Introducción

Los métodos directos calculan todos los valores y vectores propios de una matriz, a diferencia de los métodos iterativos, que se centran en encontrar un subconjunto de ellos, generalmente los valores propios dominantes (es decir, el valor propio de mayor valor absoluto). La convergencia de estos métodos iterativos depende estrechamente de la estructura de la matriz sobre la que se aplican.

El método de las potencias es una técnica iterativa sencilla utilizada para aproximar el valor propio dominante de una matriz. Este método resulta particularmente útil cuando solo se necesita estimar los valores propios más significativos, especialmente en casos donde los valores extremos tienen un impacto más relevante en el análisis.

Definiciones

Sea $\vec{z}_0$ un vector arbitrario en $\mathbb{R}^n$ y A una matriz diagonalizable en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Como cualquier vector puede expresarse como una combinación lineal de los eigenvectores de una matriz diagonalizable, tenemos la siguiente representación:

$$\boxed{\vec{z}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n} \tag{1}$$

donde:

- $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ son los eigenvectores de A
- $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los coeficientes de la combinación lineal.

Eigenvectores y Eigenvalores

Por definición, los eigenvectores de A cumplen la siguiente ecuación:

$$\boxed{A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{2}$$

Esto implica que aplicar A a un eigenvector $\vec{v}_i$ simplemente lo escala por su eigenvalor λ_i.

Proceso Iterativo

Al multiplicar $\vec{z}_0$ por A, obtenemos:

$$A\vec{z}_0 \overset{(1)}{=} A(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\cdots+c_n\vec{v}_n) = c_1A\vec{v}_1+c_2A\vec{v}_2+\cdots+c_nA\vec{v}_n \overset{(2)}{=} c_1\lambda_1\vec{v}_1+c_2\lambda_2\vec{v}_2+\cdots+c_n\lambda_n\vec{v}_n$$

Definimos ahora el proceso iterativo de multiplicación de A por $\vec{z}_0$ de forma recursiva:

$$\vec{z}_k = A\vec{z}_{k-1} \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Es decir, tenemos:

$$\vec{z}_1 = A\vec{z}_0 = c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\vec{v}_n$$

$$\vec{z}_2 = A\vec{z}_1 = A \cdot (A\vec{z}_0) = A^2\vec{z}_0$$

Eigenvectores de A^k

Los eigenvectores de A^2 se comportan de la siguiente forma:

$$A\vec{v}_i = \lambda_i\vec{v}_i$$

$$A(A\vec{v}_i) = A^2\vec{v}_i = A(\lambda_i\vec{v}_i) = \lambda_i(A\vec{v}_i) = \lambda_i(\lambda_i\vec{v}_i) = \lambda_i^2\vec{v}_i$$

De manera general, si elevamos A a una potencia k, los eigenvectores $\vec{v}_i$ no cambian, pero los eigenvalores se transforman de la siguiente forma:

$$A^k\vec{v}_i = \lambda_i^k\vec{v}_i$$

Esto implica que $\vec{v}_i$ es un eigenvector de A^k con eigenvalor λ_i^k.

Por lo tanto,

$$\boxed{\vec{z}_k = A\vec{z}_{k-1} = A^k\vec{z}_0 = c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\vec{v}_n} \tag{3}$$

Condiciones Necesarias para la Convergencia

Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

1. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$
2. $(\vec{z}_0)^T \ \vec{v}_1 \neq 0$
3. A tiene eigenvectores linealmente independientes.

La primera condición indica que A tiene un eigenvalor dominante de multiplicidad 1. La segunda condición establece que $\vec{z}_0$ tiene un componente en la dirección de $\vec{v}_1$, lo cual es crucial para el método de las potencias, ya que sin este componente, el método no puede encontrar el eigenvector dominante. La tercera condición no es estrictamente necesaria, pero se incluye para simplificar el análisis.

Comportamiento en el Límite de las Iteraciones

Tomando el límite cuando $k \to \infty$, tenemos:

$$\lim_{k\to\infty} \vec{z}_k = \lim_{k\to\infty} \left(c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\vec{v}_n\right)$$

El comportamiento de $\vec{z}_k$ depende del valor de los eigenvalores:

- $\vec{z}_k$ diverge si $|\lambda_1| > 1$,
- $\vec{z}_k$ converge a 0 si $|\lambda_1| < 1$.

Para evitar estos efectos indeseables, dividimos por λ_1^k, lo que elimina el crecimiento o decaimiento causado por el eigenvalor dominante:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\vec{z}_k}{\lambda_1^k} &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{c_1\lambda_1^k\vec{v}_1}{\lambda_1^k} + \frac{c_2\lambda_2^k\vec{v}_2}{\lambda_1^k} + \cdots + \frac{c_n\lambda_n^k\vec{v}_n}{\lambda_1^k}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} + \cdots + c_n\vec{v}_n\frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + c_n\vec{v}_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\right) \\
&= c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + c_n\vec{v}_n \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k
\end{aligned}$$

Como hemos asumido que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ entonces, $1 > \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| \geq \left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right| \geq \cdots \geq \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right|$, por lo tanto, $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k$ donde $j \geq 2$ es igual a 0.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\vec{z}_k}{\lambda_1^k} = c_1\vec{v}_1$$

Así, el proceso converge al eigenvector dominante $\vec{v}_1$ de la matriz A.

Normalización del Vector

El problema es que no siempre conocemos el valor de λ_1, por lo que no podemos dividir directamente por λ_1^k. En lugar de eso, dividimos por la norma de $\vec{z}_k$ en cada paso de la iteración. Esto asegura que $\vec{z}_k$ no diverja ni converja inapropiadamente.

Definimos el proceso iterativo de multiplicar A por $\vec{x}_0$ de forma recursiva. Inicialmente, partimos de un vector $\vec{x}_0$ que es normalizado de la siguiente manera:

$$\vec{x}_0 = \frac{\vec{z}_0}{\|\vec{z}_0\|}$$

A partir de aquí, los siguientes pasos se definen como:

(i) $\vec{y_k} = A\vec{x_{k-1}}$, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$

(ii) $\vec{x_k} = \dfrac{\vec{y_k}}{\|\vec{y_k}\|}$

Ejemplo del Método para $k = 1$

Para el primer paso ($k = 1$) tenemos:

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ \vec{y_1} &= A\vec{x_0} = \frac{A\vec{z_0}}{\|\vec{z_0}\|} \end{aligned}$$

$$\vec{x_1} = \frac{\vec{y_1}}{\|\vec{y_1}\|} = \frac{\frac{A\vec{z_0}}{\|\vec{z_0}\|}}{\left\|\frac{A\vec{z_0}}{\|\vec{z_0}\|}\right\|} = \frac{\frac{A\vec{z_0}}{\|\vec{z_0}\|}}{\frac{\|A\vec{z_0}\|}{\|\vec{z_0}\|}} = \frac{A\vec{z_0}}{\|A\vec{z_0}\|}$$

Ejemplo para $k = 2$

Para el siguiente paso ($k = 2$) tenemos:

$$k = 2$$

$$\vec{y_2} = A\vec{x_1} = A \cdot \frac{A\vec{z_0}}{\|A\vec{z_0}\|} = \frac{A^2\vec{z_0}}{\|A\vec{z_0}\|}$$

$$\vec{x_2} = \frac{\vec{y_2}}{\|\vec{y_2}\|} = \frac{\frac{A^2\vec{z_0}}{\|A\vec{z_0}\|}}{\left\| \frac{A^2\vec{z_0}}{\|A\vec{z_0}\|} \right\|} = \frac{\frac{A^2\vec{z_0}}{\|A\vec{z_0}\|}}{\frac{\|A^2\vec{z_0}\|}{\|A\vec{z_0}\|}} = \frac{A^2\vec{z_0}}{\|A^2\vec{z_0}\|}$$

Generalización del Método

De manera general, para cualquier k, se tiene que:

$$\boxed{\vec{x_k} = \frac{A^k\vec{z_0}}{\|A^k\vec{z_0}\|} \overset{(3)}{=} \frac{\vec{z_k}}{\|\vec{z_k}\|}} \tag{4}$$

Límite de $\vec{x_k}$

Ahora, calculamos el límite cuando $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\vec{z_k}}{\|\vec{z_k}\|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^k}\left(c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\vec{v}_n\right)}{\frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^k}\left(\|c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\vec{v}_n\|\right)} \right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_1^k\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + c_n\vec{v}_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\right)}{\left\|\lambda_1^k\left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + c_n\vec{v}_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\right\|\right)} \right)$$

Como $\|c\vec{x}\| = |c|\|\vec{x}\|$, entonces $\dfrac{\lambda_1^k}{|\lambda_1^k|} = \pm 1$, por lo que el límite se convierte en:

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\pm \frac{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + c_n\vec{v}_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k}{\left\| c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + c_n\vec{v}_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \right\|} \right)$$

$$= \pm \frac{\lim_{k\to\infty} \left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + c_n\vec{v}_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \right)}{\left\| \lim_{k\to\infty} \left(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + c_n\vec{v}_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \right) \right\|}$$

Conclusión del Límite

Finalmente, usando la suposición de que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$, se concluye que, $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0 \quad \text{para} \quad j \geq 2$

Por lo tanto, el límite de $\vec{x_k}$ es:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \frac{\vec{z_k}}{\|\vec{z_k}\|} = \pm \frac{c_1\vec{v_1}}{\|c_1\vec{v_1}\|} = \pm \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|}} \tag{5}$$

Esto demuestra que el límite corresponde a un eigenvector normalizado de la matriz A, asociado al eigenvalor dominante λ_1.

Radio de Convergencia

El radio de convergencia del método está determinado por $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$, donde λ_2 es el segundo eigenvalor más grande en magnitud. El método de las potencias convergerá rápidamente si $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ es pequeño y de manera más lenta si este valor está cerca de 1.

Referencias

- Beilina, L., Karchevskii, E., & Karchevskii, M. (2017). Numerical Linear Algebra: Theory and Applications. En Springer eBooks. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57304-5

- Ford, W. (2014). Numerical Linear Algebra with Applications: Using MATLAB.
- Lyche, T. (2020). Numerical Linear Algebra and Matrix Factorizations. En Texts in computational science and engineering. https://doi.org/10.1007/978-3-030-36468-7
- Wendland, H. (2017). Numerical linear algebra. https://doi.org/10.1017/978131654493