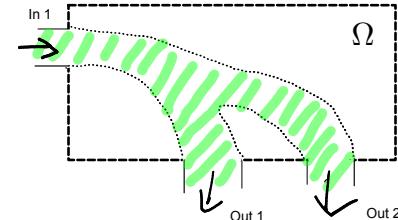
$$\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = \nabla \cdot \left(2\nu \vec{D}(\vec{u}) \right) - \beta \vec{u}, \quad (3.178)$$

s okrajovými podmínkami

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \text{ a } \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{in}, \quad (3.179)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0 \text{ a } p = p_0 \quad \text{na } \Gamma_{out1} \cup \Gamma_{out2}, \quad (3.180)$$

$$\vec{u} = 0 \text{ a } \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_b = \Gamma \setminus \Gamma_{in}. \quad (3.181)$$



Obrázek 3.17: Topologická optimalizace.

Parametr $\beta \geq 0$ určuje porozitu materiálu.

Sdružená úloha je v tomto případě

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3.182)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{v} + \vec{u} \cdot (\nabla \vec{v}) - \nabla q + \nabla \cdot (2\nu \vec{\bar{D}}(\vec{v})) = \beta \vec{v}, \quad (3.183)$$

s okrajovými podmínkami

$$v_n = u_n, \vec{v}_t = 0, \text{ a } \frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_{in}, \quad (3.184)$$

$$\vec{v} = 0 \text{ a } \frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_1, \quad (3.185)$$

$$q = u_n v_n + \vec{u} \cdot \vec{v} + \nu \frac{\partial v_n}{\partial n} - \frac{1}{2} u^2 - u_n^2 \text{ a } \\ u_n (\vec{v}_t - \vec{u}_t) + \nu (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{v}_t = 0 \quad \text{na } \Gamma_{out1/2}, \quad (3.186)$$

$$\vec{v} = 0, \text{ a } \frac{\partial q}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \Gamma_b, \quad (3.187)$$

$$(3.188)$$

Parametr β ve formulaci J přímo nevystupuje, takže $\partial J / \partial \beta = 0$.

Potom

$$\delta L = \iiint_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} \delta \beta d\vec{x} \quad (3.189)$$

a v případě metody konečných objemů je citlivost v buňce C

$$\frac{\delta L}{\delta \beta_C} = \vec{u}_C \cdot \vec{v}_C |\Omega_C|. \quad (3.190)$$

Obrázek 3.18 ukazuje optimalizovaný tvar 2D kanálu se zadáným vstupem a dvěma výstupy. Na vstupu je předepsána rychlosť vstupního proudu a na výstupech hodnota statického tlaku. Modrou barvou je zobrazen tvar optimalizovaného kanálu. V obrázku jsou také znázorněny vektory rychlosti. Je vidět, že na výstupech proud nesměřuje kolmo k hranici a naní ani zaručen stejný průtok oběma větvemi kanálu. V (Othmer a kol. 2007) je provedena podobná optimalizace s funkcionálem J zahrnujícím jak ztráty, tak penalizující nerovnoměrnost výstupů a výtok v tečném směru.

3.3.4 Optimalizace sítě pro výpočet hodnoty funkcionálu

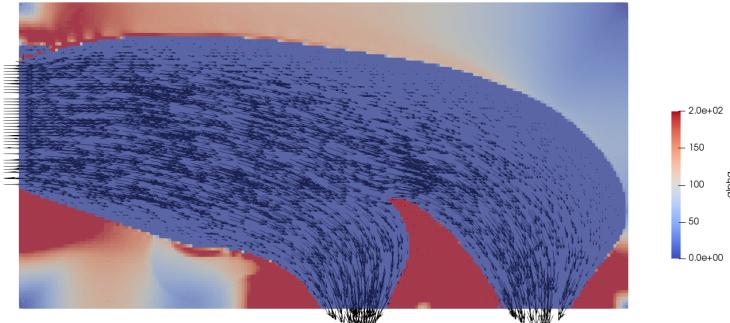
Další z možných aplikací sdružených rovnic je optimalizace výpočetní sítě pro co nejpřesnější vyčíslení lineárního funkcionálu. Na tomto místě ukážeme pouze hlavní myšlenku optimalizace resp. konstrukce kriteria pro zjemnění sítě.

Uvažujme úlohu zapsanou například pomocí systému PDR jako

$$R(W) = 0, \quad (3.191)$$

OpenFOAM neuvažuje v rovnici kontinuity znaménko - a proto je na vstupu $v_n = -u_n$.

Obrázek 3.18: Optimalizovaný tvar kanálu



kde W je (přesné) řešení úlohy. Naším úkolem je vyčíslit funkcionál

$$\Phi(W) = \phi \cdot W. \quad (3.192)$$

Numerické řešení úlohy na označme $W_h = W + \delta W$, symbolem δW tentokrát rozumíme pouze rozdíl přesného a numerického řešení (globální chybu). Dosazením W_h do původní rovnice dostaneme

$$R(W_h) = \delta r. \quad (3.193)$$

δr přitom reprezentuje lokální chybu approximace.

Pro malé δr a δW pak platí

$$\frac{\partial R}{\partial W} \delta W = \delta r. \quad (3.194)$$

Chyba ve vyčíslení funkcionálu Φ pak bude

$$\delta \Phi = \phi \cdot W_h - \phi \cdot W = \phi \cdot \delta W. \quad (3.195)$$

Velikost δr dokážeme z odhadnout z rozboru metody, předpokládejme např. $\delta r \sim h^p$. Chyba δW se určuje mnohem obtížněji. Proto chybu $\delta \Phi$ vyjádříme jako

$$\delta \Phi = \phi \cdot \left(\frac{\partial R}{\partial W} \right)^{-1} \delta r = \left(\frac{\partial R}{\partial W} \right)^{-T} \phi \cdot \delta r = \psi \cdot \delta r, \quad (3.196)$$

kde $\psi = \left(\frac{\partial R}{\partial W} \right)^{-T} \phi$ neboli

$$\left(\frac{\partial R}{\partial W} \right)^T \psi = \phi. \quad (3.197)$$

Proměnné ψ pak vyjadřují citlivost Φ na velikost lokální chyby approximace.

Bibliografie

- BARTH, Timothy; JESPERSEN, Dennis, 1989. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. In: *The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. 27th Aerospace Sciences Meeting*. Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics a Astronautics. Dostupné z DOI: [10.2514/6.1989-366](https://doi.org/10.2514/6.1989-366).
- FERNÁNDEZ, Miguel A., 2011. Coupling schemes for incompressible fluid-structure interaction: implicit, semi-implicit and explicit. *SeMA Journal*. Roč. 55, č. 1, s. 59–108. ISSN 1575-9822. Dostupné z DOI: [10.1007/BF03322593](https://doi.org/10.1007/BF03322593).
- FÜRST, Jiří, 2018. Development of a coupled matrix-free LU-SGS solver for turbulent compressible flows. *Computers & Fluids*. Roč. 172, s. 332–339. ISSN 00457930. Dostupné z DOI: [10.1016/j.compfluid.2018.04.020](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.04.020).
- HELLSTEN, Antti K., 2005. New Advanced $k - \omega$ Turbulence Model for High-Lift Aerodynamics. *AIAA Journal*. Roč. 43, č. 9, s. 1857–1869. ISBN 9788578110796. ISSN 0001-1452. Dostupné z DOI: [10.2514/1.13754](https://doi.org/10.2514/1.13754).
- JASAK, H.; WELLER, H. G.; GOSMAN, A. D., 1999. High resolution NVD differencing scheme for arbitrarily unstructured meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. ISSN 02712091. Dostupné z DOI: [10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19990930\)31:2<431::AID-FLD884>3.0.CO;2-T](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19990930)31:2<431::AID-FLD884>3.0.CO;2-T).
- JASAK, Hrvoje, 1996. *Error analysis and estimation for finite volume method with applications to fluid flow*. Disertační práce. Imperial College London.
- LADSON, Charles L., 1988. *Effects of independent variation of Mach and Reynolds numbers on the low-speed aerodynamic characteristics of the NACA 0012 airfoil section*. ISSN 04999320. Technická zpráva.
- LAUNDER, B.E.; SPALDING, D.B., 1974. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Roč. 3, č. 2, s. 269–289. ISSN 00457825. Dostupné z DOI: [10.1016/0045-7825\(74\)90029-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90029-2).

- MENTER, F. R.; KUNTZ, M.; LANGTRY, R., 2003. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model. *Turbulence Heat and Mass Transfer* 4. Roč. 4, s. 625–632. ISBN 9783037854983. ISSN 1662-8985.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M., 2016. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. Cham: Springer International Publishing. Fluid Mechanics and Its Applications. ISBN 978-3-319-16873-9. Dostupné z DOI: 10.1007/978-3-319-16874-6.
- OTHMER, Carsten; DE VILLIERS, Eugene; WELLER, Henry G., 2007. Implementation of a continuous adjoint for topology optimization of ducted flows. In: *Implementation of a continuous adjoint for topology optimization of ducted flows. Collection of Technical Papers - 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. ISBN 1563478994. Dostupné z DOI: 10.2514/6.2007-3947.
- PŘÍHODA, Jaromír; LOUDA, Petr, 2007. *Matematické modelování turbulentního proudění*. Praha: ČVUT v Praze. ISBN 978-80-01-03623-5.
- PULLIAM, T.; STEGER, J., 1978. On implicit finite-difference simulations of three-dimensional flow. In: *On implicit finite-difference simulations of three-dimensional flow. 16th Aerospace Sciences Meeting*. Reston, Virgina: AIAA. Dostupné z DOI: 10.2514/6.1978-10.
- SORGIOVANNI, Giuseppe, 2017. *A robust open-source adjoint optimization method for external aerodynamics*. Dostupné také z: <https://home.aero.polimi.it/quadrio/it/Tesi/sorgiovanni/tesi-sorgiovanni.pdf>. Disertační práce. Politecnico di Milano.
- SPALART, Philippe R., 2009. Detached-Eddy Simulation. *Annual Review of Fluid Mechanics*. ISSN 0066-4189. Dostupné z DOI: 10.1146/annurev.fluid.010908.165130.
- WILCOX, David C., 2006. *Turbulence Modeling for CFD*. 3rd editio. D C W Industries. ISBN 978-1928729082.