Programación no lineal

Tarea 2: Unconstrained Optimization

Estudiante:

Mateo Cañavera Aluma

Profesor:

Diego Alejandro Muñoz

Fecha:

August 7, 2024

Resumen

En este proyecto, un fabricante de computadoras personales está planeando la introducción de dos nuevos productos: un modelo básico y un modelo mejorado. Utilizando optimización sin restricciones, que involucra métodos de solución estándar de cálculo multivariable, se construye un modelo analítico para determinar los niveles de producción de los dos tipos de computadoras. Luego, se introducen restricciones basadas en la capacidad de producción disponible y se desarrolla un modelo utilizando métodos de multiplicadores de Lagrange. El problema se reformula como un problema de programación lineal mediante la introducción de algunas suposiciones simplificadoras y se resuelve para obtener los niveles de producción óptimos. También se introduce un análisis de sensibilidad que involucra tanto el beneficio como los niveles de producción óptimos.

Contents

1 Introducción

Hoy en día, las computadoras juegan un papel muy importante tanto en el hogar como en el lugar de trabajo. Por lo tanto, la demanda de uso de computadoras es grande y se están produciendo diferentes tipos de computadoras para satisfacer las diversas demandas de las personas. Claramente, la formulación de un problema de optimización de la vida real que involucra la fabricación de computadoras incluirá una serie de variables independientes.

En este proyecto, un fabricante de computadoras personales desarrolla dos nuevos productos. Los beneficios totales obtenidos por el fabricante se verán afectados por varios factores, como la cantidad de computadoras vendidas, el precio de venta de las computadoras, los costos fijos de fabricación, y otros factores. El objetivo aquí es ayudar al fabricante a decidir cuántas computadoras deben fabricarse y venderse para lograr el máximo beneficio anual.

En el caso de que no haya restricciones (es decir, optimización sin restricciones), se puede desarrollar un modelo matemático y resolver utilizando técnicas de cálculo multivariable. Sin embargo, esta solución supone que la empresa tiene el potencial de producir un número ilimitado de computadoras por año. En una situación real, deben imponerse restricciones en la capacidad de producción disponible, que puede depender de varios factores. Por lo tanto, se puede formular y resolver un modelo matemático utilizando optimización con restricciones. Esto implica el uso de métodos de multiplicadores de Lagrange y programación lineal para atender la introducción de restricciones impuestas. También se puede emplear el análisis de sensibilidad para considerar los efectos de las variaciones en los parámetros clave.

2 Formulación del Modelo

Para formular nuestro modelo, primero definimos una lista de variables a utilizar, a saber:

- x_1: número de computadoras del modelo básico vendidas (por año)
- x_2: número de computadoras del modelo mejorado vendidas (por año)

- p_1: precio de venta para las computadoras del modelo básico
- p_2: precio de venta para las computadoras del modelo mejorado
- C: costo de fabricación de las computadoras (\$/año)
- R: ingresos por la venta de las computadoras (\$/año)
- P: beneficio por la venta de las computadoras (\$/año)

Una lista de suposiciones se establece para garantizar que el modelo sea válido:

- $p_1 = 1250 - 0.1x_1 - 0.03x_2$
- $p_2 = 1500 - 0.04x_1 - 0.1x_2$
- $C = 500,000 + 700x_1 + 850x_2$
- $R = p_1x_1 + p_2x_2$
- $P = R - C$

Nuestro objetivo es maximizar el beneficio P (\$/año) de la venta de las computadoras. El beneficio de la venta de las computadoras se da por:

$$P = (1250-0.1x_1-0.03x_2)x_1+(1500-0.04x_1-0.1x_2)x_2-(500,000+700x_1+850x_2)$$

Desarrollando la ecuación:

$$P = (1250x_1-0.1x_1^2-0.03x_1x_2)+(1500x_2-0.04x_1x_2-0.1x_2^2)-(500,000+700x_1+850x_2)$$

$$P = 1250x_1-0.1x_1^2-0.03x_1x_2+1500x_2-0.04x_1x_2-0.1x_2^2-500,000-700x_1-850x_2$$

$$P = -0.1x_1^2 - 0.07x_1x_2 - 0.1x_2^2 + 550x_1 + 650x_2 - 500,000$$

Llamando $y = P$, la cantidad que deseamos maximizar con las variables de decisión x_1 y x_2, nuestro problema es maximizar:

$$y = -0.1x_1^2 - 0.07x_1x_2 - 0.1x_2^2 + 550x_1 + 650x_2 - 500,000$$

sujeto a $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

3 Gráfico de la Función

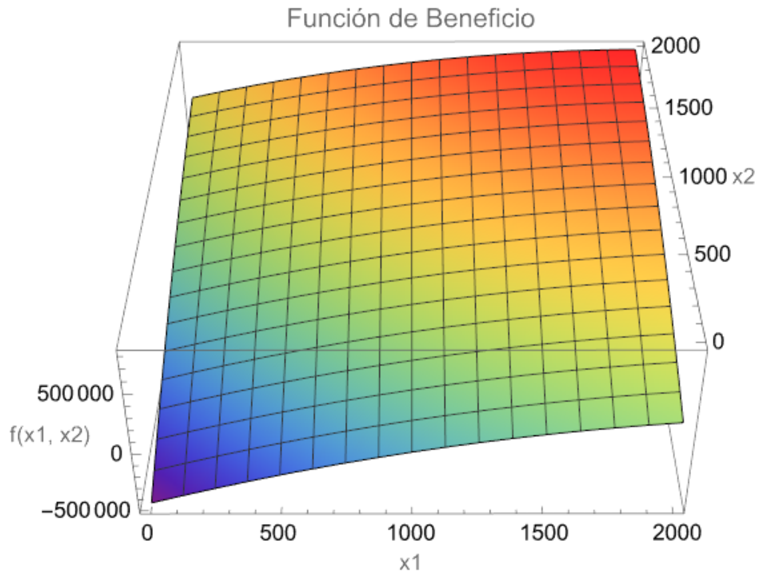

Figure 1: Gráfico de la función de beneficio y en función de x_1 y x_2.

4 Resultados obtenidos en el problema original

where D is the determinant of the coefficient matrix of equation (B8.4), which is given by $D = 0.2 \times 0.2 - 0.07 \times 0.07 = 0.0351$.

Therefore, we have

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{110 - 45.5}{0.0351} = \frac{64.5}{0.0351} \cong 1{,}838, \\ x_2 &= \frac{130 - 38.5}{0.0351} = \frac{91.5}{0.0351} \cong 2{,}607. \end{aligned} \tag{B8.6}$$

The point (x_1, x_2) given by (B8.6) represents the global maximum of f. The maximum value of the objective function is obtained by substituting (B8.6) into equation (B8.2), which yields

$$\begin{aligned} y &= (1250 - 0.1x_1 - 0.03x_2)x_1 + (1500 - 0.04x_1 - 0.1x_2)x_2 \\ &\quad - (500{,}000 + 700x_1 + 850x_2) \\ &\cong 852{,}564. \end{aligned} \tag{B8.7}$$

The manufacturer simply needs to manufacture about 1838 units of the basic model and 2607 units of the enhanced model computers per year in order to achieve the maximum annual profit of \$852,564. These figure indicate a profitable venture, so the company should be recommended to proceed with the introduction of these new products.

5 Referencias

References

[1] Caldwell, J. & Ng, D. K. S. (2004). *Mathematical Modelling: Case Studies and Projects*. City University of Hong Kong, Kowloon, Hong Kong, P.R. China.
Enlace: Mathematical Modelling: Case Studies and Projects

[2] Alireza, 1997. (n.d.). *Optimization*. GitHub repository.
Enlace: `https://github.com/1997alireza/Optimization`

[3] Mathematics Explained. (2023). *Optimization Methods: Gauss-Newton Method Explained*. YouTube video.
Enlace: `https://www.youtube.com/watch?v=C6DCtQjKkdY`