Exos

1) On suppose que X et Y sont homéomorphes. Montrer qu'ils ont même type d'homotopie. Réciproque ?

2) a) Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que $[a, b]$ est un rétract de $\mathbb{R}$.

b) Soit X un espace topologique (séparé), montrer que la diagonale

$$\Delta X = \{(x, x) \,|\, x \in X\} \subset X \times X$$

est un fermé de $X \times X$.

c) Soit $r : X \to X$ une rétraction sur $A \subset X$. Montrer que l'ensemble de coïncidence $\mathcal{S}$ de id_X et de r :

$$\mathcal{S} = \{x \in X \,|\, r(x) = id_X(x)\}$$

est un fermé de X.

d) En déduire que A est un fermé de X.

e) Montrer que $]a, b[$ n'est le rétract d'aucun intervalle le contenant strictement.

Exos

3) a) Soient $0 < k < n$ deux entiers. Montrer que $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^{n-k-1}$.
b) On suppose que A et B sont deux espaces topologiques ayant même type d'homotopie. Est-il vrai que $\mathbb{R}^n \setminus A$ et $\mathbb{R}^n \setminus B$ ont le même type d'homotopie ?

4) a) Existe-t-il des éléments de $A \in O(n+1)$ tels que l'application induite $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'ait aucun point fixe ? On explorera les cas $n = 1$ et $n = 2$.
b) Montrer que toute application continue $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ n'ayant pas de point fixe est homotope à l'application antipodie $a(x) = -x$.

Exos

5) Soit X un espace topologique compact. On appelle CONE AU DESSUS DE X l'espace

$$CX = X \times [0,1]/X \times \{0\}$$

a) Montrer que CX est un espace compact.
b) Montrer que CX est contractile.

6) a) Soit $P \in \mathbb{S}^n$. Montrer que la sphère épointée $\mathbb{S}^n \setminus \{P\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont homéomorphes.
b) Soit X un espace topologique. Montrer que si $f : X \to \mathbb{S}^n$ n'est pas surjective alors elle est homotope à une application constante.