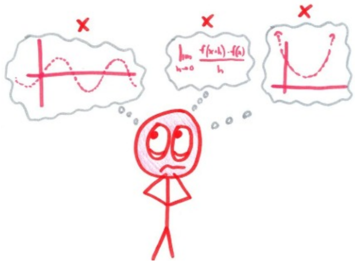
Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Análisis Numérico

Semestre 2024–2

Cañavera Aluma Mateo

Martin Acosta David Esteban



Índice

1 Objetivo

El objetivo de este trabajo es analizar y evaluar en profundidad un modelo matemático no lineal que describe la dinámica de sloshing en un contenedor cilíndrico parcialmente lleno, basado en un péndulo plano con excitaciones paramétricas y directas. Este análisis se centrará en la formulación de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema, identificando los parámetros fundamentales, los métodos de solución utilizados, y la validez de las aproximaciones aplicadas. Asimismo, se busca implementar diversos métodos numéricos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, contrastando los resultados obtenidos mediante diferentes enfoques y discutiendo el impacto de las condiciones iniciales y parámetros sobre el comportamiento dinámico. Finalmente, se pretende consolidar conocimientos teóricos y prácticos en el campo del modelado matemático de sistemas dinámicos no lineales, con aplicaciones en la estabilidad de fluidos y el diseño de sistemas relacionados.

2 Descripción del problema

El problema que abordaremos consiste en la descripción, modelado y análisis del comportamiento dinámico de un líquido en un contenedor parcialmente lleno sometido a oscilaciones, fenómeno conocido como sloshing. Este comportamiento ocurre comúnmente cuando una persona camina con un recipiente, como una taza de café, generando un movimiento oscilatorio que puede llevar a derrames. El fenómeno tiene implicaciones importantes en diversas áreas de ingeniería, como el diseño de tanques de combustible en vehículos o la estabilidad de líquidos en condiciones de microgravedad.

El núcleo del problema radica en comprender cómo el movimiento de la persona induce excitaciones en el sistema, las cuales se transmiten al líquido en forma de oscilaciones no lineales. Estas excitaciones tienen dos componentes fundamentales:

- **Excitación paramétrica:** Provocada por cambios en la posición vertical del pivote del sistema equivalente a un péndulo.
- **Excitación directa:** Resultado del desplazamiento horizontal del pivote, lo que introduce un componente adicional de fuerza sobre el sistema.

Desde el punto de vista físico, el modelo matemático simplifica el problema representando el sistema como un péndulo plano no lineal, donde las propiedades del fluido se aproximan mediante parámetros geométricos del contenedor, como el radio y la altura. Las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del péndulo incluyen términos de rigidez, amortiguamiento y no linealidades cuadráticas y cúbicas. Estas ecuaciones presentan similitudes con la ecuación de Mathieu, la cual es conocida por exhibir resonancias paramétricas bajo ciertas condiciones.

Aspectos clave del problema

- **Resonancia**: El sistema puede alcanzar estados de resonancia cuando la frecuencia de excitación coincide o es múltiplo de la frecuencia natural del sistema. Esto puede causar oscilaciones amplificadas que aumentan la probabilidad de derrames.
- **Condiciones iniciales y parámetros del sistema**: La respuesta dinámica del fluido depende significativamente de factores como la longitud efectiva del péndulo, la masa del fluido, y las amplitudes de las excitaciones vertical y horizontal.

- **Fenómenos no lineales**: Para amplitudes mayores, el sistema muestra comportamientos complejos como bifurcaciones y oscilaciones caóticas, que requieren métodos avanzados de análisis, como el método del promedio y el método de escalas múltiples.

Desde una perspectiva de modelado, el problema requiere una aproximación multiescala que capture tanto los aspectos transitorios como los de estado estable. Además, es necesario evaluar cómo las propiedades geométricas del recipiente y las características del movimiento afectan el fenómeno de sloshing, con el objetivo de proponer estrategias de mitigación, como modificaciones en el diseño del contenedor o el control del movimiento durante el transporte.

3 Identificación del modelo matemático

El paper se describe la dinámica del sloshing de la taza de café mediante un modelo de péndulo plano no lineal sometido a excitaciones paramétricas y directas. A continuación, se identifican y detallan las ecuaciones que describen este fenómeno mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ecuación básica de movimiento

$$r^2\ddot{\theta} + r\left(g + \ddot{z}_0\right)\sin\theta + r\ddot{x}_0\cos\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

donde:

- r es la longitud del péndulo.
- θ es el ángulo de oscilación.
- $\ddot{\theta}$ representa a segunda derivada de θ respecto al tiempo.
- $\dot{\theta}$ representa a primera derivada de θ respecto al tiempo.
- $\ddot{x}_0$ representan la aceleración en las posición horizontal del punto pivote.
- $\ddot{z}_0$ representan la aceleración en las posición vertical del punto pivote.
- g es la aceleración gravitacional.
- $\dot{r}$ es la tasa de cambio de la longitud del péndulo.

Ecuación expandida en serie de Taylor (régimen débilmente no lineal)

Expandiendo alrededor de $\theta = 0$ en series de Taylor la ecuación anterior:

$$r^2\ddot{\theta} + r\left(g + \ddot{z}_0\right)\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) + r\ddot{x}_0\frac{\theta^2}{2} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = -r\ddot{x}_0$$

se obtiene, la ecuación de Mathieu con:

- **Excitación paramétrica:** Términos que involucran $\ddot{z}_0(t)$ (movimiento vertical de la taza).
- **Excitación directa:** El término $r\ddot{x}_0(t)$ (movimiento horizontal de la taza).
- **No linealidades:** Términos cúbicos (θ^3) y cuadráticos (θ^2).

Modelo simplificado con excitación vertical

Cuando se considera únicamente la excitación vertical, $x_0 = 0$, entonces la ecuación diferencial no dimensional se convierte en:

$$u'' + \left[1 + \varepsilon\lambda\Omega^2\cos(\Omega\tau)\right]\left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right) = 0$$

donde:

- $\tau = \omega t$ es la variable temporal no dimensional.
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r_0}}$ es la frecuencia natural del sistema.
- ε es un parámetro de control.
- λ relaciona la longitud efectiva con la amplitud de la oscilación.
- $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ es la relación entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural.

Excitación combinada vertical y horizontal

Cuando hay movimiento vertical y horizontal simultáneo, la ecuación se transforma en:

$$u'' + \left[1 + \varepsilon\lambda_1\Omega^2\cos(\Omega\tau)\right]\left\{u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right\} - \varepsilon^2\lambda_2\Omega^2\cos(\Omega\tau)\frac{u^2}{2} = -\lambda_2\Omega^2\cos(\Omega\tau)$$

donde:

- λ_1, λ_2: Razones de amplitud para las excitaciones vertical y horizontal.
- El término $-\lambda_2\Omega^2\cos(\Omega\tau)$ representa fuerza externa directa del movimiento horizontal.
- El sistema exhibe resonancias múltiples $\Omega = 1/2, 1, 2, 3$ debido al acoplamiento no lineal.

3.1. Explicación detallada del modelo matemático

3.1.1. Interpretación física:

El movimiento del líquido en una taza de café, cuando una persona camina, genera excitaciones mecánicas en dos direcciones principales:

- **Excitación paramétrica:** Esta ocurre debido a cambios en la posición vertical del pivote, lo que genera una variación temporal en la rigidez efectiva del sistema. Este efecto está modelado mediante la aceleración vertical $\ddot{z}_0(t)$
- **Excitación directa:** Está causada por la fuerza externa que resulta del movimiento horizontal del pivote, representada por $\ddot{x}_0(t)$. Esta fuerza afecta directamente la posición del líquido dentro del contenedor.

El sistema se modela como un péndulo plano no lineal, donde la inclinación de la superficie libre del líquido se describe mediante el ángulo $\theta(t)$. La longitud efectiva del péndulo depende de las dimensiones del contenedor, principalmente el radio R y la altura H.

3.1.2. Dinámica no lineal del sistema

La ecuación diferencial que describe el movimiento general del péndulo es:

$$r^2\ddot{\theta} + r\left(g + \ddot{z}_0(t)\right)\sin\theta + r\ddot{x}_0(t)\cos\theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

Los términos de esta ecuación tienen las siguientes interpretaciones físicas:

- El término $r^2\ddot{\theta}$ representa la inercia rotacional del sistema.
- $r\left(g + \ddot{z}_0(t)\right)\sin\theta$ es la fuerza de restauración que depende tanto de la gravedad como de la aceleración vertical externa.
- $r\ddot{x}_0(t)\cos\theta$ modela la excitación directa inducida por el desplazamiento horizontal del pivote.
- $2r\dot{r}\dot{\theta}$ es un término de amortiguamiento relacionado con la variación temporal de la longitud del sistema.

En condiciones de pequeñas oscilaciones, se realiza una expansión de Taylor alrededor de $\theta = 0$, lo que produce una ecuación diferencial tipo Mathieu con no linealidades cuadráticas y cúbicas:

$$r^2\ddot{\theta} + r\left(g + \ddot{z}_0(t)\right)\left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right) + r\ddot{x}_0(t)\frac{\theta^2}{2} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = -r\ddot{x}_0(t)$$

Este tipo de ecuación es conocida por presentar inestabilidades paramétricas en ciertos rangos de frecuencia.

3.1.3. Parámetros del Modelo

Para analizar el comportamiento dinámico del sistema, se introducen parámetros adimensionales que simplifican el estudio:

- $\tau = \omega t$: Variable temporal no dimensional.
- $\omega_0^2 = \frac{g}{r_0}$: Frecuencia natural del sistema.
- $\varepsilon\lambda = -\frac{\Delta z}{r_0}$: Amplitud relativa del movimiento vertical.
- $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$: Relación de la frecuencia de excitación respecto a la frecuencia natural.

La ecuación no dimensional del sistema con solo excitación vertical es:

$$u'' + \left(1 + \varepsilon\lambda\Omega^2 \cos(\Omega\tau)\right)\left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right) = 0$$

3.1.4. Comportamiento resonante del sistema

El sistema presenta múltiples resonancias cuando se incluyen tanto la excitación vertical como la horizontal. La ecuación diferencial generalizada es:

$$u'' + \left(1 + \varepsilon\lambda_1\Omega^2 \cos(\Omega\tau)\right)\left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right) - \varepsilon^2\lambda_2\Omega^2 \cos(\Omega\tau)\frac{u^2}{2} = -\lambda_2\Omega^2 \cos(\Omega\tau)$$

Las frecuencias resonantes típicas son:

$$\Omega \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$$

- $\Omega = \frac{1}{2}$: Resonancia subarmónica.
- $\Omega = 1$: Resonancia primaria.
- $\Omega = 2$: Resonancia paramétrica principal.
- $\Omega = 3$: Resonancia de orden superior.

Estas resonancias corresponden a diferentes regímenes de estabilidad e inestabilidad dinámica del sistema.

4 Modelo de chapoteo como ecuación diferencial ordinaria

Para reescribir la ecuación diferencial de segundo orden definida en el paper como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, definimos una variable auxiliar:

$$u'' + \left[1 + \varepsilon\lambda\Omega^2 \cos(\Omega\tau)\right] \left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right) = 0$$

$$v = u', \quad \text{donde } u' \text{ es la derivada de } u \text{ respecto a } \tau$$

Por lo que su derivada, se representa como:

$$v' = u''$$

Sustituyendo u" en la ecuación original del sistema, obtenemos:

$$v' + \left[1 + \varepsilon\lambda\Omega^2 \cos(\Omega\tau)\right] \left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right) = 0$$

Despejando v':

$$v' = -\left[1 + \varepsilon\lambda\Omega^2 \cos(\Omega\tau)\right] \left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right)$$

Por lo que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden dado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\left[1 + \varepsilon\lambda\Omega^2 \cos(\Omega\tau)\right] \left(u - \frac{\varepsilon^2 u^3}{6}\right) \end{cases}$$