Université Grenoble Alpes **Année 2024-2025**
Licence de mathématiques, 3e année
Parcours mathématiques

Calcul intégral, introduction aux probabilités
Exercices

Table des matières

1 Révisions

1.1 Fonctions élémentaires

Exercice 1.1 *(La fonction exponentielle)* La fonction exponentielle est définie comme la (seule) fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable, égale à sa dérivée et valant 1 en 0. Nous allons légitimer cette définition en montrant qu'il existe bien une unique telle fonction, dont nous démontrerons au passage quelques propriétés.

1. Supposons qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant les propriétés ci-dessus.
   (a) Montrer que $f(x)f(-x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = f(x)^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Indication : calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x)f(-x)$.
   (b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable qui satisfait que $g' = g$. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = Cf(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire l'unicité si existence d'une fonction f comme ci-dessus.
   Indication : considérer la fonction $x \mapsto g(x)/f(x)$.
   (c) Montrer que $f''(x) = f'(x) = f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. En particulier, f est strictement croissante et concave.
   (d) Montrer que $f(x + y) = f(x)f(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En déduire que
   $$f(nx) = f(x)^n,$$
   pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
   Indication : considérer la fonction $g(x) = f(x + y)$, avec y fixe.
2. Montrer que la fonction
   $$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{EXP}$$
   est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, et vaut 1 en 0. Cela montre l'existence souhaitée.
   On notera donc dorénavant cette fonction exp pour *exponentielle*. On notera également $e = \exp(1)$, de sorte que :
   $$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{E}$$
   Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on utilisera souvent l'écriture e^x pour désigner $\exp(x)$.

Exercice 1.2 *(Les fonctions trigonométriques)* Les fonctions *sinus* et *cosinus* sont définies comme les (seules) fonctions $s, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiables qui satisfont que $s' = c$, $c' = -s$, $s(0) = 0$ et $c(0) = 1$, respectivement. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe bien un unique tel couple de fonctions, et d'en démontrer au passage quelques propriétés.

1. Supposons qu'il existe un couple de fonctions s et c comme ci-dessus et fixons-en un dans toute cette question.
   (a) Montrer que $s(x)^2 + c(x)^2 = 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Indication : calculer la dérivée de l'application $x \mapsto s(x)^2 + c(x)^2$.
   (b) Soient $s_1, c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonction différentiables qui satisfont que $s_1' = c_1$, $s_1' = -c_1$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
   $$s_1 = bs - ac \text{ et } s_1 = as + bc. \tag{1}$$

En déduire l'unicité si existence du couple de fonctions (s, c).
Indication : montrer que les dérivées des fonctions $sc_1 - s_1c$ et $ss_1 + cc_1$ valent zéro. Ensuite, calculer la différence entre le produit de la première expression par s et le produit de la deuxième par c.

(c) Montrer que $s(-x) = -s(x)$ et $c(-x) = c(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : utiliser (1) avec $s_1(x) = c(-x)$ et $c_1(x) = s(-x)$.

(d) Montrer que

$$s(x+y) = s(x)c(y) + s(x)c(y),$$
$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
Indication : utiliser (1) avec $s_1(x) = s(x+y)$ et $c_1(x) = c(x+y)$, où y est fixe.

2. Montrer que les fonctions

$$s : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } c : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \tag{SC}$$

sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et satisfont les propriétés du préambule. Cela démontre l'existence souhaitée. Ces fonctions seront dorénavant notées sin et cos respectivement.

Exercice 1.3 *(La définition de π)* Une définition possible de π est : le plus petit réel x strictement positif tel que $\cos(x/2) = 0$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'un tel nombre existe effectivement.

1. Supposons qu'il n'existe aucun $x > 0$ tel que $\cos(x/2) = 0$.

(a) Montrer que sin (resp. cos) est une fonction strictement croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}_{>0}$.

(b) On fixe $a > 0$. Justifier que $0 < \cos(a) < 1$, puis que $0 < \cos(2a) < \cos^2(a)$ et enfin que $\cos(2^n a) < (\cos(a))^{2^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En déduire que la suite $(\cos(2^n a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et, en conséquence, que $(\sin(2^n a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

(c) Montrer que $\cos(x)$ (resp. $\sin(x)$) converge vers 0 (resp. 1) quand x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^x(b)0$ et conclure quant à l'hypothèse initiale.

2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{P} = \{x > 0 : \cos(x/2) = 0\}$ admet un plus petit élément.

1.2 Calculs de primitives

1.2.1 Primitives basiques

Exercice 1.4 *(Primitives usuelles)* Compléter le tableau suivant

fonction f	une primitive de f	ensemble de définition
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$		
$1/x$		
$1/(ax+b),\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$1/(a^2+x^2),\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$1/\sqrt{a^2-x^2},\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$e^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$\cos(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$\sin(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$\cosh(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$\sinh(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$\tan(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		
$\tanh(\omega x+a),\ \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$		

Exercice 1.5 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Déterminer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^n}$ sur des intervalles maximaux que l'on précisera.

Exercice 1.6 Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition :
(a) $x \mapsto x\sqrt{x^2+4}$, (b) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, (c) $x \mapsto xe^{-x^2}$, (d) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+16}$, (e) $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$,
(f) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$, (g) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, (h) $x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}$.

Exercice 1.7

1. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)e^{ax}$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et a un réel, est de la forme $x \mapsto Q(x)e^{ax} + C$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et C est une constante.
2. Montrer qu'une primitive de $x \mapsto P(x)\cos(\alpha x)$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme et α un réel, est de la forme $x \mapsto Q_1(x)\cos(\alpha x) + Q_2(x)\sin(\alpha x) + C$, où Q_1 et Q_2 sont des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ et C est une constante.

1.2.2 Intégration par parties

Exercice 1.8 *(Intégration par parties)*

Écrire la formule d'intégration par parties.

Exercice 1.9 Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leur domaine de définition :
(a) $x \mapsto x^n \ln(x)$ $(n \in \mathbb{Z})$, (b) $x \mapsto e^{-x}\cos^2(x)$, (c) $x \mapsto \arctan(\sqrt{1-x^2})$.

1.2.3 Fractions rationnelles

Pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle (qui n'est pas sous la forme $\frac{u'(x)}{(u(x))^n}\ldots$), la méthode consiste à décomposer cette fraction en *éléments simples* (produits par un réel d'une fonction d'un des types ci-dessous), + éventuellement un polynôme. On est donc ramené à calculer les primitives de ces fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n}, \quad x \mapsto \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^n}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } c^2 - 4d < 0.$$

Le premier type a été traité dans l'exercice 1.5. Pour le second type, on sépare le numérateur en $\lambda(2x+c)+\mu$, et l'on obtient deux fractions. La première est la dérivée d'une fonction composée, ce qui donne directement une primitive. La seconde se traite par changement de variable à l'aide de l'exercice suivant.

Exercice 1.10 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $I_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ via

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Noter que $I_0(x) = x$ pour tout réel x. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$I_n(x) = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}(x).$$

Exercice 1.11 En utilisant la décomposition en éléments simples, calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition :
(a) $x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+1}$, (b) $x \mapsto \dfrac{1}{x(1+x)^2}$, (c) $x \mapsto \dfrac{1}{4x^2-3x+2}$, (d) $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^4-1}$,
(e) $x \mapsto \dfrac{(x-1)}{(1+x)^3(x-2)}$.

Exercice 1.12 Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition :
(a) $x \mapsto \dfrac{1}{49-4x^2}$, (b) $x \mapsto \dfrac{(5x-12)}{x(x-4)}$, (c) $x \mapsto \dfrac{(37-11x)}{(x+1)(x-2)(x-3)}$, (d) $x \mapsto \dfrac{(2x^2-15x+33)}{(x+1)(x-5)}$,
(e) $x \mapsto \dfrac{(x-1)}{x^2+x+1}$, (f) $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+4x+5)^2}$.

1.2.4 Polynômes en sinus et cosinus

Pour calculer les primitives de (combinaisons linéaires de) fonctions de la forme $x \mapsto \cos^m(x)\sin^n(x)$ avec m et $n \in \mathbb{N}$, la méthode est de linéariser (en utilisant les identités $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ et $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$) sauf si m ou n est impair, auquel cas on peut faire un changement de variables.

Exercice 1.13 Déterminer les primitives de $x \mapsto \cos^m(x)\sin^n(x)$ avec m ou n impair.

Exercice 1.14 Pour $n \in \mathbb{N}$, donner les primitives de $x \mapsto \cos^n(x)$ et $x \mapsto \sin^n(x)$.

1.2.5 Changement de variables

Exercice 1.15

1. Écrire le théorème de changement de variables.
2. Donner des primitives de $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$, de $x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ et de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, en utilisant les changements de variable $x = \sinh(u)$ ou $x = \cosh(u)$ ou $x = \sin(u)$.

Exercice 1.16 Calculer les primitives des fonctions suivantes :
(a) $x \mapsto \sin^3(x)$, (b) $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}$, (c) $x \mapsto \sin(x/2)\cos(x/3)$, (d) $x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin^2(x)}$,
(e) $x \mapsto \dfrac{1}{a+b\cos(x)}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a > |b| > 0$.

Exercice 1.17 Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition :
(a) $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$, (b) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}$, (c) $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

Exercice 1.18 *(Primitives de fonctions du type $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$)* Calculer les primitives des fonctions suivantes, en précisant leur domaine de définition :
(a) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$, (b) $x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$,
(c) $x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$, (d) $x \mapsto \sqrt{-x^2+x+1}$.

Indication : Par un changement de variables, se ramener a une forme canonique du type $f(x, \sqrt{x^2+1})$, $f(x, |x-1|)$, $f(x, \sqrt{x^2-1})$ ou $f(x, \sqrt{1-x^2})$, puis effectuer un autre changement de variables avec les fonctions sinus/cosinus trigonométriques ou hyperboliques.

1.3 Suites et séries (de fonctions)

Exercice 1.19 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ et $v_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, étudier la convergence des suites numériques $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ ou sur les compacts de $\mathbb{R}$ des suites de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 1.20 Donner la nature des séries numériques suivantes :
(a) $\left(\sum_{n\geqslant 3} \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, (b) $\left(\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 1.21 Donner la nature des séries de fonctions (Σu_n) pour les fonctions u_n suivantes :
(a) $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$, (b) $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$, $n \geqslant 1$, (c) $u_n(x) = 2^{-n}\cos(3^n x)$.

Préciser les intervalles sur lesquels la convergence est uniforme.

2 Algèbres de Boole de parties d'un ensemble et mesures

Exercice 2.1 Soit X un ensemble. On rappelle qu'une **algèbre de Boole de parties** de X (ou simplement **algèbre de Boole**, ou **algèbre d'ensembles**) est une paire $(X, \mathscr{A})$, où $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ est une famille de parties de X qui satisfait que $\varnothing, X \in \mathscr{A}$ et que, pour tous $A, B \in \mathscr{A}$, $A \cup B \in \mathscr{A}$, $A \cap B \in \mathscr{A}$ et $A \backslash B \in \mathscr{A}$.[1] Soit $(X, \mathscr{A})$ une algèbre de Boole. On définit $A + B = (A\backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ et $A \cdot B = A \cap B$, pour tous $A, B \in \mathscr{A}$. Montrer que $(\mathscr{A}, +, \cdot)$ est un anneau (unitaire) commutatif.

Exercice 2.2 Donner une algèbre de Boole $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ telle que les singletons ne soient pas inclus dans $\mathscr{A}$.

Exercice 2.3 Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux algèbres de Boole. On rappelle qu'un **morphisme** $f : (X, \mathscr{A}) \to (Y, \mathscr{B})$ est une application $f : X \to Y$ qui satisfait que $f^{-1}(B) \in \mathscr{A}$, pour tout $B \in \mathscr{B}$.

1. Soient $(X, \mathscr{A})$ une algèbre de Boole et $f : X \to Y$ une application. On définit $f_*(\mathscr{A}) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathscr{A}\}$. Montrer que $(Y, f_*(\mathscr{A}))$ est une algèbre de Boole, appelée **l'image directe** de $\mathscr{A}$, et que f est un morphisme d'algèbres de Boole de $(X, \mathscr{A})$ dans $(Y, f_*(\mathscr{A}))$.
2. Soient $(Y, \mathscr{B})$ une algèbre de Boole et $f : X \to Y$ une application. On définit $f^*(\mathscr{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathscr{B}\}$. Montrer que $(X, f^*(\mathscr{B}))$ est une algèbre de Boole, appelée **l'image inverse** de $\mathscr{B}$, et que f est un morphisme d'algèbres de Boole de $(X, f^*(\mathscr{B}))$ dans $(Y, \mathscr{B})$.
3. Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux algèbres de Boole et $f : X \to Y$ une application. Montrer que $f^*(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{A}$ si et seulement si f est un morphisme d'algèbres de Boole de $(X, \mathscr{A})$ dans $(Y, \mathscr{B})$, si et seulement si $\mathscr{B} \subseteq f_*(\mathscr{A})$.

Exercice 2.4 Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux algèbres de Boole. On définit $\mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X \times Y)$ comme l'ensemble formé des unions des familles finies et disjointes des parties de la forme $A \times B$, avec $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$. Montrer que $(X \times Y, \mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B})$ est une algèbre de Boole.

Exercice 2.5 Soit $(X, \mathscr{A})$ une algèbre de Boole. On rappelle qu'une **mesure** sur $\mathscr{A}$ est une application $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ telle que $\nu(\varnothing) = 0$ et

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i),$$

pour toute famille disjointe $(A_i)_{i \in I} \in \mathscr{A}^I$ (*i.e.* $A_i \cap A_{i'} = \varnothing$ si $i \neq i'$) avec I au plus dénombrable telle que $\cup_{i \in I} A_i \in \mathscr{A}$. Si dans la définition précédente I est seulement fini, on dit que μ est une application **additive**. Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux algèbres de Boole et $f : X \to Y$ un morphisme d'algèbres de Boole. Montrer que, si $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty]$ est une mesure sur $\mathscr{A}$, l'application $f_*\mu : \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ donnée par $B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$ est une mesure sur $\mathscr{B}$, appelée **l'image directe** de μ.

Exercice 2.6 Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux algèbres de Boole, munies des applications additives μ et ν, respectivement. Montrer qu'il existe une unique application additive $\mu \boxtimes \nu : \mathscr{A} \boxtimes \mathscr{B} \to [0, +\infty]$ telle que

$$(\mu \boxtimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \tag{2}$$

pour tous $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$.

1. Plusieurs auteurs n'imposent pas la condition $X \in \mathscr{A}$ dans la définition d'algèbre d'ensembles, car ils veulent considérer après seulement des parties de mesure finie.

3 Intégration sur un segment

3.1 Fondements

Exercice 3.1 Étant donnés des nombres réels $a < b$, on pose $\mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des *fonctions en escalier*, *i.e.* des fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ telles qu'il existe une *subdivision* $P = \{a = a_0 < \cdots < a_n = b\} \subseteq [a,b]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ telle que $f|_{]a_i,a_{i+1}[}$ soit une fonction constante pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. On regarde $\mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})$ comme un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé complet $\mathrm{B}([a,b],\mathbb{C})$ formé des fonctions bornées, muni de la norme infini $\|\cdot\|_\infty$.

1. Si f est une fonction en escalier avec subdivision $P = \{a = a_0 < \cdots < a_n = b\}$ on définit la valeur $I(f) := \sum_{i=0}^{n-1} c_i(a_{i+1}-a_i) \in \mathbb{C}$, où $c_i \equiv f|_{]a_i,a_{i+1}[}$, pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. Montrer que $I(f)$ est indépendante de la subdivision de f et que l'application $I : \mathrm{St}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est linéaire.
2. Montrer que, pour tout $f \in \mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})$,

$$|I(f)| \leqslant (b-a).\|f\|_\infty.$$

L'application linéaire $I : \mathrm{St}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est donc continue pour la norme infini. En conséquence, I s'étend en une unique application linéaire continue

$$\bar{I} : \overline{\mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})} \to \mathbb{C}$$

telle que $|\bar{I}(f)| \leqslant (b-a).\|f\|_\infty$, pour tout $f \in \overline{\mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})}$, où $\overline{\mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})}$ est l'adhérence de $\mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})$ dans $\mathrm{B}([a,b],\mathbb{C})$.

On appelle $\overline{\mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})}$ *l'espace des fonctions réglées* ou *intégrables (au sens réglé)*, et, pour ces fonctions, on note $\int_a^b f(x)dx$ le nombre $\bar{I}(f)$.[2]

Exercice 3.2 *(Fonctions en escalier)* Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que f ne prenne qu'un nombre fini de valeurs. On note $\Gamma = f([a,b])$. On suppose $|\Gamma| \geqslant 2$.

On suppose de plus que f admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

1. Soit $\epsilon_0 = \min\{|y-y'| : y, y' \in \Gamma, y \neq y'\}$. Montrer que $\epsilon_0 > 0$.
2. Montrer que pour tout $x \in [a,b[$, il existe $\eta > 0$ tel que la restriction de f à $]x, x+\eta[\cap [a,b]$ est constante de valeur $f(x^+) := \lim_{y\to x^+} f(y)$.
3. Si $x \in]a,b[$, on définit $I_x = \{y \in]x,b] : f(y) \neq f(x^+)\}$. Si $I_x \neq \varnothing$, on note $\bar{x}$ la borne inférieure de I_x. Si $I_x = \varnothing$, on note $\bar{x} = b$. Montrer que $\bar{x} > x$ et que la restriction de f à $]x,\bar{x}[$ est constante. Montrer que si $\bar{x} \neq b$, $f(\bar{x}) \neq f(x^+)$ ou $f(\bar{x}^+) \neq f(x^+)$.

2. Cette notion d'intégrabilité n'est pas précisément celle de Riemann (*i.e.* les fonctions $f \in \mathrm{B}([a,b],\mathbb{C})$ telles que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $g, h \in \mathrm{St}([a,b],\mathbb{C})$ telles que $|f(x)-g(x)| \leqslant h(x)$, pour tout $x \in [a,b]$, et $I(h) \leqslant \epsilon$). Plus précisément, toute fonction réglée est intégrable au sens de Riemann, mais la réciproque n'est pas vraie (*e.g.*, $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ telle que $f(1+1/n) = 1$, si $n \in \mathbb{N}^*$, et zéro sinon), mais la théorie des fonctions réglées satisfait des propriétés plus "raisonnables" que la théorie standard de Riemann. C'est pour cela que plusieurs mathématiciens proposent que la notion d'intégrale réglée remplace celle de Riemann (voir Berberian, S. K. Classroom Notes : Regulated Functions : Bourbaki's Alternative to the Riemann Integral. Amer. Math. Monthly **86** (1979), no. 3, 208–211).

4. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = a$, $x_{n+1} = \bar{x}_n$ si $x_n \neq b$ et $x_{n+1} = b$ sinon. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_N = b$. En déduire que f est une fonction en escalier.
5. Montrer que la conclusion de la question précédente est fausse si on enlève l'hypothèse d'existence de limites.

Exercice 3.3 *(Une fonction continue est limite uniforme d'une suite croissante de fonctions en escalier)* Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Soit $\omega_n(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [0,1], |x - y| \leqslant 1/n\}$. Montrer que $\omega_n(f)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Soit σ_n la subdivision donnée par $\{j/2^n : j \in \{0, \ldots, 2^n\}\}$. Montrer que σ_{n+1} est plus fine que σ_n.
3. On définit la suite (g_n) de fonctions en escalier de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante : on pose $g_n(1) = f(1)$ et pour $0 \leqslant k < 2^n$ et $x \in [k/2^n, (k+1)/2^n\,[$,
$$g_n(x) = \inf\left\{f(y) : y \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right\}.$$
Montrer que $g_n \leqslant g_{n+1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$, $|g_n(x) - f(x)| \leqslant \omega_{2^n}(f)$. En déduire que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.
5. Comment feriez-vous pour construire une suite décroissante de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f ?

Exercice 3.4 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in ([0,1]\backslash\mathbb{Q}) \cup \{0\}, \\ 1/q, & \text{si } x = p/q \text{ avec } p, q \in \mathbb{N}^*,\ p \leqslant q \text{ et } \mathrm{PGCD}(p,q) = 1. \end{cases}$$

1. Soit $x \notin \mathbb{Q}$ et soit $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers x. Soit $\mathcal{F}_N = \{p/q \in [0,1] : 0 < q \leqslant N, p \in \mathbb{N}\}$.
   (i) Montrer que $\mathcal{F}_N$ est un ensemble fini.
   (ii) En déduire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $|x - y| > \epsilon$, pour tout $y \in \mathcal{F}_N$.
   (iii) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $q_n > N$, pour tout $n \geqslant n_0$.
   (iv) En déduire que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
2. Montrer que f est continue en tout point de $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ et en 0, et qu'elle est discontinue en tout point de $\mathbb{Q} \cap\,]0,1]$.
3. Soit $\epsilon > 0$ et $\mathcal{F}'_\epsilon = \{x \in [0,1] : f(x) > \epsilon\}$.
   (i) Montrer que $\mathcal{F}'_\epsilon$ est fini.
   (ii) Construire une fonction en escalier g_ϵ telle que $\|g_\epsilon - f\|_\infty < \epsilon$.
   (iii) Que vaut $\displaystyle\int_0^1 g_\epsilon(x)dx$?
4. La fonction f est-elle continue par morceaux ?

Exercice 3.5 *(Autour des mesures de réunion finie d'intervalles)* Tous les intervalles considérés dans cet exercice seront inclus dans $[a,b]$. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des réunions finies d'intervalles inclus dans $[a,b]$.

1. Montrer que si $X \subset [a,b]$ est un ensemble fini, alors $X \in \mathcal{U}$.
2. Soit $X \subseteq [a,b]$. Montrer que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_X$ de X est une fonction en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si $X \in \mathcal{U}$.
3. Montrer que si A et B appartiennent à $\mathcal{U}$, alors $A \cup B \in \mathcal{U}$ et $A \cap B \in \mathcal{U}$. Montrer que si $A \in \mathcal{U}$, $[a,b]\backslash A \in \mathcal{U}$.
4. On définit l'application m de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ par $m(X) = \displaystyle\int_a^b \mathbb{1}_X(x)dx$.
   (i) Montrer que si X est un intervalle, $m(X)$ est égal à la longueur de X.
   (ii) Montrer que si $X \in \mathcal{U}$ et J est un ensemble fini, alors $m(X \cup J) = m(X)$.
   (iii) Montrer que si $X \subseteq Y$ et $X, Y \in \mathcal{U}$, $m(X) \leqslant m(Y)$.
   (iv) Montrer que si $X \subseteq Y$ et $X, Y \in \mathcal{U}$, $m(X \cup Y) = m(X) + m(Y) - m(X \cap Y)$.
5. Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{U}$ deux à deux disjoints, alors
$$\sum_{n=1}^{+\infty} m(X_n) < +\infty.$$

Exercice 3.6 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ (attention, f n'est pas supposée continue).
2. En déduire la valeur des intégrales suivantes :
   (i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$, (ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))dx$.

3.2 Sommes de Riemann

Exercice 3.7 On considère la fonction $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^{-2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On découpe l'intervalle $[1,2]$ en n intervalles égaux. Les bornes des intervalles sont définies à l'aide des points $x_i = (n+i)/n$, pour $0 \leqslant i \leqslant n$.

1. Que représente la somme
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$
pour $n \in \mathbb{N}^*$?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2}.$$
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)(n+i+1)} < S_n < n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i-1)(n+i)}.$$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} < S_n < \frac{1}{2}.$$
Indication : remarquer que
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

5. En déduire que
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$
6. Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 3.8 Déterminer la limite des sommes suivantes quand n tend vers $+\infty$, en les interprétant comme des sommes de Riemann :
(a) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$, (b) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2(n^3+k^3)^{1/3}}$, (c) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin(k\pi/(n+1))$,
(d) $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(k\pi/n)$, (e) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+3k}$, (f) $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$,
(g) $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k}$. En déduire la valeur de la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin(\pi/k)$.

Exercice 3.9 Soit
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos(ka/n),$$
avec $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
1. Évaluer directement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.
2. Évaluer la même limite en utilisant que S_n est une somme de Riemann.

Exercice 3.10 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$
1. Calculer la limite de $U_{2n} - U_n$ quand $n \to +\infty$ en utilisant une somme de Riemann.
2. Rappeler pourquoi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} V_n$ existe et calculer cette limite.

Exercice 3.11 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}.$$
Déterminer la limite de u_n.

3.3 Quelques applications "numériques" de l'intégrale

Exercice 3.12 *(Produit de Wallis)*
1. Pour tout entier n, on note S_n la primitive de $x \mapsto \sin^n(x)$ s'annulant en 0. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$S_n(x) = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n} S_{n-2}(x).$$

2. À partir d'une récurrence et de l'item précédent, en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i}$$

et

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)dx = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i}{2i+1}.$$

3. Utiliser l'item précédent et le fait que les puissances de $\sin(x)$ sont décroissantes (pour $x \in [0, \pi/2]$) pour conclure que

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)dx}{\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)dx} \leqslant 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire le *produit de Wallis*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2i)^2}{(2i-1)(2i+1)}.$$

5. Montrer que

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! n^{1/2}}. \tag{3}$$

Indication : réécrire le produit de Wallis sous la forme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{(2i)^2}{(2i-1)^2} \frac{1}{2n+1}$$

et prendre la racine carrée.

Exercice 3.13 *(Formule de Stirling)*

1. Soient $\phi, \psi :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définies par

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \text{ et } \psi(x) = \phi(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

Montrer que

$$\phi'(x) = \frac{x^2}{1-x^2} \text{ et } \psi'(x) = \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2}$$

pour tout $x \in]-1, 1[$. En déduire que $\phi(x) > 0$ et $\psi(x) < 0$, pour tout $x \in]0, 1[$.

2. En déduire que

$$0 \leqslant \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x \leqslant \frac{x^3}{3(1-x^2)},$$

pour tout $x \in [0, 1[$.

3. Soit $x_n = 1/(2n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1+x_n}{1-x_n} = \frac{n+1}{n} \quad \text{et} \quad \frac{x_n^3}{3(1-x_n^2)} = \frac{1}{12(2n+1)n(n+1)}.$$

4. En déduire que
$$0 \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2n+1} \leqslant \frac{1}{12(2n+1)n(n+1)},$$
ou, de façon équivalente,
$$0 \leqslant \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1 \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles données par
$$a_n = \frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = a_n e^{1/(12n)}.$$
Montrer que $a_n \leqslant b_n$, $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $c > 0$ tel que $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
6. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\theta_n \in [0,1]$ tel que
$$n! = c^{-1}n^{n+1/2}e^{-n}e^{\theta_n/(12n)}. \tag{4}$$
7. Utiliser (3) et (4) (en remplaçant n par $2n$) pour montrer que $c = 1/\sqrt{2\pi}$.

Exercice 3.14 *(Irrationalité de π)* Dans cet exercice, on va montrer que π est irrationnel (on utilise la définition de π donnée dans l'exercice **1.3**). On procède par l'absurde : on suppose que $\pi = p/q$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme
$$f_n(x) = \frac{x^n(p-qx)^n}{n!}.$$

1. Montrer que $f_n(0) = 0$ et que $f_n(\pi - x) = f_n(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $f_n^{(k)}(\pi - x) = (-1)^k f_n^{(k)}(x)$, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $f_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$. En déduire que $f_n^{(k)}(\pi) \in \mathbb{Z}$, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_n^{(2k)}(x).$$
Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(\pi) \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que $F_n(x) + F_n''(x) = f_n(x)$ et que
$$\frac{d}{dx}\big(F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)\big) = f_n(x)\sin(x),$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que
$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx = F_n(\pi) + F_n(0) \in \mathbb{Z}.$$
5. Montrer que
$$0 < f_n(x)\sin(x) < \frac{p^n\pi^n}{n!},$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \,]0,\pi[$. En déduire que
$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx < \frac{\pi(p\pi)^n}{n!},$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure.

3.4 Trois résultats théoriques importants

Exercice 3.15 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ continue et décroissante. Pour $x \in [a,b]$, on note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et $H(x) = \int_a^x |f(t)|dt$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $x_j = a + j(b-a)/N$, pour tout $j \in \{0, \ldots, N\}$. Soient

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)g(x_j)dt \text{ et } I = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer que

$$|I_N - I| \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \big(g(x_j) - g(x_{j+1})\big)\big(H(x_{j+1}) - H(x_j)\big).$$

   En déduire que I_N tend vers I quand N tend vers $+\infty$.

2. Montrer que

$$I_N = \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j)\big(F(x_{j+1}) - F(x_j)\big) = g(b)F(b) + \sum_{j=0}^{N-1} \big(g(x_j) - g(x_{j+1})\big)F(x_{j+1}).$$

   En déduire que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant g(a) \sup_{c\in[a,b]} \left|\int_a^c f(t)dt\right|.$$

3. On suppose maintenant que f est une fonction à valeurs réelles. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(a)\int_a^c f(t)dt.$$

   Indication : se servir de la fonction $G(x) = \max(F(x), 0)$ pour majorer l'expression de I_N dans l'item précédent.

Exercice 3.16 *(Application)* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante, tendant vers 0 en $+\infty$. Montrer que la suite de terme général $\int_n^{n^2} f(t)e^{it}dt$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3.17 *(Inégalité de Hölder)* Soient $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p, q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soient f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tous $u, v \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $u^{\frac{1}{p}} \times v^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{u}{p} + \frac{v}{q}$.
2. En déduire que

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Exercice 3.18 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

1. Montrer que
$$\int_0^1 f^2(x)dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (f')^2(x)dx.$$
Indication : écrire $f(x) = \int_0^x f'(s)ds$, pour $x \in [0,1]$, et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz.
2. Améliorer l'inégalité précédente quand de plus $f(1) = 0$.

3.5 Intégrales et paramètres

Exercice 3.19 Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \mapsto (x-1)/\ln(x)$.
1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
2. Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Montrer que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
Indication : pour la limite en 1, on pourra utiliser une primitive de $1/(t\ln(t))$.
3. Montrer que φ est dérivable sur $]0,1[$. Est-elle dérivable en 0 et 1 ?
4. Calculer $\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 3.20 On définit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ via $f(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$.
1. Montrer que
$$f(x) \geqslant \frac{1}{2x} - \frac{e^{-x^2}}{2x},$$
pour tout $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
2. En découpant l'intervalle $[0,x]$ en $[0, x-\sqrt{x}]$ et $[x-\sqrt{x}, x]$ pour $x > 1$, montrer que $f(x)$ est équivalent à $1/(2x)$ en $+\infty$.

Exercice 3.21 Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. On pose $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$.
1. Déterminer le domaine de définition $\mathrm{Dom}(f)$ de f.
2. Factoriser le polynôme $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.

4 Intégrales impropres

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, on dira que f est intégrable sur I si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_I |f(x)|dx$ est convergente, *i.e.* si $\displaystyle\int_I f(x)dx$ est absolument convergente.

4.1 Autour du cours

Exercice 4.1 Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ (avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) une fonction continue par morceaux telle que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ converge. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $[a, b[$ tendant vers b.

1. Montrer que la suite $I_n = \displaystyle\int_a^{x_n} f(x)dx$ est de Cauchy.
2. Montrer que cette limite ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est convergente.

Exercice 4.2 Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)dx$ converge et que sa somme est $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Exercice 4.3 Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Montrer que

$$\lim_{x\to b} \int_x^b f(t)dt = 0.$$

Exercice 4.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = |a| \int_{-\infty}^{+\infty} f(at + b)dt.$$

Exercice 4.5 Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$). Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 4.6 Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$). Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ donnée par l'expression $g(x) = x(f(x) - f(x + 1))$ est intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$) et calculer la valeur de son intégrale sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

4.2 Nature (et calcul) d'intégrales généralisées explicites

Exercice 4.7 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :
(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)dx$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1}$, (d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$, (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$,
(f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx$, (g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}dx$, (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}dx$.

Exercice 4.8

1. Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :
(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x+2-\sqrt{x^2+4x+1})dx$, (ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^{-x}}dx$, (iii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\cos(1/x)}}dx$,
(iv) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}}dx$, (v) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{(\ln(x))^{\ln(x)}}dx$, (vi) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(\ln(\ln(x)))^{\ln(x)}}$,
(vii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\sin(x)|}$.
2. Calculer, en montrant la convergence :
(i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$, (ii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$, (iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$,
(iv) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{(1-x^2)^{3/2}}dx$, (v) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ $(a \in \mathbb{R})$, (vi) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}dx$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Exercice 4.9 Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$$

converge. Grâce à un changement de variables simple montrer qu'elle est nulle. En déduire que pour tout $a > 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}dt = \frac{\pi\ln(a)}{2a}.$$

Exercice 4.10 Pour quelles valeurs de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta}$$

est-elle convergente ?

Exercice 4.11 Soient a et b des réels tels que $a < b$. Montrer que la fonction définie sur $]a,b[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

est intégrable sur $]a,b[$ et calculer son intégrale.
Indication : on fera le changement de variable $t = (x-a)/(b-x)$.

Exercice 4.12 Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 1/\sqrt[3]{x-1}$ sur $[0,1[$,
2. $x \mapsto \cos(x)/\sqrt{1-\sin(x)}$ sur $]0,\pi/2[$,

3. $x \mapsto 1/(x^2+x+1)$ sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$,
4. $x \mapsto (x^2+x)e^x$ sur $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$,
5. $x \mapsto 1/\ln(x)$ sur $]\,0,1\,[$,
6. $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1\,[$.

Exercice 4.13 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ via

$$f_\alpha(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}.$$

Déterminer les valeurs de α telles que f_α soit intégrable (sur $\mathbb{R}_{>0}$).

Exercice 4.14 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ via

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{(x^2+1)^\alpha}.$$

1. Déterminer les valeurs de α telles que f_α soit intégrable (sur $\mathbb{R}$).
2. On note I_α l'intégrale de f_α sur $\mathbb{R}$ pour les valeurs de α déterminées dans l'item précédent. Établir une relation de récurrence entre les différentes valeurs I_α et en déduire l'expression de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer l'intégrale :
$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2px+q)^n}$$
en fonction de I_n, lorsque p et q sont deux réels vérifiant l'inégalité $q-p^2>0$. En déduire l'expression de J_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.15 *(Semi-convergence)*

1. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}\pi$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{2\sin(x)}.$$
En déduire
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}.$$
2. Vérifier que l'application $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$
est de classe C^1. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$
3. En conclure que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. Montrer que
$$\left| \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \geqslant \frac{2}{n\pi}$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ n'est pas absolument convergente. On dit dans ce cas qu'elle est *semi-convergente.*

Exercice 4.16 Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ou absolument convergentes :
(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \cos(x)} dx$, (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)} dx$.

Exercice 4.17

1. Montrer la fonction $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_{>0}$.
2. Montrer que, pour tout $p > 0$, $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. En déduire la valeur $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$
et en déduire les valeurs $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4.3 Comportement asymptotique

Exercice 4.18 Soient f et g des fonctions réelles continues par morceaux sur $[a, b[$ et supposons $g(x) > 0$, pour tout $x \in [a, b[$.

1. Montrer que si g est intégrable sur $[a, b[$ alors
$$f = o_b(g) \Longrightarrow \int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g \right)$$
et
$$f \sim_b g \Longrightarrow \int_x^b f \sim_b \int_x^b g.$$
2. Montrer que si g est n'est pas intégrable sur $[a, b[$ alors
$$f = o_b(g) \Longrightarrow \int_a^x f = o_b\left(\int_a^x g \right)$$
et
$$f \sim_b g \Longrightarrow \int_a^x f \sim_b \int_a^x g.$$

Exercice 4.19 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1 + t^2} dt.$$
Trouver un équivalent de $f(x)$ de la forme $\dfrac{C}{x^\alpha}$ (avec $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$) quand x tend vers $+\infty$.

4.4 Intégrales et paramètres (entiers ou réels)

Exercice 4.20 *(Théorème de convergence monotone)* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,

(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (*i.e.*, pour tout $x \in I$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante),

(iii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si $\left(\int_I f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, montrer que dans ce cas on a les égalités suivantes

$$\int_I f(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Exercice 4.21 *(Théorème de convergence dominée)* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{R}$ telle que

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,

(ii) il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ intégrable sur I telle que $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$,

(iii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Montrer que f est intégrable sur I et que

$$\int_I f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Exercice 4.22 *(Application)* Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

converge et vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 4.23

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{\ln(1 + xt^2)}{t^2} dt \tag{5}$$
converge pour tout $x \in \mathbb{R}_{>-1}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_{>-1}$, on note $F(x)$ l'intégrale (5). La fonction F ainsi définie est-elle continue en 0 ?

Exercice 4.24 Trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^0([0,1], \mathbb{R}_{\geqslant 0})^{\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers la fonction nulle sans que la suite $(\int_0^1 f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée.

Exercice 4.25 Trouver une série de fonctions continues, intégrables et d'intégrales nulles sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, convergeant simplement vers la fonction sinus sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Exercice 4.26 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \frac{\sin(nx)}{x^2 + n^2}$$

est continue et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$).

Exercice 4.27 Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + n^2}$$

est continue et intégrable (sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$) et que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + n^2}.$$

Exercice 4.28 Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable.

1. Montrer que
$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)dt = 0.$$
2. Montrer que
$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)dt = f(0).$$

Exercice 4.29 Posons

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n},$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$
2. Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = 2\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}(y)dy$$
et en déduire que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 4.30 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est de classe C^1. Calculer sa fonction dérivée.

Exercice 4.31 On définit la fonction $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ via

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

1. Montrer que la fonction F est de classe C^∞.
2. Trouver les limites en 0 et en $+\infty$ de F.
3. Étudier le signe et les variations de F sur $\mathbb{R}_{>0}$.
   Indication : pour $x > 0$ fixé, étudier la suite
$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{x^2 + t^2} dt.$$

Exercice 4.32 On pose
$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt.$$

1. Pour quelles valeurs de $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ cette intégrale est-elle définie ? On note $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces valeurs.
2. Montrer que
$$B(u, v) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{u-1}}{(1+s)^{u+v}} ds,$$
   pour tout $(u, v) \in \mathcal{D}$.
3. Calculer $B(1/2, 1/2)$.
4. Prouver que $(u, v) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $(v, u) \in \mathcal{D}$, et $B(v, u) = B(u, v)$.
5. Montrer que, si $(u, v) \in \mathcal{D}$, alors $(u + 1, v), (u, v + 1) \in \mathcal{D}$ et
$$B(u, v) = B(u + 1, v) + B(u, v + 1).$$
6. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que
$$B(u + 1, v) = \frac{u}{u + v} B(u, v),$$
   pour tout $(u, v) \in \mathcal{D}$.
7. En déduire l'expression de $B(u+n, v)$ en fonction de $B(u, v)$ pour tout entier naturel non nul n.
8. Calculer $B(n, p)$, avec $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
9. Calculer $B(1/3, 2/3)$.

Exercice 4.33

1. Montrer que, pour tout x réel, les intégrales généralisées
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt$$
   convergent.
2. On définit alors 2 applications $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une application $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par
$$u(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} dt, \quad v(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} dt$$
   et
$$z(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt.$$
   Étudier la parité des applications u et v et montrer que $z(x) = u(x) + iv(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. On pose $\lambda = u(0)$. Montrer que $\lambda > 1 - e^{-1}$.
4. Montrer que les applications u, v et z sont continues.
5. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t}e^{(-1+ix)t}dt$$

converge.
6. Montrer que les applications u, v et z sont dérivables.
7. Prouver que

$$z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)}z(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.
8. En déduire que les applications u, v et z sont indéfiniment dérivables.

Exercice 4.34 On considère l'expression

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t}dt.$$

Déterminer le domaine de définition de f (dans $\mathbb{R}$) et l'ensemble des points de continuité. En particulier, étudier

$$\lim_{x \to 0+} f(x)$$

et donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 4.35 On considère l'expression

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}+t+1}dt.$$

Déterminer le domaine de définition de f (dans $\mathbb{R}$) et l'ensemble des points de continuité.

Exercice 4.36 Soit $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt.$$

1. Montrer que f est continue et différentiable sur $\mathbb{R}_{>0}$.
2. Calculer la limite de f en $+\infty$.
3. Trouver une équation différentielle (non triviale) vérifiée par f.
4. Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

Exercice 4.37 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note E l'ensemble des fonctions continues sur l'intérieur de I à valeurs réelles. On note $\mathscr{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de E telles que $\displaystyle\int_I |f(x)|dx$ soit convergente. On note $\mathscr{L}^2(I)$ l'ensemble des fonctions de E telles que $\displaystyle\int_I |f(x)|^2dx$ soit convergente.

1. Montrer que $\mathscr{L}^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de E. Pour $f \in \mathscr{L}^1(I)$, on pose $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f(x)|dx$. Montrer que $\| \ \|_1$ est une norme sur $\mathscr{L}^1(I)$.
2. On suppose que $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Est-ce que f_n converge simplement vers f ?
3. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E qui converge simplement vers f. Est-ce que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers f pour la norme $\| \ \|_1$?
4. Montrer que si $f, g \in \mathscr{L}^2(I)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g \in \mathscr{L}^2(I)$ et $fg \in \mathscr{L}^1(I)$. En déduire que l'application donnée par $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_I f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire sur $\mathscr{L}^2(I)$.
5. $(\mathscr{L}^2(I), \| \ \|_2)$ est-il un espace de Hilbert ?
6. Calculer
$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-2x} dx.$$
7. Les espaces $\mathscr{L}^1(I)$ et $\mathscr{L}^2(I)$ sont-ils comparables (au sens de l'inclusion) ?
8. Sur $\mathscr{L}^1(I) \cap \mathscr{L}^2(I)$, les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont-elles équivalentes ?

5 Séries de Fourier

Exercice 5.1 *(La série de Fourier)* Soit $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux, périodiques de période 2π. On définit l'application $\langle\, , \rangle : \mathbb{E}\times\mathbb{E} \to \mathbb{C}$ par

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

1. Montrer que $\langle\, , \rangle$ est une forme hermitienne positive sur $\mathbb{E}$. Est-elle définie positive ?
2. Soit $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$ la collection de fonctions donnée par $\chi_n(x) = e^{inx}$. Montrer que

$$\langle \chi_n, \chi_m\rangle = 2\pi\delta_{n,m},$$

pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$, où $\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$ et 0 si $n \neq m$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit les *coefficients de Fourier exponentiels*

$$c_n(f) = \frac{\langle f, \chi_n\rangle}{\langle \chi_n, \chi_n\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \tag{FE}$$

On écrira c_n si la fonction f est sous-entendue.

3. Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$ la collection de fonctions donnée par $\varphi_n(x) = \cos(nx)$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_0(x) = 1$ et $\varphi_{-n}(x) = \psi_n(x) = \sin(nx)$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\langle \varphi_0, \varphi_0\rangle = 2\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle = 2\pi \text{ et } \langle \varphi_m, \varphi_{m'}\rangle = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ et tous $m, m' \in \mathbb{Z}$ tels que $m \neq m'$. On définit les *coefficients de Fourier trigonométriques*

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \\ a_0(f) &= \frac{\langle f, \varphi_0\rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0\rangle} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ b_n(f) &= \frac{\langle f, \varphi_{-n}\rangle}{\langle \varphi_{-n}, \varphi_{-n}\rangle} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \end{aligned} \tag{FT}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On écrira plus simplement a_n ou b_n si la fonction f est sous-entendue.

4. Montrer que $\varphi_0 = \chi_0$, $\chi_n + \chi_{-n} = 2\varphi_n$, $\chi_n - \chi_{-n} = 2i\varphi_{-n}$ et $\varphi_n + i\varphi_{-n} = \chi_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une relation entre (FE) et (FT). En particulier, montrer que

$$S_{f,n}(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}, \tag{F}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On appelle (F) la *série de Fourier partielle d'ordre n*.

5. Montrer que si $f|_{]-\pi,\pi[}$ est une fonction paire (resp., impaire), alors $b_n(f) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (resp., $a_n(f) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 5.2 *(Les bases de Fourier sont totales)*

1. Pour $f, g \in \mathbb{E}$, on définit $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)dt.$$

Montrer que $f * g \in \mathbb{E}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction continue et périodique de période 2π donnée par
$$D_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^{m} \chi_k.$$
   (i) Montrer que $D_n * f = S_{f,n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (ii) Montrer que
$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\big((2n+1)x/2\big)}{\sin(x/2)},$$
   pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   (iii) Montrer que
$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1,$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction continue et périodique de période 2π donnée par
$$K_n = \frac{1}{2\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^{m} \chi_k.$$
   (i) Montrer que
$$K_n * f = \frac{\sum_{m=0}^{n-1} S_{f,m}}{n}.$$
   (ii) Montrer que
$$K_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)},$$
   pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $K_n(x) \geqslant 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (iii) Montrer que
$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 1,$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (iv) Montrer que, étant donnés $\epsilon > 0$ et $0 < \delta < \pi$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\int_{-\pi}^{-\delta} K_n(x)dx + \int_{\delta}^{\pi} K_n(x)dx < \epsilon,$$
   pour tout $n \geqslant N$.
4. Soit $f \in \mathbb{E}$ et soit $X \subseteq \mathbb{R}$ une partie compacte telle que $f|_X$ soit continue. À partir des items précédents, conclure que $K_n * f$ converge uniformément vers f sur X. En déduire que l'espace vectoriel engendré par $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$ (ou par $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{E}^{\mathbb{Z}}$) est dense dans $\mathbb{E}$ muni de la semi-norme $|| \; ||_2$ associée à $\langle \, , \rangle$.
5. Utiliser l'item précédent et le théorème de Bessel pour montrer que, si $f \in \mathbb{E}$ satisfait que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors il existe $F \subseteq \,]-\pi, \pi[\,$ fini tel que $f|_{]-\pi,\pi[\backslash F}$ est la fonction nulle.

Exercice 5.3 Pour chaque item ci-dessous, on considérera la fonction $f \in \mathbb{E}$ dont la restriction de f à $[-\pi, \pi[$ coïncide avec l'expression indiquée :
(a) x, (b) x^2, (c) $|x|$, (d) $\sin^2(x)$, (e) $|\sin(x)|$.
Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques respectifs.

Exercice 5.4

1. Soit $f \in \mathbb{E}$ de classe C^1. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|c_n(f)| \leqslant C/|n|$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
2. Soit $f \in \mathbb{E}$ de classe C^2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|c_n(f)| \leqslant C/n^2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
3. Soit $f \in \mathbb{E}$ telle que la série de Fourier $S_{f,n}$ converge uniformément. Utiliser l'exercice 2 pour montrer que la limite uniforme de $S_{f,n}$ est f.
4. Soit $f \in \mathbb{E}$ qui satisfait qu'il existe $C > 0$ telle que $|c_n(f)| \leqslant C/n^2$, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que la série de Fourier de f converge uniformément vers f. En déduire que la série de Fourier de f converge uniformément vers f si f est de classe C^2.

Exercice 5.5 *(Lemme de Riemann-Lebesgue)* Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx.$$

1. On suppose maintenant que f est de classe C^1. Montrer que

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = \frac{f(b)e^{i\lambda b}}{i\lambda} - \frac{f(a)e^{i\lambda a}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(x)e^{i\lambda x}dx. \tag{6}$$

   En déduire que $\lambda \mapsto \lambda I(\lambda)$ est bornée et, en particulier, $I(\lambda)$ tend vers 0 quand λ tend vers $+\infty$. En déduire les mêmes résultats pour f de classe C^1 par morceaux.
2. En déduire le *Lemme de Riemann-Lebesgue* : pour toute fonction f intégrable,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = 0. \tag{RL}$$

3. On suppose f décroissante et positive, montrer que $\lambda \mapsto \lambda I(\lambda)$ est bornée.
4. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un fonction périodique de période $\ell > 0$ telle que $F|_{[0,\ell]}$ soit intégrable et soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $C > 0$ tel que

$$\left|\int_a^b F(x+t)f(t)e^{i\lambda t}dt\right| < \epsilon, \tag{RL-U}$$

   pour tout $\lambda > C$ et tout $x \in \mathbb{R}$.
   Indication : réduire d'abord au cas où F satisfait que $F|_{[0,\ell]}$ est en escalier à partir de prendre une approximation uniforme de F, puis démontrer le cas des fonctions en escalier à partir de (6).

Exercice 5.6 *(Convergence uniforme locale)* Soit $f \in \mathbb{E}$.

1. Montrer que les limites

$$\lim_{h\to 0+} f(x+h) \text{ et } \lim_{h\to 0-} f(x+h)$$

   existent. On les note $f(x+)$ et $f(x-)$, respectivement. On pose $\mathrm{Av}_f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ via $\mathrm{Av}_f(x) = (f(x+) + f(x-))/2$. Montrer que $\mathrm{Av}_f \in \mathbb{E}$.
2. Soit $X \subseteq \mathbb{R}$. On dit que f satisfait la *condition de Lipschitz à gauche (resp., à droite)* sur X s'il existe $C > 0$ et $\delta > 0$ tels que $|f(x-h) - f(x-)| \leqslant Ch$ (resp., $|f(x+h) - f(x+)| \leqslant Ch$), pour tous $x \in X$ et $h \in]0, \delta]$. Montrer que si X est un point x et $f \in \mathbb{E}$ est différentiable à gauche (resp., à droite) en x, alors elle satisfait la condition de Lipschitz à gauche (resp., à droite) sur X.

3. Utiliser que D_n est paire pour montrer que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x-t) - \mathrm{Av}_f(x)\big) D_n(t) dt = \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} - \mathrm{Av}_f(x) \right) D_n(t) dt$$

et en déduire que, si f satisfait la condition de Lipschitz (à gauche et à droite) sur X, alors il existe $\delta, C, C' > 0$ tels que

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} \big(f(x-t) - \mathrm{Av}_f(x)\big) D_n(t) dt \right| \leqslant C \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|t/2|}{|\sin(t/2)|} dt \leqslant \delta C',$$

pour tout $x \in X$.

4. On continue avec les hypothèses de l'item précédent. Montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue uniforme (RL-U) implique que

$$\int_{-\pi}^{-\delta} \big(f(x-t) - \mathrm{Av}_f(x)\big) D_n(t) dt \text{ et } \int_{\delta}^{\pi} \big(f(x-t) - \mathrm{Av}_f(x)\big) D_n(t) dt$$

convergent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ uniformément pour $x \in X$.

5. En déduire que si $f \in \mathbb{E}$ satisfait la condition de Lipschitz (à gauche et à droite) sur X, alors $S_{n,f} = D_n * f$ converge uniformément vers Av_f sur X.

6. En déduire le *principe de localisation de Riemann* : si $f \in \mathbb{E}$ satisfait que $f|_{[a,b]}$ est nulle, alors $S_{f,n}$ converge uniformément vers 0 sur tout sous-intervalle fermé de $]\,a, b\,[$.

Exercice 5.7 Soient $f, g \in \mathbb{E}$ les fonctions qui satisfont que $f|_{[0,2\pi\,[}$ coïncide avec $(\pi-x)^2/4$ et $g|_{[0,2\pi\,[}$ coïncide avec $(\pi-x)/2$

1. Montrer que les séries de Fourier trigonométriques de f et de g sont

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k},$$

respectivement.

2. Montrer que la série de Fourier trigonométrique de f converge uniformément vers f.

3. Montrer que l'on peut différentier la série de Fourier trigonométrique de f terme à terme sur tout intervalle de la forme $[\delta, 2\pi - \delta]$, avec $0 < \delta < \pi$, et

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k},$$

pour tout $x \in\,]\,0, 2\pi\,[$.

Exercice 5.8 Soit $f \in \mathbb{E}$ la fonction qui satisfait que $f|_{[0,2\pi\,[}$ coïncide avec e^{ax}, où $a \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{Z}$.

1. Calculer la série de Fourier exponentielle de f.

2. Soit $x \in\,]\,0, 2\pi\,[$. Montrer que

$$\pi e^{ax} = (e^{2a\pi} - 1) \left(\frac{1}{2a} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a\cos(kx) - k\sin(kx)}{k^2 + a^2} \right).$$

3. Soit $x \in \,]0, 2\pi[\,$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Montrer que

$$\pi\cos(bx) = \frac{\sin(2b\pi)}{2b} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b\sin(2b\pi)\cos(kx) + k\big(\cos(2b\pi)-1\big)\sin(kx)}{b^2-k^2}.$$

En déduire que

$$\frac{b\pi}{\sin(b\pi)} = 1 + 2b^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{b^2-k^2}.$$

Exercice 5.9 *(Le phénomène de Gibbs)*

1. Soit $g \in \mathbb{E}$ la fonction de l'exercice 7 et soit $\Delta_n :]0,\pi[\,\to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $\Delta_n(x) = S_{g,n}(x) - g(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $S_{g,n}(0)$ converge vers $\mathrm{Av}_g(0) = 0$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que Δ_n est différentiable et

$$\Delta_n'(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin\big((2n+1)x/2\big)}{2\sin(x/2)},$$

pour tout $x \in \,]0,\pi[\,$. Conclure que les points critiques de Δ_n sont de la forme $x_{n,j} = j\pi/(n+1/2)$, pour $j \in \{1,\dots,n\}$. Noter que $x_{n,j}$ converge vers $0+$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{g,n}(x_{n,j}) = \int_0^{j\pi} \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

En déduire que

$$b_j = \lim_{n\to+\infty} \Delta_n(x_{n,j}) = \int_0^{j\pi} \frac{\sin(x)}{x}dx - \frac{\pi}{2}.$$

Indication : Considérer une somme de Riemann de $\sin(x)/x$ sur l'intervalle $[0, j\pi]$ associée à la subdivision $\{kj\pi/(n+1/2) : k \in \{1,\dots,n\}\}$.
4. Montrer que la suite $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est alternée et que $(|b_j|)_{j\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (de limite 0). En conséquence, la valeur $b_1 \simeq 0,281$ est maximale.
5. Soit $f \in \mathbb{E}$ de classe C^1 par morceaux et soit $\{y_1,\dots,y_n\} \subseteq [0,2\pi[$ l'ensemble de discontinuités de saut de $f|_{[0,2\pi[}$. On pose $d_i = (f(y_i+) - f(y_i-))/\pi$ et $\tilde{f}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} d_i g(x-y_i)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Noter que, comme $\tilde{f}$ est de classe C^1 par morceaux et continue, $S_{\tilde{f},n}$ converge uniformément vers $\tilde{f}$. Utiliser le principe de localisation de Riemann ainsi que les items précédents pour montrer qu'il existe une suite $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers y_i+ telle que la limite de $|S_{f,n}(x_{n,i}) - f(y_i+)|$ quand n tend vers $+\infty$ est $b_1 d_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$.

On dit que g satisfait le *phénomène de Gibbs à droite (resp., à gauche)* en x_0 s'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n > x_0$ (resp., $x_n < x_0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\mathrm{sgn}(d)\big(\lim_{n\to+\infty} S_{g,n}(x_n) - g(x_0+)\big) > 0 \ \Big(\text{resp.}, \mathrm{sgn}(d)\big(\lim_{n\to+\infty} S_{g,n}(x_n) - g(x_0-)\big) < 0\Big).$$

Un résultat remarquable de la théorie de Fourier est que toute fonction $g \in \mathbb{E}$ de classe C^1 par morceaux satisfait le phénomène de Gibbs (à droite et à gauche) en toute discontinuité de saut.

6 Intégrales curvilignes

Exercice 6.1 Donner la longueur de la courbe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\alpha(t) = \Big(a\big(2\cos(t) - \cos(2t)\big), a\big(2\sin(t) - \sin(2t)\big)\Big),$$

où $a > 0$.

Exercice 6.2 Soient $a, b > 0$. Calculer la longueur de l'arc de la chainette $y = a\cosh(x/a)$ compris entre le sommet $(0, a)$ et le point (b, h), où $h = a\cosh(b/a)$.

Exercice 6.3 Calculer la longueur de la cardioïde décrite en polaires par $r = a(1+\cos(\theta))$, où $a > 0$.

Exercice 6.4 Soient A et B deux points de $\mathbb{R}^2$ tels que la distance entre A et B est $a > 0$. Sans perte de généralité on considère que $A = (0, 0)$ et $B = (a, 0)$. Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan de classe C^1 telle que $\varphi(0) = A$ et $\varphi(1) = B$. On note ℓ la longueur de la courbe paramétrée par φ.

1. Rappeler la formule permettant de calculer ℓ.
2. Montrer que $\ell \geqslant a$. Est-ce étonnant ?
3. Montrer que $\ell = a$ si et seulement s'il existe une fonction $x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ monotone telle que $\varphi(t) = (x(t), 0)$, pour tout $t \in [0, 1]$.

Exercice 6.5 On va s'intéresser aux courbes de longueur minimale tracées sur la sphère

$$S^2 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

de rayon 1 et de centre $O = (0, 0, 0)$. On appelle *grand cercle* de la sphère toute intersection de la sphère avec un plan passant par O.

Soient A et B deux points de S^2. Sans perte de généralité, on considère que $A = (0, 0, 1)$ et $B = (\sin(\psi_0), 0, \cos(\psi_0))$, avec $0 \leqslant \psi_0 \leqslant \pi$.

On considère une courbe tracée sur la sphère $M : [0, 1] \to S^2$ donnée par

$$t \mapsto (\cos(\theta(t))\sin(\psi(t)), \sin(\theta(t))\sin(\psi(t)), \cos(\psi(t))$$

telle que les fonctions θ et ψ soient de classe C^1, $\theta(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\theta(1) = 0$ et $\psi(1) = \psi_0$. On a donc $M(0) = A$ et $M(1) = B$. On note ℓ la longueur de la courbe paramétrée précédente.

1. Montrer que
$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\big(\theta'(t)\big)^2 \sin^2\big(\psi(t)\big) + \big(\psi'(t)\big)^2}\,dt.$$
2. En déduire que la longueur de ℓ est plus grande que la longueur de l'arc de cercle du grand cercle tracé sur la sphère reliant A à B.
3. En déduire que pour tous points A, B sur la sphère, le chemin sur la sphère le plus court reliant A à B est donné par l'arc de cercle reliant A à B d'un grand cercle de la sphère.

7 Intégrales doubles

Exercice 7.1 Calculer les intégrales doubles

$$I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1} dxdy \quad \text{et} \quad J = \iint_\Delta (x^2+y^2) dxdy,$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leqslant 1\}$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

Exercice 7.2 Soit $T \subseteq \mathbb{R}^2$ le triangle ayant pour sommets les points de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Montrer que

$$\iint_T e^{\frac{x-y}{x+y}} dxdy = \frac{1}{2} \sinh(1).$$

Exercice 7.3 Montrer que l'aire de la région bornée R comprise entre la droite $y = x$ et la parabole $y^2 = 2x$ vaut $2/3$.

Exercice 7.4 Soit $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{>0} : 1 \leqslant xy \leqslant 3, 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 4\}$. Calculer

$$\iint_R (x^2+y^2) dxdy.$$

Indication : utiliser le changement de variables donné par $t = x^2 - y^2$ et $s = xy$.

Exercice 7.5 Soit $a > 0$ et $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant a\}$. Montrer que

$$\iint_H e^{-(x^2+y^2)} dxdy = ae^{-a^2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{a^2+t^2} dt.$$

Indication : utiliser le changement de variables donné par $x^2 + y^2 = t^2 + a^2$ et $y = sx$.

Exercice 7.6 Soit $\epsilon \in]\,0,1\,[$ et $A_\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \epsilon^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

1. Calculer
$$I_\epsilon = \iint_{A_\epsilon} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$$
2. Montrer que la limite
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} I_\epsilon$$
existe. Conclure que la fonction $(x,y) \mapsto 1/\sqrt{x^2+y^2}$ est intégrable dans un voisinage de l'origine et comparer avec la fonction $x \mapsto 1/|x|$.

Exercice 7.7 Montrer que l'intégrale de $f(x,y) = x$ sur le disque $x^2+y^2-2x \leqslant 0$ vaut π.

Exercice 7.8 On note $\Delta = [0,1]^2$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \iint_\Delta \frac{(xy)^n dxdy}{1+xy}.$$

1. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} I_n.$$
2. En déduire la valeur de
$$\iint\limits_{\Delta} \frac{dxdy}{1+xy}.$$

Exercice 7.9 Calculer l'aire de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1\}$ et l'intégrale
$$\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}.$$

Exercice 7.10 Calculer l'aire A de l'intérieur de l'ellipse
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqslant 1$$
au moyen du changement de variables $x = au\cos(v)$ et $y = bu\sin(v)$.

Exercice 7.11 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant x^2\}$. Représenter D, calculer son aire et l'intégrale
$$\iint\limits_{D} (x^2-y)dxdy.$$

Exercice 7.12 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $R \geqslant 0$, soit $\omega_n(R)$ le volume de la boule
$$\bar{B}_n(R) = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2 \leqslant R^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^n$$
de rayon R. Le but de cet exercice est de calculer $\omega_n(R)$.

1. Montrer que $\omega_n(R) = R^n\omega_n(1)$, pour tout $R \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Redémontrer les formules classiques
$$\omega_1(R) = 2R, \omega_2(R) = \pi R^2 \text{ et } \omega_3(R) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$
3. On suppose désormais $n \geqslant 2$. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction indicatrice de $\bar{B}_n(1)$ et soit $R_{n-2} = [-1,1]^{n-2} \subseteq \mathbb{R}^{n-2}$. On écrit $x = x_1$ et $y = x_2$. Montrer que
$$\omega_n(1) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(\int_{R_{n-2}} g(x,y,x_3,\ldots,x_n)dx_3\ldots dx_n\right)dxdy.$$
4. Montrer que, si $x^2+y^2 > 1$, $g(x,y,x_3,\ldots,x_n) = 0$, tandis que, si $x^2+y^2 \leqslant 1$, la fonction $(x_3,\ldots,x_n) \mapsto g(x,y,x_3,\ldots,x_n)$ (avec x et y fixes) coïncide avec la fonction indicatrice de la boule $\bar{B}_{n-2}(\sqrt{1-x^2-y^2})$. En déduire que
$$\int_{R_{n-2}} g(x,y,x_3,\ldots,x_n)dx_3\ldots dx_n = (1-x^2-y^2)^{(n-2)/2}\omega_{n-2}(1),$$
et en conséquence
$$\omega_n(1) = \omega_{n-2}(1) \iint\limits_{\bar{B}_2(1)} \left(1-x^2-y^2\right)^{(n-2)/2}dxdy.$$

5. Utiliser le changement de variables des coordonnées polaires pour calculer la dernière intégrale. En déduire que
$$\omega_{2n}(1) = \frac{\pi^n}{n!} \text{ et } \omega_{2n-1}(1) = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-1)!!},$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, où l'on rappelle que $(2n-1)!! = (2n-3)!!.(2n-1)$ et $1!! = 1$.
6. Montrer que
$$\omega_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1 + n/2)},$$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7.13

1. L'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est-elle convergente ?
2. Pour $a > 0$, on pose $D_a = [0, a] \times [0, a]$, $\Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{\geqslant 0} : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$,
$$Q(a) = \iint_{D_a} f(x)f(y)dxdy \text{ et } C(a) = \iint_{\Delta_a} f(x)f(y)dxdy,$$
où $f(x) = e^{-x^2}$. Encadrer $Q(a)$ à l'aide de la fonction $C(a)$. En déduire la valeur de J.

Exercice 7.14 Montrer que
$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u + v)},$$
pour tout $(u, v) \in \mathcal{D}$ (voir les exercices **30** et **32** de la fiche 3).

Exercice 7.15 Soit $c > 0$. Déterminer le volume du simplexe de $\mathbb{R}^n$ donné par
$$\Delta_n(c) = \big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0, x_1 + \cdots + x_n \leqslant c\big\}.$$

Exercice 7.16 *(Intégrales de Fresnel)* On pose
$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt.$$

1. Soient
$$I' = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(s)}{\sqrt{s}} ds \text{ et } J' = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(s)}{\sqrt{s}} ds.$$
Montrer que $I = I'/2$ et $J = J'/2$.
2. Montrer que I et J sont bien définies.
3. En utilisant
$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx,$$
montrer que
$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx,$$
pour tout $t > 0$.

4. Justifier que

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_A^B e^{it}e^{-tx^2}dt\right)dx = \int_A^B\left(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-tx^2}dx\right)dt,$$

pour tous $0 < A < B$. En déduire que

$$\int_A^B \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_A^B e^{it}e^{-tx^2}dt\right)dx.$$

5. Montrer par passage à la limite que

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{i+u^2}{1+u^4}du.$$

6. En déduire que

$$I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 7.17 Soient $A_R = [0, R] \times [0, R]$ et $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{>0} : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Calculer les limites des intégrales

$$\iint\limits_{A_R}\sin\left(x^2+y^2\right)dxdy \text{ et } \iint\limits_{D_R}\sin\left(x^2+y^2\right)dxdy$$

quand R tend vers $+\infty$, si elles existent.

Exercice 7.18 *(Calcul d'intégrales doubles à l'aide de lignes de niveau)*

1. Soit $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ un fermé et $F : \Delta \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a \leqslant b$ deux réels fixes. On suppose que $\Omega = \{(x, y) \in \Delta : a \leqslant F(x, y) \leqslant b\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.
   Pour tout $k \in [a, b]$, on définit $\Omega_k = \{(x, y) \in \Delta : a \leqslant F(x, y) \leqslant k\}$. On considère les fonctions $A, I : [a, b] \to \mathbb{R}$ données par

$$A(k) = \iint\limits_{\Omega_k} dxdy \text{ et } I(k) = \iint\limits_{\Omega_k} F(x, y)dxdy.$$

   On suppose que la fonction A est dérivable sur $[a, b]$ avec dérivée continue. Montrer que I est dérivable de dérivée $I'(k) = kA'(k)$. En déduire que

$$I(b) = \iint\limits_{\Omega} F(x, y)dxdy = \int_a^b I'(k)dk.$$

2. On va considérer l'application suivante. Calculer

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}\right)dxdy \text{ et } \iint\limits_{D}\frac{dxdy}{(1+x+y)^3},$$

   où

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 \leqslant 1\right\} \text{ et } D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2_{\geqslant 0} : x + y \leqslant 1\right\}.$$

Exercice 7.19 Montrer que

$$-\frac{1}{2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dxdy \neq \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dydx = \frac{1}{2}.$$

Y a-t-il une contradiction avec le théorème de Fubini ?

Exercice 7.20 Dans cet exercice, on s'intéresse à la transformée de Fourier F de la fonction Gaussienne $\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-\pi x^2} \end{array}$.

1. En appliquant le théorème de Fubini, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \right)^2.$$

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

3. Soit $\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \xi & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx \end{array}$.

   (a) Montrer que F est dérivable et que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

   $$F'(\xi) = i \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = 2\pi i \xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$

   (c) En déduire que $F(\xi) = e^{-\pi \xi^2}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.21 Soit P un rectangle de $\mathbb{R}^2$. On appelle *partie pavable* de P toute réunion finie de rectangles inclus dans P. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des parties pavables de P.

1. Montrer que si A_1 et A_2 appartiennent à $\mathcal{P}$, alors $A_1 \cup A_2$ appartient à $\mathcal{P}$ et $P \backslash A_1$ aussi. Faire des dessins. Montrer de plus que tout élément de $\mathcal{P}$ peut s'écrire comme réunion finie de rectangles deux à deux disjoints.
2. Soit X une partie de $\mathbb{R}^2$ incluse dans P. On note

   $$J^+(X) = \inf \left\{ \text{mes}(A) : A \in \mathcal{P}, X \subseteq A \right\} \text{ et } J^-(X) = \sup \left\{ \text{mes}(A) : A \in \mathcal{P}, A \subseteq X \right\}.$$

   Montrer que $J^+(X) \geqslant I^+(\mathbb{1}_X)$ et $J^-(X) \leqslant I^-(\mathbb{1}_X)$.
3. Montrer que si v est un fonction en escalier telle que $v \geqslant \mathbb{1}_X$, alors il existe $A \in \mathcal{P}$ tel que $v \geqslant \mathbb{1}_A \geqslant \mathbb{1}_X$. En déduire que $J^+(X) = I^+(\mathbb{1}_X)$. De manière analogue, montrer que $J^-(X) = I^-(\mathbb{1}_X)$.
4. Montrer que X est cubable si et seulement si $J^+(X) = J^-(X)$. Si X est cubable, alors $\text{mes}(X) = J^+(X) = J^-(X)$.
5. X est négligeable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{P}$ tel que $X \subseteq A$ et $\text{mes}(A) \leqslant \epsilon$. Montrer qu'un ensemble négligeable est cubable de mesure nulle.

6. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que il existe $M \geqslant 0$ tel que
$$\|\varphi(s) - \varphi(t)\|_\infty \leqslant M|s-t|,$$
pour tout $s, t \in [0,1]$. Montrer que $\varphi([0,1])$ est négligeable.
7. Soit D une partie fermée de P telle que la frontière de D soit donnée par une courbe C^1 par morceaux. Notons X la frontière de D. Soit $\epsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $A \in \mathcal{P}$ tel que $X \subseteq A$ et $\text{mes}(A) \leqslant \epsilon$. Alors $P \backslash A$ est une réunion de rectangles $R_1, \ldots, R_N$.
Montrer par un raisonnement par l'absurde et en utilisant un argument de connexité que, pour tout i, $R_i \subseteq D$ ou $R_i \subseteq P \backslash D$.
En déduire qu'il existe $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$ tel que
$$\bigcup_{i \in I} R_i \subseteq D \subseteq \bigcup_{i \in I} R_i \cup A.$$
Montrer que D est cubable.

8 Espaces probabilisés, variables aléatoires discrètes

8.1 Espaces de probabilité

Exercice 8.1 Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$, où l'on rappelle que, étant donné un ensemble Ω, $\mathscr{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$. Montrer que $\mathbb{P}(\{n\})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8.2 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et soient $A, B \in \mathscr{A}$. Montrer que $\mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.

Exercice 8.3 On a un alphabet de 5 lettres $\{a, b, c, d, e\}$ et on considère l'ensemble des mots de 25 lettres. On tire au hasard un mot dans cet ensemble. Quelle est la probabilité qu'il comporte 5 a, 5 b, 5 c, 5 d et 5 e ?

Exercice 8.4 On fait 2 lancers avec trois dés. Quelle est la probabilité d'avoir les mêmes résultats si

1. les dés sont de trois couleurs différentes ? (Dans ce cas le résultat d'un lancer est un triplet donnant le résultat de chaque dé)
2. les dés sont indiscernables ? (Dans ce cas le résultat d'un lancer est l'ensemble des résultats avec leur multiplicité, par exemple deux 1 et un 5)

Exercice 8.5 Après avoir bien mélangé un jeu de 52 cartes, on en fait une pile.

1. Quelle est la probabilité que le 2 de cœur soit à la dernière place ?
2. Quelle est la probabilité que l'as de pique se trouve au dessus de l'as de cœur ?
3. Quelle est la probabilité que l'as de pique soit au dessus de l'as de cœur et que celui-ci soit au dessus de l'as de carreau ?
4. Quelle est la probabilité que l'as de pique et l'as de trêfle ne soient pas adjacents ?

Exercice 8.6 *(Premier problème du chevalier de Méré)* Quel est le plus probable : jouant avec un dé, obtenir au moins une fois 6 en 4 coups, ou bien jouant avec deux dés (discernables), obtenir au moins une fois un double 6 en 24 coups ?

Exercice 8.7 *(Second problème du chevalier de Méré)* Le chevalier de Méré avait posé à Pascal le problème suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en plusieurs parties ; celui qui, le premier, a gagné trois parties emporte la totalité de l'enjeu. On considère que la probabilité de gagner une partie est la même pour chaque joueur . Si les joueurs doivent arrêter le jeu alors qu'il ne manque au premier joueur, pour l'emporter, qu'une partie, et au second que deux parties, comment doit-on répartir équitablement l'enjeu ?

Exercice 8.8 *(Problème des anniversaires)* Quelle est la probabilité pour que n personnes prises au hasard aient toutes des jours d'anniversaire différents ? On supposera que tous les jours de naissance sont équiprobables et on ne tiendra pas compte des années bissextiles.

Exercice 8.9 *(Formule de Poincaré, problème des rencontres)*

1. Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ des événements. Montrer que, si A désigne la réunion de ces n événements, alors
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$
2. On tire sans remise n boules numérotées de 1 à n. Déterminer la probabilité p_n pour qu'il existe un entier k tel que la boule portant le numéro k soit tirée au tirage numéro k.
3. Déterminer la limite de p_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 8.10 On a $r \in \mathbb{N}^*$ balles et n paniers numérotés de 1 à n, avec $n \geqslant 2$. On répondra aux questions dans les deux cas suivants :

(C1) Les r balles sont discernables (par exemple, parce qu'elles sont de couleurs différentes).

(C2) Les r balles sont indiscernables.

1. Quel est le nombre de répartitions possibles (un panier peut contenir plusieurs balles) ? On suppose qu'on a équiprobabilité.
2. Quelle est la probabilité p_k qu'un panier fixé (par exemple, le premier panier) contienne exactement k balles, pour $k \in [\![0, r]\!]$. Étudier aussi la monotonie de la suite $(p_k)_{k \in \{0,\ldots,r\}}$.
3. On suppose que n et r tendent vers l'infini et que r/n tend vers λ. Montrer que chaque terme p_k admet une limite et calculer celle-ci.

Exercice 8.11 *(Problème du scrutin)* Lors d'un vote opposant deux candidats A et B, A obtient a voix et B obtient b voix. On suppose que $a < b$. Quelle est la probabilité pour qu'au cours du dépouillement, B ait toujours été strictement en tête ?
Indication : représenter le dépouillement par un chemin du plan constitué de segments horizontaux ou verticaux de longueur 1 joignant l'origine au point de coordonnées (a, b) et compter le nombre de chemins situés strictement au dessus de la diagonale.

8.2 Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 8.12 *(Indépendance de deux évènements)* Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A, B \in \mathscr{A}$ deux évènements. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les tribus engendrées par A et B, respectivement, *i.e.* $\mathcal{A} = \{\varnothing, A, \Omega\backslash A, \Omega\}$ et $\mathcal{B} = \{\varnothing, B, \Omega\backslash B, \Omega\}$. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si pour tout $C \in \mathcal{A}$ et pour tout $D \in \mathcal{B}$, $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D)$.

Exercice 8.13 *(Indépendance d'une famille d'évènements)* Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Considérons les propriétés suivantes

(P1) les événements $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{A}^n$ sont indépendants ;

(P2) pour toute famille $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{A}^n$ telle que $B_i \in \{A_i, \Omega\backslash A_i\}$,

$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i \Bigg) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{P}(B_i);$$

(P3) pour toute famille $(B_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{A}^n$ telle que $B_i \in \{\varnothing, A_i, \Omega\backslash A_i, \Omega\}$,

$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i \Bigg) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbb{P}(B_i).$$

Montrer que les propriétés (P1), (P2) et (P3) sont équivalentes.

Exercice 8.14 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \Bigg) = 1 - \lim_{N \to +\infty} \prod_{k=0}^{N} \mathbb{P}(\Omega\backslash A_k).$$

2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $\mathbb{P}(\cup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = 1$;
   (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \ln(\mathbb{P}(\Omega\backslash A_k))$ diverge ;
   (iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ diverge.

Exercice 8.15 Dans une usine d'écrous, trois machines A, B et C produisent 25%, 35% et 40% du total de la production, respectivement. Elles produisent 5%, 4% et 2% de pièces défectueuses, respectivement. Un écrou est tiré au hasard et s'avère défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la machine A ? B ? ou C ?

Exercice 8.16 Une urne contient n boules noires et n boules rouges. On tire deux par deux sans remise, toutes les boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir à chaque tirage deux boules de couleurs différentes ?

Exercice 8.17 On dispose de $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne numéro k contient k boules rouges et $N - k$ boules noires. On tire une des urnes avec équiprobabilité, puis on procède avec cette urne à une série de n tirages avec remise.

1. Calculer la probabilité d'avoir choisi l'urne numéro 1 sachant qu'on a tiré n boules rouges.
2. Calculer la probabilité de tirer n boules rouges.
3. Calculer la probabilité de tirer une boule rouge au tirage $n + 1$ sachant qu'on a déjà tiré n boules rouges.

4. Déterminer les limites des probabilités précédentes quand $N \to +\infty$.

Exercice 8.18 Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{A}$ des événements indépendants. On suppose que $\mathbb{P}(A_k) = p_k$. Quelle est la probabilité p qu'aucun de ces événements ne soit réalisé ? Montrer que

$$p \leqslant e^{-\sum_{k=1}^{n} p_k}.$$

Exercice 8.19 Pour tout entier $n \geqslant 2$ fixé, soit $\mathbb{P}_n$ la probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et soit $\mathscr{D}\mathscr{P}_n \subseteq \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des diviseurs premiers de n. Pour tout diviseur m de n désignons par A_m le sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ formé des multiples de m.

1. Montrer que $\mathbb{P}_n(A_m) = 1/m$.
2. Montrer que les A_p, où p parcourt les diviseurs premiers de n, sont des événements indépendants dans l'espace probabilisé $(\{1, \ldots, n\}, \mathbb{P}_n)$.
3. En déduire que l'ensemble des entiers de $\{1, \ldots, n\}$ premiers avec n a une probabilité

$$\prod_{p \in \mathscr{D}\mathscr{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

   En déduire le cardinal de l'ensemble des entiers de $\{1, \ldots, n\}$ premiers avec n. Retrouver ainsi une formule d'Euler.
4. On considère maintenant l'espace $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$. Soit $s > 1$.
   (i) Montrer qu'il existe $\lambda_s \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathbb{P}_s(\{n\}) = \frac{\lambda_s}{n^s}$$

   définisse une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$.
   (ii) Soit pour $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = \{n \in \mathbb{N}^* : m|n\}$. Montrer que $\mathbb{P}_s(A_m) = 1/m^s$.
   (iii) Montrer que les A_p, où p parcourt l'ensemble $\mathscr{N}\mathscr{P}$ des nombres premiers, sont des événements indépendants dans $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), \mathbb{P}_s)$.
   (iv) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\prod_{p \in \mathscr{N}\mathscr{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)}.$$

   (v) Existe t-il une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathscr{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $m \geqslant 1$, $\mathbb{Q}(A_m) = 1/m$?

8.3 Variables discrètes

Exercice 8.20 *(Comment jouer à pile ou face avec une pièce biaisée ?)* On considère une pièce ayant une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur face (F). La probabilité de tomber sur pile (P) est donc $1 - p$. On lance la pièce deux fois. Si on obtient FP, on pose $X = 1$ et si on obtient PF, on pose $X = 0$. Dans les deux autres cas, on recommence jusqu'à obtenir FP ou PF et on définit alors X comme précédemment. Déterminer la loi de X.

Exercice 8.21 *(Lancer de pièces)* On lance une pièce 5 fois. On appelle X le nombre de faces obtenus. On appelle Y le nombre de sous-suites maximales de faces dans le 5-uplet de résultat (par exemple, FFPFP comporte deux sous-suites maximales de faces, FPFPF en comporte 3). On appelle Z la longueur de la plus grande sous-suite maximale de faces. Donner les lois de X, Y, Z, (X,Y), (X,Z), (Y,Z) et (X,Y,Z).

Exercice 8.22 La variable aléatoire X suit la loi $B(2n,p)$. Déterminer la loi de $Y = |X-n|$.

Exercice 8.23 La variable aléatoire N suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, avec $n \geqslant 2$ entier. Déterminer la loi de $X = \cos(N\pi)$.

Exercice 8.24

1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini. On définit les variables aléatoires $X^+ = \max(X,0)$ et $X^- = \max(-X,0)$.
   (i) Exprimer X et $|X|$ à l'aide de X^+ et X^-.
   (ii) En déduire l'inégalité $|E[X]| \leqslant E[|X|]$.
2. On suppose que X est à valeurs dans $\{-1,0,1\}$ et on définit $\alpha = E[X]$ et $\beta = E[|X|]$.
   (i) Montrer que $|\alpha| \leqslant \beta \leqslant 1$.
   (ii) Déterminer la loi de X à l'aide de α et β.

Exercice 8.25 Une urne renferme des boules blanches et des boules noires en proportions respectives p et $1-p$ avec $0 < p < 1$. On effectue des tirages avec remise. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note X_n la variable aléatoire donnée par le nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la n-ème boule blanche.

1. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer la fonction génératrice G_1 de X_1.
2. On pose $Y_1 = X_1$ et $Y_n = X_n - X_{n-1}$ pour tout $n > 1$. Montrer que
   (i) Pour tout $n \geqslant 0$, la variable aléatoire Y_n a même loi que X_1.
   (ii) Pour tout $n > 0$, X_{n-1} est indépendante de Y_n
3. En déduire la fonction génératrice G_n de X_n. Que vaut $E[X_n]$?
4. Déterminer la loi de X_n. Comparer $\mathbb{P}(X_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_n = k+1)$. Tracer le diagramme en bâtons de la loi de X_n.

Exercice 8.26 *(Loi sans mémoire)* Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}\big(\{T \geqslant n+k\} | \{T \geqslant n\}\big) = \mathbb{P}\big(\{T \geqslant k\}\big),$$

pour tous $n, k \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de T.

Exercice 8.27 *(Boules)* Une urne contient N boules dont N_1 portent le numéro 1, N_2 portent le numéro 2 et N_3 portent le numéro 3. On fait un tirage de n boules avec remise. Soit X_i le nombre de boules tirées qui portent le numéro i et $X = (X_1, X_2, X_3)$.

1. Donner la loi de X.
2. Donner la loi de X_i pour $1 \leqslant i \leqslant 3$.
3. Donner la loi de (X_1, X_2).
4. On note Y_r la variable aléatoire valant 1 si l'on tire une boule portant le numéro 1 au r-ème tirage et 0 sinon. On note Z_r la variable aléatoire valant 1 si on tire une boule portant le numéro 2 au r-ème tirage et 0 sinon.

(i) Exprimer X_1, X_2 et X_3 en fonction des $(Y_r)_{1\leqslant r\leqslant n}$ et des $(Z_r)_{1\leqslant r\leqslant n}$.

(ii) Calculer l'espérance de X_1, la variance de X_1 et la covariance de (X_1, X_2).

Traiter les mêmes questions pour un tirage sans remise.

Exercice 8.28 *(Loi du maximum observé)* Une urne contient N balles numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise. Soit X le plus grand nombre tiré lors des n tirages.

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Donner la loi de X.
3. Calculer $E[X]$ et donner un équivalent de $E[X]$ quand $N \to +\infty$

Exercice 8.29 Un homme possède n clés et veut ouvrir une porte. Une seule parmi les clés dont il dispose ouvre la porte. Il essaie les clés au hasard. Trouver l'espérance et la variance du nombre d'essais nécessaires si :

1. les clés qui ne marchent pas sont remises avec les autres ;
2. les clés qui ne marchent pas sont mises de coté.

Exercice 8.30 *(Poisson(s))* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètre a et b.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.
2. Déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\{X = k\}|\{S = n\})$ pour tout couple (n, k) d'entiers naturels.
3. (Facultatif) Soit $r \geqslant 1$ un entier et $(X_k)_{k=1,\ldots,r+1}$ des variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs a_k. Donner la loi conditionnelle de $(X_1, \ldots, X_r)$ sachant $\{X_1 + \cdots + X_{r+1} = n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.31 *(Loi jointe)* On effectue une suite infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré. On numérote les lancers à partir de 1. On définit X comme le numéro du premier lancer qui donne 6 et Y comme le nombre de 5 obtenus avant d'obtenir le premier 6.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant l'événement $\{X = n\}$.
3. Déterminer la loi de Y.

Exercice 8.32 *(Espérance discrète)* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X > n\}\big)$$

converge et que

$$E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big(\{X > n\}\big).$$

Exercice 8.33 *(Lois géométriques)* Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètres respectifs a et b. Soit $Z = \min(X, Y)$ et $U = |X - Y|$.

1. Déterminer $\mathbb{P}(\{X \geqslant n\})$ et $\mathbb{P}(\{Z \geqslant n\})$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser la loi de Z.

2. Calculer $\mathbb{P}(\{U = 0\})$. Déterminer la loi de U.
3. Montrer que Z et U sont indépendantes.

Exercice 8.34 *(Jeu de cartes)* On considère un jeu de n cartes numérotées de 1 à n. On mélange bien ce jeu. Rappeler comment modéliser cette expérience. On suppose qu'on met les cartes en un paquet, la première position étant celle du dessus et la dernière celle du dessous. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la carte portant le numéro k est à la k-ème position et 0 sinon.

1. Donner la loi de X_k.
2. Donner la loi de (X_j, X_k) si $k \neq j$.
   Indication : calculer d'abord $\mathbb{P}((X_j, X_k) = (1, 1))$.
3. Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Que représente S_n ? Calculer l'espérance et la variance de S_n.
4. Calculer $\mathbb{P}(S_n \neq 0)$. Calculer la limite précédente quand n tend vers l'infini.
   Indication : utiliser la formule de Poincaré avec les événements $\{X_k = 1\}$.
5. (Question difficile) Donner la loi de S_n. Déterminer la limite quand n tend vers l'infini de $\mathbb{P}(S_n = k)$ (k étant fixé).

Exercice 8.35 *(La médiane)* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. Un réel m est une *médiane* de X si $\mathbb{P}(X \leqslant m) \geqslant 1/2$ et $\mathbb{P}(X \geqslant m) \geqslant 1/2$.

1. Montrer qu'une médiane existe toujours mais qu'on a pas toujours unicité.
2. Expliquer comment on trouve une médiane sur l'histogramme ou sur le graphe de la fonction de répartition.
3. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, montrer que si X admet une espérance μ et un écart type σ, $(\mu - m)^2 \leqslant \sigma^2$, où m est une médiane de X.
4. Comparer espérance et médiane dans les exemples suivants : loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$, loi binomiale de paramètre (n, p), loi géométrique de paramètre p et loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 8.36 *(L'urne de Pólya)* Soient $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$ des entiers avec $a + b \geqslant 1$. Une urne contient a boules rouges et b boules noires. Si l'on tire une boule, on remet dans l'urne c boules de la couleur de la boule tirée (le cas du tirage avec remise simple est donnée par $c = 1$ et celui du tirage sans remise par $c = 0$).

1. Calculer la probabilité qu'au deuxième tirage, on tire une boule rouge.
2. Calculer la probabilité qu'au troisième tirage, on tire une boule rouge.
3. On note X_i la variable aléatoire valant 1 si l'on tire une boule rouge au tirage numéro i et 0 sinon. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Que représente la variable aléatoire $S_i = X_1 + \cdots + X_i$?
5. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(\{S_i = k\}) > 0$. Calculer $\mathbb{P}(\{X_{i+1} = 1\} | \{S_i = k\})$.
6. En utilisant la formule des probabilités totales montrer que
$$\mathbb{P}\big(\{X_{i+1} = 1\}\big) = \frac{(c-1)E[S_i] + a}{a + b + i(c-1)}.$$
   En déduire la valeur de $\mathbb{P}(\{X_i = 1\})$.

Exercice 8.37 *(Dés et loi uniforme)* On va résoudre le problème suivant. Peut-on truquer deux dés de telle façon que la loi de la somme des points obtenus soit la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$?

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{1, \ldots, 6\}$. On suppose que $\mathbb{P}(\{X = 6\}) \neq 0$. Soit G_X sa fonction génératrice. Montrer qu'il existe un polynôme H_X ayant au moins une racine réelle tel que $G_X(s) = sH_X(s)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$.
2. Soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$. Montrer qu'il existe un polynôme K tel que $G_Z(s) = s^2 K(s)$, pour tout $s \in \mathbb{R}$. Montrer que K n'a pas de racines réelles.
3. Répondre à la question initiale.

Exercice 8.38 *(Perte au casino)* On considère un jeu au casino qui est tel qu'à chaque partie le joueur a une probabilité p de gagner et une probabilité $1 - p$ de perdre. Son gain est $+1$ s'il gagne et de -1 s'il perd. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note ϵ_n la variable aléatoire représentant son gain à la n-ème partie. Soit $X_n = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_n$ son gain au bout de n parties.

1. Donner la loi de X_n.
   Indication : poser $Z_k = \epsilon_k + 1/2$ pour se ramener à une loi connue.
2. Si sa fortune initiale est $i \in \mathbb{N}$, sa fortune au bout de n parties est donnée par $i + X_n$. On suppose que le joueur s'arrête dès que sa fortune vaut 0 (*i.e.* il est ruiné) ou une somme $N \in \mathbb{N}^*$ avec $N \geqslant i$. On note $p_N(i)$ la probabilité qu'il atteigne la fortune N. On a donc $p_N(0) = 0$ et $p_N(N) = 1$.
   (i) Montrer que si $N \geqslant 2$, $p_N(1) = p.p_N(2)$.
   (ii) Donner une relation entre $p_N(i-1)$, $p_N(i)$ et $p_N(i+1)$ si $1 \leqslant i \leqslant N - 1$. En déduire la valeur de $p_N(i)$ en fonction de p, i et N.
   (iii) Déterminer la limite de $p_N(i)$ quand N tend vers $+\infty$.

9 Espaces probabilisés, variables aléatoires à densité

Exercice 9.1 Existe-t-il $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} cx(1-x), & \text{si } x \in [0,1], \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash [0,1], \end{cases}$$

soit une densité de probabilité ? Répondre la même question avec $g(x) = de^{-x^2+4x}$.

Exercice 9.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$. Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in]\,0, \alpha\,[\,, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash]\,0, \alpha\,[\,. \end{cases}$$

1. Que vaut α ?
2. Représenter f et la fonction de répartition de X.
3. Que vaut $\mathbb{P}(\{X > 1\})$?

Exercice 9.3 Soit X de loi uniforme sur $[-2, 1]$. Quelle est la loi de $|X|$?

Exercice 9.4 Soit X une variable aléatoire de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0,1[\,, \\ 2-x, & \text{si } x \in [1,2[\,, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash[0,2[\,. \end{cases}$$

1. Représenter f.
2. Calculer $\mathbb{P}(\{X > 1\})$.
3. Soit $0 < b < 1$. Calculer $\mathbb{P}(\{1 - b < X \leqslant 1 + b\})$.
4. Montrer que les événements $\{X > 1\}$ et $\{1 - b < X \leqslant 1 + b\}$ sont indépendants.

Exercice 9.5 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y\}$ et dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_{X,Y}(x, y) = 1 - e^{-x} - xe^{-y},$$

si $(x, y) \in D$.

1. Déterminer F_X et F_Y.
2. (X, Y) admet-il une densité sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer les lois marginales de (X, Y).
4. Calculer $\mathbb{P}(\{X \leqslant 1\}|\{Y > 2\})$.
5. Calculer $\mathbb{P}(\{Y \leqslant 2X\})$.

Exercice 9.6 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles à valeurs dans l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$ admettant une densité donnée par

$$f(x, y) = \frac{\mathbb{1}_D(x, y)}{y}.$$

1. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit $U = X/Y$ et $V = Y$. Déterminer la fonction de répartition de (U, V).
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 9.7 *(Loi de Bendford)* Soit $E = \{1, \ldots, 9\}$. Pour $k \in E$, soit $p_k = \log_{10}(1 + 1/k)$.

1. Montrer que $p_1, \ldots, p_9$ définissent une probabilité sur E.
2. Dessiner son histogramme et sa fonction de répartition.
3. Relever dans le journal 1000 nombres correspondant aux chiffres de la bourse et calculer la fréquence du premier chiffre de ces nombres. Comparer avec les probabilités précédentes.
4. Soit (X, Y) la variable aléatoire à valeurs dans $E \times (E \cup \{0\})$ définie par

   $$\mathbb{P}\Big(\big\{(X, Y) = (x, y)\big\}\Big) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{10x + y}\right),$$

   pour tout $(x, y) \in E \times (E \cup \{0\})$. Donner la loi de X.

Exercice 9.8 *(Loi de Benford (suite))* Soit x un nombre réel positif.

1. Montrer qu'il peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = y10^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $1 \leqslant y < 10$. On parle d'écriture scientifique.
2. Montrer que n est donné par la partie entière de $\log_{10} x$ et donc que $\log_{10} y$ est la partie fractionnaire de $\log_{10} x$, *i.e.* le nombre moins sa partie entière.
3. On suppose que X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$. Soit $X = Y10^N$ son écriture scientifique. On dira que la loi de X est *invariante par changement d'échelle* si pour tout $\lambda > 0$, si $\lambda X = Y'10^{N'}$ est l'écriture scientifique de λX, alors Y et Y' ont la même loi. On peut montrer que ceci est réalisé si et seulement si $\log_{10} Y$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On va montrer le sens facile.
   (i) Soit $\lambda = \lambda_0 10^{n_0}$ l'écriture scientifique associée. Exprimer $\log_{10} Y'$ en fonction de λ_0 et de $\log_{10} Y$.
   (ii) Soit $a \in [0, 1]$ et soit Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la partie fractionnaire de $U = a + Z$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   Indication : calculer la fonction de répartition de la partie fractionnaire de U.
   (iii) On suppose que $\log_{10}(Y)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $\lambda > 0$ et $\lambda X = Y'10^{N'}$ comme ci-dessous. Montrer que $\log_{10}(Y')$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (iv) Montrer que si $\log_{10}(Y)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$, alors la partie entière de Y suit la loi de Benford.

Exercice 9.9 *(Loi sans mémoire)* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$ telle que

$$\mathbb{P}\big(\{X > x + y\} | \{X > x\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X > y\}\big),$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Montrer que
$$\mathbb{P}\big(\{X > x + y\}\big) = \mathbb{P}\big(\{X > x\}\big)\mathbb{P}\big(\{X > y\}\big),$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \mathbb{P}(\{X > x\})$. Notons $a = \varphi(1)$. On a donc $a \in [0, 1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) = a^n$ et que pour tout $q \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$, $\varphi(q) = a^q$. Peut-on avoir $a = 0$? Et $a = 1$?
3. Montrer que φ est une fonction décroissante. En utilisant le fait que tout réel est limite d'une suite décroissante (respectivement, croissante) de rationnels, déterminer $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
4. Déterminer la loi de X.

Exercice 9.10 Soit F une fonction strictement croissante et continue d'un intervalle ouvert I dans $]0, 1[$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$. Déterminer la loi de $X = F^{-1}(U)$. Utiliser ceci pour construire à partir d'une loi uniforme une variable aléatoire Y de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 9.11 *(Une formule pour l'espérance)* Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance. On suppose que la loi de X admet une densité f et on note F sa fonction de répartition. Montrer que si $x > 0$,

$$x\big(1 - F(x)\big) \leqslant \int_x^{+\infty} tf(t)dt.$$

En déduire que $x(1-F(x))$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \big(1-F(t)\big)dt.$$

Exercice 9.12 Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$. Donner la loi de X^2, son espérance et sa variance.

Exercice 9.13 *(Paradoxe de Bertrand : Choisir une corde au hasard)*

1. Choisir un point P au hasard à l'intérieur d'un cercle de rayon a. Soit X la longueur de la corde dont P est le milieu. Montrer que $\mathbb{P}(\{X > \sqrt{3}a\}) = \dfrac{1}{4}$.
2. On choisit deux points A et B au hasard et indépendamment l'un de l'autre sur un cercle de rayon a. Soit X la longueur de la corde AB. Montrer que $\mathbb{P}(\{X > \sqrt{3}a\}) = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 9.14 *Vont-ils se rencontrer ?* Paul et Virgine arrivent dans le parc indépendamment l'un de l'autre et de manière uniforme entre 12h et 13h. Chacun attend un quart d'heure et s'en va si l'autre n'est pas là. On pose la question : Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ? En notant X l'heure d'arrivée de Virginie et Y l'heure d'arrivée de Paul, traduire mathématiquement sur X et Y les hypothèses. Répondre ensuite à la question.

Exercice 9.15 *(Quelques calculs avec la loi uniforme)* Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit les variables aléatoires $U = \inf(X,Y)$ et $V = \sup(X,Y)$.

1. Déterminer la fonction de répartition $F_{U,V}$ du couple (U,V). En déduire la densité $f_{U,V} = 2\mathbb{1}_T$, où $T = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1\}$. Est-ce que U et V sont indépendantes ?
2. Quelles sont les densités f_U et f_V des lois de U et V ? En déduire $E[U]$ et $E[V]$.
3. Quelle est la densité de $S = U + V$? $E[S]$? Quelle est la loi de $X + Y$?
4. Calculer $\mathrm{Var}[U]$, $\mathrm{Var}[V]$, $\mathrm{Cov}(U,V)$ et $\rho_{U,V}$.

Exercice 9.16 *(Problème de l'aiguille de Buffon)* Une aiguille de longueur ℓ est jetée “au hasard" sur un plan qui est strié par des parallèles (*i.e.* les rainures du parquet) situées à distance $d > \ell$ les unes des autres. Soit X la variable aléatoire donnée par la distance du milieu de l'aiguille à la parallèle la plus proche et Θ celle donnée par l'angle orienté entre une strie et l'aiguille. On traduit l'hypothèse “jeter au hasard” par le fait que le couple (X,Θ) suit la loi uniforme sur $[0,d/2]\times[0,\pi]$. Quelle probabilité a-t-on que l'aiguille coupe une parallèle ?

Exercice 9.17 *(Rapport de deux exponentielles)* Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant les lois exponentielles de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, respectivement. Déterminer la fonction de répartition et la densité de la variable aléatoire réelle $U = Y/X$.

Exercice 9.18 Soit f la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle $Z > 0$. On pose

$$g(x,y) = \frac{1}{x+y} f(x+y)\mathbb{1}_{\{x>0,y>0\}}.$$

1. Montrer que g est une densité d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles (strictement) positives.
2. Exprimer $E[X]$, $E[Y]$, $\mathrm{Var}[X]$, $\mathrm{Var}[Y]$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$ à l'aide de $E[Z]$ et de $E[Z^2]$.

Exercice 9.19 *(Discrétisation)* Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que la loi de X admet une densité f sur $\mathbb{R}$ et on note F sa fonction de répartition. Soit $\delta > 0$. On définit la variable aléatoire $X_\delta : \Omega \to \mathbb{R}$ par $X_\delta(\omega) = n\delta$, si $n \in \mathbb{Z}$ et $\omega \in \Omega$ satisfont que $(n-1)\delta < X(\omega) \leqslant n\delta$.

1. Déterminer la loi de X_δ. Donner la fonction de répartition F_δ de X_δ et montrer que F_δ converge simplement vers F quand δ tend vers 0.
2. On suppose que X admet une espérance. Montrer que X_δ admet une espérance m_δ et que m_δ tend vers $E[X]$ quand δ tend vers 0.

Exercice 9.20 *(Régression linéaire)* Soit X et Y deux variables aléatoires réelles de variances non nulles.

On pose
$$\varrho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \ \bar{X} = X - E[X] \text{ et } \bar{Y} = Y - E[Y],$$
où $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ et $\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{Var}[Y]}$.

1. Montrer que $|\mathrm{Cov}(X, Y)| = |E[\bar{X}\ \bar{Y}]| \leqslant \sigma_X \sigma_Y$. En déduire que $-1 \leqslant \varrho_{X,Y} \leqslant 1$.
2. Montrer que $|\varrho_{X,Y}| = 1$ si et seulement s'il existe a non nul et b tels que $\mathbb{P}(\{Y = aX + b\}) = 1$.
3. Préciser la valeur de $\varrho_{X,Y}$ si X et Y sont indépendantes.
4. On cherche la meilleure approximation de Y comme fonction affine de X au sens des moindres carrés, c'est-à-dire que l'on cherche les valeurs de a et b qui minimisent $E[(aX + b - Y)^2]$. Notons $\Phi(a, b) = E[(aX + b - Y)^2]$. Montrer que $\Phi(a, b) = E[(\bar{Y} - a\bar{X})^2] + (E[Y] - (aE[X] + b))^2$.
   En déduire que le couple (a_0, b_0) qui minimise Φ vaut
   $$a_0 = \varrho_{X,Y}\sigma_Y/\sigma_X \text{ et } b_0 = E[Y] - a_0 E[X].$$
   On appelle la droite d'équation $y = a_0 x + b_0$ la *droite de régression linéaire* de Y en X.
5. On suppose que (X, Y) suit la loi uniforme sur un ensemble de cardinal n, *i.e.* il existe n points (x_i, y_i) dans le plan tels que $\mathbb{P}(\{X = x_i, Y = y_i\}) = 1/n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Déterminer la droite de régression linéaire de Y en X dans ce cas.

Exercice 9.21 *(Une loi normale dans $\mathbb{R}^2$)* Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs réelles possédant une densité sur $\mathbb{R}^2$ donnée par
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-\frac{x^2+y^2-2\alpha xy}{2(1-\alpha^2)}}.$$
On suppose que $-1 < \alpha < 1$.

1. Donner les lois de X et de Y. Calculer leur espérance et leur variance.
2. Calculer la covariance de (X, Y).
3. Soit $Z_1 = X + Y$ et $Z_2 = X - Y$. Donner l'espérance et la variance de Z_1 et Z_2. Donner leur covariance.
4. Calculer la loi du couple (Z_1, Z_2). Montrer que Z_1 et Z_2 sont indépendantes et donner leurs lois respectives.