Exos

1) Montrer que l'espace quotient Y/A d'un cylindre $Y := \mathbb{S}^1 \times [-1, 1]$ par $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ est homéomorphe au cône de $\mathbb{R}^3$ défini par $C = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \in [-1, 1]\}$.

Exos

2) On définit le ruban de Möbius comme le quotient

$$\mathbb{M}^2 = [0, \pi] \times [-1, 1]/\sim$$

où les seules relations non triviales de $\sim$ sont $(0, \rho) \sim (\pi, -\rho)$ pour tout $\rho \in [-1, 1]$.
a) Montrer que $\mathbb{M}^2$ est un espace séparé et compact.
b) Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{M}^2 & \longrightarrow & D^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ (\theta, \rho) & \longmapsto & (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{array}$$

est continue.
c) Soit $A = [0, \pi] \times \{0\}/\sim$ l'âme de $\mathbb{M}^2$. Montrer que $\mathbb{M}^2/A$ est homéomorphe au disque D^2.

Exos

3) Soit K le 2-complexe simplicial de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets sont

$$p_0 = (1,1,1), \quad p_1 = (1,-1,-1),$$
$$p_2 = (-1,1,-1) \quad \text{et} \quad p_3 = (-1,-1,1),$$

les arêtes sont les six segments $[p_i p_j]$ et les faces les quatre triangles $[p_i p_j p_k]$.

a) Faire un dessin de $|K|$ et montrer que les sommets sont inscrits dans une sphère S.

b) Pour tout $p = (x, y, z)$, on pose

$$\ell_0(\overrightarrow{Op}) = x + y + z, \quad \ell_1(\overrightarrow{Op}) = x - y - z,$$
$$\ell_2(\overrightarrow{Op}) = -x + y - z, \quad \ell_3(\overrightarrow{Op}) = -x - y + z.$$

On note F_i la face ne contenant pas le point p_i. Montrer que

$$p \in F_i \quad \Longleftrightarrow \quad \ell_i(\overrightarrow{Op}) = -1 \text{ et } \ell_j(\overrightarrow{Op}) \geq -1 \text{ si } j \neq i$$

Exos

c) Soit

$$\delta(\overrightarrow{Op}) := \max_{i\in\{0,\ldots,3\}}(-\ell_i(\overrightarrow{Op}))$$

i) Montrer que $\delta(\overrightarrow{Op}) = 0$ ssi $p = O$.

ii) Constater que $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ et en déduire que si $p \neq O$ alors $\delta(\overrightarrow{Op}) > 0$.

iii) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\delta(\lambda\overrightarrow{Op}) = \lambda\,\delta(\overrightarrow{Op})$.

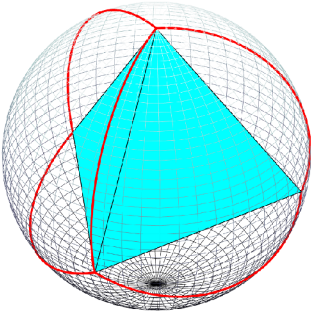
iv) Montrer enfin que $p \in |K| \iff \delta(\overrightarrow{Op}) = 1$.

d) On considère

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{S}^2(\sqrt{3}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p = (x,y,z) & \longmapsto & \dfrac{1}{\delta(\overrightarrow{Op})}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que l'image de f est incluse dans $|K|$.

Exos

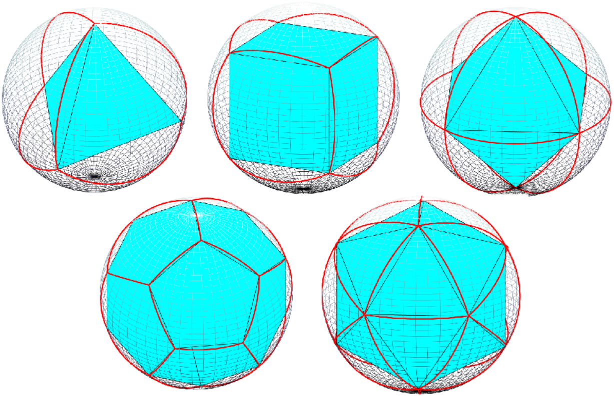


L'application f^{-1}.

e) Écrire explicitement la fonction réciproque de f et en déduire que f^{-1} est une triangulation de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$.

f) À votre avis, est-il possible de construire une triangulation de la sphère ayant moins de quatre sommets ?

Exos



L'application f^{-1} pour les solides de Platon.

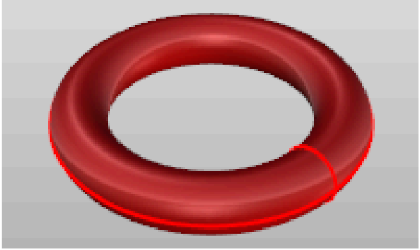
g) Imaginer d'autres triangulations de la sphère en s'inspirant de la démarche précédente et de l'illustration ci-dessus.

Exos

4) Soit $h : X \to Y$ un homéomorphisme, e^n une n-boule et $\varphi : \partial e^n \to X$ une application de recollement. Montrer que

$$X \cup_\varphi e^n \simeq Y \cup_{h \circ \varphi} e^n.$$

Exos



Les espaces X^0, X^1 et $X^2 = T$.

5) Soit $0 < b < a$ et $I = [0, 2\pi]$. On considère l'espace topologique $T = f(I \times I)$ où

$$f : \begin{array}{ccc} I \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(\theta,\varphi) = (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = (a + b\cos\theta)\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) = b\sin\theta \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exos

a) On note $\sim$ la relation d'équivalence dont les seules relations non triviales sont

$$(0, \varphi) \sim (2\pi, \varphi) \quad \text{et} \quad (\theta, 0) \sim (\theta, 2\pi)$$

pour tout $\varphi, \theta \in [0, 2\pi]$. Montrer que $I \times I / \sim$ est homéomorphe à T.

b) On considère la suite croissante de sous-espaces suivants :

$$X^0 = f(0,0), \quad X^1 = f(I \times \{0\} \cup \{0\} \times I)), \quad X^2 = T.$$

Montrer que X^1 est homéomorphe au bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

c) On note $p : I^2 \to I^2 / \sim$ la projection canonique et

$$\psi := p_{|\partial I^2} : \partial I^2 \longrightarrow p(I^2)$$

Montrer que

$$p(\partial I^2) \cup_\psi I^2 \simeq p(I^2).$$

Exos

d) Montrer que

$$\emptyset \subset X^0 \subset X^1 \subset X^2 = T$$

définit une structure de CW-complexe sur T. On admettra que le carré $I \times I$ est homéomorphe à la 2-boule e^2.

Exos

1) On suppose que X et Y sont homéomorphes. Montrer qu'ils ont même type d'homotopie. Réciproque ?

2) a) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que $[a, b]$ est un rétract de $\mathbb{R}$.

b) Soit X un espace topologique (séparé), montrer que la diagonale

$$\Delta X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

est un fermé de $X \times X$.

c) Soit $r : X \to X$ une rétraction sur $A \subset X$. Montrer que l'ensemble de coïncidence $\mathcal{S}$ de id_X et de r :

$$\mathcal{S} = \{x \in X \mid r(x) = id_X(x)\}$$

est un fermé de X.

d) En déduire que A est un fermé de X.

e) Montrer que $]a, b[$ n'est le rétract d'aucun intervalle le contenant strictement.

Exos

3) a) Soient $0 < k < n$ deux entiers. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-k-1}$.
b) On suppose que A et B sont deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie. Est-il vrai que $\mathbb{R}^n \setminus A$ et $\mathbb{R}^n \setminus B$ ont le même type d'homotopie ?

4) a) Existe-t-il des éléments de $A \in O(n+1)$ tels que l'application induite $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'ait aucun point fixe ? On explorera les cas $n = 1$ et $n = 2$.
b) Montrer que toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'ayant pas de point fixe est homotope à l'application antipodie $a(x) = -x$.

Exos

5) Soit X un espace topologique compact. On appelle CONE AU DESSUS DE X l'espace

$$CX = X \times [0,1]/X \times \{0\}$$

a) Montrer que CX est un espace compact.
b) Montrer que CX est contractile.

6) a) Soit $P \in \mathbb{S}^n$. Montrer que la sphère épointée $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes.
b) Soit X un espace topologique. Montrer que si $f : X \to \mathbb{S}^n$ n'est pas surjective alors elle est homotope à une application constante.

Exos

1) On considère le morphisme β_u de la proposition 5. Montrer que

a) Si $u \simeq_\partial u'$ alors $\beta_u = \beta_{u'}$

b) $\beta_{c_{x_0}} = id$

c) $\beta_{u*v} = \beta_v \circ \beta_u$

d) On suppose $u \in \Omega(X, x_0)$. Quelle est la nature de β_u ?

2) Soit X un espace connexe par arcs. Montrer que X est simplement connexe ssi pour tout couple $(x_0, x_1) \in X \times X$ et tout couple de chemins (γ_1, γ_2) de $L(X, x_0, x_1)$ on a $\gamma_1 \simeq_\partial \gamma_2$.

Exos

3) Un *groupe topologique* est un groupe $(G, \star)$ muni d'une topologie pour laquelle les applications

$$G^2 \to G, (x, y) \mapsto x \star y \quad \text{et} \quad G \to G, x \mapsto x^{-1}$$

sont continues.
a) Donner des exemples de groupes topologiques.
b) On note $e \in G$ l'élément neutre. Soit $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(G, e)$. Montrer que $\star$ définit une loi de composition sur $\pi_1(G, e)$ par

$$[\gamma_1] \star [\gamma_2] := [\gamma_1 \star \gamma_2].$$

c) En remarquant que

$$\gamma_1 * \gamma_2 = (\gamma_1 * c_e) \star (c_e * \gamma_2)$$

montrer que le groupe $\pi_1(G, e)$ est abélien.

Exos

4) Montrer les assertions de la proposition 7 :

Proposition 7.– *On a*

a) $(id_X)_* = id_{\pi_1(X,x_0)}$

b) *Soient* $f_1, f_2 \in C^0((X,x_0),(Y,y_0))$ *alors*

$$f_1 \simeq_\partial f_2 \quad \Longrightarrow \quad (f_1)_* = (f_2)_*$$

c) *Soient* $f \in C^0((X,x_0),(Y,y_0))$, $g \in C^0((Y,y_0),(Z,z_0))$ *alors*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

En particulier, si f *est inversible alors* f_* *l'est et*

$$(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*.$$

Exos

5) Soient $p_X : X \times Y \to X$ et $p_Y : X \times Y \to Y$ les projections canoniques, et

$$p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

défini par

$$p_*([\gamma]) := ((p_X)_*[\gamma], (p_Y)_*[\gamma])$$

Montrer que p_* est un isomorphisme de groupes.