UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

Welcome to Algorithms and Data Structures! - CS2100

Búsqueda en grafos

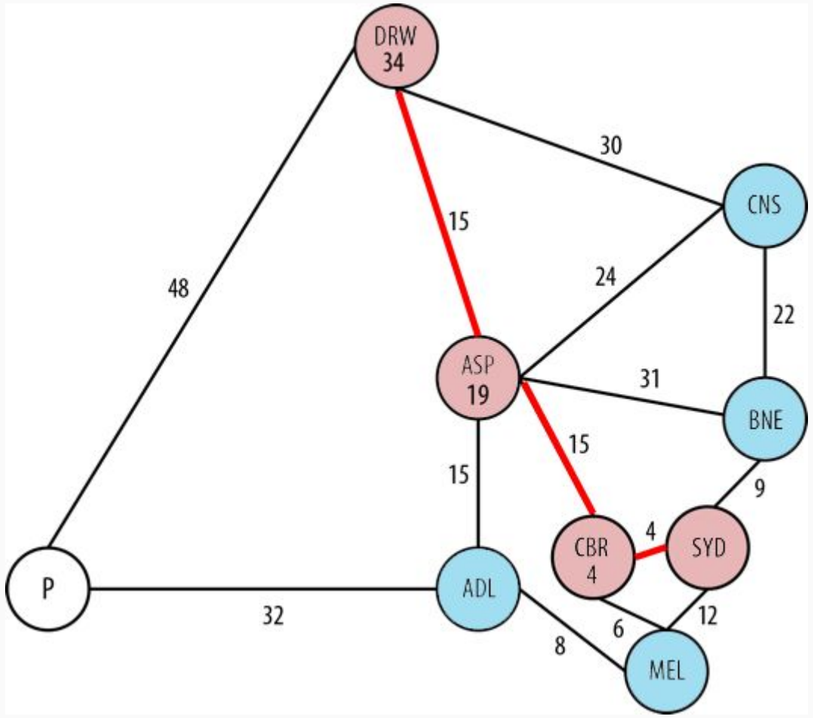
Es acerca de explorar (o atravesar) un grafo.

Cada manera de explorar un grafo puede utilizar una estructura de apoyo diferente

El peor de los casos es $O(|V|^2)$

Para cada caso se utilizará memoria como ayuda. Recordando que vértices ya han sido visitados

Se tiene varias aplicaciones, como encontrar los vértices conexos, encontrar ciclos, caminos más cortos, etc

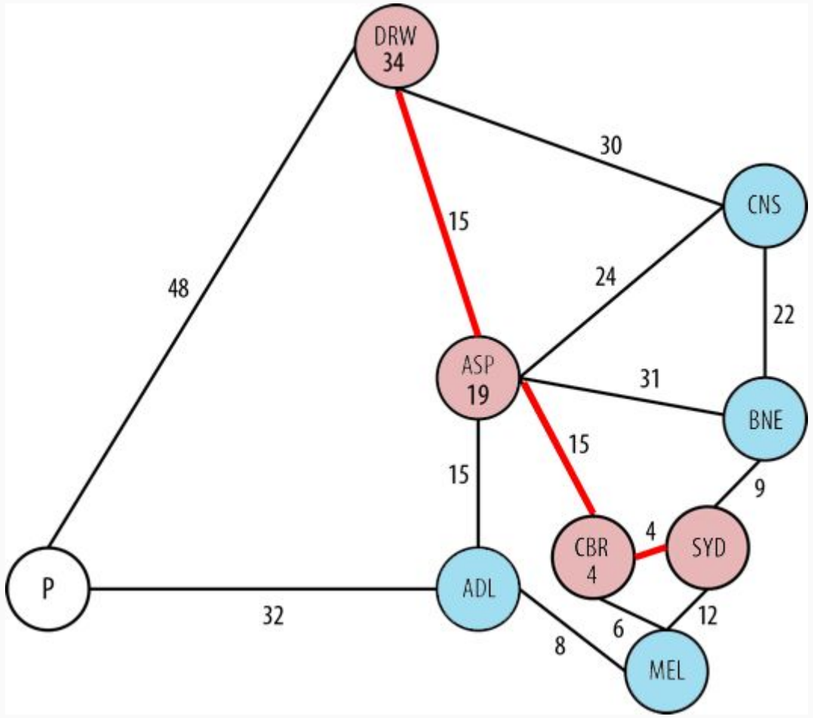


Búsqueda en grafos

La idea básica es ir expandiendo estados al generar sucesores de los estados (vértices) ya visitados

Cada estado es evaluado para saber si ya cumplimos con nuestro objetivo

Se debe usar alguna heurística para generar sucesores, como el siguiente vértice al que se llega con menor peso, o uno aleatorio

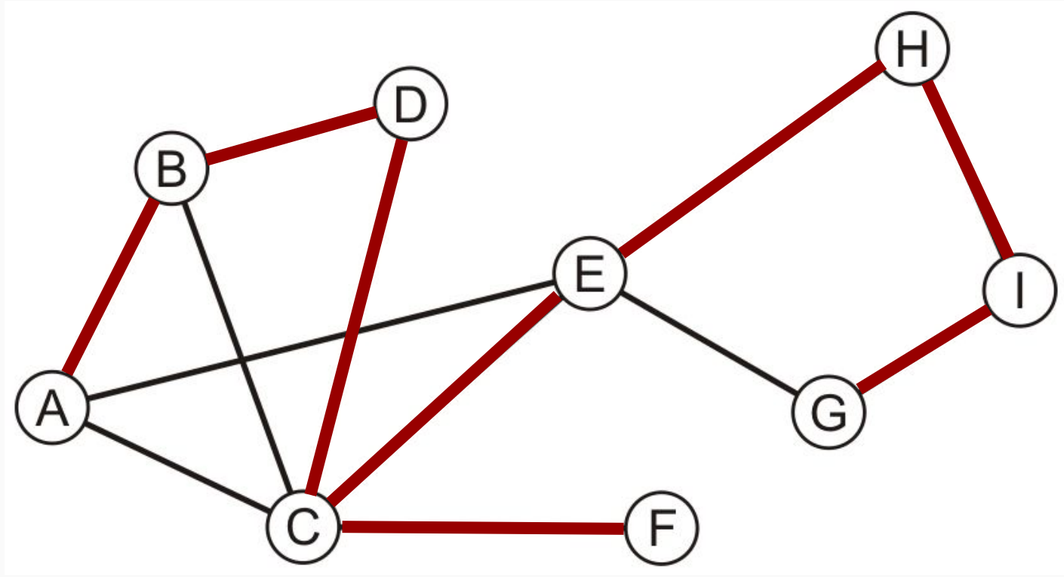


Búsqueda en profundidad (DFS)

Para explorar un grafo de esta manera vamos a necesitar una pila (stack)

DFS puede ser implementado de manera recursiva o iterativa

1. Elige cualquier vértice u, y agrégalo al stack marcándolo como visitado
   a. Desde u, si hay algún vértice v que no haya sido visitado agrégalo al stack y continúa la búsqueda desde v
   b. De otra forma, remueve el vértice u del stack y continúa desde el siguiente en la pila
2. Continúa el proceso hasta que no hayan más vértices que visitar

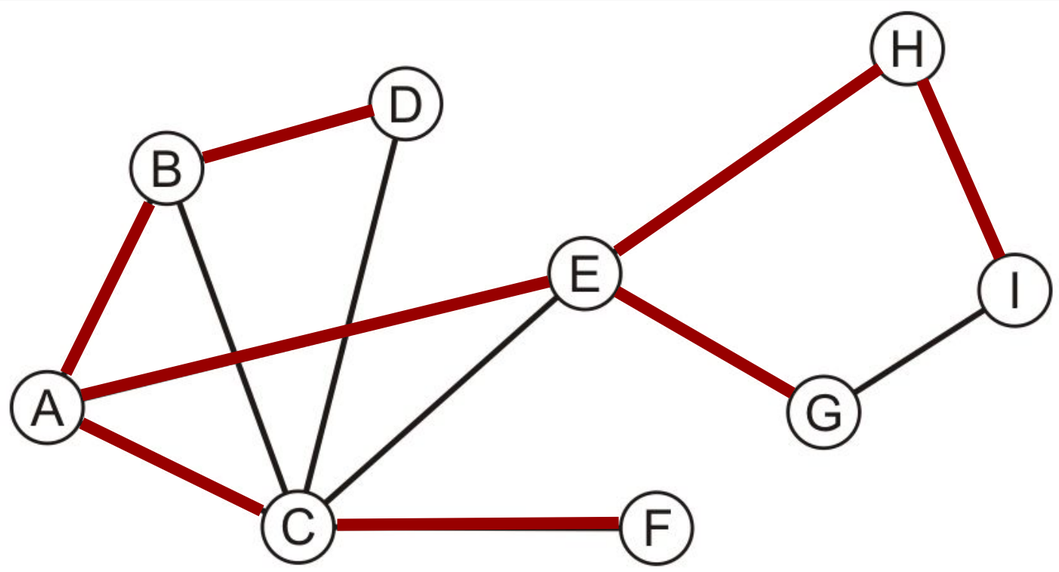


Búsqueda en amplitud (BFS)

Para explorar un grafo de esta manera vamos a necesitar una cola (queue)

El tamaño de la queue puede llegar a ser O(|V|)

1. Elige cualquier vértice u, y agrégalo a la queue marcándolo como visitado
   a. Pop el vértice v en la cima de la queue
   b. Agrega todos los vértices adyacentes a v que no hayan sido visitados
   c. Marca como visitados todos los vértices agregados a la queue
2. Continúa el proceso hasta que no hayan más vértices que visitar

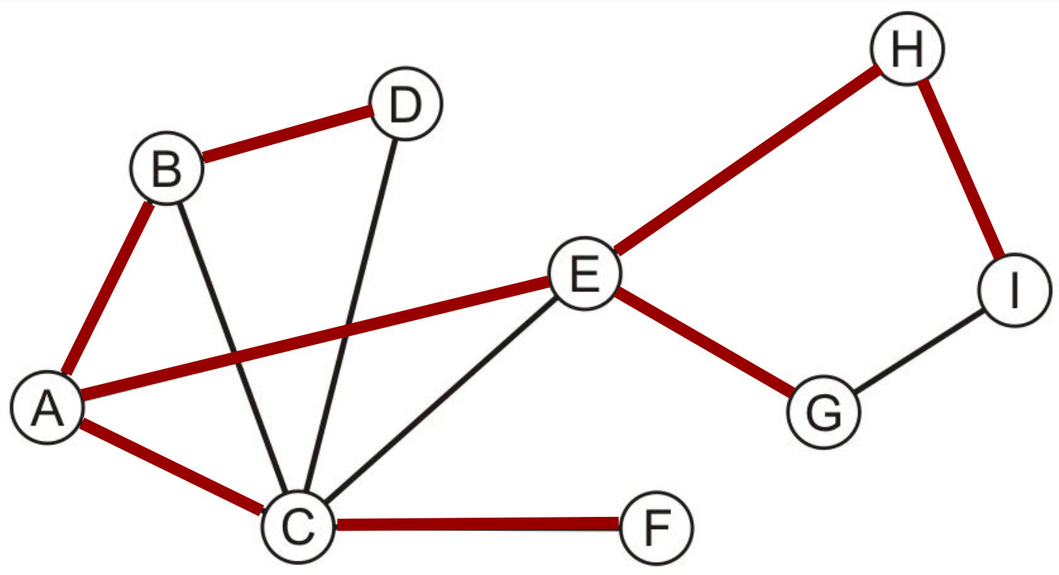


Búsqueda en amplitud (BFS)

Cómo harían para obtener el camino de un vértice inicial al final?

Se tendría que guardar (quizás en un map) el padre del nodo actual para poder iterar hacia atrás. Por ejemplo:

P(B) = A, P(E) = A, P(C) = A, P(D) = B, P(H) = E, P(G) = E, P(I) = H, y P(C) = F



Comparación

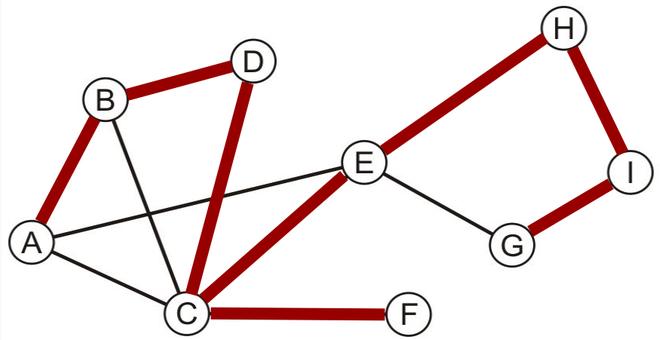
BFS es un algoritmo basado en vértices, mientras que DFS es basado en aristas. Utilizan estructuras de apoyo diferentes.

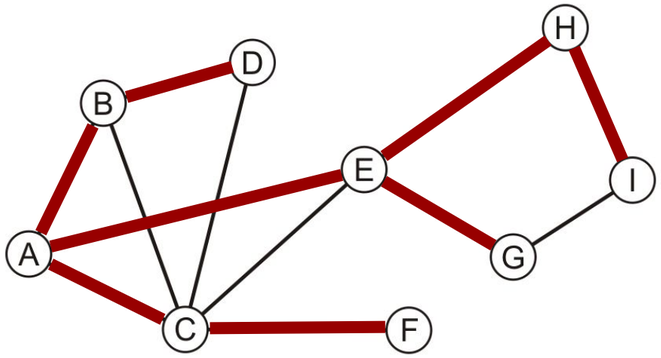
El uso de memoria en BFS es ineficiente

BFS puede encontrar el camino más corto en grafos con aristas del mismo peso, grafos bipartitos, etc

DFS se utiliza para obtener el ordenamiento topológico, saber si un grafo es fuertemente conexo

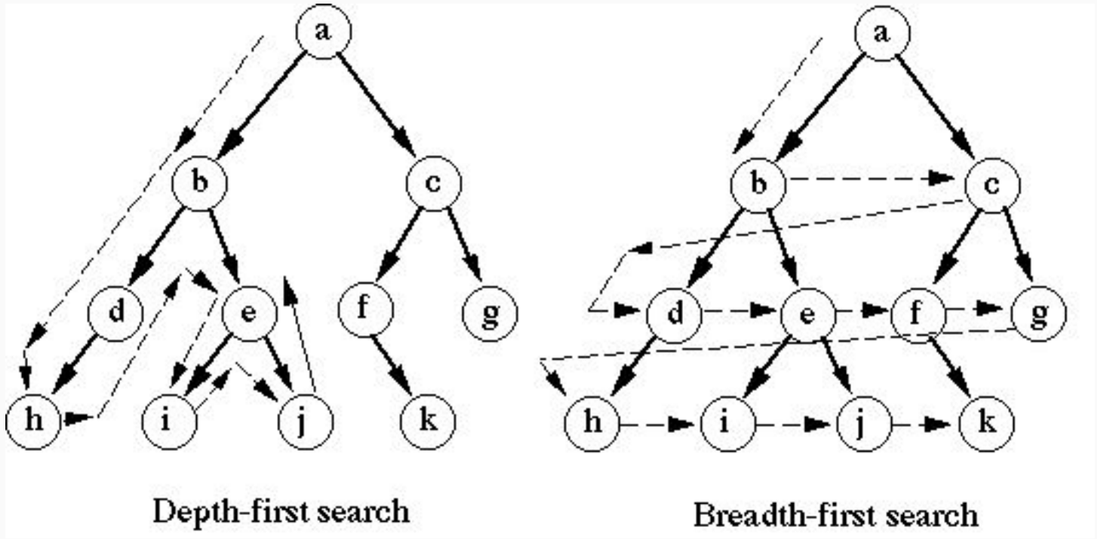
Cómo serán los árboles que generan?
DSF son árboles profundos y estrechos mientras que BFS produce árboles pequeños y amplios





Aplicaciones

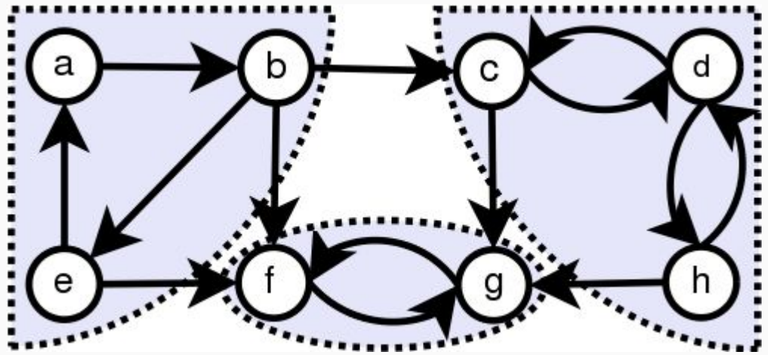
1. Determinar la conectividad de un grafo.
2. Encontrar el camino de un vértice a todos los demás
3. Probar si un grafo es bipartito
4. Análisis de una red y sus relaciones
5. Detección de ciclos
6. Ordenamiento topológico
7. Detección de árboles



Componentes fuertemente conexos

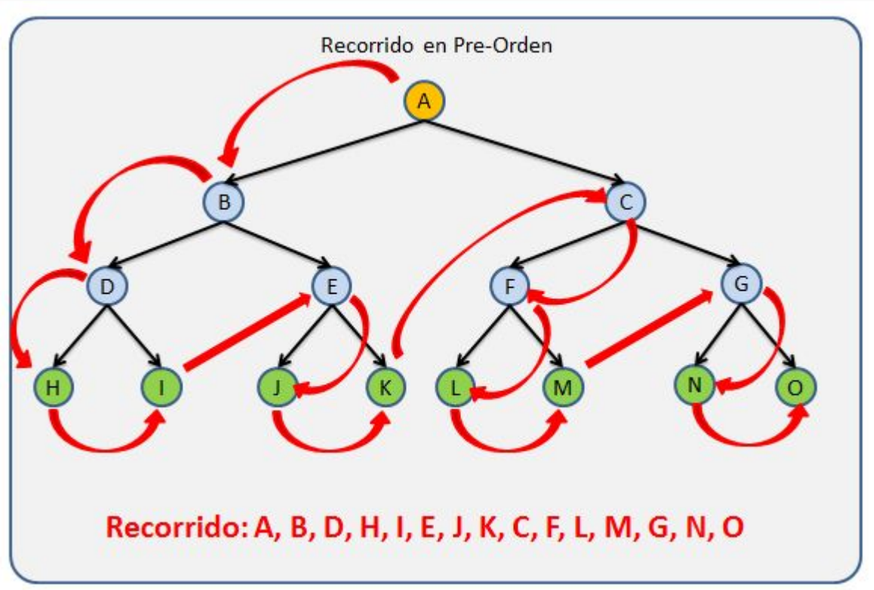
El algoritmo sería:

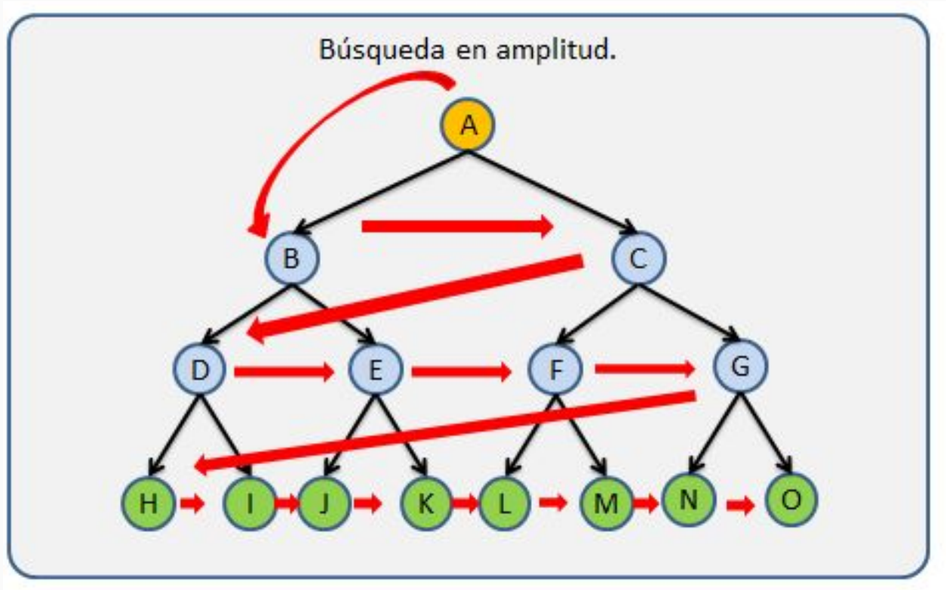
1. Aplicar búsqueda en profundidad sobre el grafo G (se debe ir anotando los tiempos para cada caso de descubierta y cerrado del vértice)
2. Encontrar el grafo traspuesto G’ (básicamente cambiar la dirección de las aristas de G)
3. Se ordena los vértices de mayor a menor tiempo de finalización
4. Aplicar búsqueda en profundidad sobre el grafo traspuesto G’. La búsqueda va sobre los vértices ordenados en el paso anterior
5. El resultado será un conjunto de componentes fuertemente conexo



Árboles

Entonces, cómo sería la búsqueda en profundidad y amplitud en un árbol?



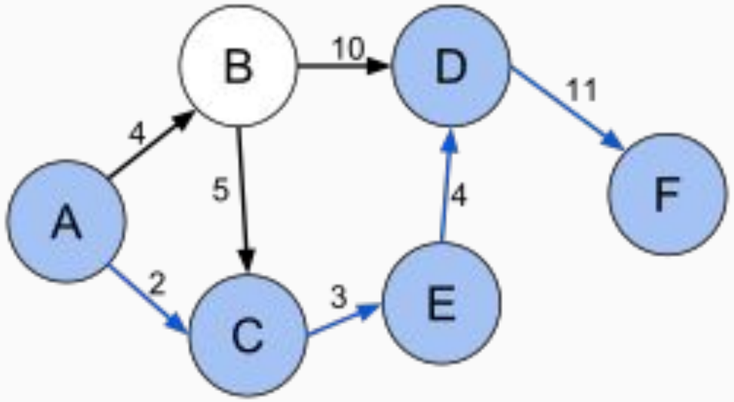


Camino más corto

Estos algoritmos buscan encontrar el camino entre dos vértices, tal que la suma de los pesos de las aristas sea el mínimo posible

BFS puede resolver este problema en un grafo no ponderado

El problema del camino más corto puede existir en grafos dirigidos o no dirigidos



Dijkstra

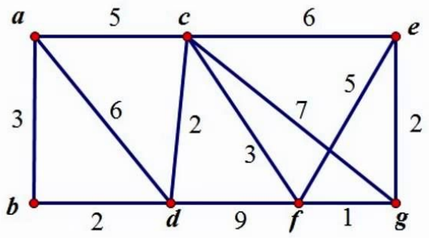
Es un algoritmo para obtener el camino mínimo en un grafo de un vértice a otro.

Este algoritmo solo funciona con aristas de valores positivos, ya que asume que agregar una arista sólo incrementará el peso total del camino

Básicamente construye un árbol de los caminos más cortos de un vértice fuente a todos los demás nodos

El algoritmo termina cuando se visitan todos los vértices

Se utiliza una tabla para mantener las distancias, las cuales serán inicialmente infinito excepto para el vértice fuente



v	a	b	c	d	e	f	g
a	0_a	3_a	5_a	6_a	∞_a	∞_a	∞_a
b	0_a	3_a	5_a	5_b	∞_a	∞_a	∞_a

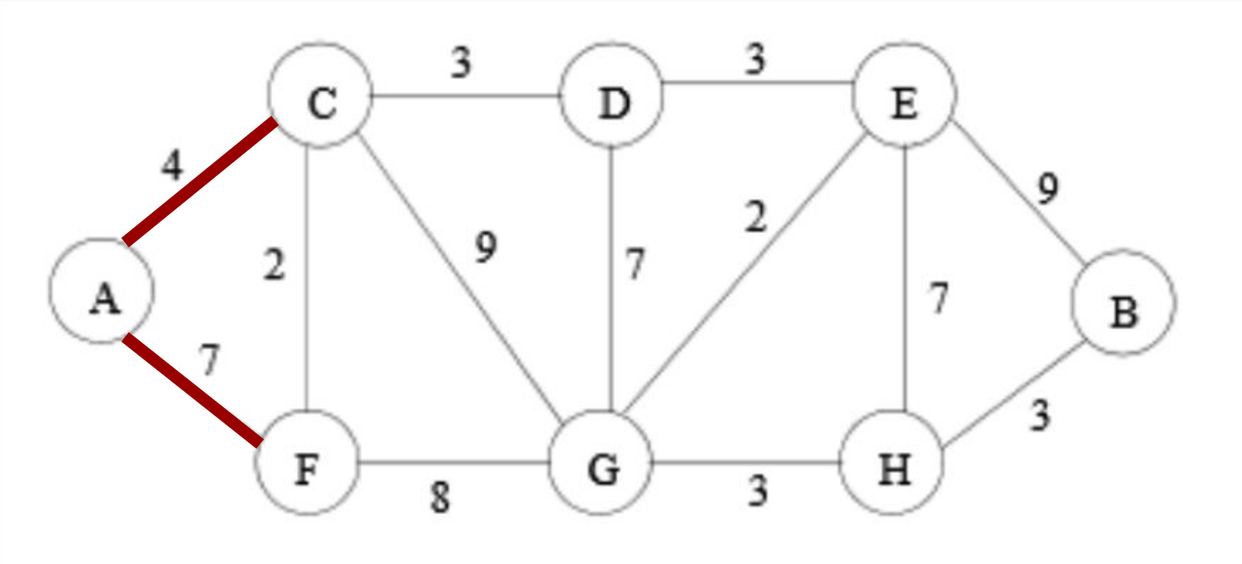
Dijkstra

Con un grafo conexo dirigido o no dirigido ponderado, se debe seleccionar un vértice inicial *u*. Se usará un arreglo de vértices visitados, y una matriz para las distancias de un vértice *x* a uno *y*.

1. Todas las distancias entre todos los vértices empiezan con infinito, excepto el vértice *u* que iniciará con 0
2. Tomamos como *actual,* a nuestro vértice inicial *u*
3. Se recorren todos los vértices adyacentes a *actual,* excepto por los ya visitados y se calcula la distancia tentativa. Si la distancia tentativa es menor que la distancia almacenada, esta se actualiza.
4. Una vez se hayan completado todos los vértices adyacentes, *actual* se marca como visitado (un vértice visitado jamás será visto de nuevo).
5. Se toma como próximo *actual* el de menor distancia (se puede usar una cola de prioridad o un vector) y se regresa al paso 3, mientras existan vértices no visitados.

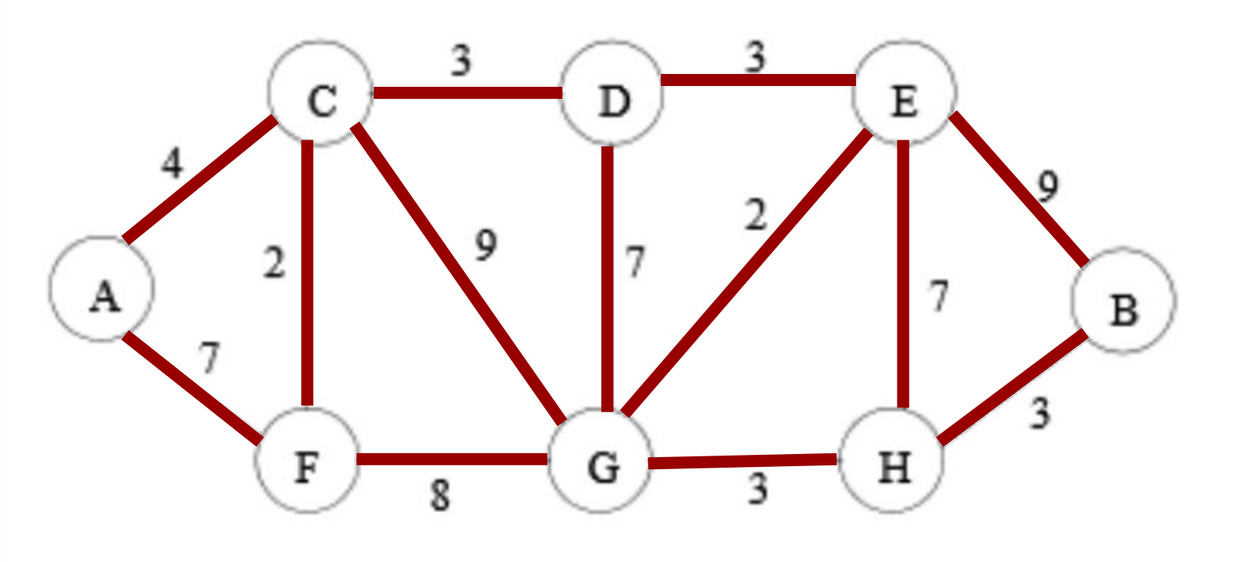
Una vez terminado al algoritmo, tendremos todas las distancias más cortas desde el vértice inicial *u*, a todos los demás vértices.

Dijkstra (A)



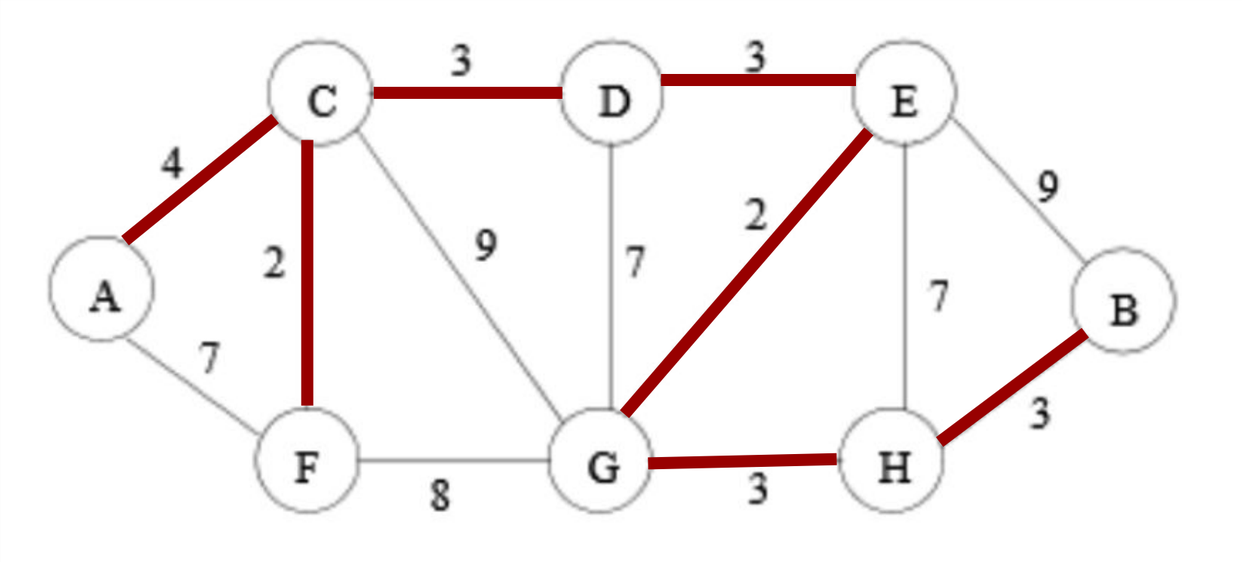
	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	INF	INF	INF	INF	INF	INF	INF

Dijkstra (A)



	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	INF	4	INF	INF	7	INF	INF
C	0	INF	4	7	INF	6	13	INF
F	0	INF	4	7	INF	6	13	INF
D	0	INF	4	7	10	6	13	INF
E	0	19	4	7	10	6	12	17
G	0	19	4	7	10	6	12	15
H	0	18	4	7	10	6	12	15
B	0	18	4	7	10	6	12	15

Dijkstra (A)



	A	B	C	D	E	F	G	H
A	0	INF	4	INF	INF	7	INF	INF
C	0	INF	4	7	INF	6	13	INF
F	0	INF	4	7	INF	6	13	INF
D	0	INF	4	7	10	6	13	INF
E	0	19	4	7	10	6	12	17
G	0	19	4	7	10	6	12	15
H	0	18	4	7	10	6	12	15
B	0	18	4	7	10	6	12	15

Búsqueda codiciosa (Greedy BFS)

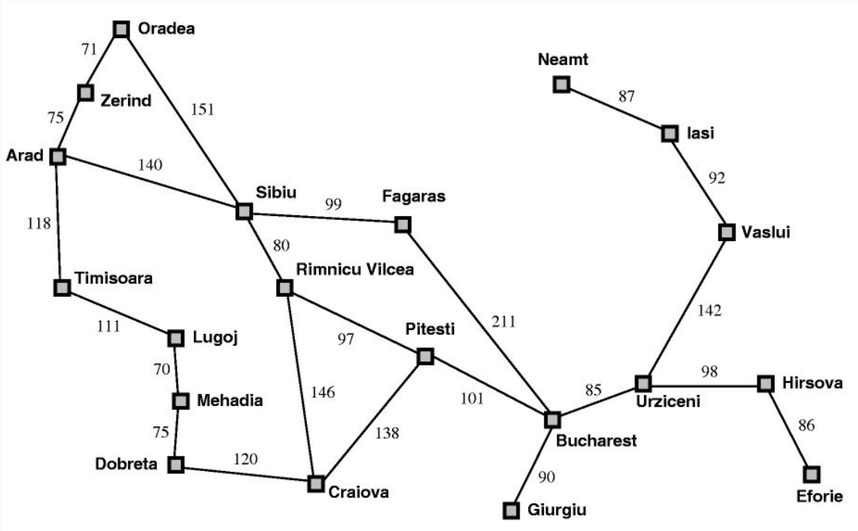
Best First Search (BFS) son considerados los algoritmos de búsqueda que se expandan a los estados más prometedores

Estos estados prometedores se escogen a través de una regla (heurística)

Típicamente se implementa utilizando una cola de prioridad

Ejemplos de BFS son Greedy BFS y A*

En el caso de Greedy BFS, se escoge el siguiente vértice (estado) que tengan el menor peso



Straight–line distance to Bucharest	
Arad	366
Bucharest	0
Craiova	160
Dobreta	242
Eforie	161
Fagaras	178
Giurgiu	77
Hirsova	151
Iasi	226
Lugoj	244
Mehadia	241
Neamt	234
Oradea	380
Pitesti	98
Rimnicu Vilcea	193
Sibiu	253
Timisoara	329
Urziceni	80
Vaslui	199
Zerind	374

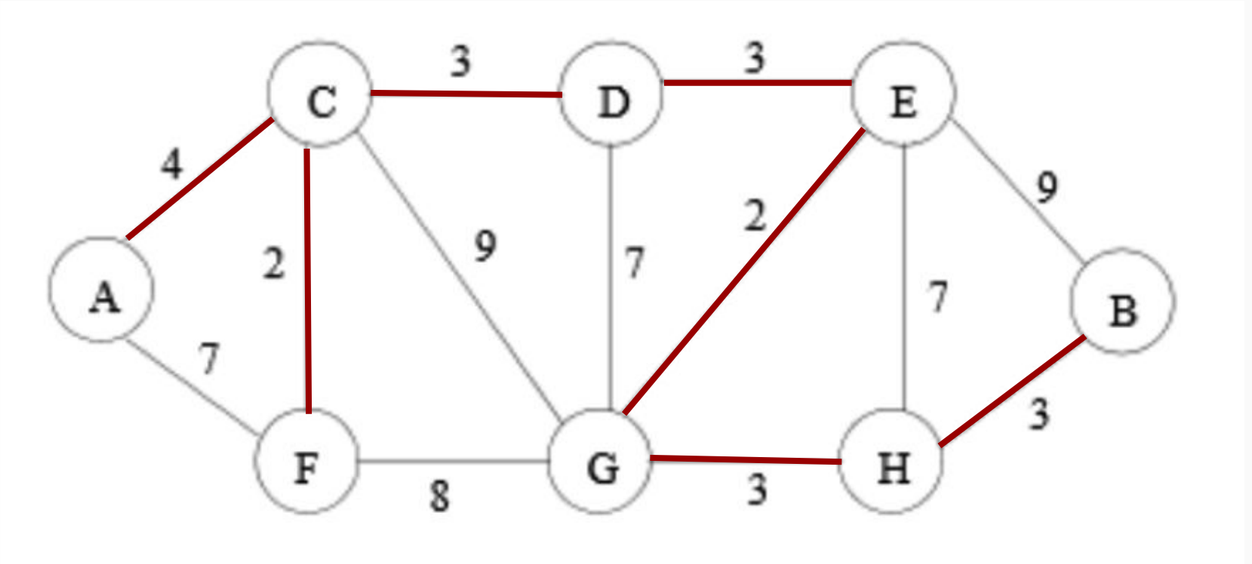
Búsqueda codiciosa (Greedy BFS)

Dijkstra nos puede servir para encontrar el camino más corto entre dos vértices, el problema está en que desperdicia tiempo explorando vértices que pueden no interesarnos

Greedy BFS realiza búsquedas en caminos prometedores, pero puede ser que no nos retorne el camino más corto

A continuación veremos A* que utiliza la distancia actual y una distancia estimada

Veamos el siguiente ejemplo de A a B:



A*

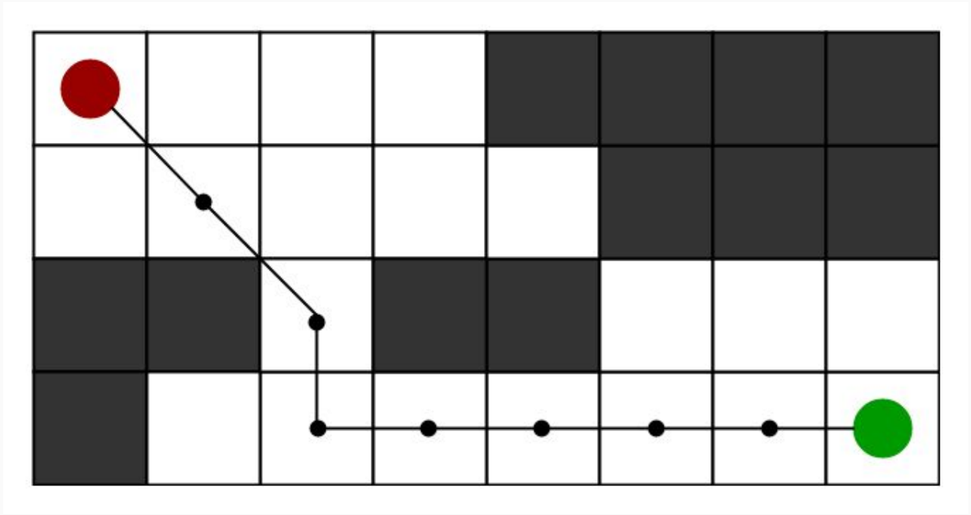
En caso de que exista una solución, este algoritmo la encontrará. Su complejidad va a depender de su heurística

Es uno de los algoritmos más utilizados en distintas aplicaciones como videojuegos

Es un algoritmo que se extiende dependiendo del costo, ese costo es calculado utilizando una heurística

f(n)= g(n) + h(n)

g(n) es la distancia desde el origen al vértice *n*, y h(n) es la distancia estimada hacia el destino (heurística)

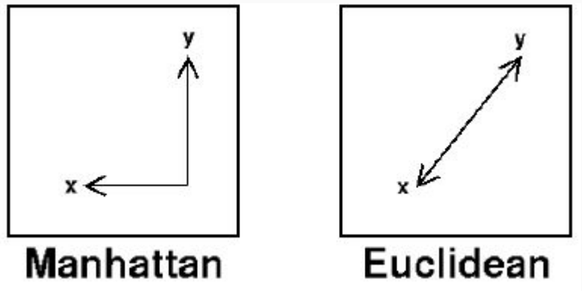


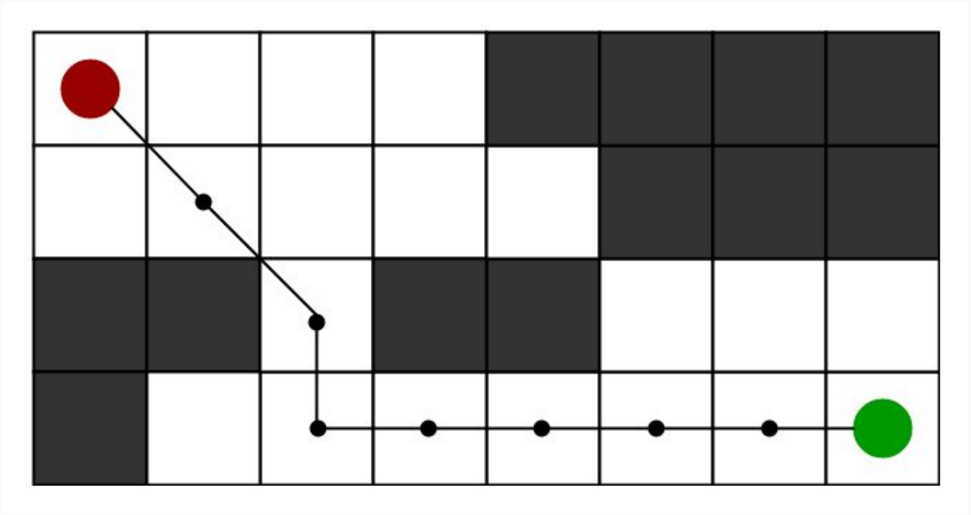
A*

Es un Dijkstra modificado que solo busca llegar a un destino

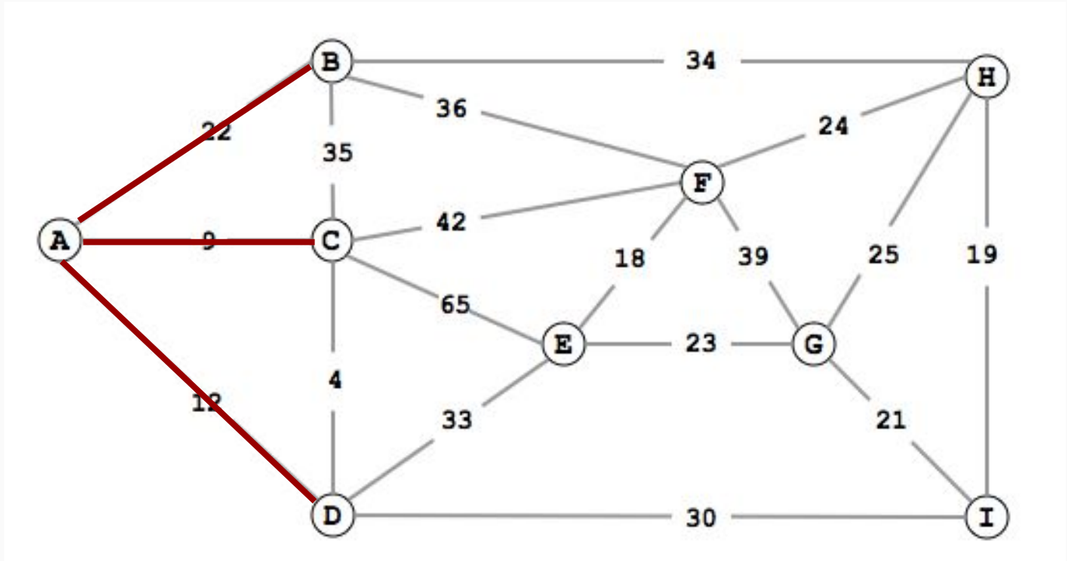
Siempre se busca evitar expandirse a vértices (estados) que suponemos son caros

La heurística podría ser por ejemplo la distancia de manhattan o la euclidiana





A* (de A a I)

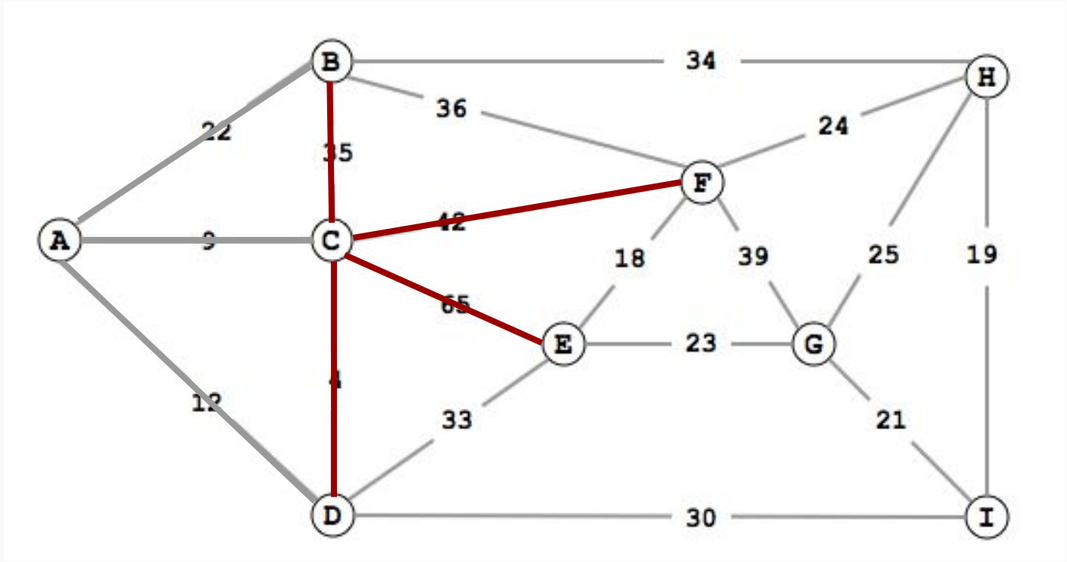


A	B	C	D	E	F	G	H	I
36	39	31	30	34	32	21	19	0

A	0	36	
B	22	61	A
C	9	40	A
D	12	42	A

Heurística: Distancia euclideana

A* (de A a I)

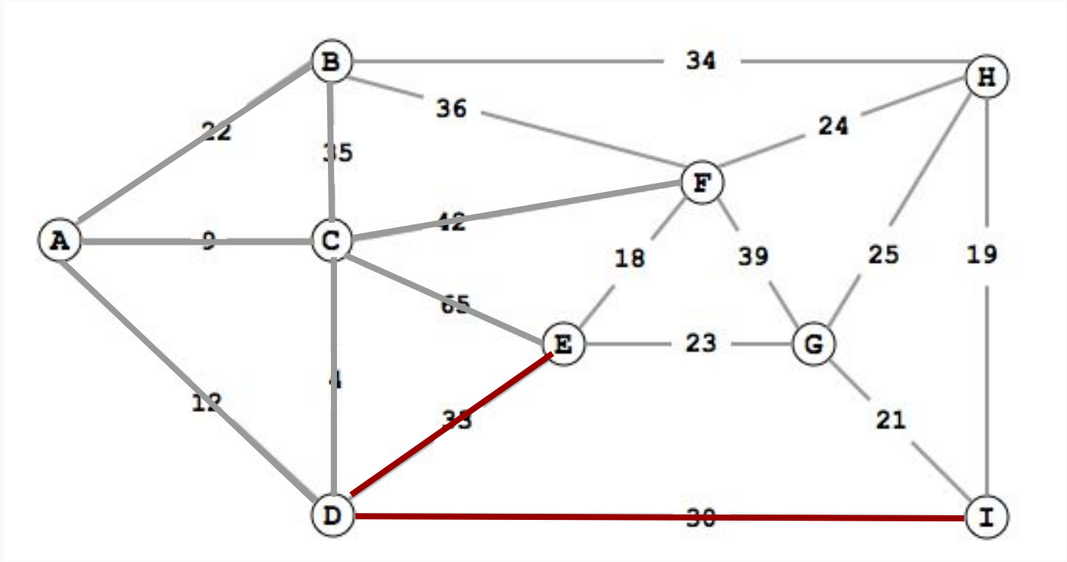


A	B	C	D	E	F	G	H	I
36	39	31	30	34	32	21	19	0

A	0	36	
B	22	61	A
C	9	40	A
D	12	42	A
E	74	108	C
F	51	83	C

Heurística: Pitágoras

A* (de A a I)

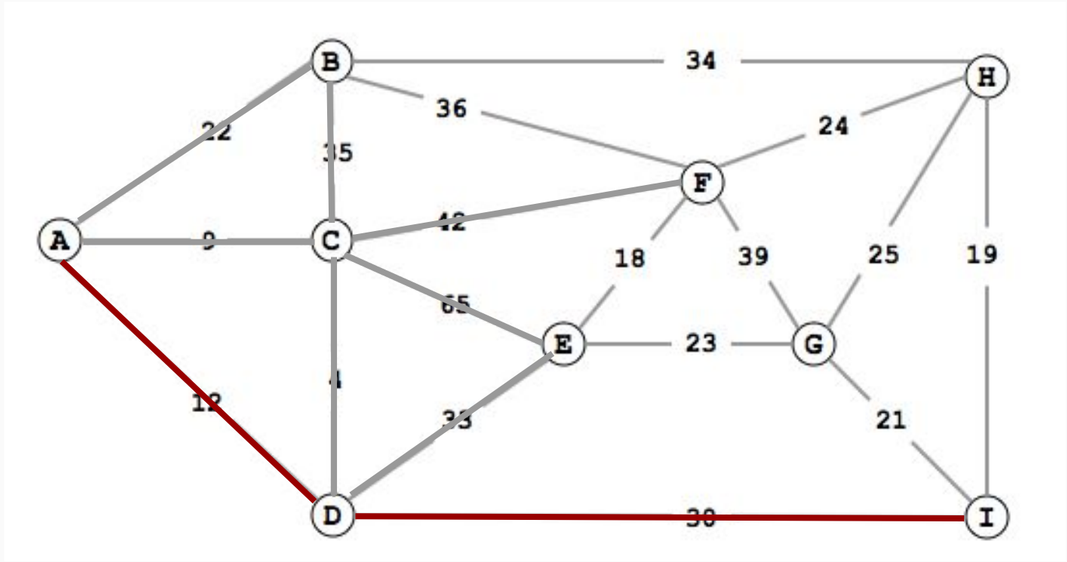


A	B	C	D	E	F	G	H	I
36	39	31	30	34	32	21	19	0

A	0	36	
B	22	61	A
C	9	40	A
D	12	42	A
E	45	79	D
F	51	83	C
I	42	0	D

Heurística: Pitágoras

A* (de A a I)



A	B	C	D	E	F	G	H	I
36	39	31	30	34	32	21	19	0

A	0	36	
B	22	61	A
C	9	40	A
D	12	42	A
E	45	79	D
F	51	83	C
I	42	0	D

Heurística: Pitágoras

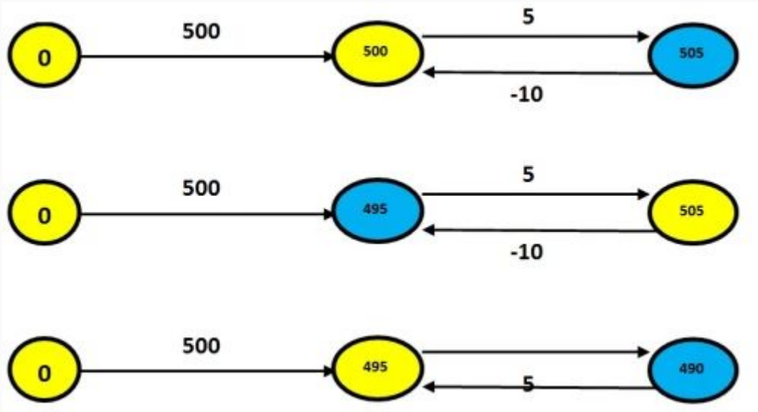
Floyd Warshall

Es un algoritmo de búsqueda del camino más corto en grafos para todo par de vértices que funciona tanto con aristas positivas como negativas (pero no con ciclos negativos)

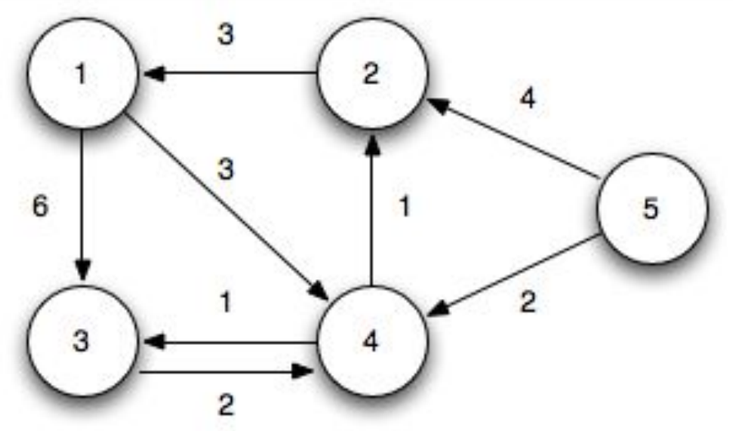
Un ciclo negativo, es un ciclo en el cual la suma de sus aristas es un valor negativo. En dichos casos Floyd Warshall puede ser usado para detectar dichos ciclos

Es un ejemplo de programación dinámica que se ejecutará siempre en $O(|V|^3)$

Este algoritmo suele utilizarse con grafos densos dirigidos



Floyd Warshall



Se irá iterando sobre filas y columnas.

Durante las iteraciones, se irán operando (sumando) cada elemento de cada fila y columna y se comparará con su elemento intersección como veremos en el ejemplo.

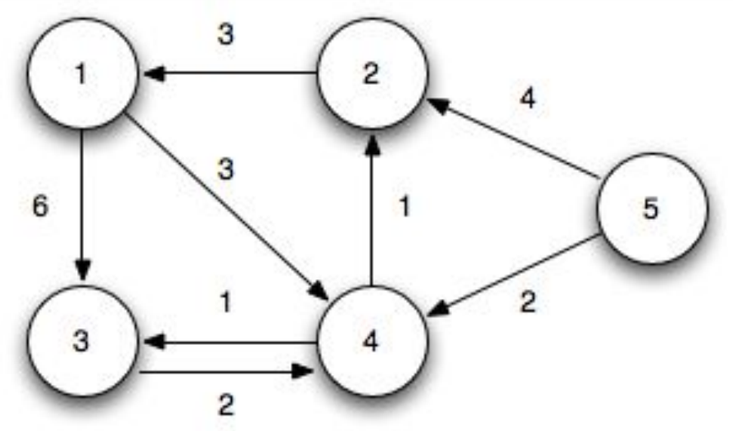
Se reemplazará el elemento intersección por el resultado de la operación, solo cuando esta es menor.

Nota: Tomaremos **!<** como no menor

	1	2	3	4	5
1	0	∞	6	3	∞
2	3	0	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	2	∞
4	∞	1	1	0	∞
5	∞	4	∞	2	0

	1	2	3	4	5
1	0	2	3	4	5
2	1	0	3	4	5
3	1	2	0	4	5
4	1	2	3	0	5
5	1	2	3	4	0

Floyd Warshall



Columna 1.2 - Fila 1:
3 + ∞ !< 0
3 + 6 < ∞ (Se reemplaza)
3 + 3 < ∞ (Se reemplaza)
3 + ∞ !< ∞

Columna 1.3 - Fila 1:
∞ + ∞ !< ∞
∞ + 6 !< 0
∞ + 3 !< 2
∞ + ∞ !< ∞

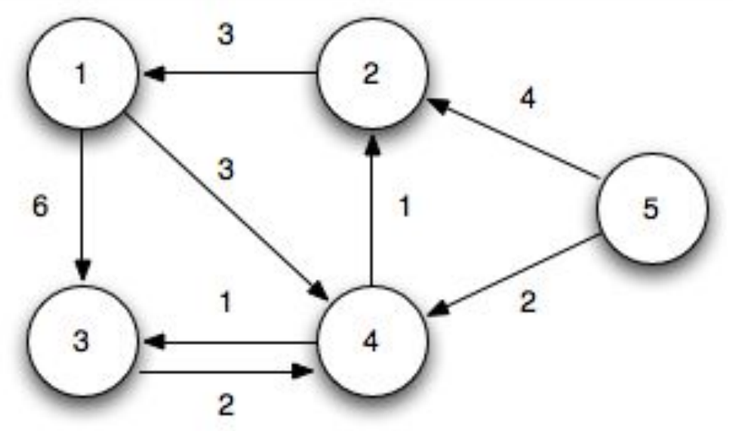
Columna 1.4 - Fila 1:
∞ + ∞ !< 1
∞ + 6 !< 1
∞ + 3 !< 0
∞ + ∞ !< ∞

Columna 1.5 - Fila 1:
∞ + ∞ !< 4
∞ + 6 !< ∞
∞ + 3 !< 2
∞ + ∞ !< 0

	1	2	3	4	5
1	0	∞	6	3	∞
2	3	0	∞	∞	∞
3	∞	∞	0	2	∞
4	∞	1	1	0	∞
5	∞	4	∞	2	0

	1	2	3	4	5
1	0	2	3	4	5
2	1	0	3	4	5
3	1	2	0	4	5
4	1	2	3	0	5
5	1	2	3	4	0

Floyd Warshall



Columna 2.1 - Fila 2:
∞ + 3 !< 0
∞ + 9 !< 6
∞ + 6 !< 3
∞ + ∞ !< ∞

Columna 2.3 - Fila 2:
∞ + 3 !< ∞
∞ + 9 !< 0
∞ + 6 !< 2
∞ + ∞ !< ∞

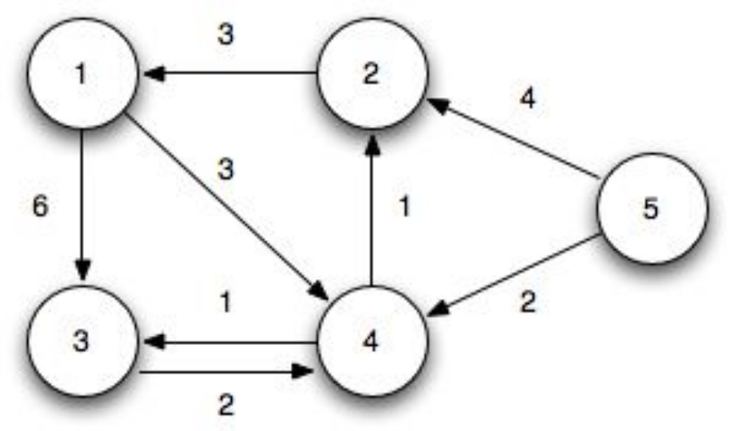
Columna 2.4 - Fila 2:
1 + 3 < ∞ (Se reemplaza)
1 + 9 !< 1
1 + 6 !< 0
1 + ∞ !< ∞

Columna 2.5 - Fila 2:
4 + 3 < ∞ (Se reemplaza)
4 + 9 < ∞ (Se reemplaza)
4 + 6 !< 2
4 + ∞ !< 0

	1	2	3	4	5
1	0	∞	6	3	∞
2	3	0	9	6	∞
3	∞	∞	0	2	∞
4	∞	1	1	0	∞
5	∞	4	∞	2	0

	1	2	3	4	5
1	-	2	3	4	5
2	1	-	1	1	5
3	1	2	-	4	5
4	1	2	3	-	5
5	1	2	3	4	-

Floyd Warshall



Columna 3.1 - Fila 3:
6 + ∞ !< 0
6 + ∞ !< 0
6 + 2 !< 3
6 + ∞ !< ∞

Columna 3.2 - Fila 3:
9 + ∞ !< 3
9 + ∞ !< 0
9 + 2 !< 6
9 + ∞ !< ∞

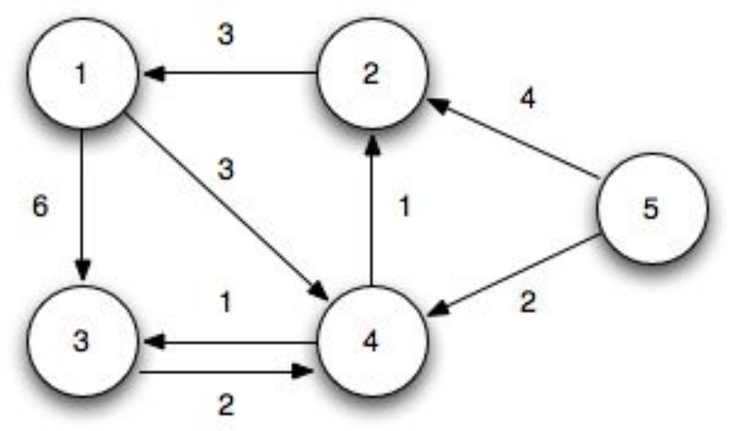
Columna 3.4 - Fila 3:
1 + ∞ <! 4
1 + ∞ !< 1
1 + 2 !< 0
1 + ∞ !< ∞

Columna 3.5 - Fila 3:
13 + ∞ !< 7
13 + ∞ !< 4
13 + 2 !< 2
13 + ∞ !< 0

	1	2	3	4	5
1	0	∞	6	3	∞
2	3	0	9	6	∞
3	∞	∞	0	2	∞
4	4	1	1	0	∞
5	7	4	13	2	0

	1	2	3	4	5
1	-	2	3	4	5
2	1	-	1	1	5
3	1	2	-	4	5
4	2	2	3	-	5
5	2	2	2	4	-

Floyd Warshall



Columna 4.1 - Fila 4:
3 + 4 !< 0
3 + 1 < ∞ (Se reemplaza)
3 + 1 < 6 (Se reemplaza)
3 + ∞ !< ∞

Columna 4.2 - Fila 4:
6+ 4 !< 3
6 + 1 !< 0
6 + 1 < 9 (Se reemplaza)
6 + ∞ !< ∞

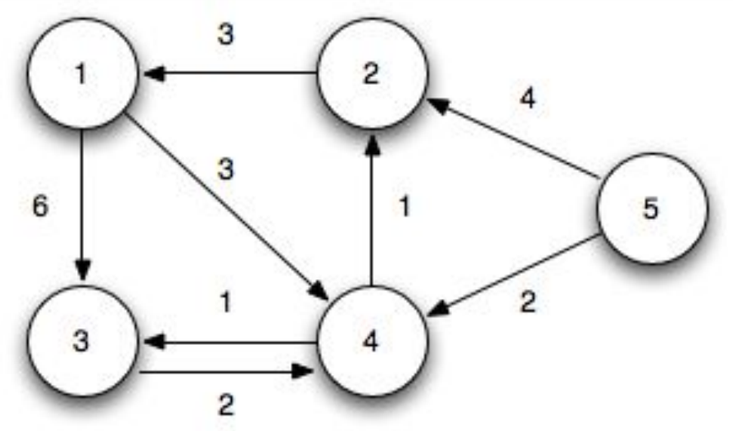
Columna 4.3 - Fila 4:
2 + 4 < ∞ (Se reemplaza)
2 + 1 < ∞ (Se reemplaza)
2 + 1 !< 0
2 + ∞ !< ∞

Columna 4.5 - Fila 4:
2 + 4 < 7 (Se reemplaza)
2 + 1 < 4 (Se reemplaza)
2 + 1 < 13 (Se reemplaza)
2 + ∞ !< 0

	1	2	3	4	5
1	0	∞	6	3	∞
2	3	0	9	6	∞
3	∞	∞	0	2	∞
4	4	1	1	0	∞
5	7	4	13	2	0

	1	2	3	4	5
1	-	2	3	4	5
2	1	-	1	1	5
3	1	2	-	4	5
4	2	2	3	-	5
5	2	2	2	4	-

Floyd Warshall



Columna 5.1 - Fila 5:
∞ + 6 !< 0
∞ + 3 !< 4
∞ + 3 !< 4
∞ + 2 !< 3

Columna 5.2 - Fila 5:
∞ + 6 !< 3
∞ + 6 !< 0
∞ + 3 !< 7
∞ + 2 !< 6

Columna 5.3 - Fila 5:
∞ + 6 !< 6
∞ + 3 !< 3
∞ + 3 !< 0
∞ + 2 !< 2

Columna 5.4 - Fila 5:
∞ + 6 !< 4
∞ + 3 !< 1
∞ + 3 !< 1
∞ + 2 !< 0

	1	2	3	4	5
1	0	4	4	3	∞
2	3	0	7	6	∞
3	6	3	0	2	∞
4	4	1	1	0	∞
5	6	3	3	2	0

	1	2	3	4	5
1	-	4	4	4	5
2	1	-	4	1	5
3	4	4	-	4	5
4	2	2	3	-	5
5	4	4	4	4	-

Práctica

Dibujen y apliquen los algoritmos a los siguientes grafos:

BFS(A)

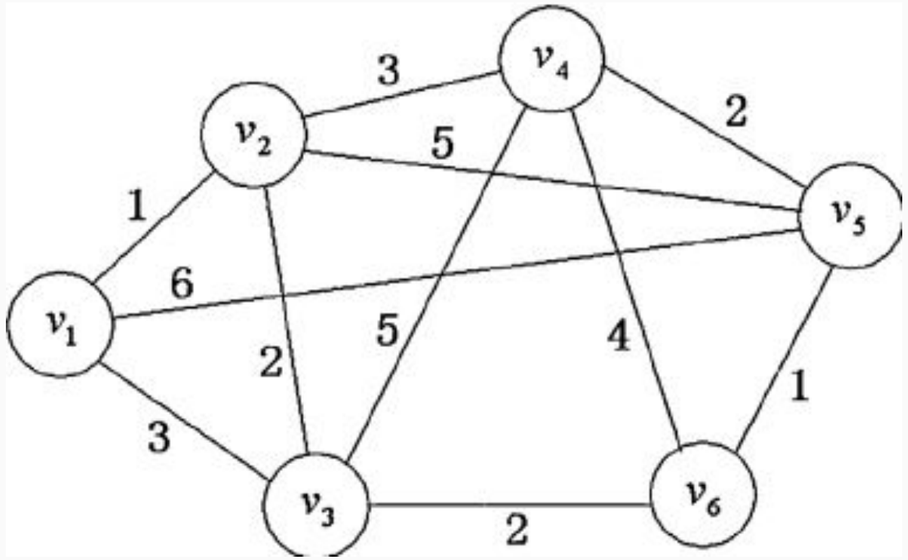
- V = {A, B, C, D, E, F}
- E = {(A, B), (A, E), (B, F), (C, A), (C, E), (E, B), (E, D), (F, E)}

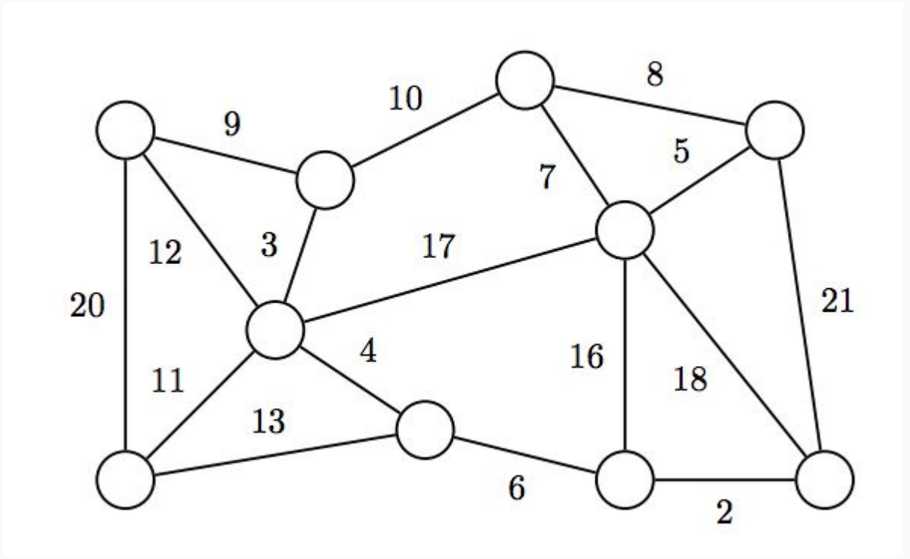
DFS(F)

- V = {A, B, C, D, E, F}
- E = {{A, B}, {A, C}, {A, F}, {B, D}, {B, C}, {B, F}, {C, E}, {C, D}, {D, F}, {E, F}}

Práctica

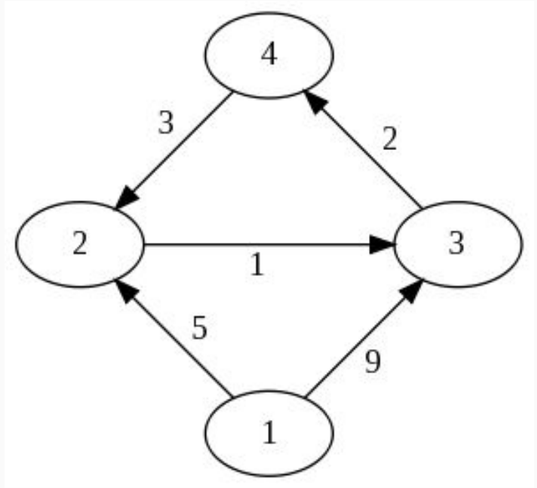
Aplicar Dijkstra sobre los siguientes grafos:



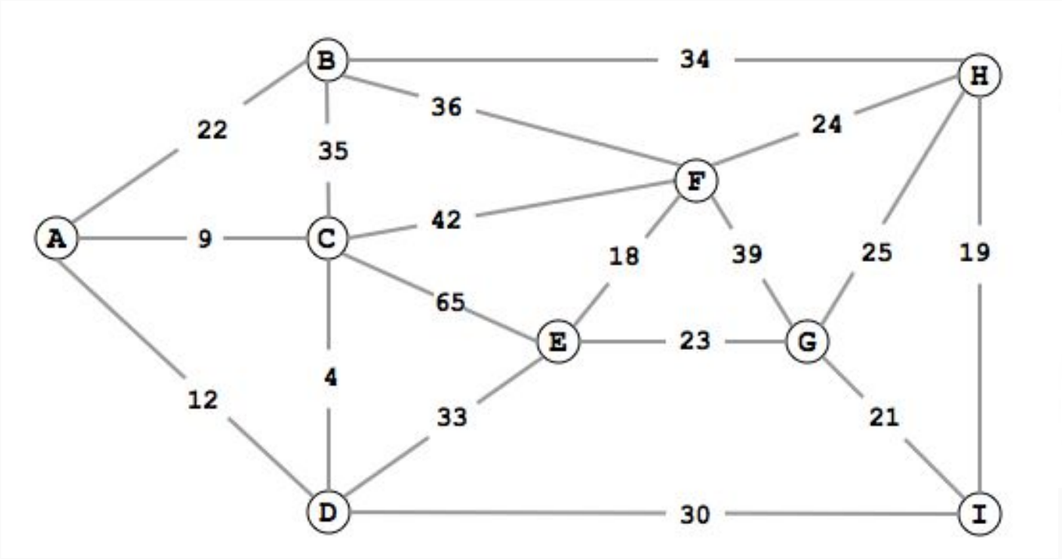


Práctica

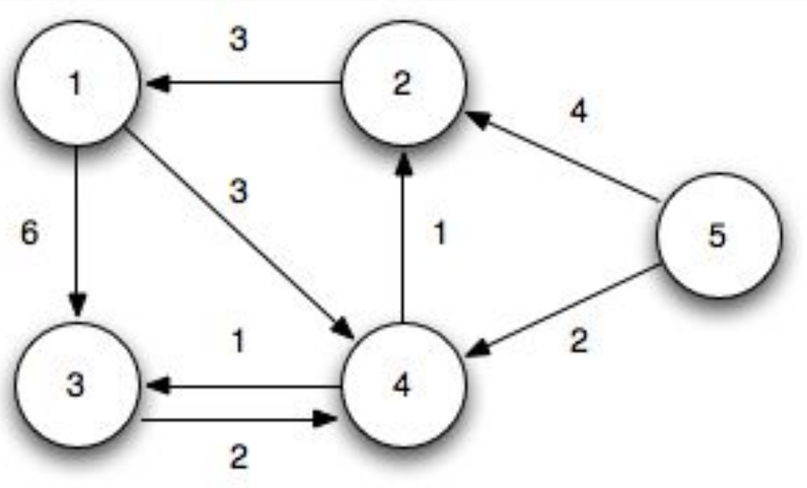
Floyd Warshall:



A* (A a H):



Dijkstra (1):



UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA
Y TECNOLOGÍA

Welcome to Algorithms and Data Structures! - CS2100