Exos

1) Montrer que l'espace quotient Y/A d'un cylindre $Y := \mathbb{S}^1 \times [-1,1]$ par $A = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ est homéomorphe au cône de $\mathbb{R}^3$ défini par $C = \{x^2 + y^2 - z^2 = 0, z \in [-1,1]\}$.

Exos

2) On définit le ruban de Möbius comme le quotient

$$\mathbb{M}^2 = [0,\pi] \times [-1,1]/\sim$$

où les seules relations non triviales de $\sim$ sont $(0,\rho) \sim (\pi,-\rho)$ pour tout $\rho \in [-1,1]$.
a) Montrer que $\mathbb{M}^2$ est un espace séparé et compact.
b) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{M}^2 & \longrightarrow & D^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ & (\theta,\rho) & \longmapsto & (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$$

est continue.
c) Soit $A = [0,\pi] \times \{0\}/\sim$ l'âme de $\mathbb{M}^2$. Montrer que $\mathbb{M}^2/A$ est homéomorphe au disque D^2.

Exos

3) Soit K le 2-complexe simplicial de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets sont

$$p_0 = (1,1,1), \quad p_1 = (1,-1,-1),$$
$$p_2 = (-1,1,-1) \quad \text{et} \quad p_3 = (-1,-1,1),$$

les arêtes sont les six segments $[p_ip_j]$ et les faces les quatre triangles $[p_ip_jp_k]$.

a) Faire un dessin de $|K|$ et montrer que les sommets sont inscrits dans une sphère S.

b) Pour tout $p = (x,y,z)$, on pose

$$\ell_0(\overrightarrow{Op}) = x+y+z, \quad \ell_1(\overrightarrow{Op}) = x-y-z,$$
$$\ell_2(\overrightarrow{Op}) = -x+y-z, \quad \ell_3(\overrightarrow{Op}) = -x-y+z.$$

On note F_i la face ne contenant pas le point p_i. Montrer que

$$p \in F_i \iff \ell_i(\overrightarrow{Op}) = -1 \text{ et } \ell_j(\overrightarrow{Op}) \geq -1 \text{ si } j \neq i$$

Exos

c) Soit

$$\delta(\overrightarrow{Op}) := \max_{i\in\{0,\dots,3\}} (-\ell_i(\overrightarrow{Op}))$$

i) Montrer que $\delta(\overrightarrow{Op}) = 0$ ssi $p = O$.

ii) Constater que $\ell_0 + \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 0$ et en déduire que si $p \neq O$ alors $\delta(\overrightarrow{Op}) > 0$.

iii) Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\delta(\lambda\overrightarrow{Op}) = \lambda\,\delta(\overrightarrow{Op})$.

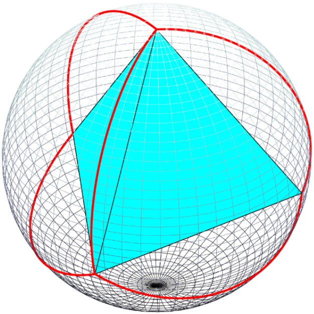
iv) Montrer enfin que $p \in |K| \iff \delta(\overrightarrow{Op}) = 1$.

d) On considère

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{S}^2(\sqrt{3}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p = (x, y, z) & \longmapsto & \dfrac{1}{\delta(\overrightarrow{Op})} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrer que l'image de f est incluse dans $|K|$.

Exos

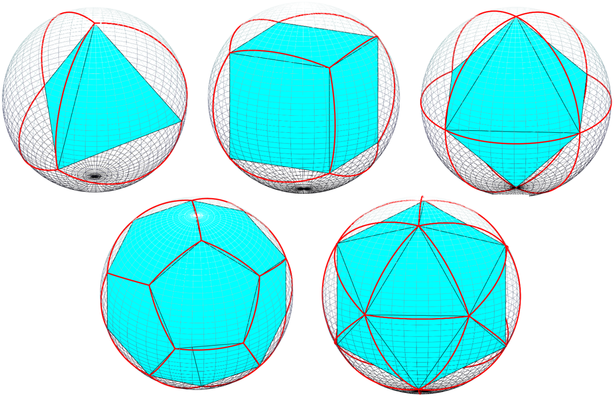


L'application f^{-1}.

e) Écrire explicitement la fonction réciproque de f et en déduire que f^{-1} est une triangulation de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$.

f) À votre avis, est-il possible de construire une triangulation de la sphère ayant moins de quatre sommets ?

Exos



L'application f^{-1} pour les solides de Platon.

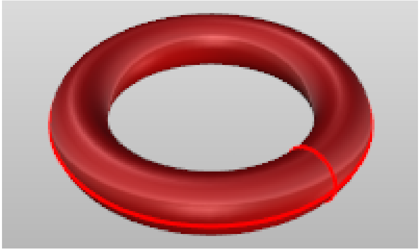
g) Imaginer d'autres triangulations de la sphère en s'inspirant de la démarche précédente et de l'illustration ci-dessus.

Exos

4) Soit $h : X \to Y$ un homéomorphisme, e^n une n-boule et $\varphi : \partial e^n \to X$ une application de recollement. Montrer que

$$X \cup_\varphi e^n \simeq Y \cup_{h \circ \varphi} e^n.$$

Exos



Les espaces X^0, X^1 et $X^2 = T$.

5) Soit $0 < b < a$ et $I = [0, 2\pi]$. On considère l'espace topologique $T = f(I \times I)$ où

$$\begin{array}{rccl} f: & I \times I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta, \varphi) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x(\theta,\varphi) = (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = (a + b\cos\theta)\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) = b\sin\theta \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exos

a) On note $\sim$ la relation d'équivalence dont les seules relations non triviales sont

$$(0,\varphi) \sim (2\pi,\varphi) \quad \text{et} \quad (\theta,0) \sim (\theta,2\pi)$$

pour tout $\varphi, \theta \in [0,2\pi]$. Montrer que $I \times I/\sim$ est homéomorphe à T.

b) On considère la suite croissante de sous-espaces suivants :

$$X^0 = f(0,0), \quad X^1 = f(I \times \{0\} \cup \{0\} \times I)), \quad X^2 = T.$$

Montrer que X^1 est homéomorphe au bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

c) On note $p : I^2 \to I^2/\sim$ la projection canonique et

$$\psi := p_{|\partial I^2} : \partial I^2 \longrightarrow p(I^2)$$

Montrer que

$$p(\partial I^2) \cup_\psi I^2 \simeq p(I^2).$$

Exos

d) Montrer que

$$\emptyset \subset X^0 \subset X^1 \subset X^2 = T$$

définit une structure de CW-complexe sur T. On admettra que le carré $I \times I$ est homéomorphe à la 2-boule e^2.