



"Conception d'un pilote automatique pour voilier capable de suivre des trajectoires optimales"

Timmers, Colin

ABSTRACT

L'intérêt de voiliers autonomes n'est plus à démontrer tant ceux-ci pourraient rendre le secteur du transport plus écologique. Le monde maritime s'automatise de plus en plus, ces dernières années la plupart des voiliers modernes se sont équipés de pilotes automatiques. Cependant, ces pilotes automatiques ne rendent pas le bateau complètement autonome. En effet, ils ont besoin qu'un utilisateur leur indique le cap à suivre. Pour pallier à cela, ce travail étudie la conception d'un pilote automatique capable de générer la trajectoire optimale à suivre. Pour y arriver, un nouveau système dynamique permettant de simuler l'évolution temporelle du cap d'un voilier a été élaboré. Une loi de commande, mêlant commande proportionnelle et LQR a été implémentée. Celle-ci permet non seulement au voilier de garder un cap constant malgré de nombreuses perturbations mais également de manoeuvrer. Finalement, à l'aide d'un processus markovien de décision, les trajectoires optimales à suivre sont déterminées.

CITE THIS VERSION

Timmers, Colin. *Conception d'un pilote automatique pour voilier capable de suivre des trajectoires optimales*. Ecole polytechnique de Louvain, Université catholique de Louvain, 2021. Prom. : Dochain, Denis D. ; Delvenne, Jean-Charles. <http://hdl.handle.net/2078.1/thesis:30596>

Le répertoire DIAL.mem est destiné à l'archivage et à la diffusion des mémoires rédigés par les étudiants de l'UCLouvain. Toute utilisation de ce document à des fins lucratives ou commerciales est strictement interdite. L'utilisateur s'engage à respecter les droits d'auteur liés à ce document, notamment le droit à l'intégrité de l'oeuvre et le droit à la paternité. La politique complète de droit d'auteur est disponible sur la page [Copyright policy](#)

DIAL.mem is the institutional repository for the Master theses of the UCLouvain. Usage of this document for profit or commercial purposes is strictly prohibited. User agrees to respect copyright, in particular text integrity and credit to the author. Full content of copyright policy is available at [Copyright policy](#)

École polytechnique de Louvain

Conception d'un pilote automatique pour voilier, capable de suivre des trajectoires optimales

Auteur: **Colin TIMMERS**

Promoteurs: **Jean-Charles DELVENNE, Denis DOCHAIN**

Lecteur: **Vincent WERTZ**

Année académique 2020–2021

Master [120] : ingénieur civil en mathématiques appliquées

Abstract

L'intérêt de voiliers autonomes n'est plus à démontrer tant ceux-ci pourraient rendre le secteur du transport plus écologique. Le monde maritime s'automatise de plus en plus, ces dernières années la plupart des voiliers modernes se sont équipés de pilotes automatiques. Cependant, ces pilotes automatiques ne rendent pas le bateau complètement autonome. En effet, ils ont besoin qu'un utilisateur leur indique le cap à suivre. Pour pallier à cela, ce travail étudie la conception d'un pilote automatique capable de générer la trajectoire optimale à suivre. Pour y arriver, un nouveau système dynamique permettant de simuler l'évolution temporelle du cap d'un voilier a été élaboré. Une loi de commande, mêlant commande proportionnelle et LQR a été implémentée. Celle-ci permet non seulement au voilier de garder un cap constant malgré de nombreuses perturbations mais également de manoeuvrer. Finalement, à l'aide d'un processus markovien de décision, les trajectoires optimales à suivre sont déterminées.

Remerciements

Mes premiers remerciements vont tout naturellement à mes deux promoteurs, sans qui l'écriture de ce mémoire n'aurait pas été possible. J'aimerais les remercier pour leur disponibilité et la liberté qu'ils m'ont octroyée tout au long de ce travail. Tout d'abord merci à Jean-Charles Delvenne dont l'esprit vif à su s'imprégner rapidement du sujet pour m'apporter la contradiction nécessaire à l'amélioration continue du travail. Ensuite, merci à Denis Dochain dont les connaissances approfondies en automatique et en modélisation ont été essentielles dans la rédaction de ce travail.

Merci à Vincent Wertz d'avoir accepté de faire partie de mon jury et d'apporter son expertise à la critique de ce travail.

Je tiens également à remercier mes parents. Mon père pour m'avoir transmis la passion de la voile ainsi que les valeurs qui y sont associées. Ma mère pour m'avoir poussé à donner le meilleur de moi-même tout au long de ma scolarité.

Finalement je voudrais remercier Héléna de m'avoir soutenu tout au long de cette année et dont la présence a été une inépuisable source de motivation.

Table des matières

1	Introduction	6
2	Rappels théoriques sur la voile	9
2.1	Vocabulaire spécifique	9
2.2	La flottaison	9
2.3	Les forces aérodynamique et hydrodynamique	10
2.3.1	Modèle de traînée et de portance quadratique	12
2.4	Les allures et les amures	14
2.5	Manoeuvrer un voilier	15
I	Modélisation	17
3	Equations du mouvement	17
3.1	Variation de la position	18
3.2	Variation de la vitesse	18
3.3	Accélération angulaire	21
4	Modèle	23
5	Identification des paramètres	23
5.1	Paramètres mesurables	24
5.1.1	Masse du bateau	24
5.1.2	Distance safran-centre de rotation	24
5.2	Paramètres estimables	25
5.2.1	Constante d'accélération	25
5.2.2	Constante de décélération du safran	25
5.2.3	Constante de décélération angulaire	26
5.2.4	Moment d'inertie	26
6	Critique du modèle	26
II	Commande du système	27
7	Analyse de stabilité du système	28
7.1	Recherche d'équilibres	28
7.2	Caractérisation des équilibres	28
7.2.1	Linéarisation du système	28
7.2.2	Caractérisation des points d'équilibre	29
7.2.3	Analyse de phase et des trajectoires	30
8	Analyse de commandabilité du système	32

9	Analyse de la commande	33
9.1	Rejet de perturbation	33
9.2	Commande proportionnelle	33
9.2.1	Choix du paramètre	33
9.3	Commande LQR	34
9.3.1	Choix des paramètres	35
9.4	Commande LQR avec action intégrale	38
9.5	Limitations de la commande LQR	38
9.6	Commande maximale combinée avec commande LQR	39
9.7	Commande proportionnelle combinée avec commande LQR	39
10	Conclusions sur la commande	41
III	Trajectoire optimale	42
11	Détermination du cadre	43
12	Modélisation du vent par une chaîne de Markov	44
13	MDP pour optimiser la remontée au vent	48
13.1	Discrétisation de l'espace à l'intérieur du cadre	48
13.2	Définition du processus markovien de décision	49
13.3	Résultats	50
13.4	Implémentation	51
14	Conclusion sur la trajectoire optimale	52
15	Simulations	53
16	Conclusion	54
16.1	Pistes d'améliorations pour d'éventuels futurs travaux	55
17	Annexes	56
17.1	Résolution analytique de l'équation de variation de vitesse	56
17.2	Blocs Simulink	57
17.2.1	Système	58
17.2.2	Commande	59
17.2.3	Perturbation	60
17.2.4	Vent	61

1 Introduction

De mémoire d'homme, le bateau a toujours été plus qu'un outil. Du frêle coracle en cuir sur une ossature en roseau, en passant par les galères grecques, les jonques chinoises, les caravelles espagnoles jusqu'aux porte-conteneurs contemporains, les bateaux ont toujours été "le" moyen de transport ayant permis non seulement les grandes découvertes mais également la prospérité économique des grandes nations de ce monde. N'oublions pas que plus de deux tiers de la surface de notre planète sont constitués d'eau. Au début, la musculature humaine constituait le moteur principal pour mouvoir les bateaux. Ensuite, la voile a fait son apparition et a été utilisée jusqu'au 19ème siècle. Le moteur à vapeur a pris le relais pour faire place au 20ème siècle aux moteurs à explosion, voire même à énergie atomique ; reléguant la voile au domaine des loisirs ou du sport qui n'a rien à envier à la technologie pointue des Formules 1. Enfin, la voile revient ces dernières années dans le transport maritime afin de relever les nouveaux défis écologiques par l'utilisation d'énergie renouvelable.

A l'heure actuelle, l'intérêt pour les véhicules autonomes grandit partout dans le monde. Les bateaux et plus précisément les voiliers ne dérogent pas à la règle. Que ce soient les paquebots, les voiliers de compétitions ou encore les petits voiliers de plaisance, tous, à l'heure actuelle, sont équipés d'un pilote automatique. Lors de régates en solitaire comme le Vendée Globe, les marins passent moins de cinq pour cent de leur temps à diriger le bateau. Beaucoup ont dû abandonner la course à cause de pilotes automatiques défectueux. Tous ces pilotes automatiques savent maintenir un cap souhaité mais aucun d'entre eux n'est capable de déterminer la trajectoire optimale à suivre pour se rendre d'un endroit à un autre.

Pour des régates qui durent plusieurs jours, telles que le Vendée Globe, la Route du Rhum ou encore la Mini-transat, il existe des logiciels de routage qui sont capables, en fonction des prévisions météorologiques, de proposer une trajectoire optimale à suivre. Ces logiciels ne prennent pas en compte la dynamique du voilier ainsi que toutes les pertes de vitesse liées à d'éventuels changements de direction. Sur des longues courses au large, les changements de direction sont peu nombreux, la dynamique du bateau est donc négligeable, c'est pourquoi ces logiciels donnent des résultats satisfaisants à cette échelle.

Ce travail de fin d'étude (TFE) a pour but de concevoir un pilote automatique capable non seulement de maintenir un cap mais aussi de faire manoeuvrer le bateau. Au-delà de commander le bateau, le pilote automatique conçu est capable de calculer la trajectoire optimale à suivre en tenant compte de la dynamique du voilier. En d'autres termes, il est capable de faire remonter le bateau au vent de manière optimale, c'est-à-dire le plus vite possible. Il suffit seulement d'encoder la position des bouées par lesquelles on veut passer.

Types de pilotes automatiques

La plupart des voiliers modernes sont équipés d'un pilote automatique. Deux types de pilotage automatique existent :

1. Maintien du cap magnétique du bateau

Le pilote enregistre le cap magnétique (direction de l'orientation de l'avant du bateau par rapport au nord magnétique) et agit sur la barre par l'intermédiaire de vérins hydrauliques pour garder le cap constant. L'avantage est une utilisation très facile uniquement basée sur les relevés en temps réel d'un compas électronique et des corrections inverses aux changements de cap. Cependant, si le vent change de direction, le réglage de voile n'est plus optimal. L'équilibre du voilier n'est plus garanti et le pilote automatique sera de plus en plus sollicité.

2. Maintien de l'allure du voilier par rapport au vent

C'est ce que l'on appelle généralement un "régulateur d'allure". Avant l'avènement de l'électronique, un système aérodynamique mécanique (une grande girouette) permettait d'agir par un jeu de poulies sur la barre afin de garder une allure prédéterminée. C'était réellement le premier pilote automatique mécanique. Actuellement, les voiliers sont équipés d'une girouette électronique qui donne les informations numériques du même type qu'un compas électronique. Les corrections appliquées sur la barre sont de même nature que pour un pilote automatique. L'avantage est de garder des réglages de voile constant. Par contre, si le vent change de direction, le voilier suit le vent mais le cap ne reste pas constant, ce qui peut être très dangereux près de côtes rocheuses par exemple.

Généralement, le pilote automatique de maintien de cap magnétique est préféré pour sa sécurité et tout en considérant que le réglage des voiles par l'équipage doit être quasiment continu pour délivrer le maximum des performances du voilier. Une programmation prenant en compte non seulement le cap, mais également l'allure, peut permettre de tirer les avantages des deux systèmes et prendre les décisions adéquates afin d'optimiser la remontée au près, tels que les corrections pour maintenir le cap et les virements automatisés tenant compte des variations de vent. C'est ce qui sera présenté dans le développement des prochains chapitres de ce travail.

Objectifs et plan de lecture

Comme le titre l'indique, l'objectif de ce travail est de concevoir un pilote automatique pour voilier. Contrairement à ceux vendus sur le marché, à l'heure actuelle, le pilote automatique conçu n'a pas besoin qu'on encode manuellement la direction à suivre, il est en mesure de calculer la trajectoire optimale et ensuite de la suivre. Afin de valider la conception du pilote automatique, ce travail tente de répondre aux trois questions de recherche suivantes qui constituent les trois parties du mémoire (reprise sur la FIGURE 1) :

- **Quel modèle utilisé décrit au mieux la dynamique du voilier ?**

Ce TFE se faisant exclusivement via des simulations, il est indispensable de créer un système dynamique dont les équations représentent l'évolution temporelle des variables qui décrivent le bateau (voir FIGURE 1 Partie 1). Le modèle choisi reste simple mais il décrit tout de même la dynamique du voilier. Tout bon modèle se veut général, et donc paramétré afin de pouvoir être appliqué à un grand nombre de voiliers. Une partie de chapitre est dédiée à l'identification des paramètres du modèle.

- **Quel angle de barre faut-il appliquer au voilier afin de pouvoir commander le cap de celui-ci ?**

Une fois le modèle fixé, la deuxième partie de ce travail s'intéresse à la commande à appliquer au système pour qu'il soit capable de suivre une trajectoire désirée (FIGURE 1 Partie 2). Avant de déterminer la commande, la stabilité et la commandabilité du système sont étudiées.

- **Quelle est la trajectoire optimale que le bateau doit suivre afin de terminer un parcours le plus rapidement possible ?**

Avoir un pilote automatique capable de suivre une trajectoire, c'est intéressant ; avoir un pilote qui est capable de suivre et de déterminer la meilleure trajectoire l'est encore plus. Cette troisième partie (FIGURE 1 Partie 3), commence par proposer un modèle stochastique du vent. Sur base de ce modèle, les trajectoires optimales sont calculées pour une remontée au vent.

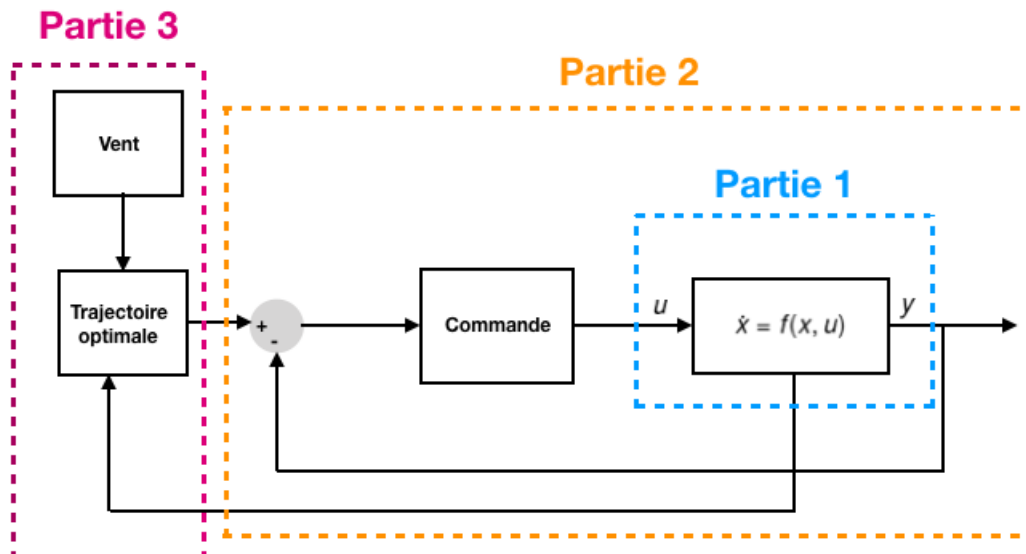


FIGURE 1 – Schéma du plan de lecture

2 Rappels théoriques sur la voile

2.1 Vocabulaire spécifique

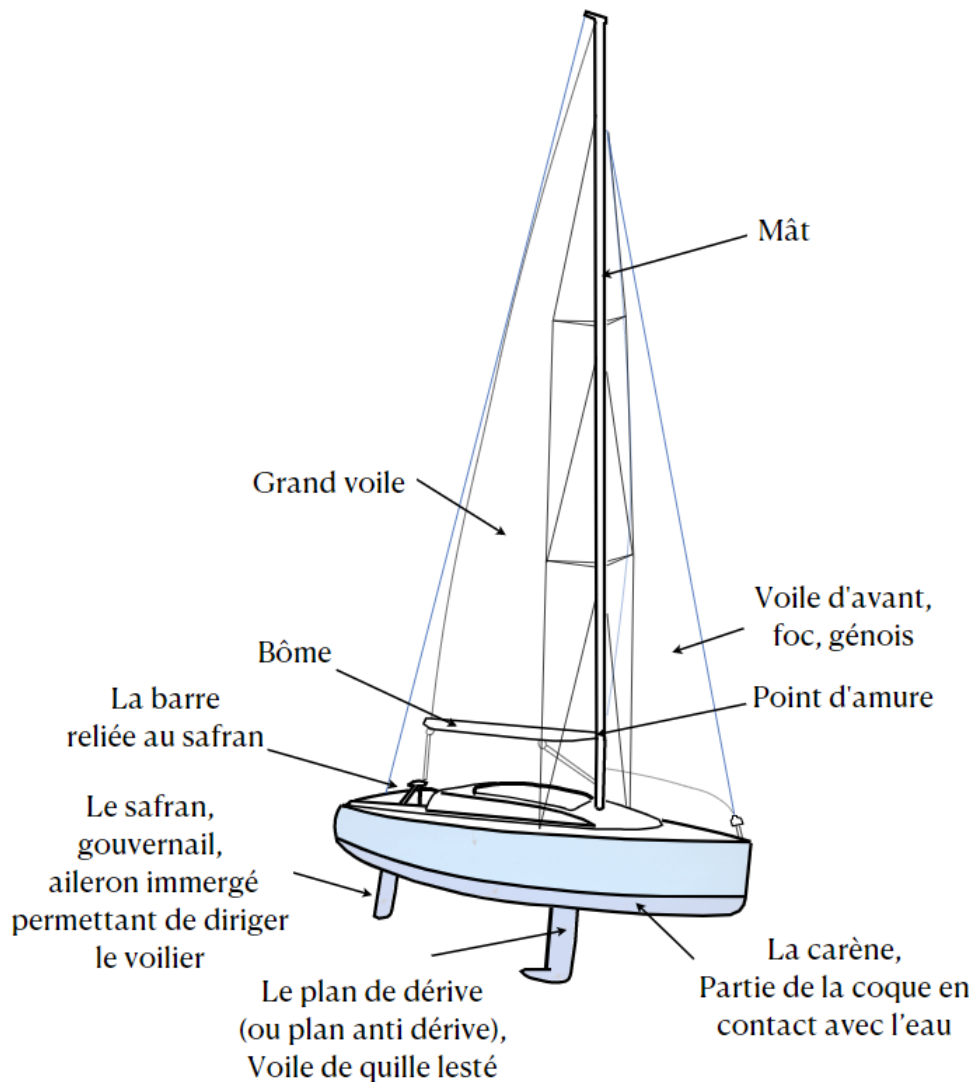


FIGURE 2 – Schéma reprenant le vocabulaire spécifique d'un voilier (Schéma tiré de [1])

2.2 La flottaison

La force de Newton attire le bateau vers le bas tandis que la poussée d'Archimède pousse le bateau vers le haut. La flottaison est donc "l'équilibre" entre la force engendrée par le poids du voilier, appliquée en son centre de gravité (CG), dirigée vers le bas et la poussée d'Archimède s'exerçant en réalité sur toute la surface de la carène du voilier et dont la résultante appliquée au centre de la carène (CC) est dirigée vers le haut.

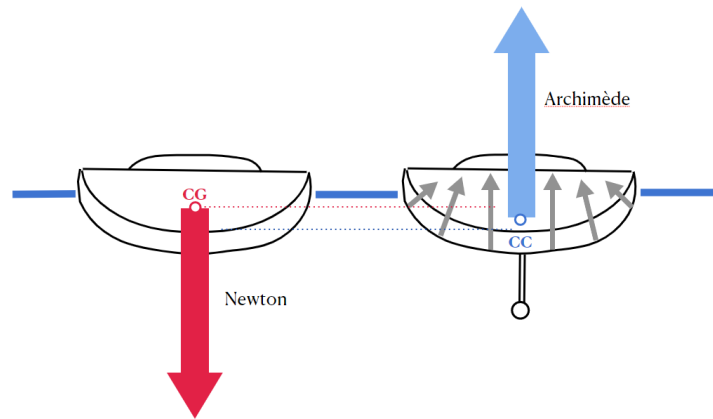


FIGURE 3 – Représentation de la force de gravité (Flèche rouge) et de la poussée d'Archimède (Flèche bleue). Schéma tiré de [2]

Le tirant d'eau¹ matérialise cet équilibre entre le poids du voilier et la poussée d'Archimède. A noter cependant que pour un poids, une longueur et profondeur de quille identiques, un voilier à carène large (à fort maître-bau) aura un tirant d'eau moindre qu'une carène étroite. C'est donc ici une question de "pression" sur la coque. Cela influencera les performances du voilier aux différentes allures.²

2.3 Les forces aérodynamique et hydrodynamique

Ce "couple" de forces, qui ont en commun l'écoulement d'un fluide sur des surfaces, se conjugue pour faire avancer le voilier. D'un côté, l'air en mouvement, créé par le vent, se déplace sur les voiles et de l'autre côté, le mouvement de l'eau sur les surfaces anti-dérive immergées telles la quille ou le safran. Un jeu de pression/dépression sur les voiles sert de moteur (force aérodynamique), et un autre jeu de pression/dépression sur les plans anti-dérive permet au voilier de se déplacer vers l'avant au lieu de dériver transversalement.

1. La force aérodynamique.

La voile est comparable à une aile d'avion avec un intrados et extrados mais ayant comme particularité que le profil est souple. Le barreur peut donc modifier, régler le creux de la voile en modifiant la corde du profil et ainsi optimiser celui-ci mais également orienter la voile (changement de l'angle d'incidence α par rapport à l'origine du vent) afin que l'air circule de manière la plus laminaire possible (c-à-d. sans turbulence) autour du profil (voir FIGURE 4). En effet, toute turbulence augmente la traînée aérodynamique et diminue donc les performances de la voile. Comme le montre la FIGURE 4, le flux d'air en passant sur l'extrados s'accélère, créant ainsi une dépression, au contraire du passage de l'air sur l'intrados qui décélère, créant de la sorte une surpression. Cette différence de "pression" est

1. Quantité, volume d'eau que déplace un navire

2. Angle du bateau par rapport au vent

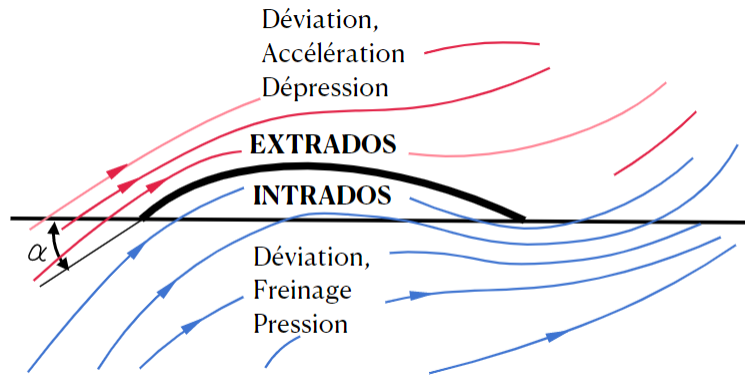


FIGURE 4 – Profil de pression et de vitesse de l'écoulement du vent autour d'une voile. A l'extrados, le flux d'air est accéléré ce qui crée une dépression, à l'intrados le flux d'air est ralenti, ce qui crée une surpression. (Schéma tiré de [?])

appelée portance pour l'avion. Ce terme n'est pas tout à fait applicable aux voiles. En effet, le but n'est pas de "porter" le voilier mais de le faire avancer. Pour ce faire les voiles sont verticales alors que les ailes d'avion sont horizontales. Le terme "portance" est cependant très souvent utilisé en voile. La force aérodynamique, généralement appelée force vélique dans la mécanique de la voile, est d'abord la somme vectorielle de la portance et de la traînée du profil de la voile (voir FIGURE 5), mais au final, la somme vectorielle de la dérive du voilier (perpendiculaire à l'axe du voilier) et de la force propulsive parallèle à l'axe du voilier est ce qui le fait réellement avancer.

2. La force hydrodynamique.

Comme expliqué avant, la force vélique ne s'exerce pas dans le sens de marche du voilier. C'est pourquoi, le voilier déraperait ou naviguerait en "crabe" s'il ne disposait pas de plans anti-dérives (voile de quille et safran). La quille et le safran sont parfaitement placés dans l'axe de déplacement du bateau. Ils sont constitués de profils rigides et symétriques (extrados = intrados). C'est encore une histoire de "pression/dépression". En effet, si le profil symétrique reste à la verticale (c'est le cas en vent arrière), les pressions respectives sur l'extrados et l'intrados sont équivalentes. Par contre, lorsque le voilier remonte au vent, la gîte³ du voilier et le "dérapage" du voilier induisent un certain angle d'incidence dans l'écoulement de l'eau sur la quille et c'est ainsi qu'un demi-profil se comporte comme un extrados (dépression = accélération = portance) et l'autre demi-profil se comporte comme un intrados (pression = freinage). La quille agit à l'opposé de la voile : la basse pression (la portance) du côté "au vent" du profil de quille et la surpression du côté "sous le vent" du profil. La portance s'oppose donc à la force latérale de dérapage induite par les voiles et cale le voilier sur son axe de déplacement.

En résumé, le "couple" force aérodynamique et force hydrodynamique généré par un

3. La gîte est égale à l'angle de roulis (voir FIGURE 11)

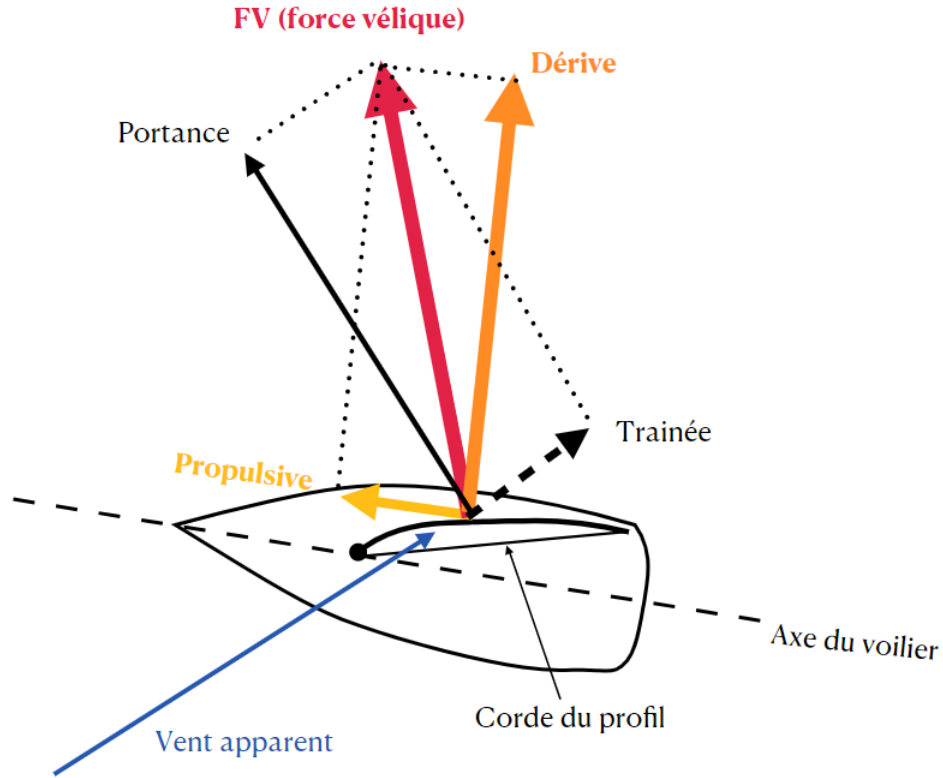


FIGURE 5 – Représentation des forces aérodynamiques générées par la voile.

jeu de "pressions" sur les profils respectivement émergés (voiles) et immergés (quille ou safran), garantit "l'équilibre" permettant de faire avancer le voilier selon quasiment son axe longitudinal et peut-être schématisé par la FIGURE 5.

2.3.1 Modèle de traînée et de portance quadratique

A haute vitesse, les forces de traînée et de portance d'un corps à géométrie simple évoluant dans un fluide, sont proportionnelles au carré de la vitesse [4].

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho A v^2 \quad (1)$$

$$F_L = \frac{1}{2} C_L \rho A v^2 \quad (2)$$

où C_D, C_L sont des constantes, ρ et A sont respectivement la masse volumique du fluide et l'aire du corps projeté sur un plan perpendiculaire au mouvement. La vitesse v est la vitesse du fluide vue par le corps. Il est possible de calculer la norme de la force vélique

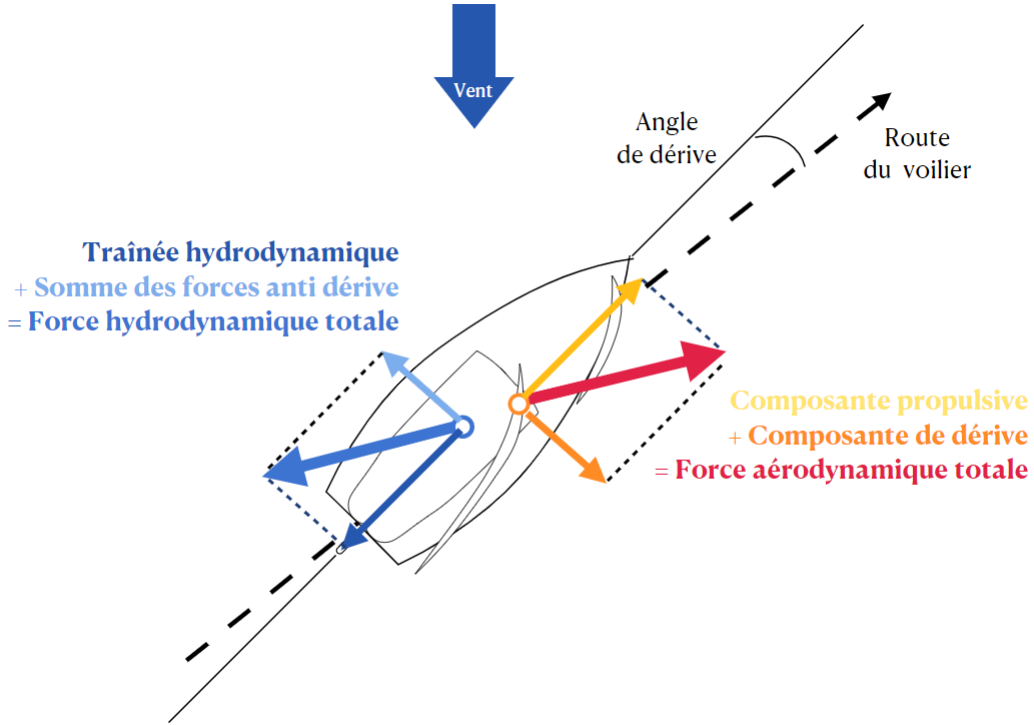


FIGURE 6 – Schéma représentant les forces hydrodynamiques et aérodynamiques du voilier lorsqu'il navigue à vitesse constante. (Schéma tiré de [3])

(FIGURE 5) :

$$|F_{velique}| = \sqrt{F_D^2 + F_L^2} \quad (3)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}C_{D,voile}\rho_{air}A_{voile}v^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}C_{L,voile}\rho_{air}A_{voile}v^2\right)^2} \quad (4)$$

La composante de dérive est équivalente à la composante antidérive :

$$|F_{anti,derive}| = |F_{derive}| \quad (5)$$

$$= |F_{velique}| \cos \alpha \quad (6)$$

$$= \cos \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{2}C_{D,voile}\rho_{air}A_{voile}v^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}C_{L,voile}\rho_{air}A_{voile}v^2\right)^2} \quad (7)$$

Lorsque la bateau avance à vitesse constante, la composante propulsive est égale à la traînée hydrodynamique :

$$|F_{trainee,hydro}| = |F_{propulsive}| \quad (8)$$

$$= |F_{velique}| \sin \alpha \quad (9)$$

$$= \sin \alpha \sqrt{\left(\frac{1}{2}C_{D,voile}\rho_{air}A_{voile}v^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}C_{L,voile}\rho_{air}A_{voile}v^2\right)^2} \quad (10)$$

2.4 Les allures et les amures

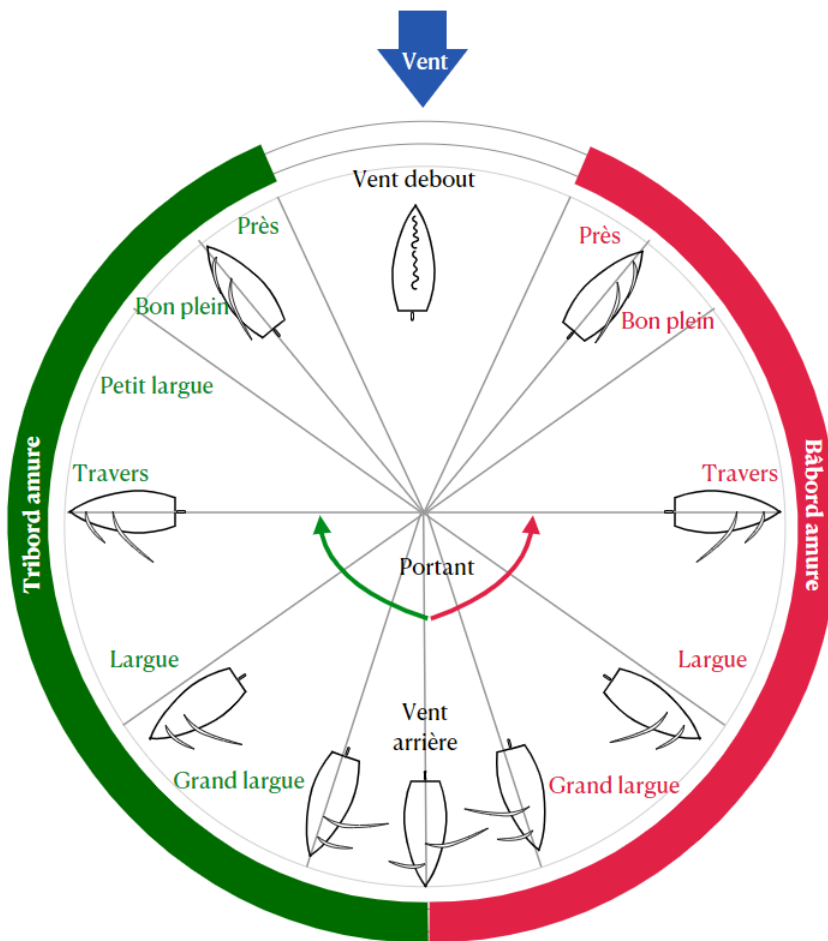


FIGURE 7 – Schéma représentant les différentes allures du bateau. En rouge les allures bâbord amure et en vert les allures tribord amure

Même si le marin n'a pas de repère visuel au milieu de l'océan pour s'orienter, il devra à tout moment savoir d'où vient le vent. Ceci est primordial pour garantir des performances optimales de son voilier par rapport à la route qu'il veut suivre. La FIGURE 7 montre les différentes allures par rapport au vent. Un voilier ne peut remonter dans le lit du vent. En effet, les voiles vont faseyer dans le vent et il sera impossible de gonfler les voiles. Il faut donc s'éloigner du vent jusqu'au moment où les voiles peuvent se gonfler. Les voiles commencent alors à "porter" et le profil de voile génère de la force vélique et au fur et à mesure que le voilier prend de la vitesse, le voile de quille s'opposera à la dérive et le voilier avancera. Cette allure est nommée le "près" et le vent attaque donc le bateau suivant un angle généralement aux alentours de 40° par rapport à l'axe du bateau. Quand le vent vient à 90° par rapport à l'axe du voilier, le voilier navigue au "travers". Si le voilier s'éloigne encore plus du lit du vent, les allures portantes commencent (du "largue" au "vent arrière" en passant par le "grand largue").

Plus le bateau se rapproche du vent arrière, au plus le profil laminaire est perturbé et c'est réellement le vent qui pousse le bateau. Quand le vent touche le voilier par le côté tribord (droit), le voilier est alors tribord amure. Le côté tribord est alors "au vent" et le côté bâbord (gauche) est "sous le vent"

2.5 Manoeuvrer un voilier

Le safran est la partie immergée du gouvernail qui est actionné par la barre pour diriger le voilier. Le barreur est généralement assis du côté au vent, lui donnant une vue dégagée vers l'avant et il participe aussi au couple de redressement. Si le barreur pousse la barre, le voilier va en direction du lit du vent. Cette action du bateau s'appelle "lofer" (FIGURE 8). A contrario, si le barreur tire la barre, le voilier va s'éloigner du vent et cette action s'appelle "abattre".

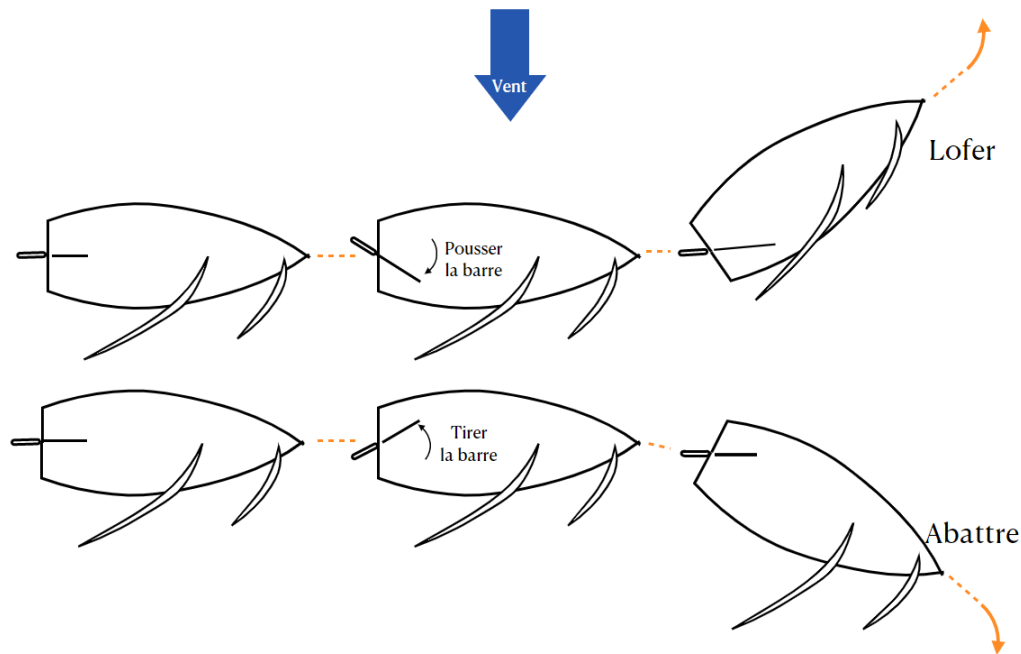


FIGURE 8 – *Lofer* = se rapprocher de la direction du vent. *Abattre* = s'éloigner de la direction du vent.

Comme expliqué dans le chapitre "Allures et amures", il est impossible de suivre une trajectoire directe dans le lit du vent (vent debout). Par contre, une succession de bords à $\pm 40^\circ$ du vent permet de rejoindre une destination au vent. Cette technique de navigation, s'appelle "tirer des bords" ou encore "louvoyer" (FIGURE 9). L'action de passer d'un bord "bâbord amure" vers un bord "tribord amure" et inversement s'appelle le "virement de bord" ou tout simplement le "virement". Le virement passe toujours par une phase vent debout, profitant de la vitesse et de l'inertie du bateau pour que cette position dure le moins longtemps possible. Il est également possible de dépasser

le lit du vent, de passer d'une amure à l'autre par vent arrière. Ce virement par vent arrière s'appelle "l'empannage".

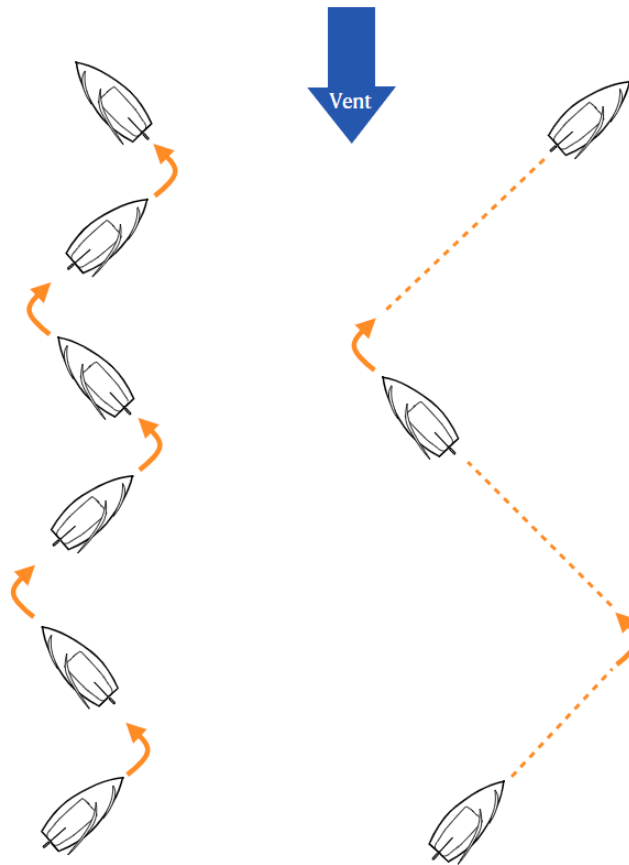


FIGURE 9 – *Remonter au vent*

Le barreur peut décider de tirer soit des bords longs, soit des bords courts pour rejoindre une position au vent. Chaque virement de bord est une perte de vitesse, donc une perte de temps. Pour un vent constant en direction et en force, faire deux virements est plus avantageux que de faire cinq virements pour rejoindre un même point situé au vent. Par contre, si le vent varie en force mais surtout en direction, la solution de bords courts peut-être plus avantageuse. L'enjeu est donc le timing de l'enchaînement des prises de décision par le barreur et les exécutions des virements successifs afin d'optimiser le temps nécessaire pour rallier une destination au vent.

Première partie

Modélisation

Afin d'étudier la dynamique du voilier, il est nécessaire de créer un modèle dont les équations décrivent le mouvement du bateau. Le modèle doit rester assez simple mais doit cependant refléter la réalité. L'idée est de créer un système d'équations différentielles du premier ordre comme sur la FIGURE 10. Ce système donne en continu l'évolution des variables d'état qui le constituent. Il est également nécessaire d'identifier l'entrée et la sortie du système.

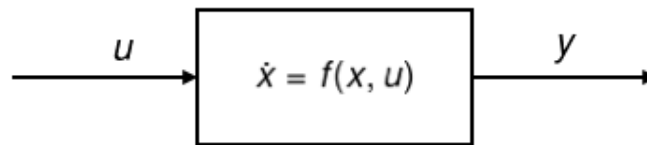


FIGURE 10 – *Représentation d'un système*

Ce chapitre présente comment obtenir ce système. Dans un premier temps, les simplifications du modèle sont présentées et justifiées. En effet, certains degrés de liberté du système peuvent être négligés pour garder un modèle simple à implémenter tout en restant réaliste. Ensuite, grâce à la physique, on obtient les équations du mouvement du bateau. Ensuite, il faut réécrire ces équations en un système d'équations différentielles du premier ordre. Ce système comprend de nombreux paramètres, certains sont mesurables, tandis que d'autres doivent être estimés. Une section de ce chapitre est dédiée à la description des méthodes utilisées pour mesurer ou estimer ces paramètres. Ce chapitre se clôture par une discussion des améliorations qui pourraient être apportées pour rendre le modèle plus réaliste. Néanmoins le modèle proposé semble être le meilleur compromis entre la complexité et le réalisme.

3 Equations du mouvement

Afin de simplifier le modèle, il est utile de réduire le nombre de degrés de liberté du système. Il est possible de décrire la dynamique du bateau de manière assez complète avec seulement 3 degrés de liberté au lieu de 6 et donc de réduire les équations à un problème plan. En effet, on peut négliger la translation selon l'axe z car si on considère que la mer est calme, la hauteur des vagues n'est jamais très élevée. Pour la même raison, on peut négliger le tangage du bateau (voir FIGURE 11). En effet, s'il n'y a pas de grosses vagues, on peut considérer que le bateau reste horizontal. Finalement, négliger le roulis (voir FIGURE 11) est une hypothèse assez forte mais nécessaire afin d'assurer la simplicité du modèle. L'angle de roulis a un impact sur l'angle de lacet ⁴ (voir FIGURE

4. L'angle de lacet correspond au cap du bateau

11) que l'on cherche à commander, mais cet impact est très difficile à modéliser. Dans le cadre de ce mémoire, on modélisera les effets de l'angle de roulis comme étant une perturbation de l'angle de lacet, pour être sûr que le pilote automatique soit capable de gérer des variations de la gîte⁵ du bateau.

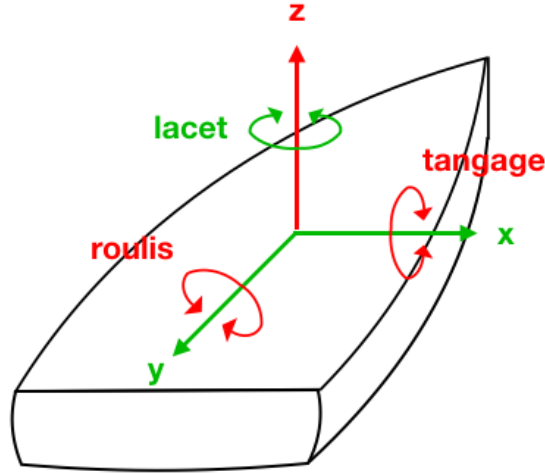


FIGURE 11 – En vert, les degrés de liberté pris en compte dans le modèle : translation selon l'axe x , translation selon l'axe y et rotation selon l'axe z (lacet). En rouge, les degrés de liberté pas pris en compte dans le modèle : translation selon l'axe z , rotation selon l'axe x (tangage) et rotation selon l'axe y (roulis).

Le but du modèle est de calculer, à l'aide d'équations, la variation temporelle de certaines variables qui décrivent la dynamique du bateau. Ces variables sont : la position en x et y du bateau, le cap du bateau (θ) et la vitesse du bateau (v). Ces variables sont reprises dans la FIGURE 12.

3.1 Variation de la position

La position du centre de gravité du bateau varie en fonction de la vitesse du bateau et de son cap. Sa variation est décrite par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \sin \theta \\ \dot{y} = v \cos \theta \end{cases} \quad (11)$$

3.2 Variation de la vitesse

Pour obtenir l'équation de variation de la vitesse, il faut appliquer la deuxième loi de Newton ($\sum F = ma = m\dot{v}$). Les forces qui agissent sur le bateau sont principalement la

5. La gîte correspond à l'angle de roulis.

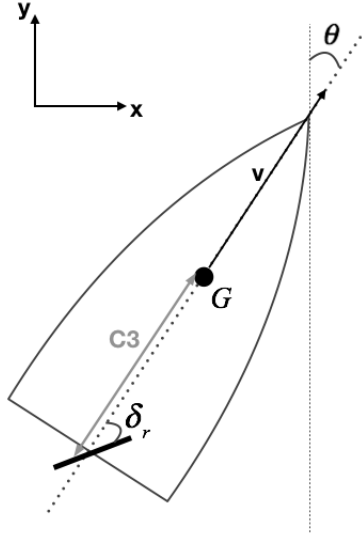


FIGURE 12 – Schéma illustrant les différentes variables du modèle : La position (x, y) du centre de masse G , le cap du bateau (θ) , la vitesse du voilier v et l'angle de la barre δ_r

force de propulsion, qui fait avancer le bateau, et les forces de frottement, qui s'opposent au mouvement.

$$m\dot{v} = \text{Force propulsion} - \text{Frottement coque} - \text{Frottement safran} \quad (12)$$

$$m\dot{v} = F_{prop} - F_{f,coque} - F_{f,safran} \quad (13)$$

Force propulsion : C'est la force qui propulse le bateau vers l'avant. Cette force est très complexe à modéliser car elle est la résultante de plusieurs forces qui sont elles-mêmes difficiles à modéliser. En effet, comme vu dans la section 2.3.1, il faut calculer les forces de traînée et de portance non seulement pour la voile mais aussi pour la dérive. Il est possible d'utiliser les formules d'approximation quadratiques développées dans le deuxième chapitre du livre de John Kimball [5]. Ces approximations sont acceptables pour des objets de forme assez simple comme une sphère, une plaque mais pas pour des objets ayant des formes plus complexes comme la coque d'un bateau ou sa voile. Pour calculer ces forces de manière rigoureuse, il faudrait résoudre les équations de Navier-Stokes autour du profil de la voile en y appliquant les transformations de Kutta-Joukowski. Cela sort du cadre de ce mémoire étant donné que c'est toujours un problème non résolu actuellement. Comme vu dans la section 2.3.1, en régime permanent, les forces de traînée sont égales à la force de propulsion, le bateau atteint donc une vitesse maximale. Cette vitesse maximale dépend de l'angle du bateau par rapport au vent et de la vitesse de ce dernier. On la trouve dans les polaires de vitesse qui sont disponibles pour tous les bateaux. Ces polaires sont construites à l'aide de mesures expérimentales pour chaque bateau. La FIGURE 13 illustre les polaires de vitesse d'un voilier.

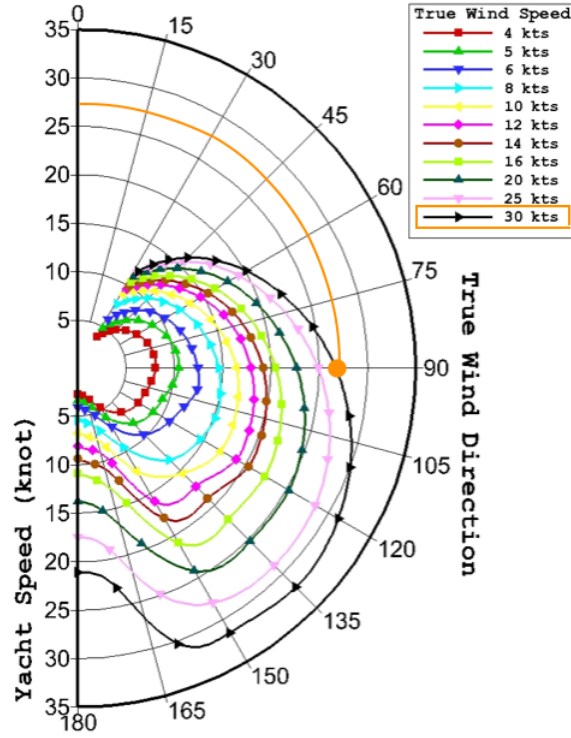


FIGURE 13 – *Polaires de vitesses* : Diagramme de la vitesse maximale que le bateau va atteindre (si ses voiles sont bien réglées) lorsqu’il navigue avec un certain angle par rapport au vent, pour une certaine vitesse de vent donnée. En orange, on voit que si le bateau navigue à un angle de 90° par rapport au vent qui souffle à 30 noeuds (Le noeud est la mesure de vitesse utilisée en voile. 1 noeud correspond à 0,5144 m/s), il peut atteindre au maximum une vitesse de 27 noeuds.

L’idée est de lier la vitesse maximale à la force de propulsion grâce à la relation

$$F_{prop} = C_1 V_{max} \quad (14)$$

Frottement coque C’est une force qui s’oppose au mouvement. Les forces de frottement sont principalement hydrodynamiques, elles sont dues au déplacement du bateau dans l’eau. Comme vu précédemment, le modèle quadratique de traînée n’est pas valable car la coque du bateau a une forme assez complexe. Comme le suggèrent les articles [6] et [7], le frottement de la coque peut être considéré comme proportionnel à la vitesse du bateau :

$$F_{f,coque} = C_1 v \quad (15)$$

Frottement safran C’est une force qui reprend les frottements liés aux mouvements de safran dans l’eau. En effet, lorsque le safran n’est pas aligné à l’axe du bateau, il va créer plus de frottements. Au plus l’angle entre l’axe du bateau et le safran est grand, au plus la résistance va être élevée. L’équation, tirée de [6], qui reprend le frottement

est :

$$F_{f,safran} = C_2 v |\sin \delta_r| \quad (16)$$

Lorsque l'angle de barre⁶ est nul, les frottements le sont également. Ils sont maxima lorsque l'angle de barre est de 90°. En effet, lorsque le safran est perpendiculaire à la coque, la surface de frottement est maximale.

En injectant (14),(15) et (16) dans l'équation (12), on obtient l'équation générale de variation de vitesse :

$$m\dot{v} = C_1 V_{max} - C_1 v - C_2 v |\sin \delta_r| \quad (17)$$

Cette équation reflète le comportement décrit précédemment. Dans des conditions météorologiques stables (ce qui implique V_{max} constant) et en mouvement rectiligne, l'angle de barre est nul : $\delta_r = 0$, l'équation se réduit à

$$m\dot{v} = C_1 V_{max} - C_1 v \quad (18)$$

lorsque le bateau atteint sa vitesse maximale $v = V_{max}$, ce qui implique que la variation de vitesse est nulle. La résolution analytique de l'équation (18) est disponible en annexe dans la section 17.1. La solution analytique de l'équation est :

$$v(t) = V_{max} \left(1 - \left(\frac{V_0}{V_{max}} - 1 \right) e^{-\frac{C_1}{m} t} \right) \quad (19)$$

La forme de l'équation montre que la vitesse du bateau tend vers la vitesse maximale au cours du temps. Le paramètre $\frac{C_1}{m}$ donne la constante de temps, c'est-à-dire la vitesse à laquelle le bateau va atteindre sa vitesse maximale.

3.3 Accélération angulaire

De manière analogue à ce qui a été présenté dans la section précédente, on peut appliquer la deuxième loi de Newton à des accélérations angulaires ($\sum \tau = J\ddot{\theta}$). Les couples (τ) sont calculés par rapport au centre de rotation (CoR) qui se confond avec le centre de gravité (CoG) dans ce cas-ci, comme indiqué sur la FIGURE 14 . La variation angulaire s'exprime grâce à l'équation :

$$\text{Couple d'inertie} = \text{Couple moteur} - \text{Couple de frottement} \quad (20)$$

$$J\ddot{\theta} = \tau_{moteur} - \tau_{frottement} \quad (21)$$

Couple d'inertie : C'est la multiplication entre le moment d'inertie (J) et l'accélération angulaire. Le moment d'inertie est défini comme la grandeur physique qui quantifie la résistance à la mise en rotation.

6. L'angle de barre est le même que l'angle de safran.

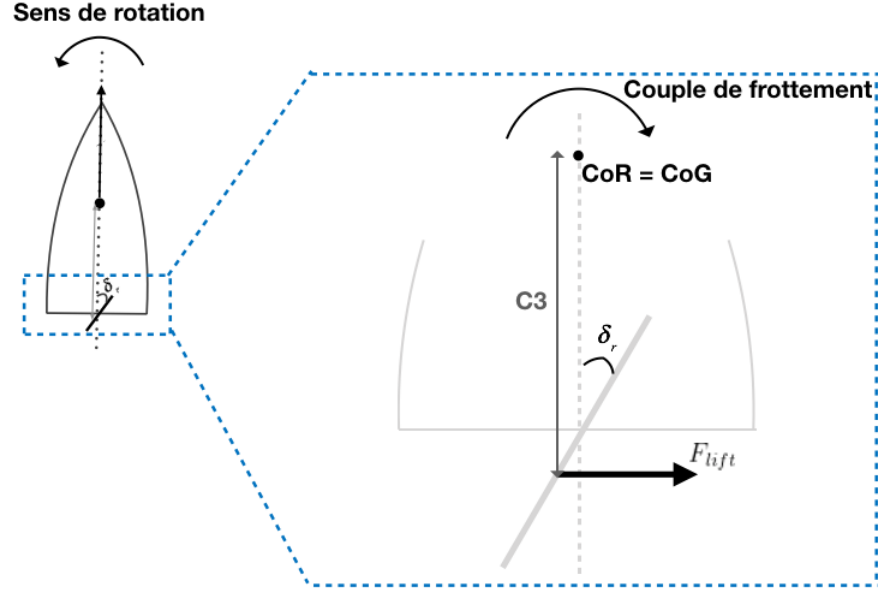


FIGURE 14 – *Couples qui agissent sur la rotation du bateau lorsque le safran n'est pas aligné à l'axe du bateau.*

Couple moteur : Dans le cas d'un navire, le couple moteur est le couple induit lorsque le safran n'est pas aligné avec l'axe du bateau. Ce couple vaut le produit vectoriel entre la distance safran-CoR (C_3) et la force de portée induite par le safran :

$$C_3 \hat{I}_y \times F_{lift} \hat{I}_x = -C_3 F_{lift} \quad (22)$$

Le safran est assimilé à une plaque verticale dans l'eau. Comme l'expliquent Dick Yue et G. Dimitriadis dans leurs cours respectifs d'aérodynamique [8] et [9], la quantité de portance est proportionnelle à la circulation totale (Γ). La circulation totale est définie comme étant l'intégrale de la vitesse locale du fluide calculée autour d'un contour fermé comprenant le profil de la voile. Ce qui donne en équations :

$$\begin{aligned} F_{lift} &= \rho v \Gamma & (23) \\ &= \rho v \pi A v \sin \delta_r \\ &= \rho \pi A v^2 \sin \delta_r \\ &= C_4 v^2 \sin \delta_r \\ \Rightarrow \tau_{moteur} &= -C_3 F_{lift} \\ &= -C_3 C_4 v^2 \sin \delta_r & (24) \end{aligned}$$

Couple de frottement : Le couple de frottement s'oppose à la rotation du bateau, il est principalement composé des forces hydrodynamiques de frottement. Comme vu précédemment pour des géométries aussi complexes qu'une coque de bateau, les lois quadratiques de traînées ne sont pas applicables. De manière analogue à ce qui a été

fait dans la section 3.2, le couple de frottement peut être modélisé comme proportionnel à la vitesse de rotation :

$$\tau_{frottement} = C_5 v \quad (25)$$

Finalement en injectant les équations (24) et (25) dans (21) , on obtient l'expression de l'accélération angulaire :

$$J\ddot{\theta} = -C_3 C_4 v^2 \sin \delta_r - C_5 \dot{\theta} \quad (26)$$

4 Modèle

Une fois toutes les équations de mouvement connues, il est nécessaire de les reformuler afin d'obtenir un système du premier ordre sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (27)$$

où x représente les variables d'états du système et u est l'entrée du système. Dans le cas du voilier, l'entrée n'est autre que l'angle de barre (δ_r). Afin de réduire l'équation (26) à une équation du premier ordre, il faut poser la variable $\omega = -\dot{\theta}$. On peut donc réécrire cette équation :

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= -\omega \\ J\dot{\omega} &= C_3 C_4 v^2 \sin \delta_r - C_5 \omega \end{cases} \quad (28)$$

Le vecteur d'état du système devient donc $X = (x, y, \theta, v, \omega)^T$. Les équations (11), (17) et (28) forment le système non linéaire du premier ordre qui sera utilisé pour simuler la dynamique du voilier.

$$\dot{X} = \begin{cases} \dot{x} = v \sin \theta & \text{(I)} \\ \dot{y} = v \cos \theta & \text{(II)} \\ \dot{\theta} = -\omega & \text{(III)} \\ \dot{v} = m^{-1} (C_1 V_{max} - C_1 v - C_2 v |\sin \delta_r|) & \text{(IV)} \\ \dot{\omega} = J^{-1} (C_3 C_4 v^2 \sin \delta_r - C_5 \omega) & \text{(V)} \end{cases} \quad (29)$$

5 Identification des paramètres

Le modèle présenté précédemment contient des paramètres qu'il est nécessaire de connaître afin de simuler de la manière la plus réaliste possible les mouvements du bateau. Il existe deux types de paramètres : d'une part, ceux qui sont directement mesurables et donc facilement identifiables et d'autre part, ceux qui sont estimables à partir d'une série de mesures. Ces paramètres sont repris dans la TABLE 1.

Nom	Abréviation	Unité de mesure	Type
Constante d'accélération	C_1	$[\text{kg.s}^{-1}]$	Estimable
Constante de décélération du safran	C_2	$[\text{kg.s}^{-1}]$	Estimable
Masse du bateau	m	$[\text{kg}]$	Mesurable
Distance safran-CoR	C_3	$[\text{m}]$	Mesurable
Constante de force du safran	C_4	$[\text{kg.rad.m}^{-1}]$	Fixe
Constante de décélération angulaire	C_5	$[\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}]$	Estimable
Moment d'inertie	J	$[\text{kg.m}^2]$	Estimable

TABLE 1 – Paramètres du modèle (29), ainsi que leurs unités de mesure.

5.1 Paramètres mesurables

5.1.1 Masse du bateau

La méthode proposée ici pour mesurer la masse du voilier est basée sur le principe d'Archimède : *" Tout corps plongé dans un fluide au repos, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et opposée au poids du volume de fluide déplacé "*. Lorsqu'un bateau flotte, la poussée d'Archimède s'équilibre avec la force de gravité :

$$\text{Poid} = F_{\text{archimede}} \quad (30)$$

$$m_{\text{bateau}}g = \rho_{\text{eau}}gV_{\text{eau,deplace}} \quad (31)$$

Il suffit de placer le bateau dans un récipient rempli d'eau à ras bord, de mesurer le volume d'eau déplacé et finalement de calculer sa masse grâce à la formule (31).

5.1.2 Distance safran-centre de rotation

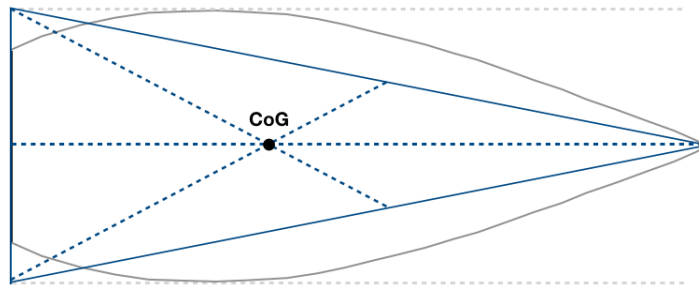


FIGURE 15 – Méthode utilisée pour déterminer le centre de gravité du bateau. Le bateau est assimilé à un triangle isocèle dont la hauteur vaut la longueur du bateau et la base vaut la largeur du bateau.

Pour calculer la distance entre le safran et le centre de rotation qui est assimilé au centre de gravité, il faut déterminer la position du centre de gravité. Pour ce faire,

on peut assimiler le bateau à un triangle isocèle dont la hauteur vaut la longueur du bateau et la base vaut la largeur du bateau comme le montre la FIGURE 15. Le centre de gravité d'un triangle est assez simple à trouver car il correspond à l'intersection des médianes du triangle. Une fois la position du centre de gravité déterminée, il suffit de mesurer la distance entre ce dernier et le safran.

5.2 Paramètres estimables

5.2.1 Constante d'accélération

La constante d'accélération est inversement proportionnelle au temps nécessaire pour que le bateau atteigne sa vitesse maximale lorsqu'il navigue en ligne droite en commençant à une vitesse inférieure à la vitesse maximale. Théoriquement ce temps est infini. En effet en observant l'équation (19), il faut que t tende vers l'infini pour que $v(t)$ tende vers V_{max} . Cependant, on peut s'intéresser au temps nécessaire pour que le bateau atteigne 95% de sa vitesse maximale. En supposant que la vitesse initiale soit nulle, ce temps nécessaire vaut

$$t^* = \frac{3m}{C_1} \quad (32)$$

En effet, en injectant cette expression dans l'équation (19), on obtient :

$$\begin{aligned} v(t^*) &= V_{max} \left(1 - e^{-\frac{C_1}{m} \frac{3m}{C_1}} \right) \\ &= V_{max} (1 - e^{-3}) \\ &= 0.95V_{max} \end{aligned} \quad (33)$$

Pour estimer la constante C_1 , il faut donc mesurer le temps nécessaire pour que le bateau atteigne 95% de sa vitesse maximale, en démarrant avec une vitesse nulle pour différents caps et vitesses de vents. C_1 se définit comme étant la moyenne de tous les temps mesurés. Ces temps sont assez semblables contrairement à ce que l'on pourrait penser. En effet, on a tendance à croire qu'au plus le vent est fort, au plus vite le bateau atteindra sa vitesse maximale, mais il ne faut pas oublier que si le vent est plus élevé, la vitesse maximale l'est aussi.

5.2.2 Constante de décélération du safran

Pour estimer cette constante C_2 , il faut prendre des mesures de vitesse du bateau lorsqu'il avance en ligne droite mais avec un certain angle de safran. Pour ce faire, il faut forcer le bateau à garder son cap malgré l'angle de barre. Ensuite avec ces mesures, on fait le meilleur ajustement du modèle aux mesures prises. Pour ce faire, on peut minimiser selon C_2 le carré de l'erreur entre les vitesses mesurées et les vitesses prédites par le modèle.

5.2.3 Constante de décélération angulaire

De manière similaire à la section précédente, pour déterminer C_5 , il faut prendre des mesures de variation de la vitesse de rotation du bateau. Ensuite, il s'agit d'ajuster le modèle à la réalité selon le critère des moindres carrés.

5.2.4 Moment d'inertie

Comme présenté sur la FIGURE 15, la coque du bateau peut être assimilée à un prisme à base triangulaire. C'est en faisant cette approximation qu'il est possible d'estimer le moment d'inertie de la coque. Le moment d'inertie selon l'axe z d'un triangle isocèle de base b et de hauteur h vaut :

$$J_{zz} = \frac{1}{48}bh(b^2 + 4h^2) \quad (34)$$

La base du triangle vaut la largeur du bateau (l) et la hauteur vaut la longueur (L) du bateau. En considérant que la masse volumique est constante, on estime l'inertie de la coque :

$$J = \frac{m}{48}Ll(l^2 + 4L^2) \quad (35)$$

6 Critique du modèle

Comme dit précédemment, ce modèle est un compromis entre complexité et réalisme. Il est possible de simplifier le modèle en ne tenant pas compte des frottements liés au safran ($C_2 = 0$). C'est un facteur que nous estimons important ici, car nous voulons que la commande de la barre tienne compte du fait qu'avoir des angles de safran élevés freine très fort le bateau. Cependant le modèle pourrait également être plus complexe, il existe dans la littérature des modèles plus complets comme celui proposé par Lin Xiao et Jérôme Jouffroy [10]. Ce modèle a 4 degrés de liberté car il tient compte du roulis du bateau. Nous avons décidé de ne pas utiliser 4 degrés de liberté car la relation entre l'angle de roulis et l'angle de lacet est très difficile à modéliser. Il existe également des modèles avec 6 degrés de liberté, le problème avec ces modèles c'est qu'ils comportent beaucoup de paramètres et sont donc très difficiles à calibrer. D'autres modèles tiennent compte de l'angle de la voile, ce qui n'est pas le cas ici. En effet, on considère qu'il y a quand même un skipper dans le bateau qui règle à tout moment parfaitement les voiles pour que le bateau atteigne sa vitesse maximale. L'étude de la commande de la voile peut faire l'objet d'une étude supplémentaire en complément de ce mémoire.

Deuxième partie

Commande du système

La deuxième partie de ce travail consiste à étudier l'entrée à appliquer au système afin de commander la sortie de celui-ci. Dans le chapitre précédent, on a obtenu un système décrivant la dynamique du voilier. On a défini l'entrée et la sortie du système comme étant respectivement l'angle de barre du bateau et le cap du bateau. Comme expliqué dans le chapitre d'introduction, un pilote automatique sert à appliquer l'angle de barre nécessaire pour garder un cap précis. Le cap que l'on veut que le bateau suive est appelé la consigne du système. Comme le montre la FIGURE 16 l'erreur est la différence entre le cap désiré et le cap actuel qu'a le bateau. En fonction de cette erreur, la loi de commande détermine l'angle de barre à appliquer pour que le cap du bateau tende vers le cap désiré. La difficulté réside dans le choix de la loi de commande. En effet, le système étant non linéaire et ses paramètres étant non constants, les lois de commande classiques comme PID ou LQR ne peuvent pas être appliquées telles quelles.

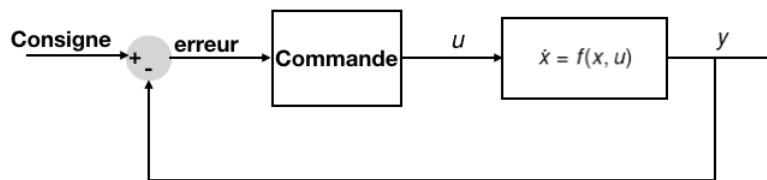


FIGURE 16 – Schéma bloc représentant la commande du système. L' **erreur** est définie comme étant la différence entre la sortie souhaitée (**Consigne**) et la sortie effective du système (**y**). En fonction de cette erreur, la commande permet de déterminer l'entrée à appliquer au système pour que la sortie système tende vers la consigne.

Ce chapitre commence par l'étude de stabilité du système. Elle permet de déterminer le comportement du système lorsque celui-ci est proche de l'équilibre. Effectivement, il est intéressant de savoir si le système va revenir spontanément à l'équilibre lorsqu'il est dans un état proche de celui-ci. Les portraits de phase du système seront analysés pour déterminer la stabilité et l'attractivité des équilibres. Une fois la stabilité déterminée, on s'intéresse à la commandabilité du système. Cela consiste à étudier, si à partir d'un état, on peut atteindre n'importe quel autre état en appliquant une certaine entrée du système. Finalement, la dernière partie de ce chapitre s'intéresse à la commande en elle-même. Dans un premier temps, la commande à appliquer pour faire du rejet de perturbation sera étudiée, ensuite l'étude se portera sur la commande à appliquer lors de manoeuvres du bateau. Les types de commandes étudiées sont la commande proportionnelle, la commande LQR et une combinaison des deux.

7 Analyse de stabilité du système

Cette section est dédiée à l'analyse de stabilité du système (29), qui décrit le comportement du voilier. Il est intéressant d'étudier les états pour lesquels le système est stable et d'étudier le comportement du modèle lorsqu'on est proche de ces états. En effet, lorsqu'un bateau navigue à l'équilibre et qu'une perturbation quelconque interfère (par exemple une variation de vent, une vague qui changerait le cap du bateau, etc), il est utile de savoir si le bateau va revenir spontanément à son état d'équilibre ou s'il faut agir sur le système. Les équations de position (29.I et 29.II) n'impactent pas les autres équations. Elles ne seront pas prises en compte lors de l'analyse de stabilité. En effet, on considère qu'un bateau peut être à l'équilibre lorsqu'il est en mouvement rectiligne. En prenant en compte ces deux équations, le seul équilibre possible est quand le bateau est immobile, ce qui n'est pas intéressant à étudier.

7.1 Recherche d'équilibres

Un système dynamique est à l'équilibre si ses variables d'états ne varient plus dans le temps : $\dot{X} = 0$. Pour rechercher les équilibres, il faut résoudre le système d'équations non linéaires :

$$\begin{cases} 0 = -\omega \\ 0 = \frac{(C_1 V_{max} - C_1 v - C_2 v |\sin \delta_r|)}{m} \\ 0 = \frac{(C_3 C_4 v^2 \sin \delta_r - C_5 \omega)}{J} \end{cases} \quad (36)$$

En résolvant ce système, on trouve les équilibres :

$$\begin{cases} \theta^* &= \theta \\ v^* &= V_{max} \\ \omega^* &= 0 \\ \delta_r^* &= 0 \end{cases} \quad (37)$$

Physiquement, cela signifie que le bateau est à l'équilibre lorsqu'il navigue à cap constant, ce qui implique un angle de barre nul, et à vitesse maximale, qui dépend bien entendu de la direction et de la vitesse du vent. Il existe donc une infinité de points d'équilibre. En effet, à chaque fois que le voilier est à cap constant, a un angle de barre nul et navigue à vitesse maximale, on considère qu'il est à l'équilibre.

7.2 Caractérisation des équilibres

7.2.1 Linéarisation du système

Il est possible de linéariser le modèle autour de ces points d'équilibre afin d'écrire le système sous la forme :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + b\tilde{u} \quad (38)$$

Où $A_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x=x^*, u=u^*}$ $b_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial u} \right) \Big|_{x=x^*, u=u^*}$ $\tilde{x} = x - x^*$ $\tilde{u} = u - u^*$

Donc :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial \omega} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial \omega} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \theta} & \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial \omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \delta_r} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \delta_r} \end{pmatrix} \tilde{\delta}_r \quad (39)$$

On calcule les différentes dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial F_1}{\partial v} &= 0 & \frac{\partial F_1}{\partial \omega} &= -1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial \theta} &= 0 & \frac{\partial F_2}{\partial v} &= \frac{-C_1}{M} & \frac{\partial F_2}{\partial \omega} &= 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial \theta} &= 0 & \frac{F_3}{\partial v} &= 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \omega} &= \frac{-C_5}{J} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \delta_r} &= 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \delta_r} &= \pm \frac{C_2 V_{max}}{m} & \frac{\partial F_2}{\partial \delta_r} &= \frac{C_3 C_4 V_{max}^2}{J} \end{aligned}$$

En injectant dans l'équation (40), on obtient le système linéarisé autour de l'équilibre :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\theta}} \\ \dot{\tilde{v}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-C_1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-C_5}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \frac{C_2 V_{max}}{m} \\ \frac{C_3 C_4 V_{max}^2}{J} p \end{pmatrix} \tilde{\delta}_r \quad (40)$$

7.2.2 Caractérisation des points d'équilibre

Pour caractériser les points d'équilibre du système, il faut calculer les valeurs propres du système linéarisé. Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & \frac{-C_1}{m} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-C_5}{J} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \left(\frac{-C_1}{m} - \lambda \right) \left(\frac{-C_5}{J} - \lambda \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Les valeurs propres sont donc

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{-C_1}{m} \\ \lambda_3 = \frac{-C_5}{J} \end{cases} \quad (42)$$

Ces équilibres ne sont pas hyperboliques car une des valeurs propres est nulle ($\lambda_1 = 0$), étant donné que toutes les constantes sont positives, les deux autres valeurs propres sont négatives. En raison de la valeur propre nulle, on ne peut pas utiliser la première méthode de Lyapounov pour déterminer si ces équilibres sont stables. Pour caractériser les équilibres, il faut étudier les trajectoires du système lorsqu'il est dans un état proche de l'équilibre.

7.2.3 Analyse de phase et des trajectoires

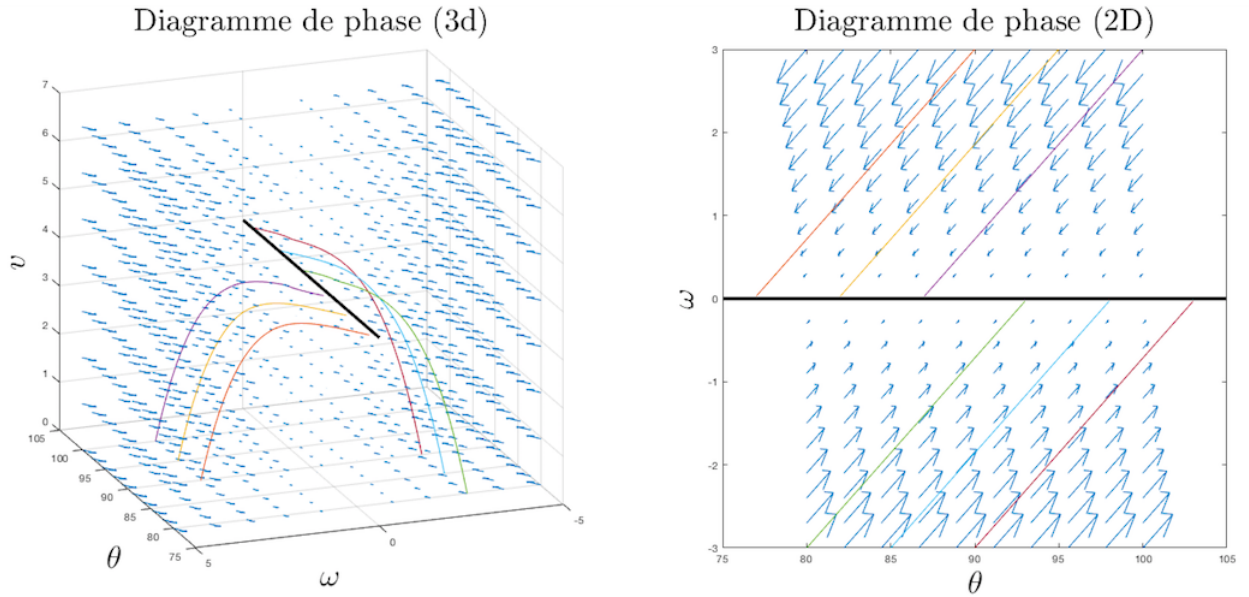


FIGURE 17 – Portraits de phase : à gauche, le portrait de phase en 3 dimensions représentant les trajectoires du système dynamique ; à droite, le portrait de phase en 2 dimensions ne reprenant pas la variable de vitesse du voilier. Les traits mauve, jaune, orange, vert, bleu et rouge représentent les trajectoires obtenues après simulation du système. Le trait noir est l'ensemble des points d'équilibre.

Il est intéressant de comprendre l'évolution des variables d'états du système lorsqu'elles sont proches de l'équilibre et que l'entrée est maintenue à l'équilibre ($\delta_r = 0$). En effet, lorsque le bateau navigue en ligne droite à vitesse constante, il y a de nombreuses perturbations qui peuvent éloigner le système de son point d'équilibre, on aimerait donc savoir si le bateau va revenir spontanément à l'équilibre, si le bateau va s'éloigner de ce point d'équilibre ou s'il va atteindre spontanément un autre point d'équilibre dans le voisinage. La FIGURE 17 reprend les portraits de phase, présentant les trajectoires du système. On voit que la composante de vitesse v et de variation de cap ω du point d'équilibre sont attractives. Si le bateau ne navigue pas à vitesse maximale ($v \neq V_{max}$) ou qu'il n'a pas une vitesse angulaire nulle ($\omega \neq 0$), le système va spontanément revenir à vitesse maximale et à vitesse angulaire nulle. Notez que ce sont les deux variables pour lesquelles la valeur propre associée est négative. Cependant en regardant sur la partie droite de la FIGURE 17, on remarque qu'une variation de vitesse angulaire entraîne une variation de cap de manière définitive. Cela signifie que si le bateau est éloigné de son équilibre, aussi petite la perturbation soit elle, il ne reviendra pas spontanément à son cap d'origine. Imaginons que le bateau navigue à vitesse maximale, en ligne droite avec un cap de 87° et que l'angle de barre soit maintenu à zéro. Sur les portraits de phase, le système se trouve donc à l'intersection entre la ligne mauve et la ligne noire. Imaginons maintenant qu'en raison d'une vague ou une variation de vent, le cap du bateau change, cela impliquerait également une variation de vitesse angulaire. On pourrait, par

exemple, se retrouver quelque part sur la ligne jaune, le portrait de phase montre que le système reviendrait spontanément à l'intersection entre la ligne jaune et la ligne noire, le système y étant en équilibre. Une petite perturbation a donc fait basculer le système d'un équilibre à un autre.

Pour un système linéaire planaire⁷, lorsqu'une de ces valeurs propres est nulle et que l'autre est négative, l'équilibre est dit non-isolé. Analogiquement, en regardant les portraits de phases, on peut considérer que les équilibres sont également non-isolés. En effet, il y a une ligne sur laquelle se trouvent tous les équilibres du système. Ceux-ci permettent de conclure à la stabilité et à l'attractivité des équilibres.

- **Stabilité** : Un équilibre est stable si les trajectoires restent arbitrairement proches de celui-ci, à condition qu'elles partent d'assez près de cet équilibre [11] :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0), \bar{u}) - \bar{x}\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Les portraits de phase décrivent exactement la définition ci-dessus d'un équilibre stable. En effet, comme expliqué précédemment, une petite perturbation de l'équilibre va mener le système à un autre point d'équilibre qui se trouve dans le voisinage de celui-ci. On peut donc conclure qu'en ne s'écartant pas trop du point d'équilibre, on peut toujours rester arbitrairement proche de celui-ci. Tous les équilibres sont donc stables.

- **Attractivité** : Un équilibre attractif est un point vers lequel chaque solution converge à condition qu'elle commence assez près de celui-ci [11] :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0), \bar{u}) - \bar{x}\| = 0$$

Les équilibres du système ne sont pas attractifs. Les solutions du système convergent vers un autre équilibre et ce, même si l'on commence assez proche de l'équilibre en question. Cependant, on peut parler d'une ligne d'équilibre attractive, car le système reviendra spontanément à un équilibre appartenant à cette ligne d'équilibre. Donc en ne considérant plus les équilibres comme des points isolés mais plutôt comme un lieu géométrique, on peut parler d'attractivité.

- **Stabilité asymptotique** : Un équilibre est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Etant donné que les équilibres ne sont pas attractifs, ils ne peuvent pas être asymptotiquement stables.

	Stabilité	Attractivité	Stabilité asymptotique
Equilibres	Oui	Non	Non
Ligne d'équilibres	Oui	Oui	Oui

7. Système avec seulement deux variables d'états

8 Analyse de commandabilité du système

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la commandabilité du système. Cela consiste à étudier si le système peut atteindre un état désiré à partir d'un état initial en appliquant une entrée qui peut varier dans le temps. L'idée est de voir, si en appliquant un certain angle de barre, le bateau peut atteindre n'importe quel cap et n'importe quelle vitesse dans l'espace des états possibles. Un système est globalement commandable si tous les états de l'espace du système sont atteignables en partant de n'importe quel état initial. Dans le cas de système non-linéaire, la commandabilité globale est difficile à déterminer et cela sort du cadre de ce mémoire. Cependant la commandabilité locale des points d'équilibre est plus facile à déterminer. Le Théorème 1.15 de [12], donne une condition suffisante (mais pas nécessaire) pour vérifier la commandabilité locale : *Si le linéarisé au point d'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) du système $\dot{x} = f(x, u)$ est commandable, alors ce système est localement commandable au point d'équilibre.* Pour vérifier la commandabilité du linéarisé, il faut appliquer le critère de Kalman : un système linéaire est commandable si la matrice de Kalman [13] :

$$C = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B) \quad (43)$$

est de rang $n = \dim(x)$. On peut vérifier que la matrice de commandabilité du linéarisé est de rang trois :

$$C = (B \quad AB \quad A^2B) \quad (44)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{C_3 C_4 V_{max}^2}{J} & \frac{C_3 C_4 C_5 V_{max}^2}{J^2} \\ \frac{C_2 V_{max}}{m} & \frac{C_1 V_{max}}{m^2} & \frac{C_1 C_2^2 V_{max}}{m^3} \\ \frac{C_3 C_4 V_{max}^2}{J} & -\frac{C_3 C_4 C_5 V_{max}^2}{J^2} & \frac{C_3 C_4 C_5^2 V_{max}^2}{J^3} \end{pmatrix} \quad (45)$$

Pour assurer que la matrice soit de rang plein, il suffit de vérifier que son déterminant soit différent de zéro :

$$\begin{aligned} \det(C) &= \frac{C_1^2 C_2 C_3^2 C_4 V_{max}^2}{J^2 m^3} - \frac{C_2 C_3^2 C_4^2 C_5^2 V_{max}^5}{J^4 m} - \frac{C_1 C_3^2 C_4^2 C_5 V_{max}^5}{J^3 m^2} + \frac{C_2 C_3^2 C_4^2 C_5^2 V_{max}^5}{J^4 m} \\ &= -\frac{C_1 C_3^2 C_4^2 V_{max}^2}{J^2 m^2} \left(\frac{C_1 C_2}{m} + \frac{C_5 V_{max}^2}{J} \right) \end{aligned} \quad (46)$$

Vu que toutes les constantes sont positives $\frac{C_1 C_2}{m} > 0$ et $\frac{C_5 V_{max}^2}{J} > 0 \implies \det(C) \neq 0$. En conclusion, le système est localement commandable, il peut donc atteindre n'importe quel point d'équilibre à condition de démarrer assez proche de celui-ci.

9 Analyse de la commande

9.1 Rejet de perturbation

Les pilotes automatiques actuels font du rejet de perturbation, c'est-à-dire qu'il applique l'angle de barre nécessaire pour que le bateau maintienne son cap. Lorsque le bateau navigue en ligne droite à vitesse maximale et que l'on vient perturber cet équilibre, comme vu dans la section 7, si l'on n'agit pas sur la barre, le bateau va changer de cap. Il va spontanément se remettre à l'équilibre mais à un autre cap. Or, le but du pilote automatique est que le bateau maintienne le cap désiré malgré toutes les perturbations. En réalité, l'équilibre du bateau est constamment perturbé par des facteurs externes qui ne sont pas prévisibles : cela passe de la variation du vent à la variation des vagues, jusqu'à la variation du réglage de voile. Il est donc primordial que le pilote automatique soit capable de rejeter ces perturbations afin que le bateau puisse garder son cap et avance donc en ligne droite. Les perturbations n'étant pas prédictibles, elles seront modélisées par un bruit blanc gaussien qui s'ajoute au signal ω ; en effet, elles vont engendrer des variations de vitesse angulaire.

9.2 Commande proportionnelle

Dans [14], Luc Jaulin et Fabrice Le Bars proposent une commande proportionnelle à l'erreur. Pour rappel, l'erreur est définie comme étant la différence entre le cap désiré et le cap réel du bateau. Cette méthode est assez intuitive, plus l'erreur est grande, plus il faut appliquer un grand angle de barre pour corriger et atteindre le cap désiré. Notons que la commande est opposée à l'erreur. Par exemple, lorsque le bateau navigue à un cap de 45° alors que le cap désiré est 35° , l'erreur est de $35 - 40 = -5$. Or pour passer de 40° à 35° , il faut lofer et donc appliquer un angle positif sur la barre (voir FIGURE 3). L'angle de barre est limité à physiquement à 90° , comme visible sur la FIGURE 12, $\delta_r \in [-90, 90]$. En pratique, le barreur expérimenté n'appliquera jamais un angle de barre supérieur à 45° car si cet angle est plus élevé, le bateau va perdre beaucoup de vitesse. Il faut trouver un compromis entre appliquer un angle de barre suffisamment élevé pour que le bateau tourne, mais pas trop élevé pour que le bateau ne perde pas trop de vitesse. Par biomimétisme, on impose que la commande ne dépasse jamais 45° . De plus, via simulations du modèle, il a été vérifié que 45° représentait un bon compromis. La commande appliquée est donc :

$$u(t) = \begin{cases} \min(-K_p \cdot e(t), 45) & \text{si } e(t) \leq 0 \\ \max(-K_p \cdot e(t), -45) & \text{si } e(t) > 0 \end{cases} \quad (47)$$

9.2.1 Choix du paramètre

La valeur du gain K_p est déterminée par essais et erreurs. La FIGURE 18 représente la réponse du système à un échelon pour différentes valeurs du paramètre K_p . Au plus le gain est élevé, au plus le bateau va se rapprocher rapidement du cap désiré. En effet, un gain plus élevé veut dire que l'angle de barre sera plus élevé, ce qui va faire tourner le

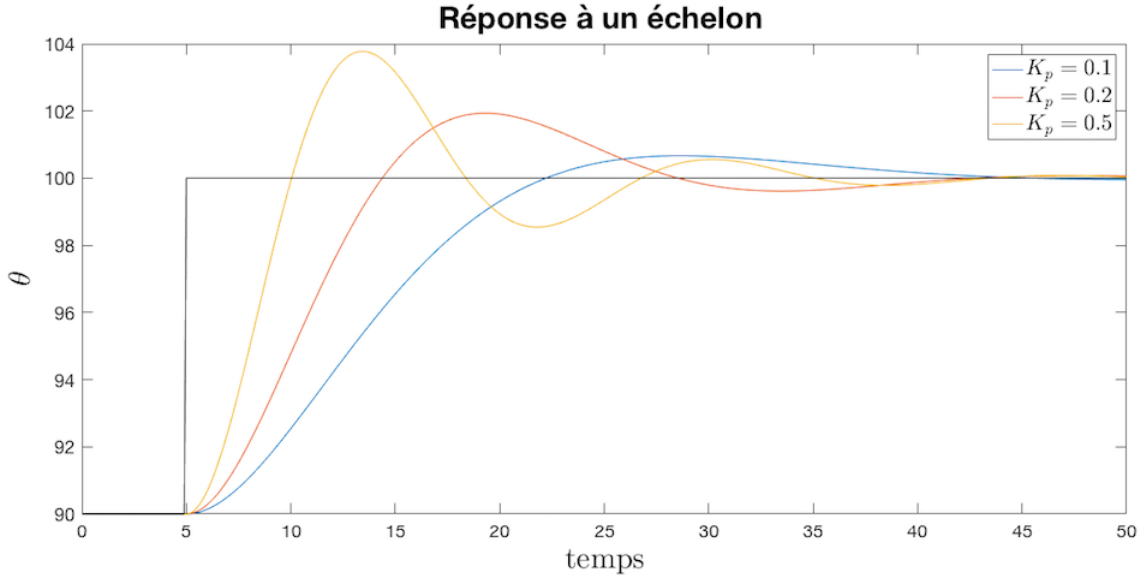


FIGURE 18 – Réponse du système à un échelon pour une commande proportionnelle pour différentes valeurs de gain. En noir, le cap désiré du bateau qui correspond à un échelon de 90° à 100° . En jaune, rouge et bleu, l'évolution temporelle du cap réel du bateau pour différentes valeurs de gain.

bateau plus vite. Une rotation plus rapide est synonyme d'inertie plus élevée également, c'est pour cette raison que pour un gain élevé, l'overshoot⁸ est plus grand. La FIGURE 18 montre également qu'un gain élevé entraîne des oscillations du signal autour de la consigne. Il est à noter que le temps nécessaire au système pour qu'il se stabilise autour de la consigne est très élevé. Le système a besoin d'une trentaine de secondes avant de se stabiliser, ce qui est énorme étant donné que la variation de cap n'est que de 10 degrés.

9.3 Commande LQR

En automatique linéaire [15], un type de commande souvent utilisé est la commande LQR⁹. Dans le cas d'un système non linéaire, on peut utiliser ce régulateur lorsque le système est proche de l'équilibre. On peut donc l'utiliser dans le cas de rejet de perturbations. Dans le cas du voilier, le système est non-linéaire, mais comme vu à la section 7.2.1, on peut linéariser le système autour d'un de ses points d'équilibre :

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + b\tilde{u} \quad (48)$$

La commande LQR de ce système linéarisé est un retour d'état du système :

$$u = -K\tilde{x} \quad (49)$$

8. On parle d'overshoot lorsque le signal dépasse la consigne

9. Linear Quadratic Regulator

Cette loi de commande minimise la fonction de critère de performance quadratique suivant :

$$J = \int_0^\infty (\tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{u}^T R \tilde{u}) dt \quad (50)$$

Où Q est une matrice semi définie positive et R est un scalaire positif. Il a été démontré [16] que le gain K vaut :

$$K = R^{-1} B^T P \quad (51)$$

où P est la solution de l'équation de Ricatti :

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (52)$$

9.3.1 Choix des paramètres

Le critère de performance tient compte de la matrice Q et du scalaire R . Ils sont déterminés par essais et erreurs. Cependant, les essais ne sont pas naïfs ; en effet, ces paramètres ont une interprétation physique :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix} \quad (53)$$

En ajustant les termes q_i de la matrice Q , on peut cibler les variables du système pour lesquelles on veut vraiment une faible erreur. Augmenter le terme q_i fera augmenter l'importance de cette variable dans le critère de performance. Si l'état x_i est loin de l'équilibre et que q_i est élevé, cela va faire augmenter considérablement le terme $\tilde{x}^T Q \tilde{x}$ dans le critère de performance que l'on cherche à minimiser. Dans le cas du voilier, la variable pour laquelle on veut que l'erreur soit très petite est le cap du bateau ($\tilde{\theta} = \tilde{x}_1$). On va donc augmenter considérablement la valeur q_1 .

Le scalaire R lui représente le coût lié pour faire l'action. En augmentant R lorsque l'angle de barre sera loin de l'équilibre ($\delta_r = 0$), le terme $\tilde{u}^T R \tilde{u}$ du critère de performance va augmenter. Cela signifie que le pilote automatique sera peu réactif car cela lui coûte beaucoup de réagir. A contrario, une faible valeur de R impliquera que le pilote sera très réactif. Pour paramétrer Q et R , il faut faire des essais-erreurs, en augmentant R lorsqu'on trouve que le pilote automatique est trop réactif (et vice versa), et en augmentant les paramètres q_i lorsqu'on trouve que la variable x_i n'est pas assez proche de son équilibre. La commande LQR représente bien le dilemme qu'à le marin lorsqu'il dirige son bateau : il aimerait bien tourner le plus rapidement possible mais il sait qu'appliquer un trop grand angle de barre ferait perdre trop de vitesse à son bateau. Il doit donc trouver un compromis. Par sécurité, la borne supérieure sur l'angle de barre est maintenue à 45° bien qu'en pratique la valeur de R est assez élevée pour que cet angle de barre maximum ne soit jamais dépassé.

Les FIGURES 19,20 ET 21, sont en accord avec ce qui a été présenté précédemment. Sur la FIGURE 19, on voit qu'au plus la valeur de q_1 est élevée, au plus le système atteint rapidement la consigne. Cependant lorsqu'elle est trop élevée il y a un risque de dépassement. La FIGURE 20 montre qu'augmenter la valeur de q_3 permet de diminuer

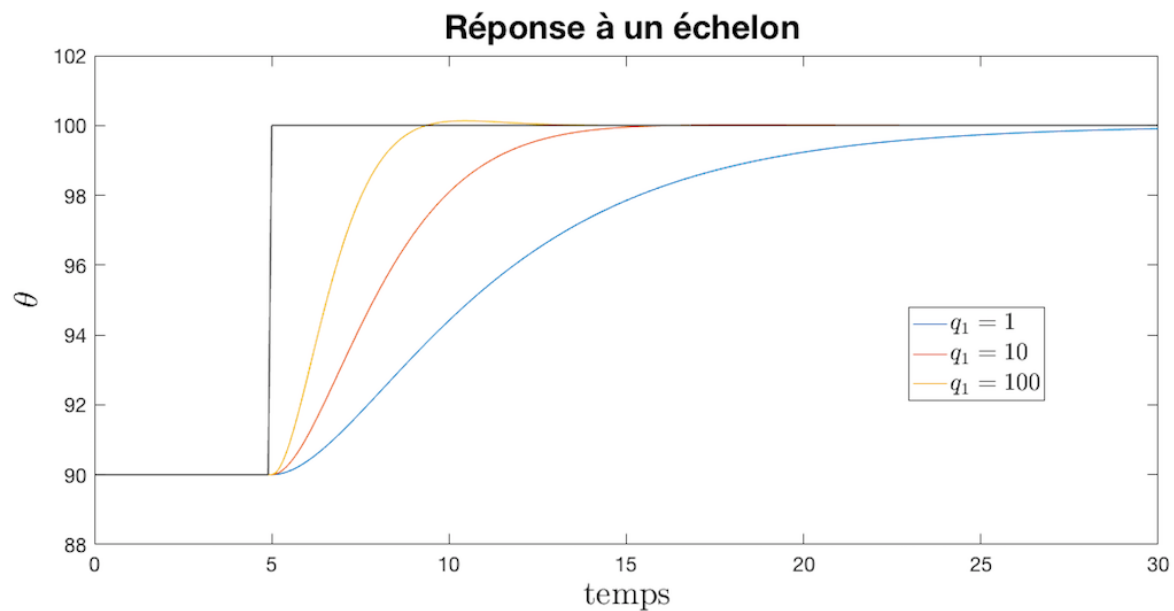


FIGURE 19 – Réponse du système à un échelon pour une commande LQR avec différentes valeurs de $Q_{11} = q_1$. En noir, le cap désiré du bateau qui correspond à un échelon de 90° à 100° . En jaune, rouge et bleu l'évolution temporelle du cap réel du bateau pour différentes valeurs de q_1

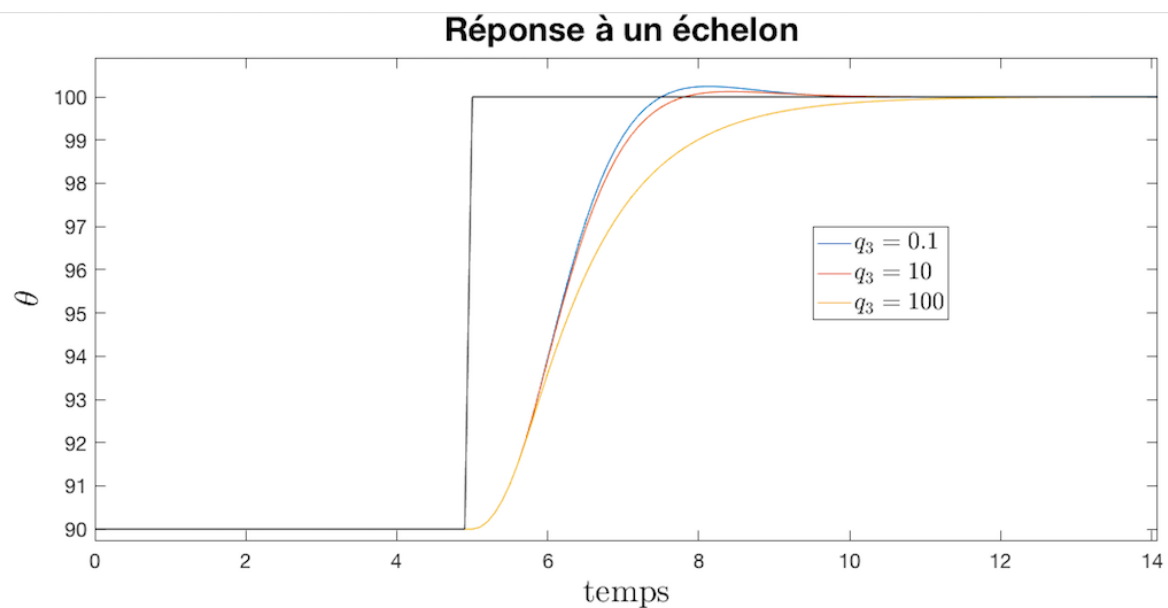


FIGURE 20 – Réponse du système à un échelon pour une commande LQR avec différentes valeurs de $Q_{33} = q_3$. En noir, le cap désiré du bateau qui correspond à un échelon de 90° à 100° . En jaune, rouge et bleu l'évolution temporelle du cap réel du bateau pour différentes valeurs de q_3

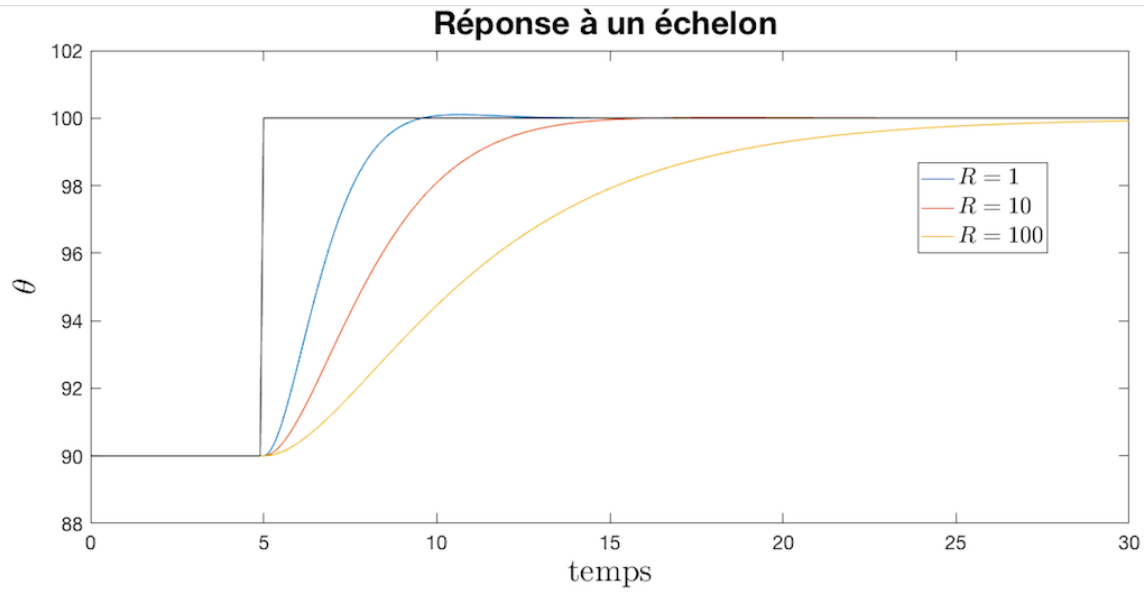


FIGURE 21 – Réponse du système à un échelon pour une commande LQR avec différentes valeurs de R . En noir, le cap désiré du bateau qui correspond à un échelon de 90° à 100° . En jaune, rouge et bleu l'évolution temporelle du cap réel du bateau pour différentes valeurs de R

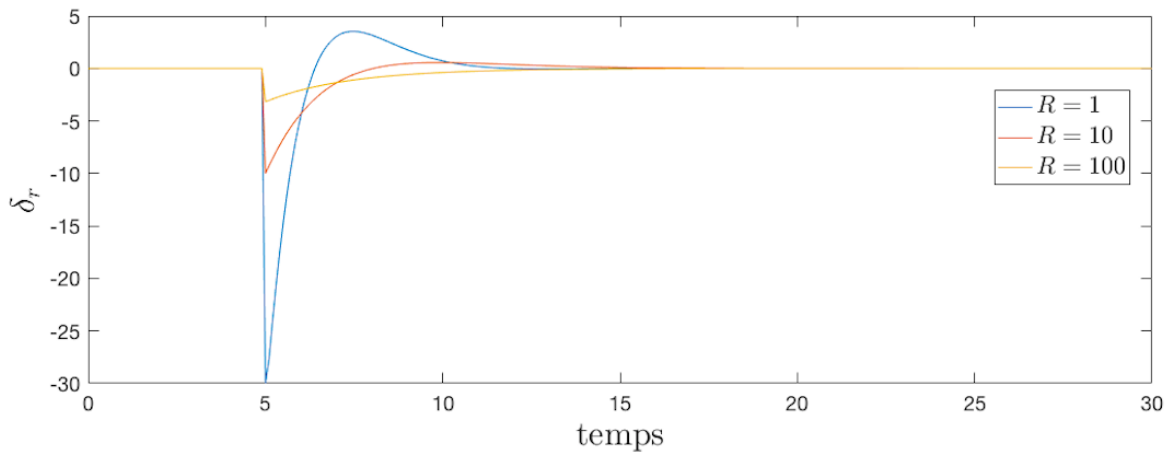


FIGURE 22 – Angle de barre du bateau en réponse à un échelon avec une commande LQR pour différentes valeurs de coût R .

le dépassement. Lorsqu'on augmente q_3 , on impose que la variable $x_3 = \omega$ reste plus proche de l'équilibre, à savoir $\omega = 0$. Donc le bateau va tourner moins rapidement, et il va donc arriver au cap désiré avec moins de vitesse angulaire, ce qui va lui permettre de ne pas dépasser le cap désiré. Finalement, la FIGURE 21 montre qu'augmenter le coût R de l'action diminue la vitesse à laquelle le bateau atteint le cap désiré. En effet lorsque le coût est élevé, l'angle de barre est plus petit, ce qui fait que le bateau tourne moins vite.

9.4 Commande LQR avec action intégrale

Après de grosses perturbations, le bateau peut être amené à faire de grosses variations de cap. Il se peut que pour certaines variations de cap, il réside une erreur statique. Pour s'assurer que l'erreur statique soit nulle, on peut ajouter une action intégrale [17]. Une approche est de créer un nouvel état \tilde{x}_4 , au sein du régulateur, qui calcule l'inté-

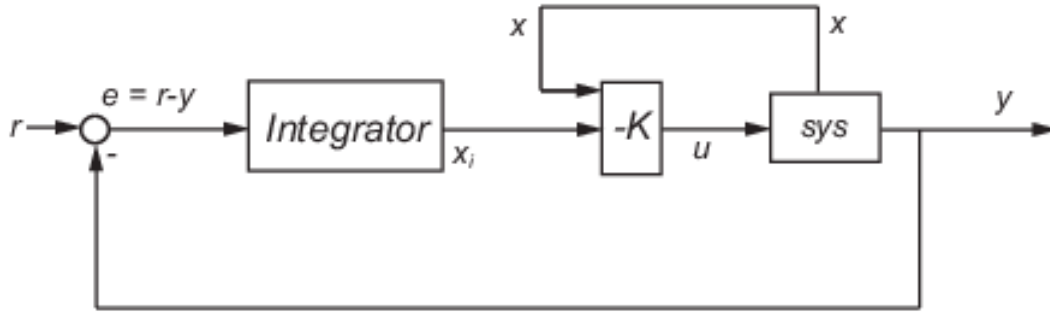


FIGURE 23 – *Shéma block d'une commande par retour d'état avec une action intégrale. Figure tirée de [18]*

grale de l'erreur du système. Le but est de calculer l'intégrale de l'erreur entre le cap souhaité et le cap réel du bateau, et de faire tendre cette intégrale vers zéro.

$$\tilde{x}_4 = \int_0^t (\theta_d - \theta(s)) ds \quad (54)$$

$$\implies \dot{\tilde{x}}_4 = \theta_d - \theta(s) \quad (55)$$

On peut donc réécrire le système sous la forme :

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} A & 0_{3 \times 1} \\ -1 & 0_{1 \times 3} \end{pmatrix} \tilde{x} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{u} \quad (56)$$

Pour le rejet de perturbation, la commande LQR avec action intégrale car elle atteint les mêmes performances que la commande LQR classique, tout en assurant que l'erreur statique soit nulle.

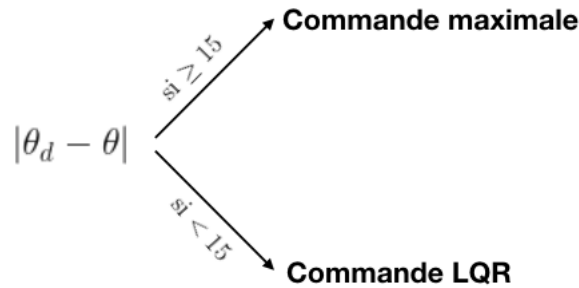
9.5 Limitations de la commande LQR

Les techniques de commande LQR présentées précédemment fonctionnent très bien pour faire du rejet de perturbation ou des petites variations de cap lorsque le vent reste constant. En effet, elles se basent sur l'hypothèse que proche de l'équilibre, le système se comporte linéairement. Pour rappel, la linéarisation (40) du système non linéaire dépend de la vitesse maximale que le bateau peut atteindre (V_{max}). Cette vitesse maximale varie en fonction de l'angle du bateau par rapport au vent et de la vitesse du vent. Ces deux paramètres varient dans le temps, c'est pourquoi il faut adapter les gains de la

commande continuellement. Si l'on désire que le pilote automatique fasse simplement du rejet de perturbation, réévaluer continuellement les gains de la commande en fonction de V_{max} suffirait. Dans le cadre de ce mémoire, on aimerait que le pilote automatique soit capable de faire manoeuvrer le bateau. Les non-linéarités du système (29) sont liées à la variation de l'angle de barre (δ_r), ce qui rend la commande LQR inappropriée pour faire des grandes variations de cap et des manoeuvres comme les virements de bord. De plus, lors d'un virement de bord, le bateau passe par le face au vent. Lorsque le bateau est face au vent sa vitesse maximale est nulle ($V_{max} = 0$), ce qui signifie que la matrice B du système linéarisé est nulle. Le gain K de la commande LQR est donc nul également (voir 51). Cela signifie que l'angle de barre qui est l'entrée du système sera nul ($u = -Kx$), le bateau va donc rester bloqué face au vent. Il est donc nécessaire de trouver une autre loi de commande capable de faire manoeuvrer le bateau.

9.6 Commande maximale combinée avec commande LQR

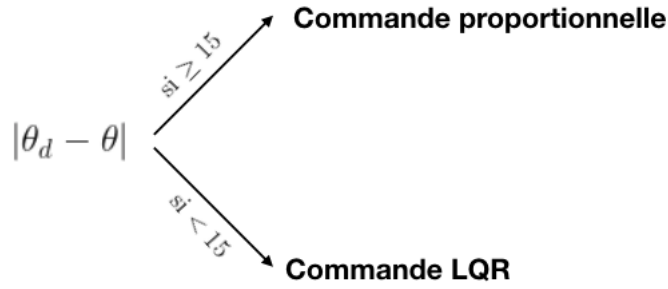
Le but de cette section est de concevoir un pilote automatique qui est capable de faire manoeuvrer le bateau, surtout faire un virement de bord qui est la manoeuvre la plus compliquée à réaliser. En pratique, lors d'un virement de bord, le navigateur expérimenté va pousser la barre à 45° et lorsque le bateau arrivera près du cap désiré, le barreur fera des petites corrections avec la barre pour arriver au cap souhaité. De manière analogue, le pilote automatique va également utiliser cette méthode. Lorsque



le cap du bateau est fort éloigné du cap souhaité (plus de 15°), alors on applique une entrée maximale de 45° d'angle de safran. Avec une erreur inférieure à 15° , on peut considérer que le système est assez proche de son équilibre et qu'il est donc judicieux d'utiliser la commande LQR.

9.7 Commande proportionnelle combinée avec commande LQR

Le plus grand désavantage de la méthode précédente est qu'au moment de la transition entre la commande maximale et la commande LQR, l'angle de barre est de 45° , ce qui est assez loin de sa valeur d'équilibre (0°). Le passage d'une commande à l'autre se fait donc brusquement. C'est pourquoi il est judicieux de remplacer la commande maximale par une commande proportionnelle de constante $k_p = 1$. Cela permet une



transition plus douce entre les deux commandes. Lorsque le pilote automatique passe de la commande proportionnelle à la commande LQR, la valeur de l'erreur vaut 15° . Vu que le gain $k_p = 1$, l'angle de barre vaut aussi 15° ce qui est beaucoup plus proche de sa valeur d'équilibre. La commande proportionnelle est limitée à 45° . De plus, en utilisant une commande proportionnelle au lieu d'une commande maximale, la vitesse angulaire du bateau est moins élevée, ce qui permet de diminuer le dépassement du système. La

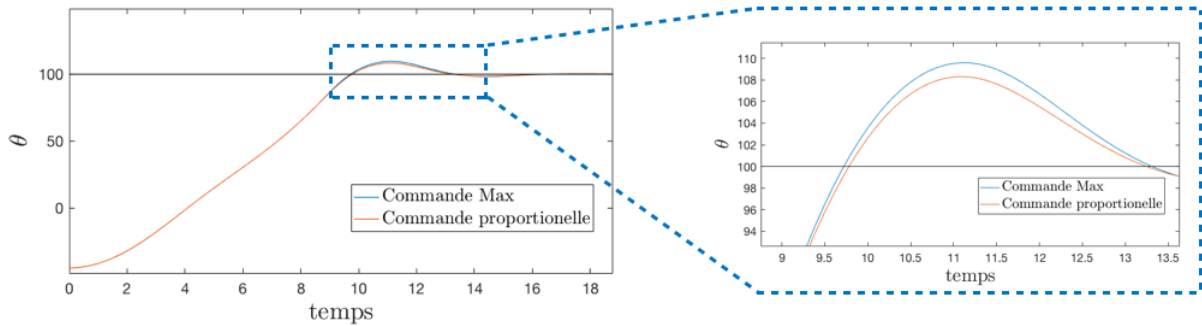


FIGURE 24 – *Comparaison entre la commande LQR combinée avec commande maximale ou la commande proportionnelle, lors d'un virement de bord du bateau. Le voilier passe d'un angle initial de -45° (tribord amure) à un angle final de 100° (bâbord amure.)*

FIGURE 24 montre qu'en combinant la commande LQR avec soit la commande maximale, soit la commande proportionnelle, le voilier est capable de faire un virement de bord. Effectivement, le bateau passe d'un angle initial de -45° (tribord amure) à un angle de 100° (bâbord amure). Cependant, la commande proportionnelle permet de limiter le dépassement de 2° sans pour autant mettre plus de temps à atteindre le cap voulu. Il est à noter que l'intégrale de l'erreur est seulement activée lors de la commande LQR. En effet, en calculant l'intégrale lorsque la commande proportionnelle ou maximale est activée, on s'expose à un phénomène d'emballement du système car l'intégrale de l'erreur est très élevée.

10 Conclusions sur la commande

Le système décrivant la dynamique du voilier n'est pas asymptotiquement stable lorsqu'il est à l'équilibre. C'est-à-dire que lorsqu'on applique une entrée fixe au système et que l'équilibre est perturbé, le bateau ne va pas spontanément revenir à son équilibre. Cependant, le système est localement commandable, cela signifie qu'en appliquant la bonne entrée, le système peut atteindre tous les états possibles. La difficulté réside dans le choix de l'entrée à appliquer pour commander le voilier. Plusieurs lois de commande ont été testées, il ressort que la commande proportionnelle combinée avec la commande LQR (avec action intégrale) est la plus concluante. Elle consiste à appliquer une commande proportionnelle lorsque le cap du bateau est loin du cap souhaité (l'erreur est grande), on considère que le bateau est occupé à manoeuvrer. Ensuite, lorsque l'erreur est faible, on considère que le bateau fait du rejet de perturbation, on applique donc une commande LQR avec action intégrale.

Troisième partie

Trajectoire optimale

Une fois que le pilote automatique est capable de suivre n'importe quelle trajectoire, il reste à déterminer la trajectoire optimale. Dans ce travail, on s'intéresse à la trajectoire du bateau durant une compétition. Il existe plusieurs types de compétitions de longueurs différentes. Ici, nous nous intéressons à des compétitions d'une durée approximative d'une heure. Dans les régates, les organisateurs placent toujours la première bouée dans l'axe du vent de telle sorte à ce que les compétiteurs doivent commencer la course par une remontée au vent. Les différents parcours de compétition comportent plusieurs remontées au vent (FIGURE 25). Pour les autres bords, la trajectoire optimale est la ligne droite, c'est pourquoi cette étude se focalise sur les remontées au vent.

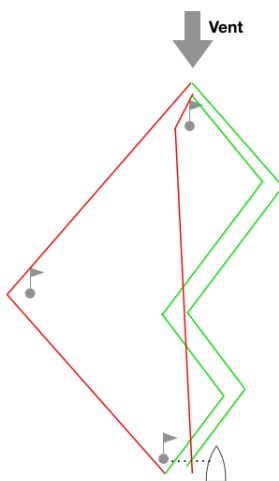


FIGURE 25 – Exemple de parcours de compétition : triangle olympique. En vert, les remontées au vent que l'on cherche à optimiser et en rouge, les autres bords où le bateau va simplement suivre une trajectoire rectiligne entre les bouées.

Ce chapitre commence avec l'étude de l'angle optimal du bateau pour lequel il remonte le plus vite au vent. Grâce à cet angle, il est possible de déterminer le cadre dans lequel le bateau doit rester pour ne pas parcourir trop de distance. Ensuite, il est montré comment il est possible de modéliser les variations de direction du vent par une chaîne finie de Markov. Finalement, plusieurs stratégies de remontée au vent sont expliquées et comparées. La plus intéressante se base sur l'hypothèse que le vent peut être modélisé par une chaîne de Markov. Elle consiste à discrétiser l'espace de la remontée au vent en un nombre fini d'états. À l'aide d'un processus markovien de décision, il est possible de déterminer à chaque état si le bateau doit virer de bord ou non.

11 Détermination du cadre

La première étape pour déterminer la remontée optimale est de trouver l'angle entre le bateau et le vent qui maximise la composante d'avancement. Le but est de remonter au vent le plus vite possible, la bouée étant dans l'axe du vent, il faut trouver l'angle pour lequel le voilier se rapproche le plus vite possible de la bouée. La polaire de vitesse peut être vue comme étant la distance maximale que peut faire le voilier lorsqu'il navigue à un certain angle par rapport au vent. L'angle optimal de remontée au vent est donc l'angle pour lequel la projection de la distance parcourue (en une heure) sur l'axe y est maximale (voir FIGURE 26).

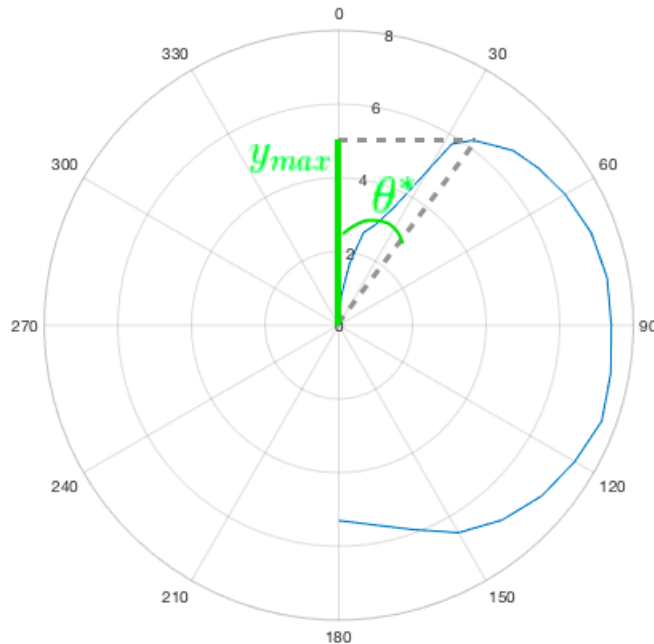


FIGURE 26 – En bleu, la polaire de vitesse du bateau Archambaud31, pour une vitesse de vent de 10 noeuds. L'angle optimal θ^* est celui dont la composante y de la vitesse est maximale

Une fois l'angle de remontée optimal déterminé, on considère que le bateau navigue toujours à cet angle optimal par rapport au vent. Il est possible de déterminer le cadre : il est défini comme étant la trajectoire du bateau s'il effectue la remontée au vent en deux bords, c'est-à-dire en virant une seule fois (voir FIGURE 27). Lorsque le bateau sort du cadre, il parcourt de la distance en trop, car en virant il pourrait atteindre la bouée d'un seul coup. Il est à noter que le cadre change de forme lorsque le vent change de direction.

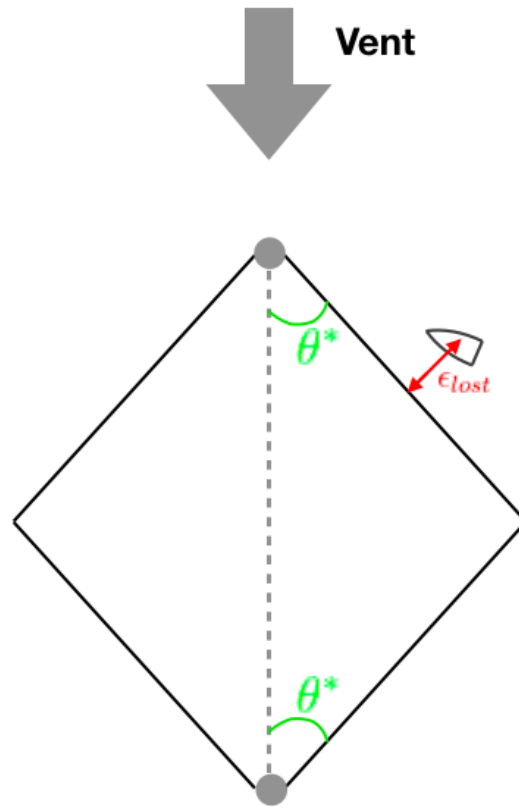


FIGURE 27 – Définition du cadre lors d’une remontée au vent ϵ_{lost} est la distance que le voilier a parcourue en trop lorsqu’il sort du cadre.

12 Modélisation du vent par une chaîne de Markov

Le vent est un phénomène compliqué à prévoir, les météorologues arrivent à faire des prédictions heure par heure de la direction générale (nord,est,sud,ouest) du vent. Cependant, dans le cadre d’une régate qui dure une heure et où l’on cherche à connaître la direction du vent à quelques degrés près, ces prévisions ne sont pas assez précises. A une échelle de temps assez petite, de l’ordre de la dizaine de secondes, la direction et la vitesse du vent sont deux phénomènes aléatoires. Dans ce travail, la vitesse du vent est supposée constante, c’est une hypothèse assez forte étant donné qu’en réalité elle varie souvent. Mais ces variations sont seulement de 2-3 noeuds ; or, au près, lorsque le vent varie de 2 noeuds, la vitesse maximale que peut atteindre le bateau ne varie que très peu (voir FIGURE 13). C’est pourquoi il est faux de considérer que la vitesse du vent ne varie pas mais il est juste de considérer que les variations de vitesse du vent ne vont pas beaucoup influencer la vitesse du bateau et donc la prise de décision du skipper. Il existe des cas où la vitesse du vent est significativement plus élevée d’un côté du parcours que de l’autre, il est donc préférable de se rendre de ce côté. Chaque plan d’eau étant différent, cela nécessite une étude pour chacun d’entre eux, ce qui n’est pas le but de ce travail.

Les organisateurs de courses s'arrangent pour qu'une remontée au vent dure une dizaine de minutes¹⁰. L'hypothèse faite lors de ce travail est que le vent, durant les dix minutes de remontée au vent, est semblable aux conditions de l'heure précédente. On peut donc considérer qu'en moyenne le vent viendra de la même direction. C'est sur ce constat que le comité de course place la bouée au vent, il mesure en moyenne la direction du vent et place la bouée dans l'axe de la direction moyenne du vent. La FIGURE 28 montre que les oscillations de la direction du vent autour de la moyenne dépassent rarement l'écart-type des mesures (σ).

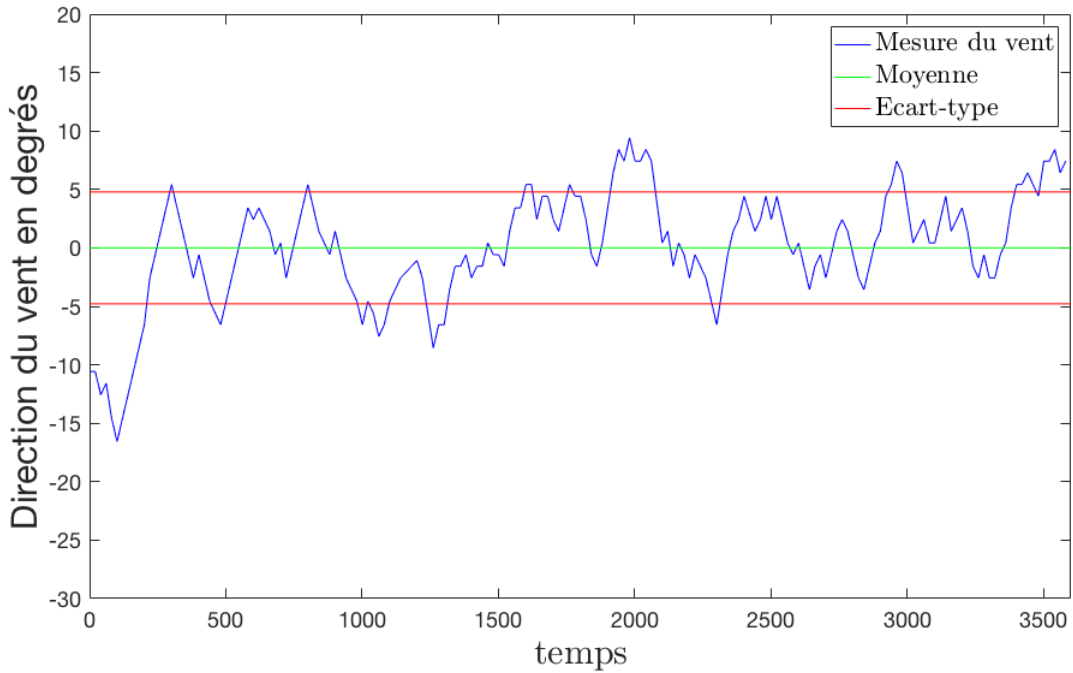


FIGURE 28 – En bleu, mesures de direction de vent centrées autour de la moyenne. En rouge, l'écart-type des mesures. (Données venant de [19])

L'idée est de modéliser les variations de direction de vent par une chaîne finie de Markov avec 3 états. Comme visible sur la FIGURE 29, on considère que la direction du vent peut être dans trois états différents, soit le vent a tourné d'une valeur σ (écart-type des mesures) à gauche, soit le vent vient dans l'axe moyen du vent mesuré précédemment, soit le vent a tourné d'une valeur σ sur la droite. Il reste à déterminer la matrice P qui représente les probabilités de transition entre les différents états :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} \quad (57)$$

10. Pour de nombreuses régates, le temps limite de la première remontée au vent est de 20 minutes

Où P_{ij} représente la probabilité de transiter vers l'état j lorsque le processus est dans l'état i :

$$P_{ij} = \mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i) \quad (58)$$

Notons que le processus de Markov n'a pas de mémoire, ce qui signifie que la probabilité de transiter d'un état à un autre est toujours la même et indépendante des états déjà visités. Pour déterminer la matrice P , on approxime le vent mesuré par l'état de la

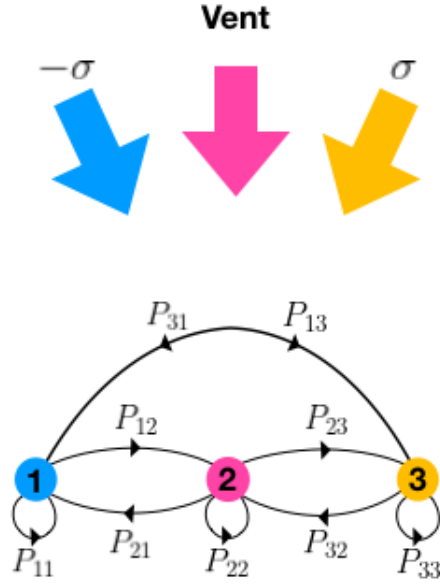


FIGURE 29 – Différents états possibles de la direction du vent : en bleu, le vent a tourné d'une valeur σ à gauche ; en rose, le vent vient dans l'axe du parcours qui correspond à l'axe moyen des mesures de vent ; en jaune, le vent a tourné d'une valeur σ à droite.

chaîne de Markov le plus proche. Sur la FIGURE 30, on voit que l'approximation colle assez bien aux données mesurées. Ensuite, on mesure le nombre de fois que chaque état est visité. On considère une estimation de la probabilité stationnaire (π_i) d'être dans un état i comme étant la fraction du nombre de visites dans cet état sur le nombre total de visites. Pour l'exemple, des mesures de vent de la FIGURE 28, on obtient les valeurs suivantes :

	Etat 1	Etat 2	Etat 3
Nombre de visites	50	67	63
Probabilité stationnaire (π)	0.2778	0.3722	0.3500

TABLE 2

De manière similaire, on peut estimer la matrice P de probabilité de transition entre les états. Pour ce faire, on compte le nombre de transitions d'un état à un autre. Pour

les mesures prises ci-dessus, on obtient la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 36 & 14 & 0 \\ 13 & 41 & 14 \\ 0 & 13 & 49 \end{pmatrix} \quad (59)$$

L'estimation de la probabilité de transition d'un état i à un état j est calculée :

$$P_{ij} = \frac{D_{ij}}{\sum_{j=1}^3 D_{ij}} \quad (60)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.72 & 0.28 & 0 \\ 0.19 & 0.60 & 0.21 \\ 0 & 0.21 & 0.79 \end{pmatrix} \quad (61)$$

La matrice P est markovienne. En effet, tous ses éléments sont positifs et la somme de chaque ligne est égale à un. De plus, on observe que la propriété de probabilité stationnaire des états [20] est vérifiée. :

$$\pi P = \pi \quad (62)$$

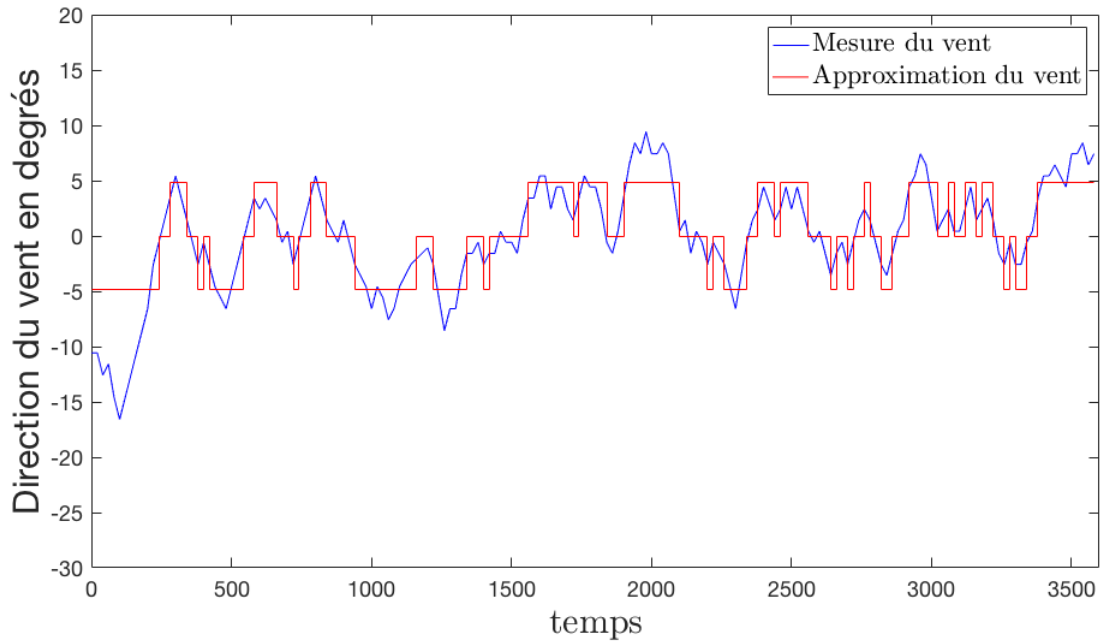


FIGURE 30 – En bleu, les mesures de direction de vent centrées autour de la moyenne. En rouge, l'approximation du vent grâce à une chaîne de Markov à 3 états.

13 MDP pour optimiser la remontée au vent

13.1 Discrétisation de l'espace à l'intérieur du cadre

Pour optimiser la remontée au vent, [21], [22] et [23] proposent d'utiliser un processus markovien de décision (MDP). La première étape est de discrétiser l'espace de la remontée au vent. Pour ce faire, on divise la remontée en différentes couches telles que le temps nécessaire d'aller d'une couche à l'autre, soit approximativement vingt secondes. C'est le temps d'échantillonnage des mesures du vent, lorsqu'on simule la chaîne de Markov représentant les variations de direction du vent, on change d'état toutes les vingt secondes. Sur chacune de ces couches, il faut déterminer les positions possibles du bateau. Le pilote automatique implémenté est un régulateur d'allure capable de maintenir un cap magnétique, ce qui signifie que le bateau naviguera toujours à l'angle optimal de remontée et ce, malgré les variations de direction du vent. Le chapitre précédent montre que le vent peut être approximé par une chaîne de Markov à trois états. Il y a trois directions de vent différentes, étant donné que le bateau navigue toujours à angle constant par rapport au vent, il peut avoir six directions différentes (3 lorsqu'il navigue bâbord amure et 3 lorsqu'il navigue tribord amure).

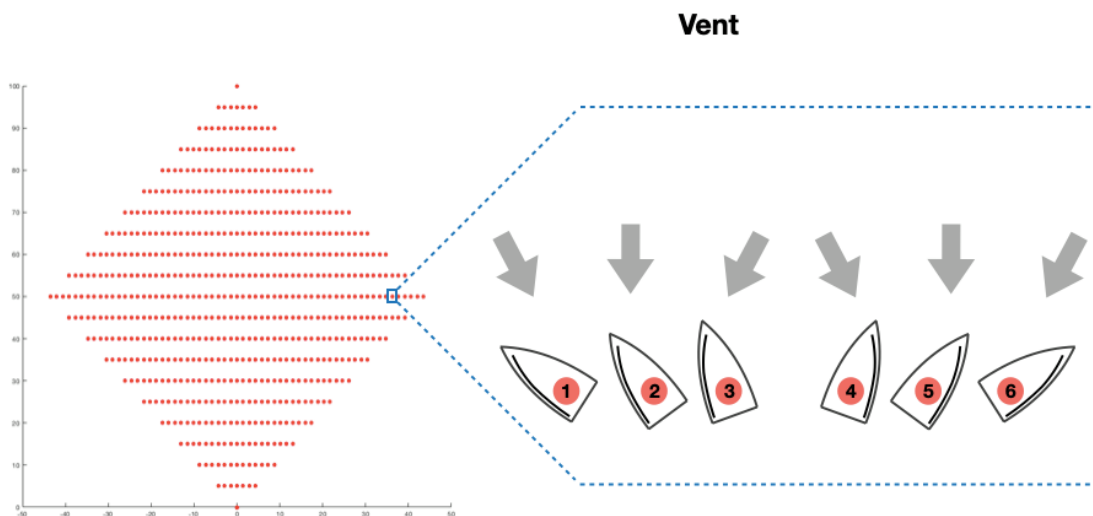


FIGURE 31 – *Discrétisation de l'espace à l'intérieur du cadre lors d'une remontée au vent. Les points rouges représentent les différents endroits de l'espace où le bateau peut se trouver. A tous ces endroits dans l'espace correspondent 6 états du processus markovien de décision : (1) le vent a tourné à gauche et le bateau est tribord amure ; (2) le vent est dans la direction de l'axe de la course et le bateau est tribord amure ; (3) le vent a tourné à droite et le bateau est tribord amure ; (4) le vent a tourné à gauche et le bateau est bâbord amure ; (5) le vent est dans la direction de l'axe de la course et le bateau est bâbord amure ; (6) le vent a tourné à droite et le bateau est bâbord amure.*

Les noeuds de la FIGURE 31 reprennent les positions possibles du bateau environ toutes les 20 secondes. Ces noeuds sont repris dans une grille G où G_{ij} est le noeud dans la i ème couche, et à la j ème colonne. Il est à noter que seulement les positions à l'intérieur du cadre ont été prises en compte. Comme vu dans la section précédente, dès que le bateau sort du cadre, il parcourt de la distance en trop, il est donc inutile de considérer qu'il existe une trajectoire optimale sortant du cadre. Chacun de ces noeuds représentent six états possibles, il est nécessaire de différencier ces états car si le bateau est à une certaine position, tribord amure, il ne pourra pas aller aux mêmes noeuds que s'il était bâbord amure.

13.2 Définition du processus markovien de décision

Comme défini dans [24], un processus markovien de décision est un tuple (S, A, Pr, C, G) où :

- S est l'ensemble des états possibles : ces états sont définis dans la section précédente.
- A est l'ensemble des actions possibles : le pilote automatique a deux choix, à chaque noeud, il peut soit virer de bord soit ne pas virer de bord. $A := \{\text{Virer}, \text{Pas virer}\}$
- $Pr(s, s', a)$ est la probabilité d'atteindre l'état s' en partant de l'état s sachant que le pilote automatique a choisi l'action $a \in A$. Cette probabilité est directement tirée de la matrice P de probabilité de transition du vent. Par exemple, si le bateau se trouve dans l'état 1 du noeud $G(4, 12)$ de la grille (le bateau est donc tribord amure et le vent a tourné à gauche). La probabilité qu'il se retrouve, sans virer de bord ($a = \text{Pas virer}$), dans l'état 1 du noeud $G(5, 9)$ de la grille est égale à la probabilité que le vent reste dans la même direction c'est-à-dire P_{11} . Par contre, si le bateau vire de bord, il est impossible qu'il rejoigne le noeud $G(5, 9)$, on obtient donc une probabilité nulle. C'est la probabilité que le bateau soit dans l'état 4 du noeud $G(5, 13)$ qui vaut P_{11} .
- $C(s', s, a)$ est le coût lié à la transition de l'état s vers l'état s' en exécutant l'action a . Le coût représente le temps nécessaire pour aller d'un état à un autre. Etant donné qu'on considère la vitesse du vent constante, il est facile de calculer le temps nécessaire en divisant la distance entre les deux noeuds par la vitesse maximale du bateau au près qui est donnée par la polaire de vitesse. A ce temps s'ajoute la perte de temps liée aux éventuelles manoeuvres du bateau. Comme vu dans la première partie du travail, lorsque le bateau manoeuvre, il perd de la vitesse et donc du temps. La perte de temps pour un virement de bord varie légèrement en fonction de la vitesse du vent, mais se situe toujours aux alentours de 3 secondes.
- G est l'état cible.

Le but d'un MDP est de trouver une stratégie optimale d'actions à appliquer pour minimiser le coût total. Il donne pour chaque état du système l'action optimale à

appliquer c'est-à-dire que pour chaque noeud de la grille, en fonction de la direction du vent et de l'amure du bateau, il indique si le bateau doit virer ou non. Pour ce faire, une manière de procéder est d'utiliser l'algorithme d'itération des valeurs [25]. Cet algorithme consiste à itérer l'équation (63) pour tous les états s jusqu'à ce qu'elle converge :

$$V(s) = \min_{a \in A} \left(\sum_{s' \in S} (C(s, s', a) + Pr(s, s', a)V(s')) \right) \quad (63)$$

$V(s)$ représente l'espérance du coût pour atteindre l'état final. Cela représente donc l'espérance du temps nécessaire pour atteindre la bouée au vent lorsqu'on se trouve dans l'état s . Une fois que tous les états ont convergé, on peut extraire la stratégie optimale :

$$\Pi^* = \arg \min_{a \in A} V(s) \quad (64)$$

13.3 Résultats

La FIGURE 32 montre un exemple de remontée au vent lorsqu'on utilise la stratégie optimale. Il y a de nombreuses choses intéressantes dans cette remontée. Premièrement,

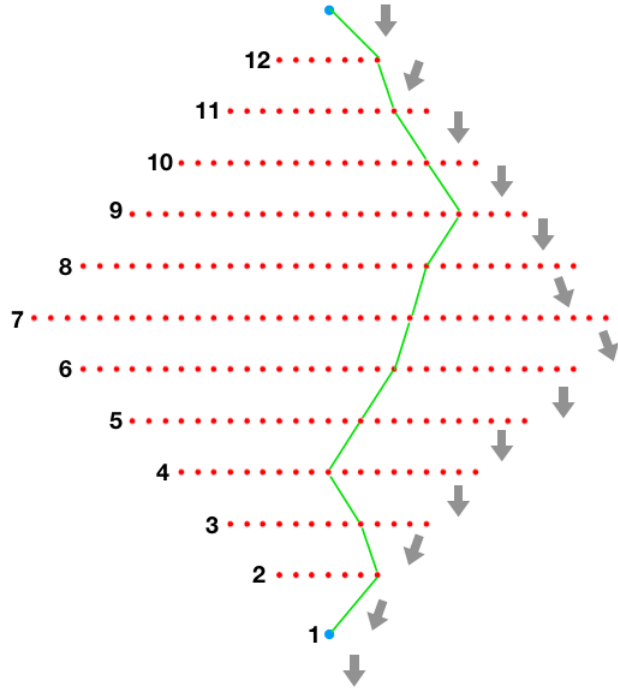


FIGURE 32 – Trajectoire du bateau lors d'une remontée au vent avec une stratégie d'action optimale. La direction du vent est simulée à l'aide de la chaîne de Markov décrite dans la section précédente.

à la couche 1, le bateau démarre bâbord amure, il est dans l'état 5. Le bateau ne vire

pas dans l'état 1, car la probabilité que le vent reste dans cette direction est de 60% (voir matrice P (61)). Il y a une plus grande probabilité que le vent tourne à droite plutôt qu'à gauche, ce qui pourrait donner envie de virer de bord, mais le coût associé au virement de bord fait qu'il n'est pas intéressant de virer. Ensuite de 1 à 2 le vent a tourné à droite, ce qui n'est pas avantageux pour le bateau. Il est important de se rappeler que la stratégie est optimale en moyenne, c'est-à-dire que sur un grand nombre de remontées, elle donnera les meilleurs résultats en moyenne, cela ne veut pas dire qu'à chaque fois elle fera la remontée la plus rapide possible. Ensuite, à la 2e couche, vu que le vent a une forte probabilité (79%) de rester à droite, le bateau vire. Sur la plupart des simulations faites, le bateau a tendance à plus privilégier le côté droit. Cela vient probablement du fait que le vent a tendance à tourner plus sur la droite, ce qui fait que tant que le vent est dans l'axe, le bateau va naviguer bâbord amure vers la droite en espérant profiter plus tard du vent qui tourne à droite. Cependant, le bateau ne va pas jusqu'au cadre à droite, car s'il est sur le cadre et que le vent tourne à droite, il va sortir du cadre et il aura donc fait de la distance en trop.

Une stratégie pour les remontées au vent pourrait être de ne virer qu'une seule fois. En effet, chaque virement fait perdre du temps et donc pour éviter cela, on pourrait se dire qu'au moins le bateau vire, au plus il arrivera vite à la bouée au vent. Ces deux stratégies ont été comparées sur une remontée au vent de 1500 mètres, et en moyenne la stratégie optimale donne de meilleurs résultats.

	Stratégie optimale	Un seul virement
Temps moyen de remontée au vent	277.4615	292.8010

TABLE 3

13.4 Implémentation

Dans la réalité, le vent ne varie pas de manière brutale toutes les 20 secondes. De plus, le bateau ne navigue pas toujours parfaitement au cap souhaité. Cependant, on voudrait que notre pilote automatique puisse tout de même prendre des décisions de manière autonome. C'est pourquoi à chaque fois que le bateau passe par une couche, sa position est assimilée au noeud de la grille duquel il est le plus proche. Durant la navigation d'une couche à la suivante, la direction du vent est enregistrée. La moyenne de ces enregistrements est utilisée pour déterminer dans quel état de la chaîne de Markov le vent se trouve. On a donc ramené l'état actuel du bateau et du vent à l'état connu le plus proche du processus de décision markovien. Ce dernier va pouvoir déterminer si le bateau doit virer de bord ou non.

14 Conclusion sur la trajectoire optimale

Ce chapitre s'intéresse à trouver la trajectoire optimale que doit suivre le voilier lorsqu'il effectue une remontée au vent. L'angle optimal pour remonter au vent peut être déterminé grâce à la polaire de vitesse. Grâce à cet angle, il est possible de déterminer le cadre dans lequel le bateau doit rester pour ne pas parcourir trop de distance. Ensuite, il est montré que la direction du vent peut être modélisée par une chaîne de Markov à 3 états. Une méthode, basée sur les mesures de direction du vent, est proposée pour déterminer la matrice de probabilité de transition entre les états. Grâce à la modélisation du vent en une chaîne finie de Markov, il est possible de voir la remontée au vent d'un voilier comme un processus markovien de décision. Ce processus permet de déterminer quand il faut virer de bord. Il donne des résultats satisfaisants étant donné qu'en suivant sa stratégie, le bateau met moins de temps à remonter que s'il virait seulement une seule fois. Ce modèle pourrait être amélioré en modélisant le vent par une chaîne de Markov avec plus de 3 états. Une autre amélioration pourrait être d'impliquer les interactions avec d'autres voiliers dans le calcul de trajectoire optimale. Le but n'étant plus de remonter au vent le plus vite possible, mais plutôt de remonter au vent plus vite que ses adversaires ([26] et [27]).

15 Simulations

Afin de vérifier la théorie exposée dans les chapitres précédents, des simulations ont été réalisées à l'aide du logiciel Simulink. Tous les schémas blocs qui servent aux simulations sont disponibles en Annexe 17.2. Premièrement, il a fallu simuler l'évolution temporelle des variables d'état qui constituent le système. Cela est fait grâce à Simulink qui utilise la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour résoudre des équations différentielles (voir schéma bloc 17.2.1). Ensuite, la commande a été implémentée. Les gains de la commande LQR ont été calculés en amont via Matlab, car Simulink ne permet pas de résoudre l'équation de Riccati(52). Finalement, un bloc implémentant le processus markovien de décision a été ajouté. Pour rendre les simulations plus visuelles, une animation a été créée. Un aperçu de cette animation est visible sur la FIGURE 33.

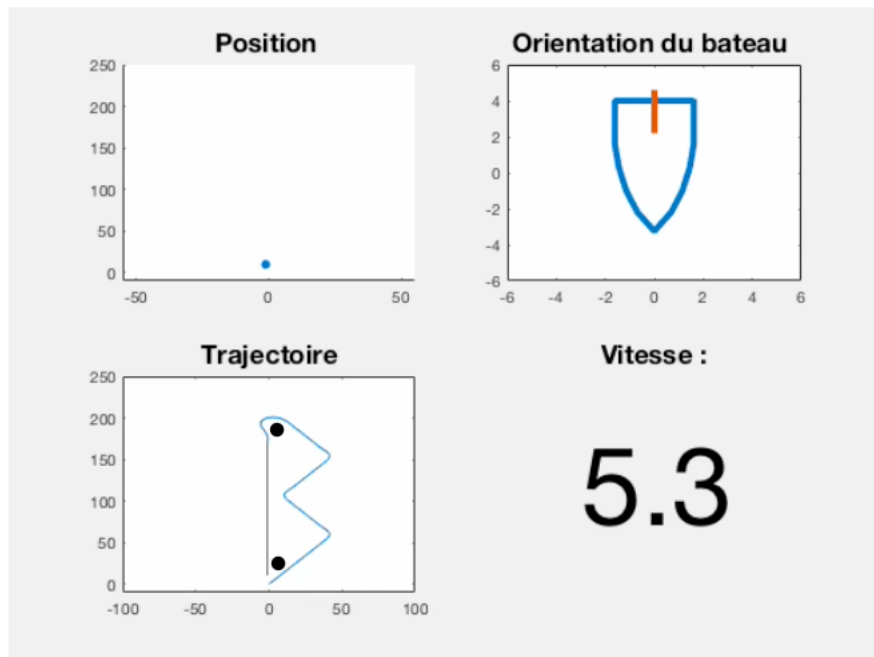


FIGURE 33 – Animation permettant la visualisation des variables d'état du système.

16 Conclusion

L'intérêt du monde pour les véhicules autonomes n'a cessé d'augmenter ces dernières années. Le voilier étant le moyen de transport automatisable le plus écologique, de nombreux scientifiques ont travaillé sur le sujet. Cependant sur le marché actuel, aucun des pilotes automatiques n'est capable de calculer des trajectoires optimales. Il existe des logiciels de routage capable de calculer les trajectoires à suivre lors de courses qui durent plusieurs jours. Malheureusement, ces logiciels ne prennent pas en compte la dynamique du bateau qui n'est pas négligeable lors de courses de plus courte durée. Dans ce travail de fin d'études, nous tentons de combiner le pilotage automatique du voilier avec le calcul de trajectoire optimale. En effet, il décrit la conception d'un pilote automatique pour voilier capable de calculer les trajectoires optimales. La conception se fait en trois parties, chacune répondant à une question de recherche.

- **Quel modèle utiliser qui décrit la dynamique du voilier ?**

Pour que le modèle ait le bon équilibre entre complexité et réalisme, des hypothèses simplificatrices ont été faites : le modèle n'a que trois degrés de liberté et on considère que les voiles du bateau sont toujours parfaitement réglées ce qui permet au voilier de toujours naviguer à son potentiel de vitesse maximum. Cependant le modèle tient compte des pertes vitesse liées aux manoeuvres du bateau. Finalement, des méthodes d'identification des paramètres sont décrites. Grâce aux simulations réalisées sur Simulink, on voit que le modèle décrit bien la dynamique du voilier et ce malgré les hypothèses simplificatrices qui ont été faites.

- **Quel angle de barre faut-il appliquer au voilier afin de pouvoir commander le cap de celui-ci ?**

L'angle de barre à appliquer pour commander le système est donné par la loi de commande LQR lorsque le cap du bateau est proche de celui souhaité et par une loi de commande proportionnelle lorsque la différence entre le cap du voilier et celui souhaité est supérieure à 15 degrés. Le système proposé n'étant pas asymptotiquement stable mais localement commandable, il est donc possible d'atteindre tous les états du système en appliquant la commande décrite ci-dessus. Cette loi de commande permet d'atteindre assez vite le cap souhaité tout en appliquant un angle de barre assez faible pour ne pas perdre trop de vitesse lors des manoeuvres.

- **Quelle est la trajectoire optimale que le bateau doit suivre afin de terminer un parcours le plus rapidement possible ?**

Lorsque c'est possible, la trajectoire optimale entre deux bouées est la ligne droite. Cependant pour une remontée au vent, la trajectoire optimale peut être déterminée via un processus markovien de décision. En effet, il a été montré que les variations de

direction du vent peuvent être modélisées par une chaîne de Markov à 3 états. De cette hypothèse, il est possible de construire le processus markovien de décision permettant de déterminer lorsque le voilier doit virer de bord ou non. En utilisant cette stratégie, le voilier est en moyenne plus rapide que s'il effectuait la remontée en deux bords.

16.1 Pistes d'améliorations pour d'éventuels futurs travaux

Suite à cette recherche, de nombreux travaux pourraient être réalisés afin d'améliorer le pilote automatique proposé :

- Le nombre de degrés de liberté du système pourrait être augmenté à 4 ou 6 ;
- La commande des voiles pourrait être implémentée afin de rendre le bateau complètement autonome ;
- D'autres types de commandes adaptatives pourraient être étudiées ;
- Une modélisation du vent par une chaîne de Markov de plus de 3 états ;
- Ce pilote automatique pourrait être construit physiquement afin de tester son efficacité dans le monde réel ;
- Inclure l'interaction avec d'autres voiliers dans la prédiction de trajectoire optimale.

17 Annexes

17.1 Résolution analytique de l'équation de variation de vitesse

Résolution analytique de l'équation de variation de la vitesse par la méthode de la variation de la constante :

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{C_1}{m} V_{max} - \frac{C_1}{m} v \\ v(0) = V_0 \end{cases} \quad (65)$$

Résolution de la partie homogène :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -\frac{C_1}{m} v \\ \frac{dv}{v} &= -\frac{C_1}{m} dt \\ \int \frac{dv}{v} &= \int -\frac{C_1}{m} dt \\ \ln v &= -\frac{C_1}{m} t + A \\ v(t) &= K e^{-\frac{C_1}{m} t} \end{aligned} \quad (66)$$

Par variation de la constante ($K = K(t)$), en injectant l'équation (66) dans l'équation (65) on obtient :

$$\begin{aligned} K'(t) e^{-\frac{C_1}{m} t} - K(t) \frac{C_1}{m} e^{-\frac{C_1}{m} t} &= \frac{C_1}{m} V_{max} - K(t) \frac{C_1}{m} e^{-\frac{C_1}{m} t} \\ K'(t) &= \frac{C_1}{m} V_{max} e^{\frac{C_1}{m} t} \\ \int K'(t) &= \int \frac{C_1}{m} V_{max} e^{\frac{C_1}{m} t} \\ K(t) &= V_{max} e^{\frac{C_1}{m} t} + Cst \end{aligned} \quad (67)$$

En injectant (67) dans (66), on obtient :

$$\begin{aligned} v(t) &= \left(V_{max} e^{\frac{C_1}{m} t} + Cst \right) e^{-\frac{C_1}{m} t} \\ v(t) &= V_{max} + Cst * e^{-\frac{C_1}{m} t} \end{aligned} \quad (68)$$

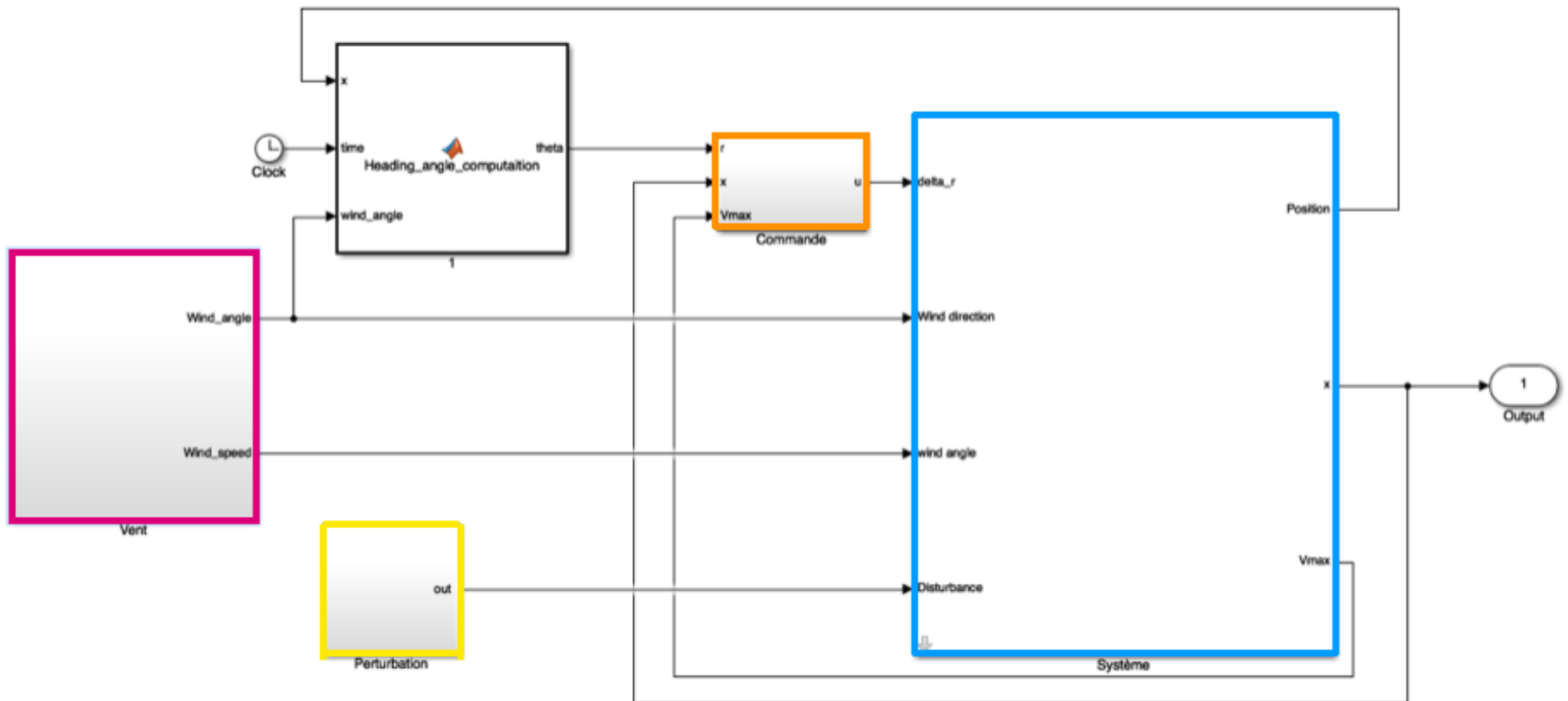
En appliquant la condition limite en $t = 0$ on obtient :

$$V_0 = V_{max} + Cst \implies Cst = V_0 - V_{max}$$

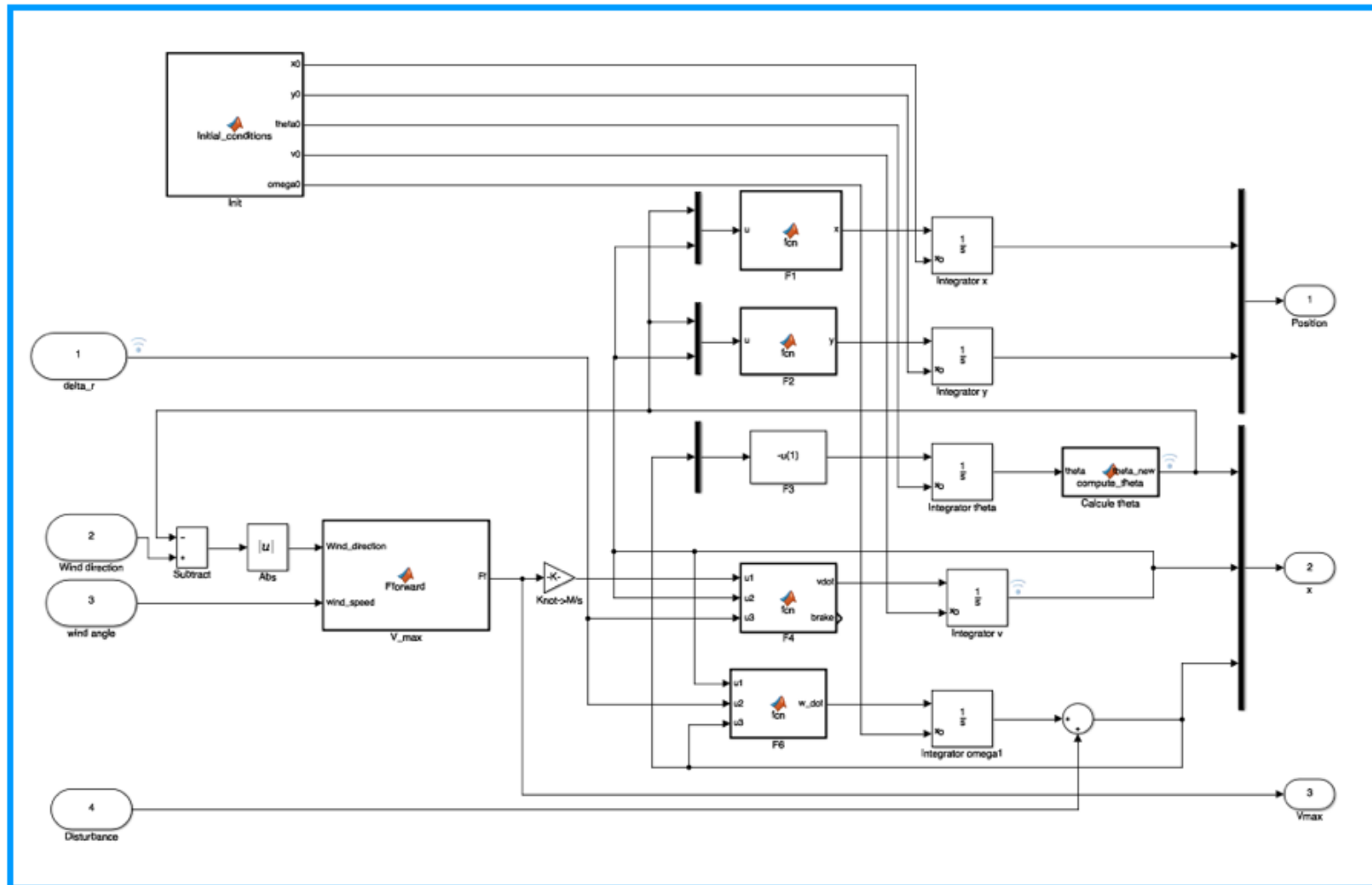
Finalement la solution finale est :

$$v(t) = V_{max} \left(1 - \left(\frac{V_0}{V_{max}} - 1 \right) e^{-\frac{C_1}{m} t} \right) \quad (69)$$

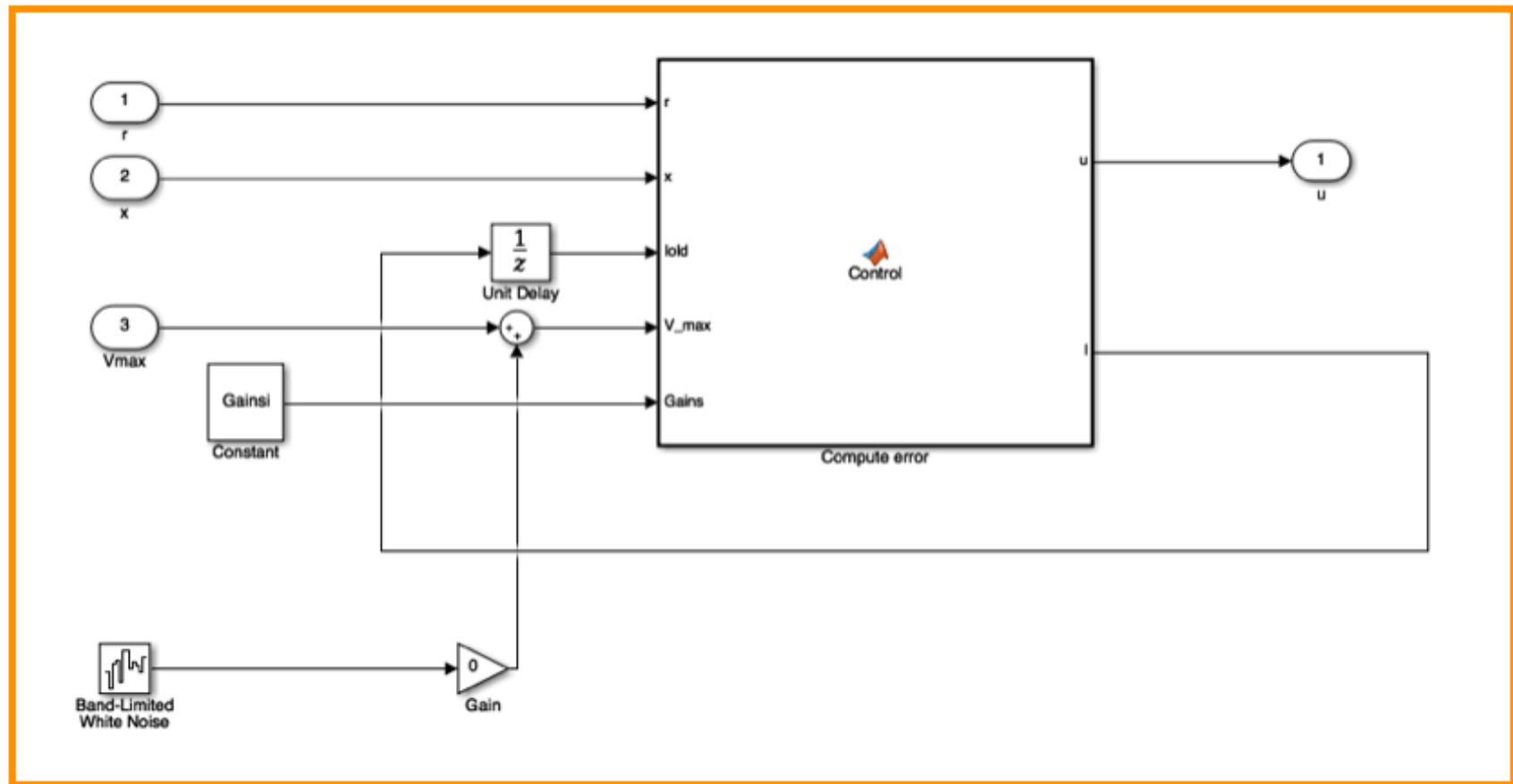
17.2 Blocs Simulink



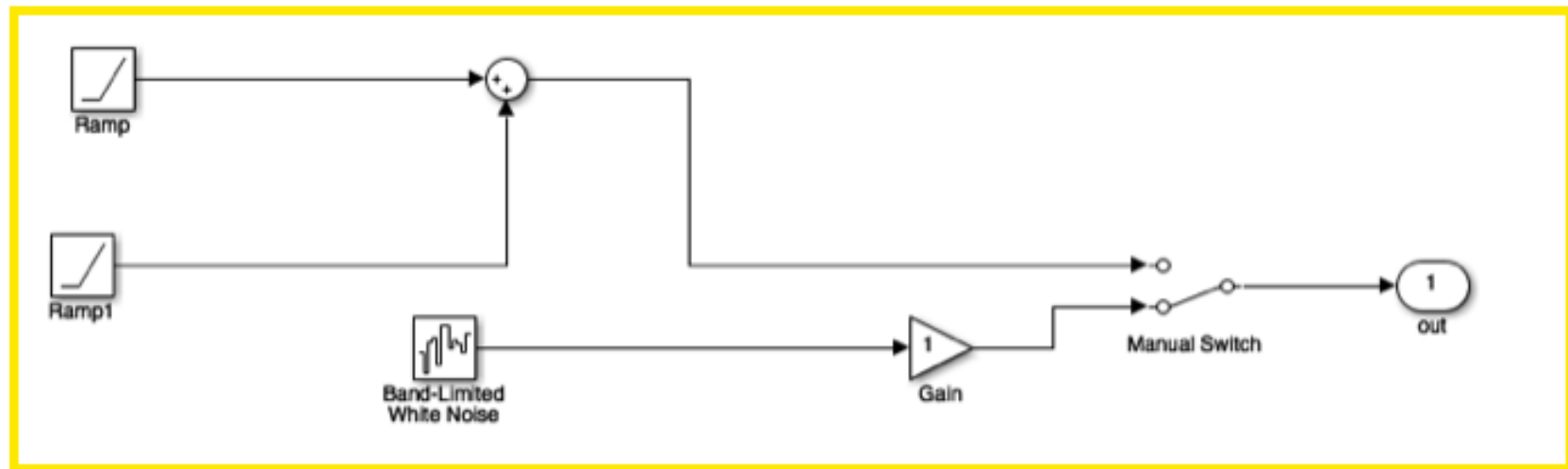
17.2.1 Système



17.2.2 Commande



17.2.3 Perturbation



17.2.4 Vent

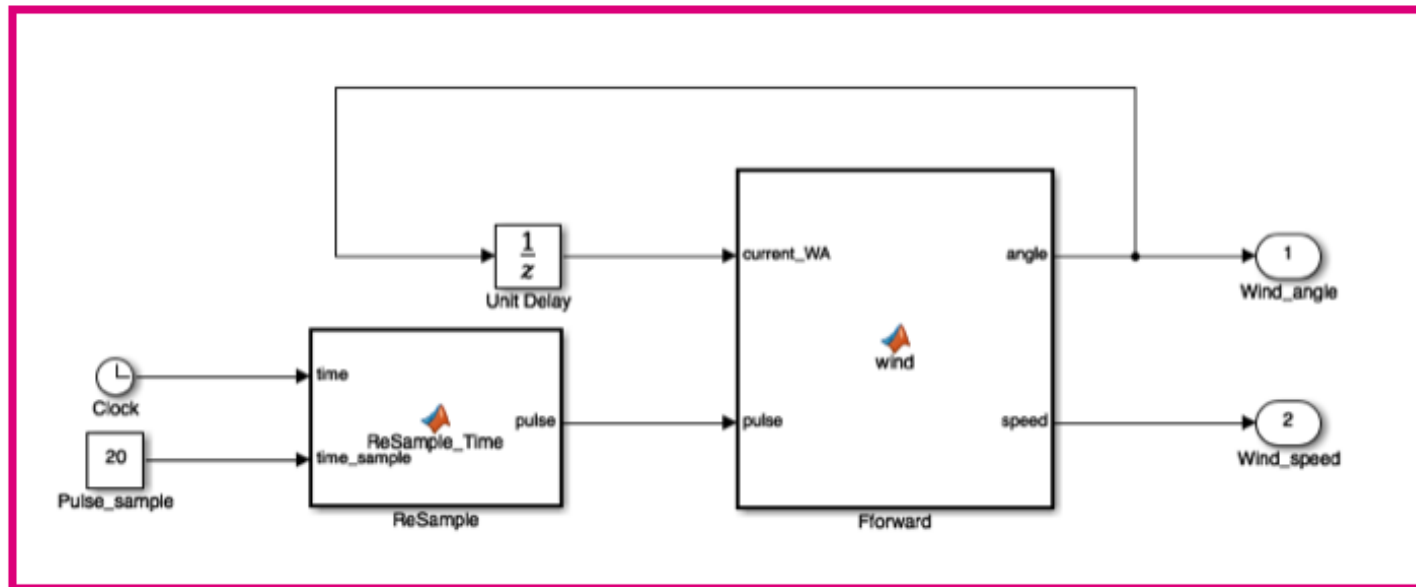


Table des figures

1	<i>Schéma du plan de lecture</i>	8
2	<i>Schéma reprenant le vocabulaire spécifique d'un voilier (Schéma tiré de [1])</i>	9
3	<i>Représentation de la force de gravité (Flèche rouge) et de la poussée d'Archimède (Flèche bleue). Schéma tiré de [2]</i>	10
4	<i>Profil de pression et de vitesse de l'écoulement du vent autour d'une voile. A l'extradoss, le flux d'air est accéléré ce qui crée une dépression, à l'intradoss le flux d'air est ralenti, ce qui crée une surpression. (Schéma tiré de [?])</i>	11
5	<i>Représentation des forces aérodynamiques générées par la voile.</i>	12
6	<i>Schéma représentant les forces hydrodynamiques et aérodynamiques du voilier lorsqu'il navigue à vitesse constante. (Schéma tiré de [3])</i>	13
7	<i>Schéma représentant les différentes allures du bateau. En rouge les allures bâbord amure et en vert les allures tribord amure</i>	14
8	<i>Lofer = se rapprocher de la direction du vent. Abattre = s'éloigner de la direction du vent.</i>	15
9	<i>Remonter au vent</i>	16
10	<i>Représentation d'un système</i>	17
11	<i>En vert, les degrés de liberté pris en compte dans le modèle : translation selon l'axe x, translation selon l'axe y et rotation selon l'axe z (lacet). En rouge, les degrés de liberté pas pris en compte dans le modèle : translation selon l'axe z, rotation selon l'axe x (tangage) et rotation selon l'axe y (roulis).</i>	18
12	<i>Schéma illustrant les différentes variables du modèle : La position (x, y) du centre de masse G, le cap du bateau (θ), la vitesse du voilier v et l'angle de la barre δ_r</i>	19
13	<i>Polaires de vitesses : Diagramme de la vitesse maximale que le bateau va atteindre (si ses voiles sont bien réglées) lorsqu'il navigue avec un certain angle par rapport au vent, pour une certaine vitesse de vent donnée. En orange, on voit que si le bateau navigue à un angle de 90° par rapport au vent qui souffle à 30 noeuds (Le noeud est la mesure de vitesse utilisée en voile. 1 noeud correspond à 0,5144 m/s), il peut atteindre au maximum une vitesse de 27 noeuds.</i>	20
14	<i>Couples qui agissent sur la rotation du bateau lorsque le safran n'est pas aligné à l'axe du bateau.</i>	22
15	<i>Méthode utilisée pour déterminer le centre de gravité du bateau. Le bateau est assimilé à un triangle isocèle dont la hauteur vaut la longueur du bateau et la base vaut la largeur du bateau.</i>	24

16	<i>Schéma bloc représentant la commande du système. L' erreur est définie comme étant la différence entre la sortie souhaitée (Consigne) et la sortie effective du système (y). En fonction de cette erreur, la commande permet de déterminer l'entrée à appliquer au système pour que la sortie système tende vers la consigne.</i>	27
17	<i>Portraits de phase : à gauche, le portrait de phase en 3 dimensions représentant les trajectoires du système dynamique ; à droite, le portrait de phase en 2 dimensions ne reprenant pas la variable de vitesse du voilier. Les traits mauve, jaune, orange, vert, bleu et rouge représentent les trajectoires obtenues après simulation du système. Le trait noir est l'ensemble des points d'équilibre.</i>	30
18	<i>Réponse du système à un échelon pour une commande proportionnelle pour différentes valeurs de gain. En noir, le cap désiré du bateau qui correspond à un échelon de 90° à 100°. En jaune, rouge et bleu, l'évolution temporelle du cap réel du bateau pour différentes valeurs de gain.</i>	34
19	<i>Réponse du système à un échelon pour une commande LQR avec différentes valeurs de $Q_{11} = q_1$. En noir, le cap désiré du bateau qui correspond à un échelon de 90° à 100°. En jaune, rouge et bleu l'évolution temporelle du cap réel du bateau pour différentes valeurs de q_1</i>	36
20	<i>Réponse du système à un échelon pour une commande LQR avec différentes valeurs de $Q_{33} = q_3$. En noir, le cap désiré du bateau qui correspond à un échelon de 90° à 100°. En jaune, rouge et bleu l'évolution temporelle du cap réel du bateau pour différentes valeurs de q_3</i>	36
21	<i>Réponse du système à un échelon pour une commande LQR avec différentes valeurs de R. En noir, le cap désiré du bateau qui correspond à un échelon de 90° à 100°. En jaune, rouge et bleu l'évolution temporelle du cap réel du bateau pour différentes valeurs de R</i>	37
22	<i>Angle de barre du bateau en réponse à un échelon avec une commande LQR pour différentes valeurs de coût R.</i>	37
23	<i>Shéma block d'une commande par retour d'état avec une action intégrale. Figure tirée de [18]</i>	38
24	<i>Comparaison entre la commande LQR combinée avec commande maximale ou la commande proportionnelle, lors d'un virement de bord du bateau. Le voilier passe d'un angle initial de -45° (tribord amure) à un angle final de 100° (bâbord amure.)</i>	40
25	<i>Exemple de parcours de compétition : triangle olympique. En vert, les remontées au vent que l'on cherche à optimiser et en rouge, les autres bords où le bateau va simplement suivre une trajectoire rectiligne entre les bouées.</i>	42
26	<i>En bleu, la polaire de vitesse du bateau Archambaud31, pour une vitesse de vent de 10 noeuds. L'angle optimal θ^* est celui dont la composante y de la vitesse est maximale</i>	43

27	Définition du cadre lors d'une remontée au vent ϵ_{lost} est la distance que le voilier a parcourue en trop lorsqu'il sort du cadre.	44
28	En bleu, mesures de direction de vent centrées autour de la moyenne. En rouge, l'écart-type des mesures. (Données venant de [19])	45
29	Différents états possibles de la direction du vent : en bleu, le vent a tourné d'une valeur σ à gauche ; en rose, le vent vient dans l'axe du parcours qui correspond à l'axe moyen des mesures de vent ; en jaune, le vent a tourné d'une valeur σ à droite.	46
30	En bleu, les mesures de direction de vent centrées autour de la moyenne. En rouge, l'approximation du vent grâce à une chaîne de Markov à 3 états.	47
31	Discrétisation de l'espace à l'intérieur du cadre lors d'une remontée au vent. Les points rouges représentent les différents endroits de l'espace où le bateau peut se trouver. A tous ces endroits dans l'espace correspondent 6 états du processus markovien de décision : (1) le vent a tourné à gauche et le bateau est tribord amure ; (2) le vent est dans la direction de l'axe de la course et le bateau est tribord amure ; (3) le vent a tourné à droite et le bateau est tribord amure ; (4) le vent a tourné à gauche et le bateau est bâbord amure ; (5) le vent est dans la direction de l'axe de la course et le bateau est bâbord amure ; (6) le vent a tourné à droite et le bateau est bâbord amure.	48
32	Trajectoire du bateau lors d'une remontée au vent avec une stratégie d'action optimale. La direction du vent est simulée à l'aide de la chaîne de Markov décrite dans la section précédente.	50
33	Animation permettant la visualisation des variables d'état du système. .	53

Références

- [1] Les glénans. Cours des glénans. *Seuil 8e édition*, pages 14–18, 2017.
- [2] Les glénans. Cours des glénans. *Seuil 8e édition*, pages 293–296, 2017.
- [3] Bertrand Chéret. Les voiles cemprendre, régler, optimiser. *Voile/Gallimard*, page 48, 2013.
- [4] Vincent Legat. A la découverte d’une nouvelle force : le frottement. *Slides du cours Iepr1011*, 2020.
- [5] John Kimball. *Physics of sailing*. CRC Press, 2009.
- [6] Carl Strömbeck. Modeling, control and optimal trajectory determination for an autonomous sailboat. 2017.
- [7] William Moebs, Samuel J Ling, and Jeff Sanny. Drag force and terminal speed. *University Physics Volume 1*, 2016.
- [8] Dick Yue. Marine hydrodynamics. *Massachusetts Institute of Technology : MIT OpenCourseWare*, Spring 2005.
- [9] G. Dimitriadis. Introduction to aircraft design. *Aerodynamics*, 2020.
- [10] Lin Xiao and Jerome Jouffroy. Modeling and nonlinear heading control of sailing yachts. *IEEE Journal of Oceanic engineering*, 39(2) :256–268, 2013.
- [11] G. Dimitriadis J-C.Delvenne and D. Dochain. Modélisation et analyse des systèmes dynamiques. *Lectures notes Louvain School of Engineering*, 2020.
- [12] Jean-Michel Coron. Quelques résultats sur la commandabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires. *Journées X-UPS*, 1999.
- [13] Nicolas Petit and Pierre Rouchon. Automatique-dynamique et contrôle des systèmes. *MINES ParisTech-CAS-Centre Automatique et Systèmes*, 2010.
- [14] Luc Jaulin and Fabrice Le Bars. A simple controller for line following of sailboats. In *Robotic Sailing 2012*, pages 117–129. Springer, 2013.
- [15] D. Dochain. Slides du cours linma1510. *Lectures notes Louvain School of Engineering*, 2020.
- [16] Kalle Mikkola. *Infinite-dimensional linear systems, optimal control and algebraic Riccati equations*. Helsinki University of Technology, 2002.
- [17] Peter Colin Young and JC Willems. An approach to the linear multivariable servomechanism problem. *International journal of control*, 15(5) :961–979, 1972.
- [18] Mathworks. lqi. *Mathworks online documentation*.
- [19] AB Philpott. Stochastic optimization and yacht racing. In *Applications of stochastic programming*, pages 315–336. SIAM, 2005.
- [20] Robert G Gallager. *Discrete stochastic processes*, volume 321. Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] Robert C Dalang, Frédéric Dumas, Sylvain Sardy, Stephan Morgenthaler, and Juan Vila. Stochastic optimization of sailing trajectories in an upwind regatta. *Journal of the Operational Research Society*, 66(5) :807–821, 2015.

- [22] Francesca Tagliaferri and Ignazio Maria Viola. A real-time strategy-decision program for sailing yacht races. *Ocean Engineering*, 134 :129–139, 2017.
- [23] Daniel S Ferguson and Pantelis Elinas. A markov decision process model for strategic decision making in sailboat racing. In *Canadian Conference on Artificial Intelligence*, pages 110–121. Springer, 2011.
- [24] Marco Saerens. Slides du cours lsinf 2275 : Decision making. *Lectures notes Louvain School of Engineering*, 2020.
- [25] Elena Pashenkova, Irina Rish, and Rina Dechter. Value iteration and policy iteration algorithms for markov decision problem. In *AAAI’96 : Workshop on Structural Issues in Planning and Temporal Reasoning*. Citeseer, 1996.
- [26] Andrew B Philpott, Shane G Henderson, and D Teirney. A simulation model for predicting yacht match race outcomes. *Operations Research*, 52(1) :1–16, 2004.
- [27] Lamia Belouaer, Mathieu Boussard, and Patrick Bot. Strategic decision making in yacht match racing : Stochastic game approach. In *The 5th High Performance Yacht Design Conference*, pages 150–159, 2015.
- [28] Ryan M Wilson. The physics of sailing. *JILA and Depart-ment of Physics, Colorado. University of Colorado, Boulder*, pages 1998–2010, 2010.
- [29] Andouglas Gonçalves da Silva Junior, Davi Henrique dos Santos, Alvaro Pinto Fernandes de Negreiros, João Moreno Vilas Boas de Souza Silva, Luiz Marcos Garcia Gonçalves, et al. High-level path planning for an autonomous sailboat robot using q-learning. *Sensors*, 20(6) :1550, 2020.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl